KERTAUS

KERTAUSTEHTÄVIÄ

K1. **a)** 150 cm = 15 dm = 1,5 m

b) 0,8 km = 8 hm = 80 dam = 800 m

c) 12 m = 120 dm = 1200 cm

d) 1230 cm = 123 dm = 12,3 m = 1,23 dam = 0,123 hm = 0,0123 km

e) 25 hm = 250 dam = 2 500 m

f) 7 600 mm = 760 cm = 76 dm

g) 3 m = 0,3 dam = 0,03 hm = 0,003 km

h) 0,45 km = 4,5 hm = 45 dam = 450 m = 4500 dm

K2. **a)** 3 m^2 = 300 dm^2

b) 94 cm^2 = 0,94 dm^2

c) 2,3 m^2 = 230 dm^2 = 23 000 cm^2 = 2 300 000 mm^2

d) 379 mm^2 = 3,79 cm^2

e) 2 ha = 200 a = 20 000 m^2

f) 2,1 a = 210 m^2 = 21 000 dm^2

g) 0,01 km^2 = 1 hm^2 = 100 dam^2 = 10 000 m^2

h) 5000 m^2 = 50 a = 0,5 ha

K3. **a)** 8,5 dm^3 = 8500 cm^3

b) 980 mm^3 = 0,98 cm^3

c) 0,5 m^3 = 500 dm^3

d) 23 800 cm^3 = 23,8 dm^3 = 0,0238 m^3

e) 200 mm^3 = 0,2 cm^3 = 0,0002 dm^3

f) 30 000 m^3 = 30 dam^3 = 0,03 hm^3 = 0,000 03 km^3

g) 0,001 km^3 = 1 hm^3 = 1 000 dam^3 = 1 000 000 m^3
= 1000 000 000 000 cm^3

h) 0,0234 m^3 = 23,4 dm^3 = 23 400 cm^3 = 23 400 000 mm^3

K4. **a)** 35 dl = 3,5 l

b) 6,0 l = 60 dl = 600 cl = 6000 ml

c) 20 dl = 2 000 cl = 2000 ml

d) 33 cl = 3,3 dl = 0,33 l

e) 4,5 m^3 = 4500 dm^3 = 4500 l (1 dm^3 = 1 l (litra))

f) 1,6 dl = 0,16 l = 0,16 dm^3

g) 64 cm^3 = 0,064 dm^3 = 0,064 l = 0,64 dl
TAI 64 cm^3 = 64 ml = 0,64 dl (1 cm^3 = 1 ml)

h) 56 000 ml = 5 600 cl = 560 dl = 56 l = 56 dm^3 = 0,056 m^3
TAI 56 000 ml = 56 000 cm^3 = 56 dm^3 = 0,056 m^3

K5. **a)** 2,8 kg = 28 dg = 280 cg = 2800 g

b) 2,3 hm = 23 dam = 230 m = 2 300 dm = 23 000 cm

c) 70 ml = 7 cl = 0,7 dl

d) 28 dl = 2,8 l = 2,8 dm^3 = 0,0028 m^3

e) 0,428 m^3 = 428 dm^3 = 428 000 cm^3

f) 21 cm^3 = 0,021 dm^3 = 0,021 l = 21 ml (1 dm^3 = 1 l (litra))
TAI suoraan 21 cm^3 = 21 ml, kun tiedetään, että 1 ml = 1 cm^3.

g) 14 mg = 1,4 cg = 0,14 dg = 0,014 g

h) 0,6 ha = 60 a

K6. Nimettäessä kulma kolmen kirjaimen avulla kirjoitetaan ensin oikealla kyljellä oleva piste, sitten kärkipiste ja lopuksi vasemmalla kyljellä oleva piste. Siten $\alpha = \sphericalangle$ RPQ ja $\beta = \sphericalangle$ QPR

Täysi kulma on 360°, joten β = 360° – 59° = 301°.

Vastaus: $\alpha = \sphericalangle$ RPQ ja $\beta = \sphericalangle$ QPR = 301°

K7. **a)** Ristikulmat ovat yhtä suuret, joten α = 68°.

Vastaus: α = 68°

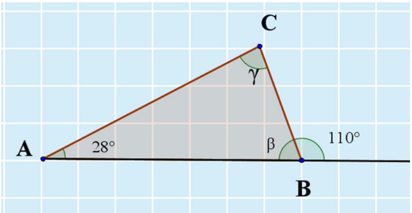
b) Vieruskulmien summa on 180°, joten α = 180° – 98° = 82°.

Vastaus: α = 82°

c) Kulman α vieruskulma on samankohtainen 127°:n kulman kanssa. Koska suorat s ja t ovat yhdensuuntaiset, ovat samankohtaiset kulmat yhtäsuuret. Kulman α vieruskulma on siis 127°. Siten kulma α = 180° – 127° = 53°.

Vastaus: α = 53°

K8. Piirretään mallikuva ja merkitään kysyttyjä kulmia
$\beta = \sphericalangle CBA$ ja $\gamma = \sphericalangle ACB$.



Kulma β on 110° kulman vieruskulma, joten $\beta = 180° - 110° = 70°$.

Kolmion kulmien summa on 180°, joten saadaan yhtälö
$28° + 70° + \gamma = 180°$, josta
$\gamma = 180° - 28° - 70° = 82°$

Vastaus: $\sphericalangle CBA = 70°$ ja $\sphericalangle ACB = 82°$

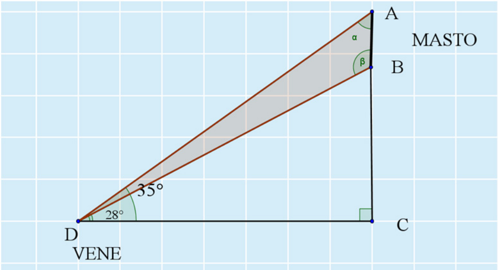
K9. Merkitään vieruskulmia $2x$ ja $3x$. Vieruskulmien summa on 180°, joten muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä tuntematon x.

$$2x + 3x = 180$$
$$5x = 180 \quad \| : 5$$
$$x = 36$$

Kulmat ovat $2x = 2 \cdot 36° = 72°$ ja $3x = 3 \cdot 36° = 108°$

Vastaus: 72° ja 108°

K10. Piirretään mallikuva.



Tehtävässä kysytään kuvan väritetyn kolmion *ADB* kulmien suuruuksia.

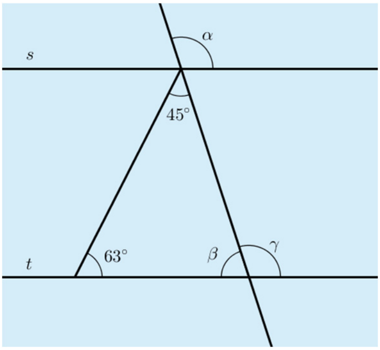
Maston yläosaan muodostuva kulma α saadaan kolmion *DCA* kulmien summan avulla: $\alpha = 180° - 90° - 35° = 55°$.

Kolmion kärkeen *D* muodostuva kulma on $35° - 28° = 7°$.

Kulman β suuruus saadaan värjätystä kolmiosta
$\beta = 180° - 55° - 7° = 118°$.

Vastaus: 7°, 118° ja 55°

K11. Merkitään kuvaan kulman α samankohtainen kulma γ ja samankohtaisen kulman vieruskulma β.



Kolmion kulmien summa on 180°, joten
kulma $\beta = 180° - 63° - 45° = 72°$.

Vieruskulmien summa on 180°,
joten $\gamma = 180° - \beta = 180° - 72° = 108°$.

Koska suorat s ja t ovat yhdensuuntaiset, ovat samankohtaiset kulmat α ja γ yhtä suuret. Siten $\alpha = 108°$.

Vastaus: $\alpha = 108°$

K12. Täydennetään taulukkoon sopivat kirjaimet laskettaville mitoille.

	leveys (cm)	korkeus (cm)	kokonaispinta-ala (cm^2)	tilavuus (cm^3)
pieni rasia	35	20	A	42
iso rasia	x	30	180	V

Ratkaistaan tuntemattomat luvut verrantojen avulla.
Koska kappaleet ovat yhdenmuotoisia, on niiden vastinosien pituuksien suhde vakio.

$$\frac{35}{x} = \frac{20}{30}$$
$$20x = 35 \cdot 30$$
$$20x = 1050 \quad \|: 20$$
$$x = 52{,}5$$
$$x \approx 53$$

Mittakaava on vastinsivujen pituuksien suhde eli $\frac{20^{(10}}{30} = \frac{2}{3}$.

Käytetään yhtälöissä supistettua muotoa $\frac{2}{3}$.

Yhdenmuotoisten kappaleiden pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö.

$$\frac{A}{180} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$$
$$\frac{A}{180} = \frac{2^2}{3^2}$$
$$\frac{A}{180} = \frac{4}{9}$$
$$9A = 4 \cdot 180$$
$$9A = 720 \quad \|: 9$$
$$A = 80$$

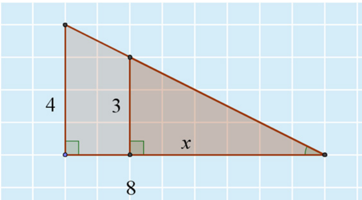
Yhdenmuotoisten kappaleiden tilavuuksien suhde on mittakaavan kuutio.

$$\frac{42}{V} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$$
$$\frac{42}{V} = \frac{2^3}{3^3}$$
$$\frac{42}{V} = \frac{8}{27}$$
$$8V = 42 \cdot 27$$
$$8V = 1134 \quad \|:8$$
$$V = 141,75$$
$$V \approx 140$$

Vastaus:

	leveys (cm)	korkeus (cm)	kokonaispinta-ala (cm^2)	tilavuus (cm^3)
pieni rasia	35	20	80	42
iso rasia	53	30	180	140

K13. **a)** Kuvan pienempi kolmio ja isompi kolmio ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen perusteella, koska molemmissa on suora kulma ja yksi sama kulma.

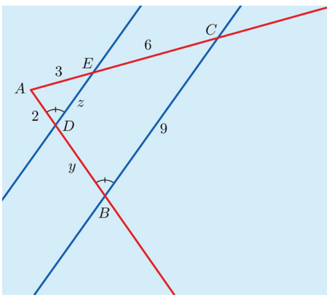


Yhdenmuotoisten kuvioiden vastinjanojen suhde on vakio.
Muodostetaan yhdenmuotoisista kolmioista verranto ja ratkaistaan se.

$$\frac{x}{8} = \frac{3}{4}$$
$$4x = 3 \cdot 8$$
$$4x = 24 \quad \|:4$$
$$x = 6$$

Vastaus: $x = 6$

b) Merkitään kuvaan pisteitä yhdenmuotoisten kolmioiden löytämiseksi.



Kulma A on yhteinen kolmioille ABC ja ADE. Lisäksi kulmat CBA ja EDA ovat yhtä suuret. Siten kolmiot ABC ja ADE ovat kk-lauseen mukaan yhdenmuotoiset.
Yhdenmuotoisten kuvioiden vastinjanojen suhde on vakio.

Muodostetaan yhdenmuotoisista kolmioista verranto ja ratkaistaan se.

$$\frac{2}{2+y}=\frac{3}{3+6}$$

$$\frac{2}{2+y}=\frac{3}{9}$$

$$\begin{aligned}3(2+y)&=2\cdot 9\\ 6+3y&=18\\ 3y&=18-6\\ 3y&=12 \quad \|:3\\ y&=4\end{aligned}$$

Vastaavalla tavalla saadaan verranto, jossa sivu z esiintyy.

$$\frac{z}{9}=\frac{3}{3+6}$$

$$\frac{z}{9}=\frac{3}{9}$$

$$\begin{aligned}9z&=3\cdot 9\\ 9z&=27 \quad \|:9\\ z&=3\end{aligned}$$

Vastaus: $y = 4$, $z = 3$

K14. **a)** Merkitään järven pituutta kartalla kirjaimella x.

Yhdenmuotoisten kuvioiden pituuksien suhde on mittakaava.
Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä pituus x.

$$\begin{aligned}\frac{x}{45}&=\frac{1}{500000}\\ 500000x&=45 \quad \|:500000\\ x&=\frac{45}{500000}\\ x&=0{,}00009\end{aligned}$$

Pituus kartalla on 0,00009 km = 9 cm

Vastaus: 9 cm

b) Merkitään järven pinta-alaa luonnossa kirjaimella A.
Yhdenmuotoisten kuvioiden pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö.
Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä pinta-ala A.

$$\frac{7,6}{A}=\left(\frac{1}{500000}\right)^2$$

$$\frac{7,6}{A}=\frac{1^2}{500000^2}$$

$$A=7,6\cdot 500000^2$$

$$A=1\,900\,000\,000\,000$$

A = 1900 000 000 000 cm^2 = 19 000 000 000 dm^2 = 190 000 000 m^2
= 1 900 000 a = 19 000 ha = 190 km^2.

Järven pinta-ala luonnossa on 190 km^2.

Vastaus: 190 km^2

K15. Merkitään täyden juomalasin korkeutta kirjaimella h ja tilavuutta kirjaimella V. Puoliväliin asti täytetyn lasin korkeus on $0{,}5h$ ja merkitään sen tilavuutta kirjaimella x. Taulukoidaan tehtävän tiedot.

	Tilavuus	Korkeus
Täysi lasi	V	h
Puoliväliin täytetty lasi	x	$0{,}5h$

Täysi juomalasi ja puoliväliin täytetty juomalasi ovat yhdenmuotoisia ja niiden korkeudet ovat vastinjanoja, joten niiden tilavuuksien suhde on

$$\frac{V}{x}=\left(\frac{h}{0{,}5h}\right)^3.$$

Ratkaistaan yhtälöstä puoliväliin täytetyn lasin tilavuus x.

$$\frac{V}{x}=\left(\frac{h}{0{,}5h}\right)^3$$

$$\frac{V}{x}=\frac{\cancel{h^3}}{0{,}5^3\,\cancel{h^3}}$$

$$\frac{V}{x}=\frac{1}{0{,}5^3}$$

$$\frac{V}{x}=\frac{1}{0{,}125}$$

$$x=0{,}125V=\frac{1}{8}V$$

Puoliväliin täytetyn lasin tilavuus on $\frac{1}{8}=0{,}125$ = 12,5 % täyden lasin tilavuudesta.

Vastaus: $\frac{1}{8}=12{,}5\%$

K16. Taulukoidaan kattiloiden korkeudet ja tilavuudet.

Korkeus (cm)	Tilavuus (l)
10	2
h	16

Yhdenmuotoisten kappaleiden tilavuuksien suhde on mittakaavan kuutio. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä korkeus h.

$$\frac{16}{2}=\left(\frac{h}{10}\right)^3$$
$$\frac{16}{2}=\frac{h^3}{1000}$$
$$2h^3=16\cdot 1000$$
$$2h^3=16000 \quad \|:2$$
$$h^3=8000$$
$$\sqrt[3]{h^3}=\sqrt[3]{8000}$$
$$h=20$$

Suuremman kattilan korkeus on 20 cm.

Vastaus: 20 cm.

K17. **a)** Kolmion 13°:n kulman vastaisen kateetin pituus on x ja hypotenuusan pituus on 5,85 km. Ratkaistaan kateetin x pituus sinin avulla.

$$\sin 13^\circ=\frac{x}{5{,}85} \quad \|\cdot 5{,}85$$
$$x=5{,}85\cdot\sin 13^\circ$$
$$x=1{,}315\ldots$$
$$x\approx 1{,}3$$

Vastaus: $x \approx 1{,}3$ km

b) Kolmion 64°:n kulman viereisen kateetin pituus on 2,2 cm ja hypotenuusan pituus on x. Ratkaistaan hypotenuusan x pituus kosinin avulla.

$$
\begin{aligned}
\cos 64^\circ &= \frac{2,2}{x} \quad \| \cdot x \\
x \cdot \cos 64^\circ &= 2,2 \quad \| : \cos 64^\circ \\
x &= \frac{2,2}{\cos 64^\circ} \\
x &= 5,018\ldots \\
x &\approx 5,0
\end{aligned}
$$

Vastaus: $x \approx 5,0$ cm

K18. Teräväkulmaisessa kolmiossa ovat kaikki kulmat alle 90°, joten kolmioon A sopii väite V.

Tylppäkulmaisessa kolmiossa on yksi kulma yli 90°, joten kolmioon B sopii väite III.

Suorakulmaisessa kolmiossa on yksi kulma 90°, joten kolmioon C sopii väite I.

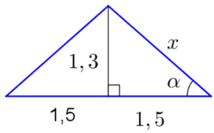
Tasasivuisessa kolmiossa on kaikki kulmat yhtä suuria. Kolmion kulmien summa on 180°, joten kaikkien kulmien on oltava 60°. Täten kolmioon D sopii väite II.

Tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat yhtä suuret. Jos myös huippukulma olisi yhtä suuri, olisi kolmio tällöin tasasivuinen. Kolmioon E sopii väite IV.

Vastaus: A:V, B:III, C:I, D:II ja E:IV

K19. Tasakylkisen kolmion korkeusjana jakaa kolmion kahteen yhtenevään suorakulmaiseen kolmioon. Kylki x on suorakulmaisen kolmion hypotenuusa ja sen pituus saadaan Pythagoraan lauseella.

$$x^2 = 1{,}3^2 + 1{,}5^2$$
$$x^2 = 1{,}69 + 2{,}25$$
$$x^2 = 3{,}94$$
$$x = (\pm)\sqrt{3{,}94}$$
$$x = 1{,}984\ldots$$
$$x \approx 2{,}0$$



Kantakulma α saadaan esimerkiksi tangentin avulla:

$$\tan\alpha = \frac{1{,}3}{1{,}5}$$
$$\alpha = 40{,}914\ldots^\circ$$
$$\alpha \approx 41^\circ$$

Vastaus: $x \approx 2{,}0$ ja $\alpha \approx 41^\circ$

K20. Tutkitaan toteuttavatko kolmion sivujen pituudet ehdon $a^2 + b^2 = c^2$. Kahden lyhimmän sivun neliöiden summa on $60^2 + 91^2 = 11\,881$. Pisimmän sivun neliö on $109^2 = 11\,881$.

Koska ehto $a^2 + b^2 = c^2$ toteutuu, kolmio on suorakulmainen.

Vastaus: on

K21. Kolmion kulmien summa on 180°.

Jos kantakulmien summa on 56°, niin huippukulma on
180° – 56° = 124°.
Kantakulmat ovat yhtä suuret, joten ne ovat molemmat tällöin 56°: 2 = 28°.

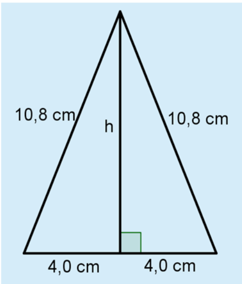
Jos kantakulman ja huippukulman summa on 56°, niin toinen kantakulma olisi 180° – 56° = 124°. Tällöin kantakulmat eivät ole yhtä suuret, koska toinen kantakulma olisi 124° ja toinen olisi pienempi kuin 56°. Kolmio ei tällöin ole tasakylkinen. Tämä vaihtoehto on siis mahdoton.

Vastaus: 28°, 28° ja 124°

K22. **a)** $A = \dfrac{5,4\text{ cm} \cdot 1,5\text{ cm}}{2} = 4,05\text{ cm}^2 \approx 4,1\text{ cm}^2$

Vastaus: 4,1 cm^2

b) Kolmio on tasakylkinen, joten korkeusjana h jakaa kolmion kahteen yhtenevään suorakulmaiseen kolmioon.



Ratkaistaan korkeus h Pythagoraan lauseen avulla.

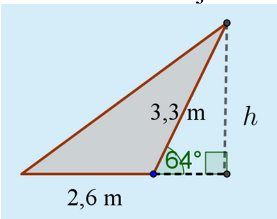
$$\begin{aligned} h^2 + 4^2 &= 10,8^2 \\ h^2 &= 10,8^2 - 4^2 \\ h^2 &= 116,64 - 16 \\ h^2 &= 100,64 \\ h &= (\pm)\sqrt{100,64} \\ h &= 10,031\ldots \end{aligned}$$

Lasketaan kolmion pinta-ala, kun kanta on 8,0 cm ja korkeus on h cm.

$$A = \frac{8,0\text{ cm} \cdot 10,031\ldots\text{ cm}}{2} = 40,127\ldots\text{ cm}^2 \approx 40\text{ cm}^2$$

Vastaus: 40 cm^2

c) Kolmion korkeusjana *h* on kolmion ulkopuolella.



Kolmion ulkopuolelle muodostuu suorakulmainen kolmio, josta tunnetaan hypotenuusa. Korkeus *h* saadaan sinin avulla.

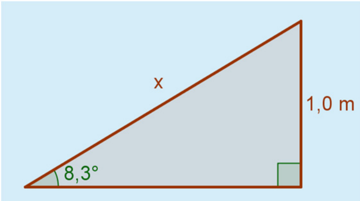
$$\sin 64° = \frac{h}{3,3} \quad \| \cdot 3,3$$
$$h = 3,3 \cdot \sin 64°$$
$$h = 2,966\ldots$$

Lasketaan kolmion pinta-ala, kun kanta on 2,6 m ja korkeus on $h = 2,966\ldots$ m.

$$A = \frac{2,6\text{ m} \cdot 2,996...\text{ m}}{2} = 3,855...\text{ m}^2 \approx 3,9\text{ m}^2$$

Vastaus: 3,9 m^2

K23. Piirretään mallikuva. Merkitään luiskan pituutta kirjaimella *x*.



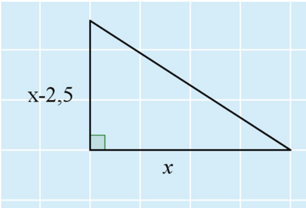
Kolmiosta tunnetaan kulman vastainen sivu, ja hypotenuusa on tuntematon, joten muodostetaan yhtälö sini avulla ja ratkaistaan siitä *x*.

$$
\begin{aligned}
\sin 8{,}3° &= \frac{1{,}0}{x} \quad \| \cdot x \\
x \cdot \sin 8{,}3° &= 1 \quad \| : \sin 8{,}3° \\
x &= \frac{1}{\sin 8{,}3°} \\
x &= 6{,}927\ldots
\end{aligned}
$$

Jotta luiska ei olisi liian jyrkkä, on sen pituus pyöristettävä ylöspäin.

Vastaus: 7,0 m

K24. Piirretään mallikuva. Merkitään pidemmän kateetin pituutta kirjaimella x. Toinen on 2,5 cm lyhyempi, joten sen pituus on $x - 2{,}5$.



Kolmion pinta-ala lasketaan kannan x ja korkeuden $x - 2{,}5$ avulla
$A = \dfrac{x\cdot(x-2{,}5)}{2}$.

Tiedetään, että pinta-ala on 22 cm^2, joten
muodostetaan kolmion pinta-alasta yhtälö ja ratkaistaan siitä pituus x.
(Yhtälön voi ratkaista myös symbolisen laskennan yhtälönratkaisutoiminnolla.)

$$\frac{x\cdot(x-2{,}5)}{2} = 22 \quad \|\cdot 2$$
$$x\cdot(x-2{,}5) = 44$$
$$x^2 - 2{,}5x = 44$$
$$x^2 - 2{,}5x - 44 = 0$$
$$x = \frac{-(-2{,}5)\pm\sqrt{(-2{,}5)^2 - 4\cdot 1\cdot(-44)}}{2\cdot 1}$$
$$= \frac{2{,}5\pm\sqrt{6{,}25+176}}{2}$$
$$= \frac{2{,}5\pm\sqrt{182{,}25}}{2}$$
$$= \frac{2{,}5\pm 13{,}5}{2}$$
$$x = \frac{2{,}5+13{,}5}{2} = 8{,}0 \quad \text{tai} \quad x = \frac{2{,}5-13{,}5}{2} = -5{,}5$$

Negatiivinen kateetin pituus ei kelpaa, joten pidemmän kateetin pituus on $x = 8{,}0$ cm.

Lyhempi kateetti on tällöin $x - 2{,}5$ cm = 8,0 cm – 2,5 cm = 5,5 cm.

Kolmion kolmas sivu on hypotenuusa ja sen pituus y saadaan Pythagoraan lauseella.

$$y^2 = 8^2 + 5{,}5^2$$
$$y^2 = 94{,}25$$
$$y = (\pm)\sqrt{94{,}25}$$
$$y = 9{,}708\ldots$$

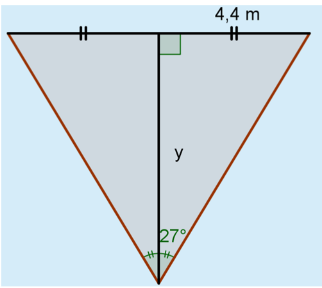
Kolmion sivujen pituudet ovat 5,5 cm, 8,0 cm ja 9,7 cm.

Vastaus: 5,5 cm, 8,0 cm ja 9,7 cm

K25. Piirretään kuvakulmista mallikuvat molemmissa suunnissa. Tasakylkisen kolmion korkeusjana jakaa kolmion kahteen yhtenevään suorakulmaiseen kolmioon. Kuvakulman puolikas on suorakulmaisen kolmion kulma.

Leveyssuunta:

$$\frac{8{,}8\text{m}}{2} = 4{,}4\text{m} \text{ ja } \frac{54°}{2} = 27°$$



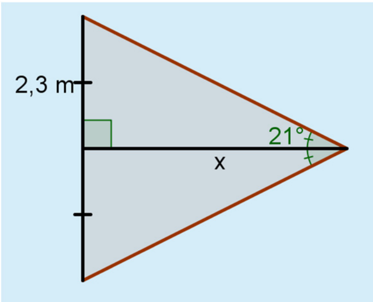
Jotta koko taulu mahtuisi kuvaan leveyssuunnassa, on etäisyyden taulusta oltava vähintään y.

Ratkaistaan y tangentin avulla.

$$\tan 27° = \frac{4,4}{y} \quad \| \cdot y$$
$$y \cdot \tan 27° = 4,4 \quad \| : \tan 27°$$
$$y = \frac{4,4}{\tan 27°}$$
$$y = 8,635\ldots$$

Korkeussuunta:

$$\frac{4,6\text{m}}{2} = 2,3\text{m} \text{ ja } \frac{42°}{2} = 21°$$



Jotta koko taulu mahtuisi kuvaan korkeussuunnassa, on etäisyyden taulusta oltava vähintään x.

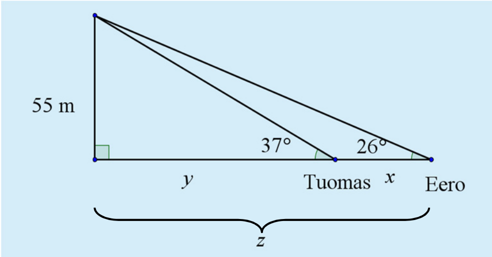
Ratkaistaan x tangentin avulla.

$$\tan 21° = \frac{2,3}{x} \quad \| \cdot x$$
$$x \cdot \tan 21° = 2,3 \quad \| : \tan 21°$$
$$x = \frac{2,3}{\tan 21°}$$
$$x = 5,991\ldots$$

Leveyssuunnan mahtuminen vaatii pidemmän etäisyyden. Etäisyys on pyöristettävä ylöspäin 8,7 metriin.

Vastaus: vähintään 8,7 m:n etäisyydeltä

K26. Piirretään mallikuva.



Merkitään kysyttyä Tuomaksen ja Eeron etäisyyttä toisistaan kirjaimella x ja Tuomaksen etäisyyttä tornista kirjaimella y.

Tällöin Eeron etäisyys tornista on $x + y$, jota merkitään laskujen helpottamiseksi kirjaimella $z = x + y$.

Ratkaistaan etäisyydet y ja z tangentin avulla.

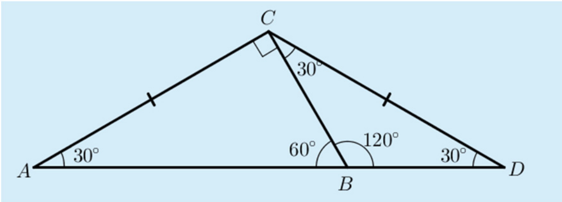
$$
\begin{aligned}
\tan 37° &= \frac{55}{y} \quad \| \cdot y \\
y \cdot \tan 37° &= 55 \quad \| : \tan 37° \\
y &= \frac{55}{\tan 37°} \\
y &= 72{,}987\ldots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tan 26° &= \frac{55}{z} \quad \| \cdot z \\
z \cdot \tan 26° &= 55 \quad \| : \tan 26° \\
z &= \frac{55}{\tan 26°} \\
z &= 112{,}766\ldots
\end{aligned}
$$

Oli merkitty $z = x + y$, joten kysytty etäisyys x on edellä laskettujen etäisyyksien (z ja y) erotus
$x = z - y = 112{,}766... \text{ m} - 72{,}987\ldots \text{ m} = 39{,}779...\text{m} \approx 40 \text{ m}.$

Vastaus: 40 m:n etäisyydellä

K27. Täydennetään kuvaan kulmien suuruuksia.



Kolmio *CAD* on tasakylkinen tehtävässä olevan kuvan merkintöjen perusteella. Tällöin kulmat *A* ja *D* ovat kantakulmina yhtä suuret eli 30°.

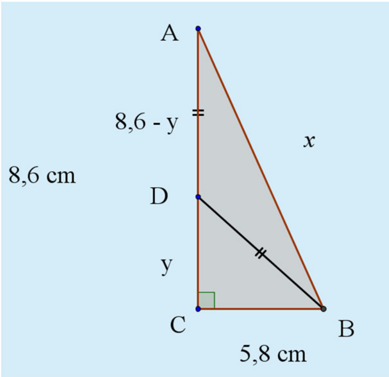
Kolmion kulmien summa on 180°, joten huippukulma *C* on tällöin
180° – 30° – 30° = 120°.
Lisäksi kulma *C* muodostuu kahdesta kulmasta 120° = 90° + 30°.

Täten kolmion *BDC* kulmat *C* ja *D* ovat molemmat 30°. Kolmio BDC on siis tasakylkinen kolmio, jonka huippukulma *B* on 120°.

Molemmat kolmiot ovat tasakylkisiä kolmioita ja niillä on kaikki kolme vastinkulmaa yhtä suuret.

Kolmiot ovat siis kk-lauseen perusteella yhdenmuotoiset.

K28. Piirretään mallikuva. Merkitään hypotenuusaa AB kirjaimella x ja toista kysyttyä janaa CD kirjaimella y. Tällöin janat $AD = DB = 8{,}6 - y$.



Ratkaistaan ison kolmion ACB hypotenuusan pituus AB Pythagoraan lauseella.

$$x^2 = 8{,}6^2 + 5{,}8^2$$
$$x^2 = 73{,}96 + 33{,}64$$
$$x^2 = 107{,}6$$
$$x = (\pm)\sqrt{107{,}6}$$
$$x = 10{,}373\ldots$$

Janan AB pituus on $x = 10{,}373\ldots$ cm $\approx 10{,}4$ cm.

Muodostetaan Pythagoraan lause pienen kolmion DCB sivujen välille, kun kateetit ovat y ja 5,8 ja hypotenuusa on $8{,}6 - y$.

$$(8{,}6 - y)^2 = y^2 + 5{,}8^2$$

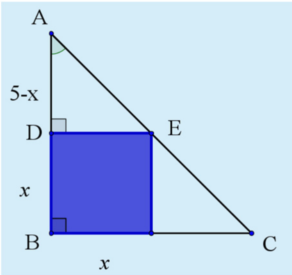
Ratkaistaan yhtälöstä janan *CD* pituus *y*.
(Ratkaisun voi suorittaa myös symbolisen laskennan ohjelman yhtälönratkaisutoiminnolla.)

$$(8,6-y)^2 = y^2 + 5,8^2$$
$$(8,6-y)(8,6-y) = y^2 + 33,64$$
$$73,96 - 8,6y - 8,6y + y^2 = y^2 + 33,64$$
$$73,96 - 17,2y + y^2 = y^2 + 33,64$$
$$73,96 - 17,2y \cancel{+y^2} \cancel{-y^2} - 33,64 = 0$$
$$73,96 - 17,2y - 33,64 = 0$$
$$-17,2y + 40,32 = 0$$
$$-17,2y = -40,32 \quad \|:(-17,2)$$
$$y = 2,344\ldots$$

Janan *CD* pituus on $y = 2,344\ldots$ cm ≈ 2,3 cm.

Vastaus: *AB* ≈ 10,4 cm ja *CD* ≈ 2,3 cm

K29. Lasketaan sinisen neliön pinta-ala.
Merkitään neliön sivun pituutta kirjaimella x.



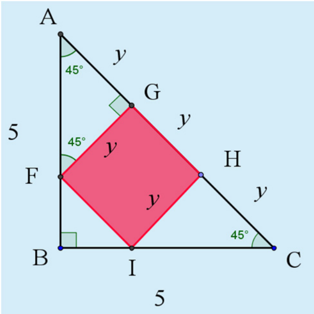
Kuvan suorakulmaiset kolmiot ADE ja ABC ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen perusteella, koska molemmissa kolmioissa on suorakulma ja lisäksi yhteinen kulma A.

Ison kolmion ABC kateetit ovat 5 ja 5 ja pienen kolmion ADE vastaavat kateetit ovat $5 - x$ ja x. Muodostetaan verranto, josta ratkaistaan sivun x pituus.

$$
\begin{aligned}
\frac{5-x}{5} &= \frac{x}{5} \\
5x &= 5 \cdot (5 - x) \\
5x &= 25 - 5x \\
5x + 5x &= 25 \\
10x &= 25 \quad \| :10 \\
x &= 2{,}5
\end{aligned}
$$

Sinisen neliön sivun pituus on $x = 2{,}5$
ja pinta-ala on $A_s = x^2 = 2{,}5^2 = 6{,}25$.

Lasketaan punaisen neliön pinta-ala. Merkitään neliön sivun pituutta kirjaimella y.



Kuvan alkuperäinen suorakulmainen kolmio ABC on tasakylkinen, koska molemmat kateetit ovat 5. Tällöin kantakulmat A ja C ovat yhtä suuret. Koska kantakulmien summan on oltava 90° (kolmion kulmien summa on oltava 180°), niin kantakulmien on oltava 45°.

Neliön yläpuolella olevassa pienessä kolmiossa AGF kulman F on oltava myös 45°, jotta pienenkin kolmion kulmien summa on 180°. Pieni kolmio AGF on täten myös tasakylkinen kolmio, jonka kantakulmat ovat 45°. Tällöin molempien kylkien FG ja AG pituudet ovat y.

Vastaavalla tavalla toinen pieni kolmio CHI on tasakylkinen kolmio, jonka kantakulmat C ja I ovat 45° ja kylkien IH ja CH pituudet ovat y.

Merkitään ison kolmion ABC hypotenuusaa AC kirjaimella z. Se jakaantuu kolmeen y:n suuruiseen janaan eli $z = 3y$.

Ratkaistaan hypotenuusan pituus z Pythagoraan lauseella.

$$
\begin{aligned}
z^2 &= 5^2 + 5^2 \\
z^2 &= 25 + 25 \\
z^2 &= 50 \\
z &= (\pm)\sqrt{50} \\
(z &= 7{,}071\ldots)
\end{aligned}
$$

Edellä saatiin, että hypotenuusa on toisaalta $3y$, joten saadaan

$$3y = \sqrt{50}$$
$$y = \frac{\sqrt{50}}{3}$$

Punaisen neliön sivun pituus on $y = \frac{\sqrt{50}}{3} = 2{,}357\ldots$

ja pinta-ala on $A_p = y^2 = \left(\frac{\sqrt{50}}{3}\right)^2 = 5{,}555\ldots$

Sinisen neliön pinta-ala on $As = 6{,}25$
ja punaisen neliön pinta-ala on $Ap = 5{,}555\ldots$,
joten sinisen neliön pinta-ala on suurempi, kuin punaisen neliön pinta-ala.

(Tai voidaan myös verrata neliöiden sivujen pituuksia:
Sinisen neliön sivun pituus on $x = 2{,}5$
ja punaisen neliön sivun pituus on $y = 2{,}357\ldots$
Koska $2{,}5 > 2{,}357\ldots$, niin sinisen neliön pinta-ala on oltava suurempi, kuin punaisen neliön pinta-ala.)

Vastaus: sinisen neliön

K30. **a)** Muutetaan sivujen pituudet samaan yksikköön: 340 cm = 3,4 m.
Suorakulmion pinta-ala on $A = ah = 4{,}5\text{ m} \cdot 3{,}4\text{ m} = 15{,}3\text{ m}^2 \approx 15\text{ m}^2$.

Vastaus: 15 m^2

b) Suunnikkaan kanta on $a = 7{,}2$ mm ja korkeus on $h = 3{,}1$ mm.
Pinta-ala on $A = ah = 7{,}2\text{ mm} \cdot 3{,}1\text{ mm} = 22{,}32\text{ mm}^2 \approx 22\text{ mm}^2$

Vastaus: 22 mm^2

c) Nelikulmio on puolisuunnikas, joten pinta-ala on

$$A = \frac{a+b}{2}h = \frac{3{,}4+6{,}3}{2}\cdot 2{,}7 = 13{,}095 \approx 13$$

Pinta-ala on noin 13 cm^2.

Vastaus: 13 cm^2

K31. Suorakulmion kaikki kulmat ovat 90°, joten kuvioon A sopii ominaisuus II.

Nelikulmion kaikki sivut voivat olla erisuuntaisia, joten kuvioon B sopii ominaisuus I. Ominaisuudet I, III ja IV koskevat vain osaa nelikulmioista, joten niitä ei voi yhdistää kuvioon B.

Puolisuunnikkaassa on täsmälleen kaksi yhdensuuntaista sivua, joten siinä on täsmälleen kaksi erisuuntaista sivua (loput sivut). Kuvioon C sopii siis ominaisuus IV.

Vinoneliön lävistäjät leikkaavat toisensa kohtisuorasti, joten kuvioon D sopii ominaisuus III.

Vastaus: A:II, B:I, C:IV ja D:III

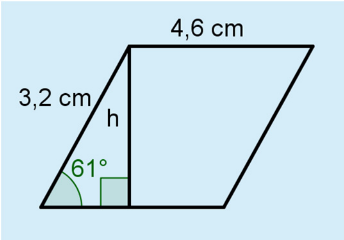
K32. **a)** Kuvan nelikulmio on suorakulmio. Muodostetaan Pythagoraan lauseen avulla yhtälö ja ratkaistaan siitä suorakulmion korkeus h.

$$
\begin{aligned}
h^2 + 20^2 &= 25^2 \\
h^2 &= 25^2 - 20^2 \\
h^2 &= 625 - 400 \\
h^2 &= 225 \\
h &= (\pm)\sqrt{225} \\
h &= 15
\end{aligned}
$$

Suorakulmion pinta-ala on $A = 20\text{ mm} \cdot 15\text{ mm} = 300\text{ mm}^2$.

Vastaus: 300 mm^2

b) Kuvan nelikulmio on suunnikas. Piirretään sille korkeusjana h.



Korkeusjana erottaa suunnikkaasta suorakulmaisen kolmion.
Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä suunnikkaan korkeus h.

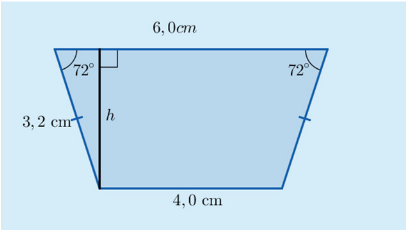
$$\sin 61° = \frac{h}{3,2} \quad \| \cdot 3,2$$
$$h = 3,2 \cdot \sin 61°$$
$$h = 2,798\ldots$$

Lasketaan suunnikkaan pinta-ala.
$A = 4{,}6\text{ cm} \cdot 2{,}798\ldots\text{ cm} = 12{,}874\ldots\text{ cm}^2 \approx 13\text{cm}^2$.

Suunnikkaan pinta-ala on 13 cm^2.

Vastaus: 13 cm^2

c) Kuvio on puolisuunnikas. Piirretään puolisuunnikkaalle korkeus *h*.



Ratkaistaan korkeus *h* suorakulmaisesta kolmiosta sinin avulla.

$$\sin 72° = \frac{h}{3,2} \quad \|\cdot 3,2$$
$$h = 3,2 \cdot \sin 72°$$
$$h = 3,043\ldots$$

Puolisuunnikkaan pinta-ala on

$$A = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{4,0+6,0}{2} \cdot 3,043\ldots = 15,216\ldots \approx 15$$

Puolisuunnikkaan pinta-ala on noin 15 cm^2.

Vastaus: 15 cm^2

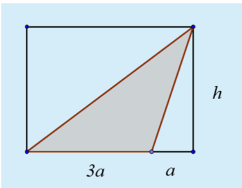
K33. Merkitään puolisuunnikkaan korkeutta kirjaimella h. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan korkeus siitä. Ennen sijoittamista yhtälöön on muunnettava luvut samaan yksikköön: 0,3 m^2 = 30 dm^2 = 3 000 cm^2.

$$\frac{54+38}{2}\cdot h = 3000$$
$$\frac{92}{2}\cdot h = 3000$$
$$46h = 3000 \quad \|:46$$
$$h = 65{,}217\ldots$$
$$h \approx 65$$

Korkeus on noin 65 cm.

Vastaus: 65 cm

K34. Merkitään suorakulmion korkeutta kirjaimella h.



Suorakulmion toinen sivu on $3a + a = 4a$ ja korkeus h, joten pinta-ala on $A_s = 4a \cdot h = 4ah$.

Väritetyn kolmion kanta on $3a$ ja korkeus h, joten pinta-ala on

$$A_k = \frac{3a\cdot h}{2} = \frac{3ah}{2} = 1{,}5ah$$

Lasketaan kuinka monta prosenttia väritetyn kolmion pinta-ala on suorakulmion pinta-alasta.

$$\frac{A_k}{A_s} = \frac{1{,}5\cancel{a}\,\cancel{h}}{4\cancel{a}\,\cancel{h}} = 0{,}375$$

Kolmion pinta-ala on 37,5 % suorakulmion pinta-alasta.

Vastaus: 37,5 %

K35. **a)** Väritetty alue on ympyrä, jonka säde on $\frac{4{,}4\text{ cm}}{2} = 2{,}2$ cm.

Ympyrän pinta-ala on $\pi \cdot r^2 = \pi \cdot (2{,}2\text{ cm})^2 = 15{,}205...\text{ cm}^2 \approx 15\text{ cm}^2$.

Ympyrän piiri on $\pi \cdot d = \pi \cdot 4{,}4\text{ cm} = 13{,}823...\text{ cm} \approx 14\text{ cm}$.

Vastaus: 15 cm^2, 14 cm

b) Väritetty alue on ympyräsektori, jonka säde on 2,8 cm ja keskuskulma 105°.

Sektorin pinta-ala on

$$\frac{\alpha}{360°} \cdot \pi \cdot r^2 = \frac{105°}{360°} \cdot \pi \cdot (2{,}8\text{ cm})^2 = 7{,}183...\text{ cm}^2 \approx 7{,}2\text{ cm}^2.$$

Sektorin piiri saadaan laskemalla yhteen sektorin kaaren pituus ja sektorin säde kaksinkertaisena:

$$p_{\text{sektori}} = b + 2r = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi \cdot r + 2r$$

$$= \frac{105°}{360°} \cdot 2\pi \cdot 2{,}8\text{ cm} + 2 \cdot 2{,}8\text{ cm} = 10{,}731...\text{ cm} \approx 11\text{cm}$$

Vastaus: 7,2 cm^2 ja 11 cm

c)Väritetty alue on ympyräsektori, jonka säde on 1,9 cm ja keskuskulma $360° - 80° = 280°$.

Sektorin pinta-ala on

$$\frac{\alpha}{360°}\cdot\pi\cdot r^2 = \frac{280°}{360°}\cdot\pi\cdot(1{,}9\text{ cm})^2 = 8{,}820...\text{ cm}^2 \approx 8{,}8\text{ cm}^2 .$$

Sektorin piiri saadaan laskemalla yhteen sektorin kaaren pituus ja sektorin säde kaksinkertaisena:

$$p_{\text{sektori}} = b + 2r = \frac{\alpha}{360°}\cdot 2\pi\cdot r + 2r$$

$$= \frac{280°}{360°}\cdot 2\pi\cdot 1{,}9\text{ cm} + 2\cdot 1{,}9\text{ cm} = 13{,}085...\text{ cm} \approx 13\text{ cm} .$$

Vastaus: $8{,}8\text{ cm}^2$ ja 13 cm

K36. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä säde *r*.

$$300 = \frac{\alpha}{360°}\cdot\pi\cdot r^2$$

$$300 = \frac{72°}{360°}\cdot\pi\cdot r^2 \quad \|\cdot 360°$$

$$72°\pi\cdot r^2 = 300\cdot 360° \quad \|:72\pi$$

$$r^2 = \frac{300\cdot 360°}{72°\pi}$$

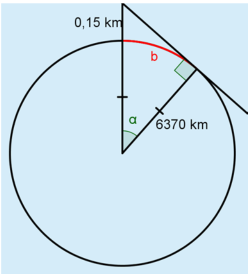
$$r = (\pm)\sqrt{\frac{300\cdot 360°}{72°\pi}}$$

$$r = 21{,}850\ldots \approx 22$$

Sektorin säde *r* on oltava noin 22 m.

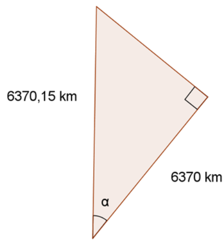
Vastaus: 22 m

K37. Piirretään mallikuva. Helikopteri lentää 150 m = 0,15 km korkeudella.



Helikopterista voidaan parhaimmillaan nähdä pisteeseen, jossa helikopterista piirretty tangentti sivuaa maapallon pintaa.

Kaaren *b* pituuden laskemiseksi lasketaan ensin keskuskulma *α* suorakulmaisesta kolmiosta, jonka hypotenuusa on 6370 + 0,15 = 6370,15.



$$\cos\alpha = \frac{6370}{6370+0{,}15}$$

$$\cos\alpha = \frac{6370}{6370{,}15}$$

$$\alpha = 0{,}393\ldots^\circ$$

Lasketaan kaaren pituus b.

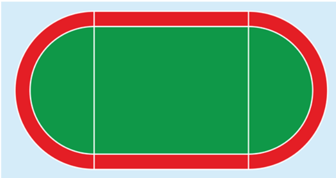
$$b = \frac{\alpha}{360^\circ}\cdot 2\pi \cdot r = \frac{0{,}393\ldots^\circ}{360^\circ}\cdot 2\cdot\pi\cdot 6370\text{ km} = 43{,}714\ldots\text{ km}.$$

Helikopterista voidaan parhaimmillaan nähdä noin 44 kilometrin päähän merelle, joten vastarannalle 70 km päähän näkeminen ei ole mahdollista.

Vastaus: Ei näy.

K38. Päissä olevat kaksi samanlaista puoliympyrän kaarta muodostavat yhden kokonaisen ympyrän kehän.

Tämän pituus on $p = 2\pi r = 2 \cdot \pi \cdot 36 \text{ m} = 226{,}194... \text{ m}$.



Loppuosa 400 metrin juoksuradasta koostuu kahdesta yhtä pitkästä suorasta osuudesta, joten yhden suoran osuuden pituus on

$$\frac{400 \text{ m} - 226{,}194... \text{ m}}{2} = 86{,}9026... \text{ m}.$$

Juoksuradan suorat osuudet ovat 86,90 m.

Kaikissa radoissa on yhtä pitkät suorat osuudet, mutta kaarevan osuuden pituus vaihtelee, koska säde vaihtelee.
Yhden radan leveys on 122 cm = 1,22 m.

Kahdeksannen eli uloimman radan sisäreunan säde on $7 \cdot 1{,}22$ m suurempi kuin ensimmäisen eli sisimmän radan sisäreunan säde 36m.

Uloimman radan säde on siten $36 \text{ m} + 7 \cdot 1{,}22 \text{ m} = 44{,}54 \text{ m}$.

Uloimman radan puoliympyröiden yhteispituus on
$p = 2\pi r = 2 \cdot \pi \cdot 44{,}54 \text{ m} = 279{,}853... \text{ m}$.

Ratojen pituusero on kaarien pituusero
$279{,}853... \text{ m} - 226{,}194... \text{ m} = 53{,}658... \text{ m} \approx 53{,}66 \text{ m}$.

Prosentteina pituusero on $\dfrac{53{,}658...}{400} = 0{,}134... \approx 13{,}4\ \%$.

Vastaus: Suorat osat ovat 86,90 m pitkiä. Ulkorata on 53,66 m sisärataa pidempi eli pituusero on 13,4 %.

K39. **a)** Janan päätepisteet ovat (1, 5) ja (–5, 13), joten janan

keskipisteen x-koordinaatti on $\frac{1+(-5)}{2}=\frac{-4}{2}=-2$

ja y-koordinaatti on $\frac{5+13}{2}=\frac{18}{2}=9$.

Vastaus: (–2, 9)

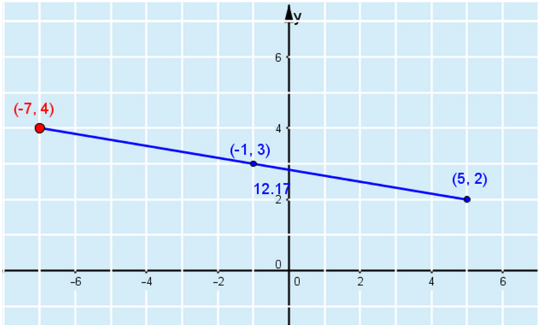
b) Janan pituus on

$\sqrt{((-5)-1)^2+(13-5)^2}=\sqrt{6^2+8^2}=\sqrt{36+64}=\sqrt{100}=10$.

Vastaus: 10

K40. Ratkaistaan tehtävä appletilla.

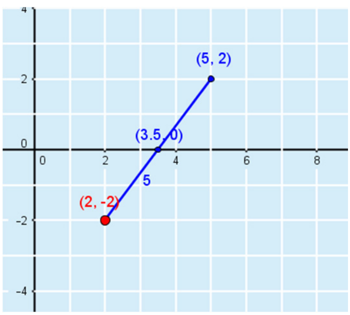
a)

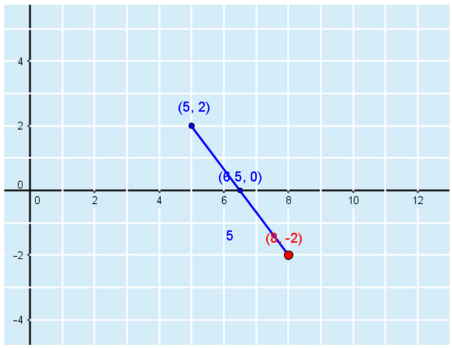


Janan toinen päätepiste on (–7, 4)

Vastaus: (–7, 4)

b)



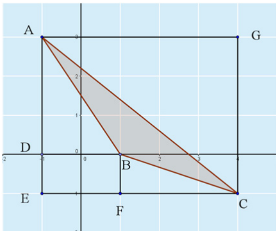


Janan toinen päätepiste on (2, –2)

tai (8, –2)

Vastaus: (2, –2) tai (8, –2)

K41. Täydennetään kuvaa.



Kehystetään kolmio *ABC* suorakulmiolla *AECG*, joka kulkee kolmion kärkien *A* ja *C* kautta ja jonka sivut ovat koordinaattiakselien suuntaiset.

Kolmion *ABC* pinta-ala saadaan vähentämällä suorakulmion *AECG* pinta-alasta suorakulmaisten kolmioiden *ADB*, *BFC* ja *CGA* ja suorakulmion *DEFB* pinta-alat. Kuvioiden mitat saadaan kuvasta ruutujen avulla.

$$\begin{aligned} A_{ABC} &= 5\cdot 4-\left(\frac{3\cdot 2}{2}+\frac{1\cdot 3}{2}+\frac{4\cdot 5}{2}+1\cdot 2\right) \\ &= 20-\left(3+\frac{3}{2}+10+2\right)=20-\left(16\frac{1}{2}\right)=3\frac{1}{2}=3,5 \end{aligned}$$

Pinta-ala on $3\frac{1}{2}$.

Vastaus: $3\frac{1}{2}$

K42. Janan päätepisteet ovat $A(–3, 1)$ ja $B(9, –4)$, joten janan AB pituus on
$\sqrt{(9-(-3))^2+(-4-1)^2}=\sqrt{12^2+(-5)^2}=\sqrt{144+25}=\sqrt{169}=13$.

Merkitään osien pituuksia $2x$ ja $3x$, jolloin koko janan pituus on $2x + 3x = 5x$.

Koska janan pituus on 13, niin saadaan

$$5x=13$$
$$x=\frac{13}{5},$$

jolloin

$$2x=2\cdot\frac{13}{5}=\frac{26}{5}=5\frac{1}{5}=5{,}2 \text{ ja}$$
$$3x=3\cdot\frac{13}{5}=\frac{39}{5}=7\frac{4}{5}=7{,}8$$

.

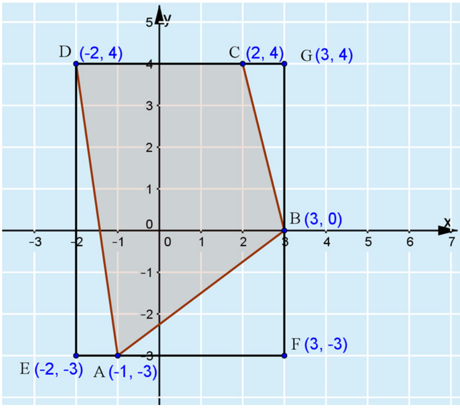
TAI

Kun jana AB jaetaan suhteessa 2:3, niin osia tulee yhteensä $2 + 3 = 5$.
Janan pituus on 13, joten yhden osan pituus on $\frac{13}{5}$.

Kysytyt pituudet ovat $2\cdot\frac{13}{5}=\frac{26}{5}=5\frac{1}{5}=5{,}2$ ja $3\cdot\frac{13}{5}=\frac{39}{5}=7\frac{4}{5}=7{,}8$.

Vastaus: $\frac{26}{5}=5{,}2$ ja $\frac{39}{5}=7{,}8$

K43. Piirretään nelikulmio *ABCD* koordinaatistoon ja kehystetään se suorakulmiolla, joka kulkee nelikulmion kärkien kautta ja jonka sivut ovat koordinaattiakselien suuntaiset.



Nelikulmion *ABCD* pinta-ala saadaan vähentämällä suorakulmion *EFGD* pinta-alasta suorakulmaisten kolmioiden *DEA*, *BAF* ja *GCB* pinta-alat.

Kuvioiden mitat saadaan kuvan ja pisteiden koordinaattien avulla.

$$A_{ABCD} = 5\cdot 7-\left(\frac{1\cdot 7}{2}+\frac{4\cdot 3}{2}+\frac{1\cdot 4}{2}\right)=23\frac{1}{2}=23{,}5\,.$$

Piiriä varten lasketaan sivujen *AD*, *AB* ja *BC* pituudet.

$$AD=\sqrt{(-2-(-1))^2+(4-(-3))^2}=\sqrt{(-1)^2+7^2}=\sqrt{1+49}=\sqrt{50}$$

$$AB=\sqrt{(3-(-1))^2+(0-(-3))^2}=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$$

$$BC=\sqrt{(2-3)^2+(4-0)^2}=\sqrt{(-1)^2+4^2}=\sqrt{1+16}=\sqrt{17}$$

$$CD=4$$

Piiri on $\sqrt{50}+5+\sqrt{17}+4=9+\sqrt{50}+\sqrt{17}=20{,}194\ldots\approx 20{,}2$.

Vastaus: pinta-ala 23,5 ja piiri 20,2

K44. Kaupunkien A ja C etäisyys eli janan AC pituus on

$$\sqrt{(5-(-4))^2+(16-(-5))^2}=\sqrt{9^2+21^2}=\sqrt{81+441}=\sqrt{522}=22{,}8473...$$

Kaupunkien A ja B etäisyys eli janan AB pituus on

$$\sqrt{(-1-(-4))^2+(2-(-5))^2}=\sqrt{3^2+7^2}=\sqrt{9+49}=\sqrt{58}=7{,}6157...$$

Lentokone kulki pisteestä A pisteeseen C klo 12.00 – klo 13.18 eli 1h ja 18 min eli 78 minuutissa.

Taulukoidaan matkat ja ajat väleillä AC ja AB.

Aika (min)	Matka
78	22,8473…
x	7,6157...

Kuljettu matka ja matkaan kulunut aika ovat suoraan verrannollisia. Muodostetaan verranto ja ratkaistaan siitä aika x.

$$\frac{78}{x}=\frac{22{,}8473...}{7{,}61577...}$$

$$22{,}8473...\cdot x=78\cdot 7{,}61577... \quad \|:22{,}8473...$$

$$x=26$$

Lentokone ylitti kaupungin B, kun se oli lentänyt 26 minuuttia kaupungista A. Tällöin kello oli 12.26.

(TAI Tehtävän voi ratkaista myös nopeuksien avulla.)

Vastaus: klo 12.26

K45. **a)** Kuution särmän pituus on 3,0 m.
Kuution tilavuus on $V = (3{,}0\text{ m})^3 = 27\text{ m}^3$.
Kuution tahkojen kokonaispinta-ala on $A = 6\cdot(3{,}0\text{ m})^2 = 54\text{ m}^2$.

Vastaus: 27 m^3 ja 54 m^2

b) Pallon säde on $r = \dfrac{3{,}0\text{ m}}{2} = 1{,}5\text{ m}$.

Pallon tilavuus on

$$V = \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3 = \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot(1{,}5\text{ m})^3 = 14{,}137\ldots\text{m}^3 \approx 14\text{m}^3$$

Pallon pinta-ala on

$$A = 4\pi\cdot r^2 = 4\pi\cdot(1{,}5\text{ m})^2 = 28{,}274...\text{ m}^2 \approx 28\text{ m}^2.$$

Vastaus: 14 m^3 ja 28 m^2

c) Lieriön tilavuus on $V = \pi\cdot(2{,}0\text{ m})^2\cdot 3\text{ m} = 37{,}699...\text{ m}^3 \approx 38\text{ m}^3$.

Lieriön kokonaispinta-ala

$A_{\text{koko}} = A_{\text{vaippa}} + 2\cdot A_{\text{pohja}} = 2\pi rh + 2\cdot\pi r^2 =$

$2\pi\cdot 2{,}0\text{ m}\cdot 3\text{ m} + 2\cdot\pi\cdot(2{,}0\text{ m})^2 = 62{,}831...\text{ m}^2 \approx 63\text{ m}^3.$

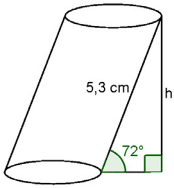
Vastaus: 38 m^3 ja 63 m^2

K46. **a)** Kappale on puolipallo, joten sen tilavuus on puolet pallon tilavuudesta. Tilavuus on

$$V = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot r^3 = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot(1{,}8\text{ m})^3 = 12{,}214\ldots\text{m}^3 \approx 12\,\text{m}^3.$$

Vastaus: 12 m^3

b) Kappale on vino ympyrälieriö, jonka korkeutta ei tunneta. Piirretään mallikuva.



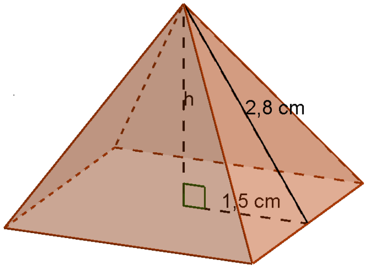
Korkeusjana h ja lieriön sivujana ovat suorakulmaisen kolmion sivuina. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä lieriön korkeus h sinin avulla.

$$\sin 72° = \frac{h}{5,3} \quad \| \cdot 5,3$$
$$5,3 \cdot \sin 72° = h$$
$$h = 5,3 \cdot \sin 72°$$
$$h = 5,040\ldots$$

Lieriön tilavuus on
$V = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (1,2 \text{ cm})^2 \cdot 5,040... \text{ cm} = 22,803... \text{ cm}^3 \approx 23 \text{ cm}^3$.

Vastaus: 23 cm^3

c) Kappale on suora neliöpohjainen pyramidi, jonka korkeus h on tuntematon. Piirretään mallikuva.



Muodostetaan Pythagoraan lauseella yhtälö suorakulmaisesta kolmiosta, jonka hypotenuusana on pyramidin sivutahkokolmion korkeus 2,8 cm ja toisena kateettina pohjaneliön puolikas. Ratkaistaan yhtälöstä korkeus h.

$$h^2 + 1,5^2 = 2,8^2$$
$$h^2 = 2,8^2 - 1,5^2$$
$$h = (\pm)\sqrt{2,8^2 - 1,5^2}$$
$$h = \sqrt{5,59}$$
$$h = 2,364\ldots$$

Pyramidin tilavuus on

$$\frac{1}{3} \cdot (3,0\text{ cm})^2 \cdot 2,236...\text{ cm} = 7,092\ldots\text{cm}^3 \approx 7,1\text{ cm}^3 .$$

Vastaus: 7,1 cm^3

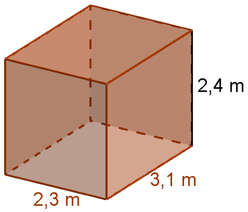
K47. Paalin säde on $\frac{120\text{ cm}}{2} = 60\text{ cm} = 6\text{ dm}$
ja korkeus on 90 cm = 9 dm.

Tilavuus on $V = \pi \cdot (6\text{ dm})^2 \cdot 9\text{ dm} = 1017{,}876...\text{ dm}^3$.

Massa on tiheyden ja tilavuuden tulo:
$m = \rho \cdot V = 0{,}4\text{ kg/dm}^3 \cdot 1017{,}876...\text{ dm}^3 = 407{,}150...\text{ kg} \approx 410\text{ kg}$.

Vastaus: 410 kg

K48. Piirretään mallikuva.



Eristettävä ja laatoitettava pinta-ala saadaan, kun lattian ja seinien yhteispinta-alasta vähennetään oven ja ikkunoiden pinta-ala.

$A = 2{,}3\text{ m} \cdot 3{,}1\text{ m} + 2 \cdot 3{,}1\text{ m} \cdot 2{,}4\text{ m} + 2 \cdot 2{,}3\text{ m} \cdot 2{,}4\text{ m} - 2{,}9\text{ m}^2$
$= 30{,}15\text{ m}^2$.

Hinnaksi tulee $30{,}15\text{ m}^2 \cdot 360\text{ €/m}^2 = 10\,854\text{ €} \approx 11\,000\text{ €}$.

Vastaus: 11 000 €

K49. Korin halkaisija on 19 cm, joten säde on $r = \dfrac{19\text{ cm}}{2} = 9{,}5$ cm.

Korin vaipan pinta-ala on
$A_{\text{vaippa}} = 2\pi rh = 2 \cdot \pi \cdot 9{,}5\text{ cm} \cdot 21\text{ cm} = 1253{,}495...\text{ cm}^2$.

Korin pohjan pinta-ala on $A_{\text{pohja}} = \pi r^2 = \pi \cdot (9{,}5\text{ cm})^2 = 283{,}528...\text{ cm}^2$.

Tarvittavan langan määrä on suoraan verrannollinen pinta-alaan. Taulukoidaan pinta-alat ja langan määrät. Merkitään vaippaan tarvittavan langan määrää kirjaimella x.

	Pinta-ala (cm^2)	Lankaa (g)
Vaippa	1253,495...	x
Pohja	283,528...	19

Muodostetaan verranto ja ratkaistaan siitä massa x.

$$\frac{A_{vaippa}}{A_{pohja}} = \frac{x}{19}$$
$$\frac{1253{,}495...}{283{,}528...} = \frac{x}{19}$$
$$283{,}528...\cdot x = 1253{,}495...\cdot 19 \quad \| :283{,}528...$$
$$x = \frac{1253{,}495...\cdot 19}{283{,}528...}$$
$$x = 84$$

Lankaa tarvitaan 84 g.

Vastaus: 84 g

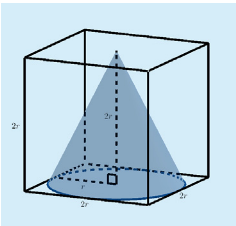
K50. Maidon tilavuus on 1 l = 1 dm^3 = 1000 cm^3.
Maitopurkin pohjan pinta-ala on $A = (7\text{cm})^2 = 49\ \text{cm}^2$.
Muodostetaan tilavuudesta yhtälö, josta ratkaistaan korkeus h.

$$
\begin{aligned}
V &= A \cdot h \\
A \cdot h &= V \\
49 \cdot h &= 1000 \quad \| : 49 \\
h &= \frac{1000}{49} \\
h &= 20{,}408\ldots \approx 20
\end{aligned}
$$

Maidon korkeus on noin 20 cm.

Vastaus: 20 cm:n korkeudelle

K51. Piirretään mallikuva ja merkitään kartion pohjaympyrän sädettä kirjaimella r. Tällöin kartion pohjaympyrän halkaisija on $2r$. Myös kuution särmän pituus on $2r$ ja kartion korkeus on $2r$.



Kuution tilavuus on $V_{\text{kuutio}} = (2r)^3 = 2^3r^3 = 8r^3$.

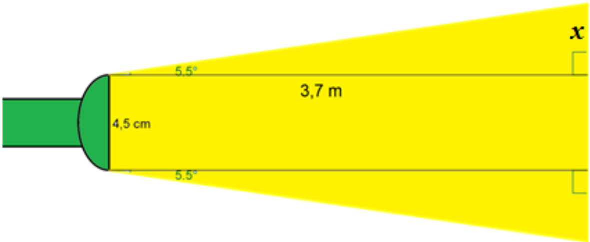
Kartion tilavuus on $V_{\text{kartio}} = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot 2r = \frac{2}{3}\pi r^3$.

Kuution ja kartion tilavuuksien suhde on

$$
\frac{V_{kartio}}{V_{kuutio}} = \frac{\frac{\cancel{2}^{1}}{3}\pi \cancel{r^3}}{{}_{4}\cancel{8}\cancel{r^3}} = \frac{\pi}{3 \cdot 4} = \frac{\pi}{12} = 0{,}261\ldots \approx 26\%.
$$

Vastaus: 26 %

K52. Merkitään suorakulmaisen kolmion kateettia kirjaimella x ja lasketaan sen pituus tangentin avulla.



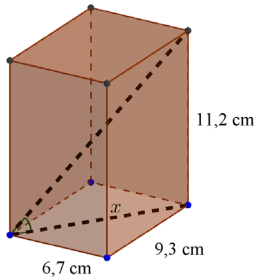
$$\tan 5,5° = \frac{x}{3,7}$$
$$x = 3,7 \cdot \tan 5,5°$$
$$x = 0,356\ldots$$

Seinään muodostuvan ympyrän halkaisija on
2 · 0,356…m + 0,045 m = 0,757…m
ja säde on $\frac{0,757\ldots\text{ m}}{2} = 0,378\ldots$ m.

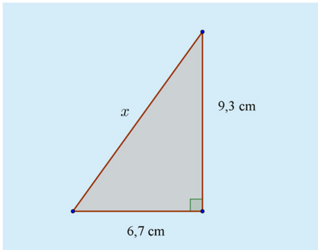
Ympyrän pinta-ala on $\pi \cdot (0,378\ldots\text{m})^2 = 0,450\ldots\text{ m}^2 \approx 0,45\text{ m}^2$.

Vastaus: 0,45 m^2.

K53.

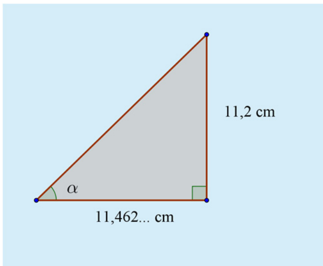


Lasketaan ensin pohjalävistäjän pituus x Pythagoraan lauseella.



$$x^2 = 6{,}7^2 + 9{,}3^2$$
$$x = (\pm)\sqrt{131{,}38}$$
$$x = 11{,}462\ldots$$

Lasketaan kysytty kulma α tangentin avulla.



$$\tan\alpha = \frac{11{,}2}{x}$$
$$\tan\alpha = \frac{11{,}2}{11{,}462\ldots}$$
$$\alpha = 44{,}337\ldots°$$
$$\alpha \approx 44°$$

Vastaus: 44°

K54. Yksi pölyhiukkanen vie kuutionmuotoisen tilan. Sen kuution särmäpituus on hiukkasen halkaisija eli viisi tuhannesosamillimetriä eli 0,005 mm.

Tällöin kuution tilavuus on
$V = (0{,}005\text{mm})^3 = 0{,}000000125\ \text{mm}^3 = 1{,}25 \cdot 10^{-7}\ \text{mm}^3$.

Yksi kuutiometri on $1\ \text{m}^3 = 1 \cdot 10^9\ \text{mm}^3$.

Yhteen kuutiometriin mahtuu pölyhiukkaisia siten
$\dfrac{1 \cdot 10^9}{1{,}25 \cdot 10^{-7}} = 8 \cdot 10^{15}$ kappaletta.

Vastaus: $8 \cdot 10^{15}$

KOKOAVIA TEHTÄVIÄ

ILMAN TEKNISIÄ APUVÄLINEITÄ

1. **a)** Kuvio on kolmio, jonka kanta on 3 ja korkeus 2 (pituusyksikköä). Pinta-ala on

$$A=\frac{3\cdot 2}{2}=3.$$

Vastaus: 3

b) Kuvio on suunnikas, jonka kanta on 5 ja korkeus 4. Pinta-ala on $A = 5 \cdot 4 = 20$.

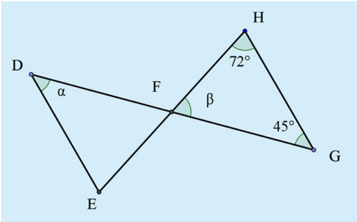
Vastaus: 20

c) Kuvio on puolisuunnikas, jonka yhdensuuntaiset sivut ovat 3 ja 5 ja korkeus on 2. Pinta-ala on

$$A=\frac{3+5}{2}\cdot 2=8.$$

Vastaus: 8

2. Merkitään kulmat $\alpha = \measuredangle EDF$ ja $\beta = \measuredangle GFH$ kuvaan.



Janat DE ja GH ovat yhdensuuntaiset, joten samankohtaiset kulmat α ja $\measuredangle HGF$ ovat yhtä suuria. Siis $\alpha = \measuredangle EDF = 45°$.

Kulma β on kolmion GHF kulma, ja sen suuruus on
$180° - 72° - 45° = 63°$.

Vastaus: $\measuredangle EDF = 45°$, $\measuredangle GFH = 63°$.

3.

	Säde	Halkaisija	Pinta-ala	Tilavuus
Alussa	r	$d = 2r$	$A = 4\pi r^2$	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$
Lopussa	$2r$	$d = 2 \cdot 2r$	$A = 4\pi(2r)^2$ $= 4\pi \cdot 4r^2$ $= 4 \cdot 4\pi r^2$	$V = \frac{4}{3}\pi(2r)^3$ $= \frac{4}{3}\pi 2^3 r^3$ $= \frac{4}{3}\pi 8r^3$ $= 8 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$

a) Kun säde kaksinkertaistuu, niin halkaisija kaksinkertaistuu.

Vastaus: 2-kertaiseksi

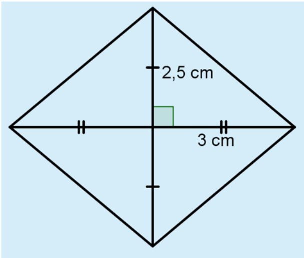
b) Kun säde kaksinkertaistuu, niin pinta-ala kasvaa $2^2 = 4$-kertaiseksi.

Vastaus: 4-kertaiseksi

c) Kun säde kaksinkertaistuu, niin tilavuus kasvaa $2^3 = 8$-kertaiseksi.

Vastaus: 8-kertaiseksi

4. Neljäkkään lävistäjät puolittavat toisensa ja leikkaavat toisensa suorassa kulmassa. Piirretään mallikuva.



Neljäkäs koostuu neljästä yhtenevästä suorakulmaisesta kolmiosta, joiden kateetteina ovat lävistäjien puolikkaat $\frac{5\text{ cm}}{2}=2,5\text{ cm}$ ja $\frac{6\text{ cm}}{2}=3\text{ cm}$.

Yhden kolmion pinta-ala on $\frac{3\text{ cm}\cdot 2,5\text{ cm}}{2}=3,75\text{ cm}^2$.

Neljäkkään pinta-ala on $4 \cdot 3{,}75\text{ cm}^2 = 15\text{ cm}^2$.

Vastaus: 15 cm^2

5. Koska öljylautta on joka kohdasta yhtä korkea, se on lieriö.
Lieriön tilavuus on
$V = A_{\text{pohja}} \cdot h$, joten öljylautan tilavuus on

$V = 2{,}0\text{ km}^2 \cdot 0{,}001\text{ mm} = 2\ 000\ 000\text{ m}^2 \cdot 0{,}000\ 001\text{ m} = 2\text{ m}^3$.

Vastaus: 2 m^3

6. **a)** Väite: Kaikki suorakulmiot ovat suunnikkaita.
Suorakulmion vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset, joten suorakulmio on suunnikas.

Vastaus: tosi.

b) Väite: Kaikki tasasivuiset kolmiot ovat tasakylkisiä.
Tasakylkisessä kolmiossa on kaksi yhtä pitkää sivua, tasasivuisessa kolmiossa niitä on kolme, joten tasasivuiset kolmiot ovat myös tasakylkisiä.

Vastaus: tosi.

c) Väite: Kaikki suorakulmaiset särmiöt ovat kuutioita.
Suorakulmaisessa särmiössä pituus, leveys ja korkeus voivat olla eripituiset. Kuutiossa kaikki sivut ovat yhtä pitkiä, joten kaikki suorakulmaiset särmiöt eivät ole kuutioita.

Vastaus: epätosi.

d) Väite: Kaikki pyramidit ovat neliöpohjaisia.
On olemassa myös esim. kolmiopohjaisia pyramideja, joten kaikki pyramidit eivät ole neliöpohjaisia.

Vastaus: epätosi.

7. Kaikilla kappaleilla on sama korkeus 4 cm, joten voidaan tarkastella esim. niiden pohjia.

Kappaleiden II ja III pohjaympyröiden halkaisijat ovat 4 cm ja kappaleen IV halkaisija on 4 cm. Siis mikä tahansa kappaleista II - IV mahtuu kappaleen I sisään, joten kappale I on tilavuudeltaan suurin.

Vastaavasti kumpi tahansa kappaleista II ja IV mahtuu kappaleen III sisään, joten kappale III on tilavuudeltaan toiseksi suurin.

Kappaleiden II ja IV tilavuuksien suuruusjärjestys voidaan määrittää laskemalla.

Kappale II on suora ympyräkartio, ja sen tilavuus on kuutiosenttimetreinä

$V_{\mathrm{II}} = \frac{1}{3}\pi \cdot 2^2 \cdot 4 = \frac{16}{3}\pi$.

Kappale IV on pallo, ja sen tilavuus on kuutiosenttimetreinä

$V_{\mathrm{IV}} = \frac{4}{3}\pi \cdot 2^3 = \frac{32}{3}\pi$.

Koska 32 > 16, $V_{\mathrm{IV}} > V_{\mathrm{II}}$.

Kappale II on siis tilavuudeltaan pienin.

Vastaus: II, IV, III ja I

APUVÄLINEET SALLITTU

8. Yhdenmuotoisten kuvioiden vastinkulmat ovat yhtä suuria, joten $\alpha = 18° + 27° = 45°$.

Taulukoidaan sivuja ja vastinsivuja.

Pienempi nelikulmio	2,0 cm	4,5 cm	y
Suurempi nelikulmio	3,0 cm	x	13,4 cm

Muodostetaan näiden tietojen avulla verrannot ja ratkaistaan x ja y niistä.

$$\frac{2,0}{3,0} = \frac{4,5}{x}$$
$$2,0x = 3,0 \cdot 4,5 \quad \|:2,0$$
$$x = 6,75 \approx 6,8$$

$$\frac{2,0}{3,0} = \frac{y}{13,4}$$
$$3,0y = 2,0 \cdot 13,4 \quad \|:3$$
$$y = 8,933\ldots \approx 8,9$$

Vastaus: $x \approx 6,8$ cm, $y \approx 8,9$ cm ja $\alpha = 45°$

9. **a)** Kokonaispinta-alaan A kuuluu pohjan pinta-ala $A_{pohja} = \pi r^2$ ja vaipan pinta-ala $A_{vaippa} = \pi rs$.

$$A = A_{pohja} + A_{vaippa} = \pi r^2 + \pi rs$$
$$= \pi \cdot (9,2\text{ cm})^2 + \pi \cdot 9,2\text{ cm} \cdot 28,6\text{ cm} = 1\,092,520\ldots\text{ cm}^2 \approx 1\,100\text{ cm}^2.$$

Vastaus: $1\,100\text{ cm}^2$

b) Särmiön tahkojen kokonaispinta-alan laskemiseksi selvitetään pohjan mitat.

Pohja on kuvan mukaan neliö, jonka sivun pituus on $\sqrt{25\text{ m}^2} = 5$ m. Särmiön sivutahkoina on neljä samanlaista suorakulmiota, joista jokaisen pinta-ala on $5\text{ m} \cdot 6\text{ m} = 30\text{ m}^2$.

Kokonaispinta-ala on
$A = 2 \cdot A_{\text{pohja}} + A_{\text{vaippa}} = 2 \cdot 25\text{ m}^2 + 4 \cdot 30\text{ m}^2 = 170\text{ m}^2$.

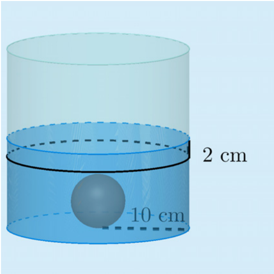
Vastaus: 170 m^2

c) Ympyrälieriön pohjaympyrän halkaisija on 1000 cm = 10 m, joten säde on $\frac{10\text{ m}}{2} = 5$ m.
Korkeus on $h = 12$ m, joten kokonaispinta-ala on

$$\begin{aligned}
A &= 2 \cdot A_{\text{pohja}} + A_{\text{vaippa}} \\
&= 2 \cdot \pi r^2 + 2\pi r h \\
&= 2 \cdot \pi \cdot (5\text{ m})^2 + 2 \cdot \pi \cdot 5\text{ m} \cdot 12\text{ m} \\
&= 534{,}070\ldots\text{ m}^2 \\
&\approx 500\text{ m}^2
\end{aligned}$$

Vastaus: 500 m^2

10. **a)** Piirretään mallikuva.



Kun kivi upotetaan veteen, se syrjäyttää lieriössä vettä oman tilavuutensa verran. Kiven syrjäyttämä vesi muodostaa alkuperäisen lieriössä olevan veden päälle lieriön muotoisen vesipatsaan eli "kappaleen", jonka korkeus on 2,0 cm ja pohja sama kuin alkuperäisessä lieriössä.

Pohjan säde on siis $\dfrac{10\text{ cm}}{2} = 5\text{ cm}$.

Kiven, tilavuus on
$V = \pi \cdot (5\text{ cm})^2 \cdot 2\text{ cm} = 157{,}079...\text{ cm}^3 \approx 160\text{ cm}^3$.

Vastaus: 160 cm^3

b) Taulukoidaan tiedot

	Lävistäjä	Pinta-alat
Iso	65	A_{iso}
Pieni	60	A_{pieni}

Lävistäjien pituuksien suhde 60:65 on mittakaava.
Pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö. Muodostetaan siitä verranto, josta ratkaistaan suhde $\dfrac{A_{\text{iso}}}{A_{\text{pieni}}}$.

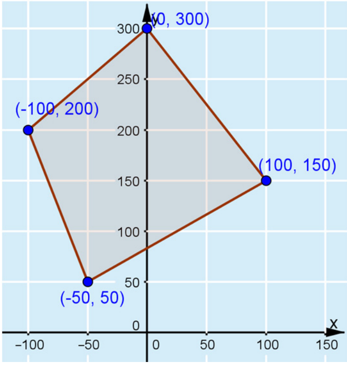
$$\frac{A_{\text{iso}}}{A_{\text{pieni}}}=\left(\frac{65}{60}\right)^2$$

$$\frac{A_{\text{iso}}}{A_{\text{pieni}}}=1{,}1736\ldots$$

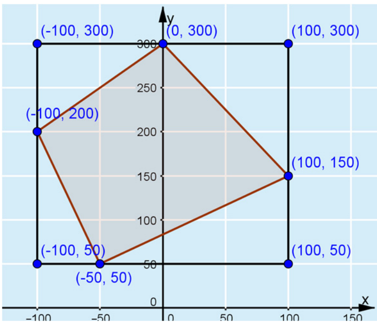
Suuremman kuvaruudun pinta-ala on 1,1736...-kertainen
eli sen pinta-ala on noin 117 % pienemmän kuvaruudun pinta-alasta.
Se on siis 17 % suurempi kuin pienempi kuvaruutu.

Vastaus: 17 %

11. Piirretään mallikuva.



Kortteli on epäsäännöllinen nelikulmio. Sen pinta-ala voidaan laskea kehystämällä nelikulmio suorakulmiolla, joka kulkee kaikkien nelikulmion kärkien kautta ja jonka sivut ovat koordinaattiakselien suuntaiset.



Kysytyn nelikulmion pinta-ala saadaan, kun suorakulmion pinta-alasta vähennetään nurkissa olevien neljän suorakulmaisen kolmion pinta-alat.

$$A = 200 \cdot 250 - \left(\frac{50 \cdot 150}{2} + \frac{150 \cdot 100}{2} + \frac{100 \cdot 150}{2} + \frac{100 \cdot 100}{2} \right)$$

$A = 50\ 000 - (3\ 750 + 7\ 500 + 7\ 500 + 5\ 000)$

$A = 50\ 000 - 23\ 750$

$A = 26\ 250$

Koska koordinaatiston yksikkö on metri, on pinta-ala laskettu neliömetreinä.

$26\,250 \text{ m}^2 = 262{,}5 \text{ a} = 2{,}625 \text{ ha} \approx 2{,}6 \text{ ha}.$

Korttelin pinta-ala on noin 2,6 ha.

Vastaus: 2,6 ha

12. Kullan tilavuus saadaan, kun vähennetään kullatun pallon tilavuudesta kultaamattoman pallon tilavuus. Lasketaan tilavuudet.

Kultaamaton pallo:

Kultaamattoman pallon säde on $\dfrac{1{,}00 \text{ cm}}{2} = 0{,}5 \text{ cm} = 5 \text{ mm}.$

Kultaamattoman pallon tilavuus on

$V_{\text{kultaamaton}} = \dfrac{4}{3}\pi \cdot (5 \text{ mm})^3 = 523{,}598... \text{ mm}^3.$

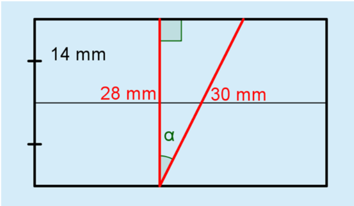
Kullattu pallo:
Kullatun pallon säde on 5 mm + 1,0 mm = 6 mm.
Kullatun pallon tilavuus on

$V_{\text{kullattu}} = \dfrac{4}{3}\pi \cdot (6 \text{ mm})^3 = 904{,}778... \text{ mm}^3.$

$V = V_{\text{kullattu}} - V_{\text{kultaamaton}}$
$= 904{,}778... \text{ mm}^3 - 523{,}598... \text{ mm}^3$
$= 381{,}179... \text{ mm}^3 \approx 380 \text{ mm}^3$

Vastaus: 380 mm^3

13. **a)** Kaltevuuskulma on pienin mahdollinen silloin, kun naula on juuri ja juuri kokonaan lautojen sisällä. Piirretään mallikuva.



Suorakulmaisen kolmion toinen kateetti on 14 mm + 14 mm = 28 mm ja hypotenuusa on 30 mm.

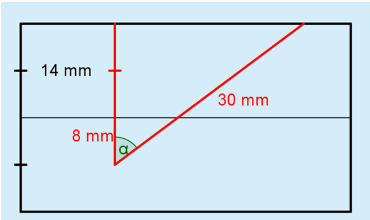
Ratkaistaan kaltevuuskulma α suorakulmaisesta kolmiosta kosinin avulla.

$$\cos\alpha = \frac{28}{30}$$
$$\alpha = 21{,}039\ldots°$$

Vastaus on pyöristettävä ylöspäin, ettei naula mene lautojen läpi. Pienin mahdollinen kaltevuuskulma on siis 22°.

Vastaus: 22°

b) Kaltevuuskulma on suurin mahdollinen silloin, kun naula juuri ja juuri yltää alempaan lautaan 8 millimetrin syvyydelle. Piirretään mallikuva.



Suorakulmaisen kolmion toinen kateetti on 14 mm + 8 mm = 22 mm ja hypotenuusa on 30 mm.

Ratkaistaan kaltevuuskulma α suorakulmaisesta kolmiosta kosinin avulla.

$$\cos\alpha = \frac{22}{30}$$
$$\alpha = 42{,}833\ldots°$$

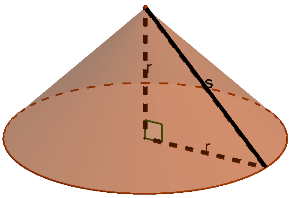
Vastaus on pyöristettävä alaspäin, jotta naula varmasti yltäisi tarpeeksi syvälle. Suurin mahdollinen kaltevuuskulma on siis 42°.

Vastaus: 42°

14. Merkitään kartion pohjan sädettä kirjaimella r. Kartion korkeus on sama kun pohjan säde, joten myös kartion korkeus h on r.

Pohjan pinta-ala on $A_{\text{pohja}} = \pi r^2$ ja vaipan pinta-ala $A_{\text{vaippa}} = \pi rs$, jossa s on kartion sivujana. Kokonaispinta-ala on näiden alojen summa $\pi r^2 + \pi rs$.

Koska kokonaispinta-ala tunnetaan, voidaan selvittää kartion säde r, jos saadaan muodostettua kokonaispinta-alalle lauseke, jossa ei esiinny muita muuttujia kuin r. Tätä varten on ratkaistava kartion sivujanan pituus s säteen r lausekkeena.



Muodostetaan Pythagoraan lauseen avulla yhtälö ja ratkaistaan siitä sivujana s.

$$s^2 = r^2 + r^2$$
$$s^2 = 2r^2$$
$$s = (\pm)\sqrt{2r^2}$$
$$s = \sqrt{2} \cdot \sqrt{r^2}$$
$$s = \sqrt{2} \cdot r$$

Kartion kokonaispinta-alan avulla saadaan yhtälö, josta ratkaistaan säde r.

$$A_{pohja} + A_{vaippa} = A_{koko}$$
$$\pi r^2 + \pi r s = 1$$
$$\pi r^2 + \pi r \cdot \sqrt{2} \cdot r = 1$$
$$\pi r^2 + \sqrt{2}\pi r^2 = 1$$
$$3{,}141\ldots r^2 + 4{,}442\ldots r^2 = 1$$
$$7{,}584\ldots r^2 = 1 \quad \|:7{,}584\ldots$$
$$r^2 = 0{,}131\ldots$$
$$r = (\pm)\sqrt{0{,}131\ldots}$$
$$r = 0{,}363\ldots$$

Kartion pohjan säde on r = 0,363…m.

Kartion tilavuus on

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot r = \frac{1}{3}\pi r^3 = \frac{1}{3}\pi \cdot (0{,}363...\ \mathrm{m})^3 = 0{,}050134\ldots \mathrm{m}^3$$

$$= 50{,}134...\ \mathrm{dm}^3 = 50{,}134...\ \mathrm{l} \approx 50{,}1\ \mathrm{l}.$$

Vastaus: 50,1 litraa

HARJOITUSKOE

H1. **a)** Suoran ympyräkartion korkeusjana, säde ja sivujana rajoittavat suorakulmaisen kolmion, jonka korkeus on 8 m ja hypotenuusa 1000 cm = 10 m.

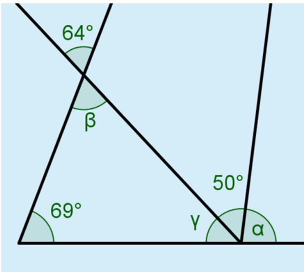
Ratkaistaan ympyräkartion pohjaympyrän säde suorakulmaisesta kolmiosta Pythagoraan lauseen avulla.

$$
\begin{aligned}
r^2 + 8^2 &= 10^2 \\
r^2 &= 10^2 - 8^2 \\
r^2 &= 100 - 64 \\
r^2 &= 36 \\
r &= (\pm)\sqrt{36} \\
r &= 6
\end{aligned}
$$

Säde on 6 m.

Vastaus: $r = 6$ m

b) Täydennetään kuvaan kaksi kulmaa lisää.



Kulma β ja 64° kulma ovat ristikulmina yhtä suuret, joten $\beta = 64°$.

Kolmion kulmien summa on 180°, joten $\gamma = 180° - 69° - 64° = 47°$.

Kulmat γ, 50° ja α muodostavat yhdessä oikokulman, joten
$\alpha = 180° - 47° - 50° = 83°$.

Vastaus: $\alpha = 83°$

c) Tummennettu nelikulmio on puolisuunnikas.

Sen pinta-ala on

$$A = \frac{2,7 + 7,3}{2} \cdot 4,0 = \frac{10}{2} \cdot 4 = 20$$

Pinta-ala on 20 m^2.

Vastaus: 20 m^2

H2. **a)** Merkitään kolmion kulmat $2x$, $7x$ ja $9x$. Muodostetaan yhtälö kolmion kulmien summasta ja ratkaistaan siitä tuntematon x.

$$\begin{aligned} 2x+7x+9x &= 180 \\ 18x &= 180 \quad \|:18 \\ x &= 10 \end{aligned}$$

Kolmion kulmat ovat
$2x = 2 \cdot 10° = 20°$
$7x = 7 \cdot 10° = 70°$
$9x = 9 \cdot 10° = 90°$.

Kolmion pienin kulma on 20°.

Vastaus: 20°

b) Mittakaava 1:1000 tarkoittaa, että 1 cm kartalla on 1000 cm luonnossa. Siten 3,5 cm kartalla on luonnossa 3,5 · 1000 cm = 3 500 cm = 35 m.

(Tai verranto esim. $\frac{3{,}5\,\text{cm}}{x} = \frac{1}{1000}$.)

Vastaus: 35 m

c) Kolmion pinta-ala on $A = \frac{ah}{2}$, jossa $a = 3$ m.

Muodostetaan yhtälö, josta ratkaistaan kolmion korkeus h.

$$\begin{aligned} \frac{ah}{2} &= A \\ \frac{3 \cdot h}{2} &= 30 \quad \|\cdot 2 \\ 3h &= 60 \quad \|:3 \\ h &= 20 \end{aligned}$$

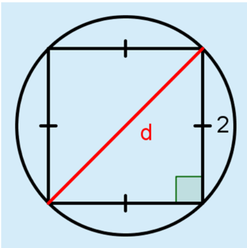
Kolmion korkeus on 20 m.

Vastaus: 20 m

H3. Lasketaan ensin koko kuvion pinta-ala.
Koko kuvio koostuu neliöstä, jonka sivun pituus on 2, ja neljästä puoliympyrästä, joiden säde on 1.
Koko kuvion pinta-ala on siis

$$A_{\text{koko}} = 2 \cdot 2 + \overset{2}{\cancel{4}} \cdot \frac{\pi \cdot 1^2}{\underset{1}{\cancel{2}}} = 4 + 2\pi\ .$$

Keltaisten alueiden pinta-ala saadaan vähentämällä koko kuvion pinta-alasta keskiympyrän ala. Keskiympyrän halkaisija *d* on neliön lävistäjä.



Muodostetaan Pythagoraan lauseen avulla yhtälö suorakulmaisesta kolmiosta, jonka hypotenuusana on ympyrän halkaisija *d* ja kateetteina neliön kaksi sivua. Ratkaistaan yhtälöstä halkaisija *d*.

$$d^2 = 2^2 + 2^2$$
$$d^2 = 4 + 4$$
$$d^2 = 8$$
$$d = _{(}\pm_{)} \sqrt{8}$$

Ympyrän säde r on puolet halkaisijasta, joten $r = \dfrac{\sqrt{8}}{2}$.

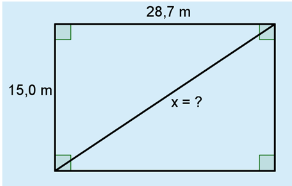
Ympyrän pinta-ala on $A_{\text{ympyrä}} = \pi \cdot \left(\dfrac{\sqrt{8}}{2}\right)^2 = \pi \cdot \dfrac{\sqrt{8}^2}{2^2} = \pi \cdot \dfrac{\overset{2}{\cancel{8}}}{\underset{1}{\cancel{4}}} = 2\pi$.

Kysytty pinta-ala on $A_{\text{koko}} - A_{\text{ympyrä}} = 4 + 2\pi - 2\pi = 4$.

Vastaus: 4

H4. **a)** Suorakulmion lävistäjä jakaa suorakulmion kahteen yhtenevään suorakulmaiseen kolmioon. Muodostetaan Pythagoraan lauseen avulla yhtälö ja ratkaistaan siitä lävistäjä *x*.

$$x^2 = 15{,}0^2 + 28{,}7^2$$
$$x = (\pm)\sqrt{15{,}0^2 + 28{,}7^2}$$
$$x = \sqrt{1048{,}69}$$
$$x = 32{,}383\ldots \approx 32{,}4$$

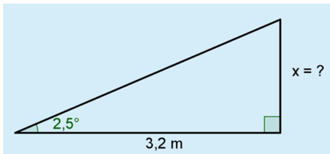


Lyhin etäisyys on noin 32,4 m.

Vastaus: 32,4 m

b) Merkitään kysyttyä etäisyyttä kirjaimella *x*. Piirretään mallikuva ja ratkaistaan *x* suorakulmaisesta kolmiosta tangentin avulla.

$$\tan 2{,}5° = \frac{x}{3{,}2} \quad \| \cdot 3{,}2$$
$$x = 3{,}2 \cdot \tan 2{,}5°$$
$$x = 0{,}1397\ldots \approx 0{,}140$$



Lentokone nousee ylöspäin noin 0,140 km = 140 m.

Vastaus: 140 m

H5. **a)** Pinon paksuus on 1 000 000 · 0,1 mm = 100 000 mm = 100 m.

Vastaus: 100 m

b) Paperipino on lieriö, jonka pohjan mitat ovat
210 mm = 21,0 cm = 0,21 m ja
297 mm = 29,7 cm = 0,297 m.

Lieriön korkeus on 100 m.

Tilavuus on 0,21m · 0,297 m · 100 m = 6,237 m^3 ≈ 6,2 m^3.

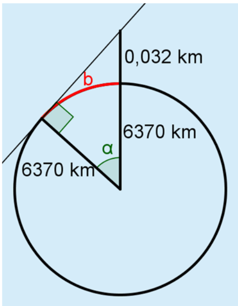
Vastaus: 6,2 m^3

c) Tulosteiden tilavuus on 6,237 m^3 = 6237 dm^3.

Massa m on tiheyden ja tilavuuden tulo, joten
$m = \rho \cdot V = 1{,}2\ \mathrm{kg/dm^3} \cdot 6\,237\ \mathrm{dm^3} = 7\,484{,}4\ \mathrm{kg} \approx 7\,500\ \mathrm{kg}$.

Vastaus: 7 500 kg

H6. Piirretään mallikuva ja muutetaan korkeus kilometreiksi 32 m = 0,032 km.



Kysytty etäisyys on sektorin kaaren *b* pituus. Kaaren pituuden laskemiseksi selvitetään ensin keskuskulma *α* suorakulmaisesta kolmiosta, jonka hypotenuusana on laivan kannen etäisyys maapallon keskipisteestä 6370 km + 0,032 km = 6370,032 km.

Ratkaistaan kulma *α* kosinin avulla.

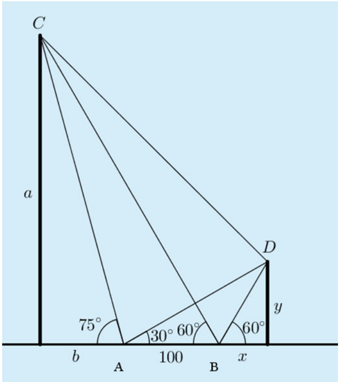
$$\cos\alpha = \frac{6370}{6370{,}032}$$
$$\alpha = 0{,}181\ldots^\circ$$

Lasketaan kaaren *b* pituus.

$$b = \frac{\alpha}{360^\circ}\cdot 2\pi\cdot r = \frac{0{,}181...^\circ}{360^\circ}\cdot 2\pi\cdot 6370\text{ km} = 20{,}191\ldots\text{km} \approx 20\text{ km}$$

Vastaus: 20 km:n päähän

H7. Merkitään kuvaan tuntemattomia pituuksia kirjaimilla.
Kysytyt majakoiden korkeudet ovat a ja y.



Suorakulmaisista kolmioista saadaan yhtälöparit.

$$\begin{cases} \tan 75° = \dfrac{a}{b} \\ \tan 60° = \dfrac{a}{b+100} \end{cases}$$

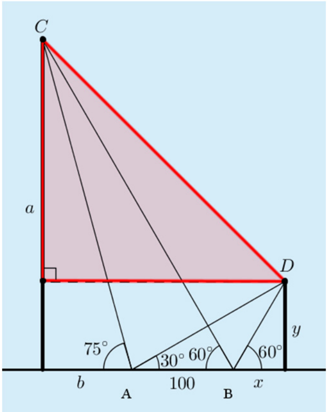
ja

$$\begin{cases} \tan 60° = \dfrac{y}{x} \\ \tan 30° = \dfrac{y}{x+100} \end{cases}.$$

Ratkaistaan yhtälöparit symbolisen laskennan yhtälöparin ratkaisutoiminnolla.

Ratkaisuiksi saadaan
$a = 323{,}205...$, $b = 86{,}602...$, $x = 50$ ja $y = 86{,}602...$

Majakoiden korkeudet ovat siis $a \approx 320$ m ja $y \approx 87$ m.



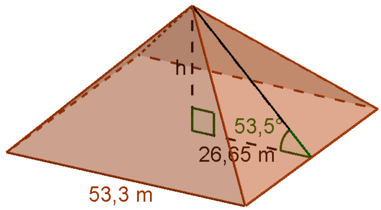
Etäisyys *CD* saadaan kuvaan punaisella piirretystä suorakulmaisesta kolmiosta, jonka kateetit ovat $a - y$ ja $b + 100 + x$ ja hypotenuusa on kysytty etäisyys $CD = z$.

Pythagoraan lauseen mukaan

$$
\begin{aligned}
z &= \sqrt{(b+100+x)^2 + (a-y)^2} \\
&= \sqrt{(86{,}602...+100+50)^2 + (323{,}205...-86{,}602...)^2} \\
&= \sqrt{111\,960{,}066...} \\
&= 334{,}606...\text{ m} \\
&\approx 330\text{ m.}
\end{aligned}
$$

Vastaus: Korkeudet ovat 320 m ja 87 m, $CD \approx 330$ m.

H8. Katkaistun pyramidin tilavuus voidaan määrittää laskemalla kuvitteellisen katkaisemattoman pyramidin tilavuus ja vähentämällä siitä poisleikatun osan tilavuus. Täydennetään katkaistu pyramidi kokonaiseksi jatkamalla pyramidin särmiä ja piirretään mallikuva katkaisemattomasta pyramidista.



Ratkaistaan katkaisemattoman pyramidin korkeus h_{koko} tangentin avulla suorakulmaisesta kolmiosta, jonka toisena kateettina on korkeus h_{koko} ja toisena kateettina pohjaneliön sivun puolikas $\frac{53{,}3\,\text{m}}{2} = 26{,}65\ \text{m}$.

$$\begin{aligned}\tan 53{,}5^\circ &= \frac{h_{\text{koko}}}{26{,}65} \quad \| \cdot 26{,}65\\ h_{\text{koko}} &= 26{,}65 \cdot \tan 53{,}5^\circ\\ h_{\text{koko}} &= 36{,}015\ldots\end{aligned}$$

Katkaisemattoman pyramidin tilavuus olisi

$$V_{\text{koko}} = \frac{1}{3} \cdot (53{,}3\ \text{m})^2 \cdot 36{,}015...\ \text{m} = 34\ 105{,}270...\ \text{m}^3.$$

Kattotasanne on 24 metrin korkeudella, joten poisleikatun osan korkeus on $h_{\text{pieni}} = 36{,}015...\ \text{m} - 24\ \text{m} = 12{,}015...\ \text{m}$.

Yhdenmuotoisten kappaleiden tilavuuksien suhde on mittakaavan kuutio.

Ratkaistaan poisleikatun pyramidin tilavuus V_{pieni} yhtälön avulla.

$$\begin{aligned}
\frac{V_{\text{koko}}}{V_{\text{pieni}}} &= \left(\frac{h_{\text{koko}}}{h_{\text{pieni}}}\right)^3 \\
\frac{34105,270...}{V_{\text{pieni}}} &= \left(\frac{36,015...}{12,015...}\right)^3 \\
\frac{34105,270...}{V_{\text{pieni}}} &= \frac{36,015...^3}{12,015...^3} \\
V_{\text{pieni}} \cdot 36,015...^3 &= 34105,270.... \cdot 12,015...^3 \quad \|:36,015...^3 \\
V_{\text{pieni}} &= 1266,403\ldots
\end{aligned}$$

Poisleikatun osan tilavuus on V_{pieni} = 1266,403... m^3.

Temppelin tilavuus on V_{temppeli} = 13,4 m · 16,5 m · 6 m = 1326,6 m^3.

Kukulkanin pyramidin tilavuus on

$$\begin{aligned}
V_{\text{koko}} - V_{\text{pieni}} + V_{\text{temppeli}} &= 34\ 105,270...\ \text{m}^3 - 1266,274...\ \text{m}^3 + 1326,6\ \text{m}^3 \\
&= 34\ 165,596...\ \text{m}^3 \\
&\approx 34\ 000\ \text{m}^3.
\end{aligned}$$

Vastaus: 34 000 m^3