KERTAUS

KERTAUSTEHTÄVIÄ

K1. **a)** Kun suoran *s* pisteen *x*-koordinaatti kasvaa yhdellä, pisteen *y*-koordinaatti kasvaa kahdella. Suoran *s* kulmakerroin on siis 2.

Kun suoran *t* pisteen *x*-koordinaatti kasvaa kahdella, pisteen *y*-koordinaatti pienenee kolmella. Suoran *t* kulmakerroin on siis

$$k = \frac{-3}{2} = -\frac{3}{2}.$$

Kun suoran *u* pisteen *x*-koordinaatti kasvaa yhdellä, pisteen *y*-koordinaatti ei muutu, joten *y*-koordinaatin muutos on 0. Suoran *u* kulmakerroin on siis

$$k = \frac{0}{1} = 0.$$

Suora *v* on *y*-akselin suuntainen, joten sillä ei ole kulmakerrointa.

Vastaus: *s*: 2, *t*: $-\frac{3}{2}$, *u*: 0 ja *v*: ei kulmakerrointa

b) Jos suora ei ole y-akselin suuntainen, suoran yhtälö on muotoa $y = kx + b$, jossa k on kulmakerroin ja b vakiotermi. Vakiotermi nähdään suoran ja y-akselin leikkauspisteestä.

Suora s leikkaa y-akselin pisteessä (0, 3), joten sen vakiotermi on 3. Suoran s yhtälö on siis $y = 2x + 3$.

Suora t leikkaa y-akselin pisteessä (0, −1), joten sen vakiotermi on −1. Suoran t yhtälö on siis $y = -\frac{3}{2}x - 1$.

Suora u leikkaa y-akselin pisteessä (0, 2), joten sen vakiotermi on 2. Suoran u yhtälö on siis $y = 0x + 2$ eli $y = 2$.

Suora v on y-akselin suuntainen, joten sen yhtälöä ei voida esittää muodossa $y = kx + b$. Jokaisen suoran v pisteen x-koordinaatti on 1, joten suoran yhtälö on $x = 1$.

Vastaus: s: $y = 2x + 3$, t: $y = -\frac{3}{2}x - 1$, u: $y = 2$ ja v: $x = 1$

K2. Lasketaan suorien kulmakertoimet sijoittamalla pisteiden koordinaatit kaavaan $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

a) Suora kulkee pisteiden (0, 0) ja (1, −4) kautta, joten $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $x_2 = 1$ ja $y_2 = -4$.

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-4-0}{1-0} = \frac{-4}{1} = -4$$

Vastaus: $k = -4$

b) Suora kulkee pisteiden (3, 5) ja (4, 5) kautta, joten $x_1 = 3$, $y_1 = 5$, $x_2 = 4$ ja $y_2 = 5$.

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-5}{4-3} = \frac{0}{1} = 0$$

Vastaus: $k = 0$

c) Suora kulkee pisteiden (−1, 5) ja (−1, 3) kautta, joten $x_1 = -1$, $y_1 = 5$, $x_2 = -1$ ja $y_2 = 3$.

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-5}{-1-(-1)} = \frac{-2}{0}$$

Nollalla ei voi jakaa, joten suoralla ei ole kulmakerrointa.

Vastaus: ei kulmakerrointa

d) Suora kulkee pisteiden $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ ja $\left(-\frac{5}{12}, \frac{5}{3}\right)$ kautta, joten

$x_1 = \frac{1}{2}, y_1 = \frac{3}{4}, x_2 = -\frac{5}{12}$ ja $y_2 = \frac{5}{3}$.

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{{}^{4)}\frac{5}{3} - {}^{3)}\frac{3}{4}}{-\frac{5}{12} - {}^{6)}\frac{1}{2}} = \frac{\frac{20}{12} - \frac{9}{12}}{-\frac{5}{12} - \frac{6}{12}} = \frac{\frac{11}{12}}{-\frac{11}{12}} = -1$$

Vastaus: $k = -1$

K3. Jos suora ei ole y-akselin suuntainen, suoran yhtälö on muotoa $y = kx + b$, jossa k on kulmakerroin ja b vakiotermi. Suoran pisteet toteuttavat suoran yhtälön, joten yhtälöön voidaan sijoittaa minkä tahansa suoralla olevan pisteen koordinaatit.

a) Suoran kulmakerroin $k = -4$, joten suoran yhtälö on muotoa $y = -4x + b$. Koska piste (1, 2) on suoralla, sen koordinaatit $x = 1$ ja $y = 2$ toteuttavat suoran yhtälön. Sijoitetaan koordinaatit suoran yhtälöön ja ratkaistaan siitä vakiotermi b.

$$\begin{aligned} y &= -4x + b \\ 2 &= -4 \cdot 1 + b \\ 2 &= -4 + b \\ 2 + 4 &= b \\ b &= 6 \end{aligned}$$

Vastaus: $y = 4x + 6$

b) Lasketaan suoran kulmakerroin k sijoittamalla $x_1 = 2$, $y_1 = -3$, $x_2 = 1$ ja $y_2 = 4$ kulmakertoimen kaavaan $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - (-3)}{1 - 2} = \frac{7}{-1} = -7$$

Suoran yhtälö on muotoa $y = -7x + b$. Sijoitetaan pisteen (1, 4) koordinaatit suoran yhtälöön ja ratkaistaan siitä vakiotermi b.

$$\begin{aligned} 4 &= -7 \cdot 1 + b \\ 4 &= -7 + b \\ 4 + 7 &= b \\ b &= 11 \end{aligned}$$

Suoran yhtälö on $y = -7x + 11$.

Vastaus: $y = -7x + 11$

c) Koska suora on yhdensuuntainen suoran $y = 3x - 4$ kanssa, kysytyn suoran kulmakerroin $k = 3$.

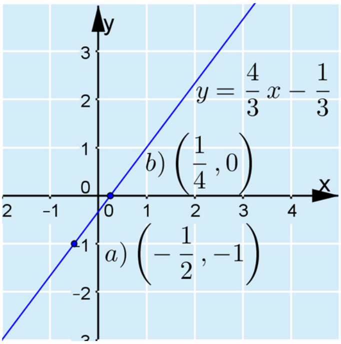
Suoran yhtälö on muotoa $y = 3x + b$. Sijoitetaan pisteen (3, 3) koordinaatit suoran yhtälöön ja ratkaistaan siitä vakiotermi b.

$$\begin{aligned} 3 &= 3 \cdot 3 + b \\ 3 &= 9 + b \\ 3 - 9 &= b \\ b &= -6 \end{aligned}$$

Suoran yhtälö on $y = 3x - 6$.

Vastaus: $y = 3x - 6$

K4. Piirretään suora $y=\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}$ sopivalla ohjelmalla. Sijoitetaan piste $\left(-\frac{1}{2},-1\right)$ koordinaatistoon ja määritetään suoran ja x-akselin leikkauspiste.



a) Jos piste $\left(-\frac{1}{2},-1\right)$ on suoralla $y=\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}$, sen koordinaatit toteuttavat suoran yhtälön. Lasketaan x-koordinaattia $-\frac{1}{2}$ vastaava y-koordinaatti.

$$y=\frac{\overset{2}{\cancel{4}}}{3}\cdot\left(-\frac{1}{\underset{1}{\cancel{2}}}\right)-\frac{1}{3}=-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=-1$$

y-koordinaatti on -1, joten piste $\left(-\frac{1}{2},-1\right)$ on suoralla.

Vastaus: on

b) Suora leikkaa x-akselin pisteessä, jonka y-koordinaatti on 0. Sijoitetaan $y = 0$ suoran yhtälöön ja ratkaistaan siitä x-koordinaatti.

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{4}{3}x - \frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3}x &= -\frac{1}{3} && \| \cdot 3 \\ -4x &= -1 && \| :(-4) \\ x &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Suora leikkaa x-akselin pisteessä $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$.

Vastaus: $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$

K5. **a)** Funktion lausekkeessa $39x + 13$ luku 39 kerrotaan maton pituudella x, joten luku 39 on maton metrihinta (€/kg).

Vastaus: metrihintaa 39 €/m

b) $f(1{,}8) = 39 \cdot 1{,}8 + 13 = 83{,}2$

Tulos $f(1{,}8) = 83{,}2$ tarkoittaa, että 1,8 metriä pitkä matto maksaa 83,20 euroa.

Vastaus: $f(1{,}8) = 83{,}2$. 1,8 m pitkä matto maksaa 83,20 €.

c) Ratkaistaan muuttuja x yhtälöstä $f(x) = 122{,}20$.

$$\begin{aligned} 39x + 13 &= 122{,}20 \\ 39x &= 109{,}20 && \| :39 \\ x &= 2{,}80 \end{aligned}$$

Tulos tarkoittaa, että 122,20 €:lla saa 2,80 metriä pitkän maton.

Vastaus: $x = 2{,}80$. 122,20 eurolla saa 2,80 m pitkän maton.

K6. **a)** Lasketaan ensin Olivian ajonopeus.

$$v = \frac{s}{t} = \frac{75\ \text{km}}{2{,}5\ \text{h}} = 30\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Matka s on nopeuden v ja ajan t tulo, eli $s = vt$. Sijoitetaan $v = 30$ km/h ja aika $t = 1{,}5$ h matkan s kaavaan.

$s = 30\ \text{km/h} \cdot 1{,}5\ \text{h} = 45\ \text{km}$

Olivia ajoi 45 km 1,5 tunnissa.

Vastaus: 45 km

b) Aika t on matkan s ja nopeuden v osamäärä, eli $t = \frac{s}{v}$. Sijoitetaan $s = 15$ km ja $v = 30$ km/h ajan t kaavaan.

$$t = \frac{15\ \text{km}}{30\ \text{km/h}} = 0{,}5\ \text{h}$$

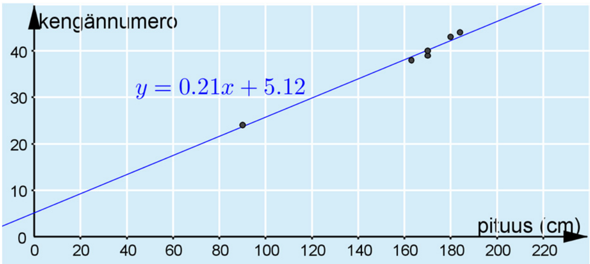
Muutetaan 0,5 tuntia minuuteiksi.

$0{,}5\ \text{h} = 0{,}5 \cdot 60\ \text{min} = 30\ \text{min}$

Olivialta kului 30 minuuttia 15 kilometrin matkaan.

Vastaus: 30 min

K7. Videossa https://vimeo.com/210765260/a0d35e8b8b näytetään, miten tehtävä voidaan ratkaista sopivalla ohjelmalla.



Suoran yhtälö on $y = 0{,}21x + 5{,}12$, jossa x on henkilön pituus senttimetreinä ja y kengännumero.

a) Sijoitetaan $x = 200$ ohjelmalla saatuun suoran yhtälöön, jolloin $y = 46{,}348\ldots \approx 46$.

200 cm pitkän henkilön kengännumero on 46.

Vastaus: 46

b) Sijoitetaan $x = 50$ ohjelmalla saatuun suoran yhtälöön, jolloin $y = 15{,}428\ldots \approx 15$

Mallin mukaan 50 cm pitkän vastasyntyneen kengännumero on 15.

Vastaus: 15

c) Sijoitetaan oma pituus senttimetreinä ohjelmalla saatuun suoran yhtälöön muuttujan x paikalle. Verrataan saatua tulosta todelliseen kengännumeroon.

Vastaus: –

K8. Auto A kuluttaa bensiiniä $\frac{5{,}0\ \mathrm{l}}{100\ \mathrm{km}} = 0{,}05\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{km}}$. Bensiinilitran hinta on 1,50 €, joten autolla A bensiinikulut yhtä kilometriä kohti ovat

1,50 € · 0,05 = 0,075 €.

Auto B kuluttaa bensiiniä $\frac{8{,}3\ \mathrm{l}}{100\ \mathrm{km}} = 0{,}083\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{km}}$. Autolla B bensiinikulut yhtä kilometriä kohti ovat

1,50 € · 0,083 = 0,1245 €.

Jos Paavo ajaa x kilometriä vuodessa autolla A 15 vuoden ajan, niin bensiinikulut ovat euroina 15 · x · 0,075 = 1,125x.

Vastaavat kulut autolla B ovat 15 · x · 0,1245 = 1,8675x.

Kun lisätään kuluihin auton ostohinta, auton A kulut ovat yhteensä 12 000 + 1,125x ja auton B kulut 6000 + 1,8675x.

Merkitään autojen kulut yhtä suuriksi ja ratkaistaan yhtälöstä kilometrien määrä x.

$$\begin{aligned}
12\,000 + 1{,}125x &= 6000 + 1{,}8675x \\
1{,}125x - 1{,}8675x &= 6000 - 12\,000 \\
-0{,}7425x &= -6000 \qquad \| :(-0{,}7425) \\
x &= 8080{,}808... \\
x &\approx 8100
\end{aligned}$$

Auto A kannattaa valita, jos vuosittainen kilometrimäärä on vähintään 8100 km.

Vastaus: vähintään 8100 km

K9. Muodostetaan lauseke pisteiden (2, −1 + a) ja (−4 + a, −5) kautta kulkevan suoran kulmakertoimelle.

$$k=\frac{-5-(-1+a)}{(-4+a)-2}=\frac{-4-a}{-6+a}$$

Koska vakiotermi on −2, suoran yhtälö on muotoa $y = kx - 2$. Sijoitetaan pisteen (2, −1 + a) koordinaatit $x = 2$, $y = -1 + a$ ja kulmakerroin $k=\frac{-4-a}{-6+a}$ suoran yhtälöön $y = kx - 2$. Ratkaistaan saadusta yhtälöstä vakio a.

$$
\begin{aligned}
-1+a&=\frac{-4-a}{-6+a}\cdot 2-2 \qquad \| \cdot(-6+a)\\
(-6+a)(-1+a)&=2(-4-a)-2(-6+a)\\
6-6a-a+a^2&=-8-2a+12-2a\\
a^2-7a+6&=-4a+4\\
a^2-3a+2&=0
\end{aligned}
$$

Sijoitetaan kertoimet $a = 1$, $b = -3$ ja $c = 2$ toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan ja sievennetään lauseke.

$$a=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$a=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot1\cdot2}}{2\cdot1}$$

$$a=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}$$

$$a=\frac{3\pm1}{2}$$

$$a=\frac{3+1}{2}=2 \text{ tai } a=\frac{3-1}{2}=1$$

Tutkitaan kumpikin vakion *a* arvo erikseen.

Jos $a = 1$, suoran kulmakerroin on

$$k = \frac{-4-a}{-6+a} = \frac{-4-1}{-6+1} = \frac{-5}{-5} = 1.$$

Tällöin suoran yhtälö on $y = x - 2$.

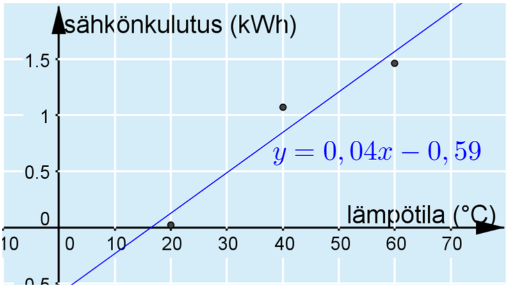
Jos $a = 2$, suoran kulmakerroin on

$$k = \frac{-4-a}{-6+a} = \frac{-4-2}{-6+2} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}.$$

Tällöin suoran yhtälö on $y = \frac{3}{2}x - 2.$

Vastaus: Kun $a = 1$, niin $y = x - 2$ tai kun $a = 2$, niin $y = \frac{3}{2}x - 2$.

K10. **a)** Videossa https://vimeo.com/210765723/be720c2636 näytetään, miten pisteisiin (20; 0.02), (40; 1.07) ja (60; 1,46) voidaan sovittaa suora sopivalla ohjelmalla.



Lineaarinen malli on $y = 0{,}04x - 0{,}59$, jossa x on lämpötila.

Vastaus: $y = 0{,}04x - 0{,}59$

b) Sijoitetaan $x = 95$ ohjelmalla saatuun suoran yhtälöön, jolloin $y = 2{,}83$.

Sähköä kuluisi 2,83 kWh 95 °C:n pesuohjelmalla.

Vastaus: 2,83 kWh

c) Veden kiehumispiste on 100 °C, joten nestemäisen veden lämpötila ei voi nousta 110 °C:n lämpötilaan. Tällaista pesuohjelmaa ei siis voi olla, joten malli ei ole käyttökelpoinen, kun $x > 100$.

Vastaus: ei voi

K11. **a)** $2^5 \cdot 2^3 = 2^{5+3} = 2^8$

Vastaus: 2^8

b) $\dfrac{2^5}{2^3} = 2^{5-3} = 2^2$

Vastaus: 2^2

c) $(2^3)^4 = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12}$

Vastaus: 2^{12}

d) $8 \cdot 2^0 = 2^3 \cdot 1 = 2^3$

Vastaus: 2^3

e) $\dfrac{2^6}{16} = \dfrac{2^6}{2^4} = 2^{6-4} = 2^2$

Vastaus: 2^2

K12. **a)** $9^3 \cdot 9^4 \cdot 9^{-6} = 9^{3+4-6} = 9^1 = 9$

Vastaus: 9

b) $\dfrac{(5^3)^2}{5^3 \cdot 5^2} = \dfrac{5^{3\cdot 2}}{5^{3+2}} = \dfrac{5^6}{5^5} = 5^{6-5} = 5^1 = 5$

Vastaus: 5

c) $4^5 \cdot 0{,}5^5 = (4 \cdot 0{,}5)^5 = 2^5 = 32$

Vastaus: 32

d) $\dfrac{21^4}{7^4} = \left(\dfrac{21}{7}\right)^4 = 3^4 = 81$

Vastaus: 81

e) $4 \cdot 10^{-5} \cdot 10^8 = 4 \cdot 10^{-5+8} = 4 \cdot 10^3 = 4 \cdot 1000 = 4000$

Vastaus: 4000

K13. **a)** $6{,}3675 \cdot 10^3 = 6367{,}5$
$1{,}081 \cdot 10^{12} = 1\,081\,000\,000\,000$

Vastaus: 6367,5 km ja 1 081 000 000 000 km^3

b) $5{,}8 \cdot 10^{-3} = 0{,}0058$
$1 \cdot 10^{-6} = 0{,}000\,001$

Vastaus: 0,0058 kg ja 0,000 001 m

K14. **a)** $50\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000 = 5 \cdot 10^{19}$

Vastaus: $5 \cdot 10^{19}$

b) $10\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000 = 1 \cdot 10^{22} = 10^{22}$

Vastaus: 10^{22}

c) $0{,}000\ 004 = 4 \cdot 10^{-6}$
$0{,}000\ 012 = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$

Vastaus: $4 \cdot 10^{-6}$ m ja $1{,}2 \cdot 10^{-5}$ m

K15. **a)** Kirjoitetaan yhtälön molemmat puolet kantaluvun 4 potensseina ja ratkaistaan yhtälö.

$$\begin{aligned} 4^x &= 64 \\ 4^x &= 4^3 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Vastaus: $x = 3$

b) Muokataan yhtälöä ensin siten, että yhtälön vasemmalla puolella on vain eksponenttilauseke. Ratkaistaan sitten yhtälö samankantaisten potenssien avulla.

$$\begin{aligned} 6 \cdot 3^x &= 54 \quad \| :6 \\ 3^x &= 9 \\ 3^x &= 3^2 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Vastaus: $x = 2$

c) Ratkaistaan yhtälö potenssien laskusääntöjen avulla.

$$\begin{aligned} \frac{5^x}{25} &= 125 \\ \frac{5^x}{5^2} &= 5^3 \\ 5^{x-2} &= 5^3 \\ x - 2 &= 3 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Vastaus: $x = 5$

d) Kirjoitetaan yhtälön molemmat puolet kantaluvun 2 potensseina ja ratkaistaan yhtälö.

$$\begin{aligned} 8\cdot 2^x &= 4 \\ 2^3\cdot 2^x &= 2^2 \\ 2^{3+x} &= 2^2 \\ 3+x &= 2 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Vastaus: $x=-1$

K16. **a)** Ratkaistaan yhtälö logaritmia käyttäen.

$$\begin{aligned} 5^x &= 15 \\ x &= \log_5 15 \\ x &= 1{,}682... \\ x &\approx 1{,}68 \end{aligned}$$

Vastaus: $x=\log_5 15 \approx 1{,}68$

b) Muokataan yhtälöä ensin siten, että yhtälön vasemmalla puolella on vain eksponenttilauseke. Ratkaistaan sitten yhtälö logaritmia käyttäen.

$$\begin{aligned} 3^x+9 &= 25 \\ 3^x &= 16 \\ x &= \log_3 16 \\ x &= 2{,}523... \\ x &\approx 2{,}52 \end{aligned}$$

Vastaus: $x=\log_3 16 \approx 2{,}52$

c) Muokataan yhtälöä ensin siten, että yhtälön vasemmalla puolella on vain eksponenttilauseke. Ratkaistaan sitten yhtälö logaritmia käyttäen.

$$\begin{aligned} 3\cdot 2^x &= 36 \qquad \| :3 \\ 2^x &= 12 \\ x &= \log_2 12 \\ x &= 3{,}584... \\ x &\approx 3{,}58 \end{aligned}$$

Vastaus: $x = \log_2 12 \approx 3{,}58$

d) Muokataan yhtälön oikeata puolta ja ratkaistaan sitten yhtälö logaritmin avulla.

$$\begin{aligned} 4^x &= \left(3^2\right)^4 \\ 4^x &= 3^{2\cdot 4} \\ 4^x &= 3^8 \\ 4^x &= 6561 \\ x &= \log_4 6561 \\ x &= 6{,}339... \\ x &\approx 6{,}34 \end{aligned}$$

Vastaus: $x = \log_4 6561 \approx 6{,}34$

K17. **a)** $\sqrt{16} = 4$, koska $4^2 = 4 \cdot 4 = 16$ ja $4 \geq 0$.

Vastaus: 4

b) $\sqrt[4]{16} = 2$, koska $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ ja $2 \geq 0$.

Vastaus: 2

c) $\sqrt[3]{27} = 3$, koska $3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$.
$\sqrt[5]{1} = 1$, koska $1^5 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$.

Siis $\sqrt[3]{27} + \sqrt[5]{1} = 3 + 1 = 4$.

Vastaus: 4

d) $\sqrt[4]{81} = 3$, koska $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$ ja $3 \geq 0$.
$\sqrt[6]{0} = 0$, koska $0^6 = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$ ja $0 \geq 0$.

Siis $\sqrt[4]{81} - \sqrt[6]{0} = 3 + 0 = 3$.

Vastaus: 3

K18. **a)** Etsitään lukuja, joiden toinen potenssi on 49.

$$x^2 = 49$$
$$x = \pm\sqrt{49}$$
$$x = \pm 7$$

Vastaus: $x = \pm 7$

b) Etsitään luku, jonka viides potenssi on −32.

$$x^5 = -32$$
$$x = \sqrt[5]{-32}$$
$$x = -2$$

Vastaus: $x = -2$

c) Muokataan yhtälö muotoon, jossa vasemmalla puolella on ainoastaan potenssimerkintä.

$$2x^3 = 250 \qquad \|:2$$
$$x^3 = 125$$
$$x = \sqrt[3]{125}$$
$$x = 5$$

Vastaus: $x = 5$

d) Muokataan yhtälö muotoon, jossa vasemmalla puolella on ainoastaan potenssimerkintä.

$$x^4 + 5 = 86$$
$$x^4 = 81$$
$$x = \pm\sqrt[4]{81}$$
$$x = \pm 3$$

Vastaus: $x = \pm 3$

K19. **a)** Muokataan yhtälö muotoon, jossa vasemmalla puolella on ainoastaan potenssimerkintä.

$$\begin{aligned} -2x^3+4&=56 \\ -2x^3&=52 \qquad \|:(-2) \\ x^3&=-26 \\ x&=\sqrt[3]{-26} \\ x&=-2,962... \\ x&\approx -3,0 \end{aligned}$$

Vastaus: $x=\sqrt[3]{-26}\approx -3,0$

b) Muokataan yhtälö muotoon, jossa vasemmalla puolella on ainoastaan potenssimerkintä.

$$\begin{aligned} 4(x^6-3)&=80 \qquad \|:4 \\ x^6-3&=20 \\ x^6&=23 \\ x&=\pm\sqrt[6]{23} \\ x&=\pm 1,686... \\ x&\approx \pm 1,7 \end{aligned}$$

Vastaus: $x=\pm\sqrt[6]{23}\approx \pm 1,7$

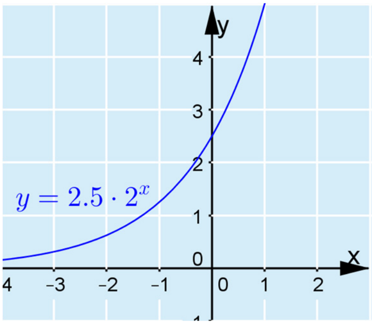
c) Muokataan yhtälö muotoon, jossa vasemmalla puolella on ainoastaan potenssimerkintä.

$$\begin{aligned} x^6+123&=-5x^6-890 \\ 6x^6&=-1013 \qquad \|:6 \\ x^6&=-\frac{1013}{6} \end{aligned}$$

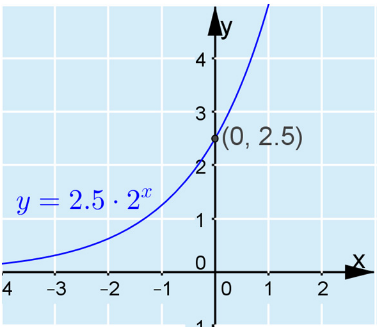
Luvun parillinen potenssi ei voi olla negatiivinen, joten yhtälöllä ei ole ratkaisua.

Vastaus: ei ratkaisua

K20. Piirretään funktion $f(x) = 2,5 \cdot 2^x$ kuvaaja.



a) Kuvan perusteella funktion f kuvaaja leikkaa y-akselin pisteessä (0; 2,5).

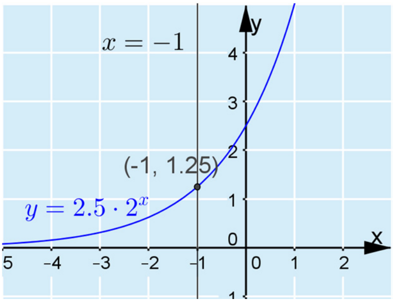


Tarkistetaan sijoittamalla $x = 0$ funktion f lausekkeeseen.

$y = f(0) = 2,5 \cdot 2^0 = 2,5$

Vastaus: (0; 2,5)

b) Määritetään funktion f kuvaajan ja suoran $x = -1$ leikkauspiste. Leikkauspisteen y-koordinaatti on kysytty funktion arvo.

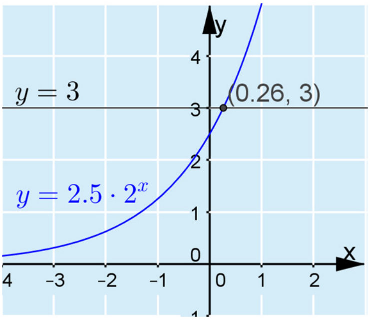


Leikkauspiste on (−1; 1,25).

Tarkistetaan sijoittamalla $x = -1$ funktion f lausekkeeseen.
$y = f(-1) = 2{,}5 \cdot 2^{-1} = 1{,}25$

Vastaus: $f(-1) = 1{,}25$

c) Määritetään suoran $y = 3$ ja funktion f kuvaajan leikkauspiste. Leikkauspisteen x-koordinaatti on kysytty muuttujan x arvo.



Tarkistetaan yhtälön avulla.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 3 \\
2{,}5 \cdot 2^x &= 3 \qquad \| : 2{,}5 \\
2^x &= 1{,}2 \\
x &= \log_2 1{,}2 \\
x &= 0{,}263\ldots \\
x &\approx 0{,}26
\end{aligned}
$$

Kysytty muuttujan arvo on $x = \log_2 1{,}2 \approx 0{,}26$.

Vastaus: $x = \log_2 1{,}2 \approx 0{,}26$

K21. Bakteerien määrä 2,6-kertaistuu aina yhtä pitkässä ajassa, joten bakteerikannan kasvu on eksponentiaalista. Eksponentiaalisen mallin muutoskerroin $q = 2{,}6$. Bakteereita on nyt 5000, joten alkuperäinen arvo $a = 5000$. Bakteerien määrä noudattaa siis mallia $f(x) = 5000 \cdot 2{,}6^x$, jossa x on aika tunteina.

a) Lasketaan funktion f arvo kohdassa $x = 9$.

$f(9) = 5000 \cdot 2{,}6^9 = 27147518{,}39 \approx 2{,}7 \cdot 10^7$

Bakteereita on noin $2{,}7 \cdot 10^7$ yhdeksän tunnin kuluttua.

Vastaus: $2{,}7 \cdot 10^7$ kpl

b) Lasketaan funktion f arvo kohdassa $x = -7$.

$f(-7) = 5000 \cdot 2{,}6^{-7} = 6{,}225\ldots \approx 6$

Bakteereita oli 6 seitsemän tuntia sitten.

Vastaus: 6 kpl

c) Muodostetaan yhtälö miljoonan bakteerin määrälle ja ratkaistaan siitä kysytty aika x.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 1\,000\,000 \\
5000 \cdot 2{,}6^x &= 1\,000\,000 \quad \| :5000 \\
2{,}6^x &= 200 \\
x &= \log_{2{,}6} 200 \\
x &= 5{,}545\ldots \\
x &\approx 6
\end{aligned}
$$

Bakteerien määrä ylittää miljoonan noin 6 tunnin kuluttua.

Vastaus: 6 tunnin kuluttua

K22. **a)** Koska ilmanpaine alenee yhtä monta prosenttia joka kilometrillä, ilmanpaineen aleneminen on eksponentiaalista.

Kun noustaan kilometri ylöspäin, ilmanpaine on
100 % − 13,3 % = 86,7 % alkuperäisestä, joten ilmanpaine muuttuu joka kilometrillä 0,867-kertaiseksi. Muutoskerroin $q = 0{,}867$ ja alkuperäinen arvo $a = 1{,}01$ (baaria). Ilmanpaine noudattaa siis mallia $f(x) = 1{,}01 \cdot 0{,}867^x$, jossa x on korkeus kilometreinä.

Ilmanpaineen laskemiseksi on muutettava tunturin korkeus kilometreiksi:
1324 m = 1,324 km.

Lasketaan funktion f arvo, kun $x = 1{,}324$.

$$f(1{,}324) = 1{,}01 \cdot 0{,}867^{1{,}324} = 0{,}8361... \approx 0{,}836$$

Ilmanpaine Haltin huipulla on 0,836 baaria.

Vastaus: 0,836 baaria

b) Muodostetaan yhtälö Taivaskeron huipulla mitatulle ilmanpaineelle ja ratkaistaan siitä korkeus x.

$$\begin{aligned}
f(x) &= 0{,}8999 \\
1{,}01 \cdot 0{,}867^x &= 0{,}8999 \qquad \| :1{,}01 \\
0{,}867^x &= 0{,}8909... \\
x &= \log_{0{,}867}(0{,}8909...) \\
x &= 0{,}8087... \\
x &\approx 0{,}809
\end{aligned}$$

Taivaskeron huipun korkeus on 0,809 km eli 809 m.

Vastaus: 809 m

K23. Kalakanta kasvaa vuosittain aina yhtä monta prosenttia, joten kasvu on eksponentiaalista. Merkitään alkuperäistä kalakantaa kirjaimella a (> 0).

Seuraavan vuoden kalakanta on 100 % + 11 % = 111 % tarkasteltavan vuoden kalakannasta, joten kalakanta kasvaa joka vuosi 1,11-kertaiseksi. Muutoskerroin on siten $q = 1{,}11$.

Kalakannan suuruus noudattaa siis mallia $f(x) = a \cdot 1{,}11^x$, jossa x on kulunut aika vuosina.

Kun kalakanta on kaksinkertaistunut, sen suuruus on $2a$. Muodostetaan yhtälö kalakannan suuruudelle ja ratkaistaan siitä vuosien määrä x.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 2a \\
a \cdot 1{,}11^x &= 2a \quad \| : a \\
1{,}11^x &= 2 \\
x &= \log_{1{,}11} 2 \\
x &= 6{,}641\ldots \\
x &\approx 7
\end{aligned}
$$

Kalakannan kaksinkertaistumiseen kuluu aikaa noin 7 vuotta.

Vastaus: 7 vuoden kuluttua

K24. Ihmisen luuston soluista uusiutuu 5 % joka vuosi, joten muutos on eksponentiaalista. Merkitään luuston solujen alkuperäistä määrää kirjaimella a (> 0).

Soluista jää uusiutumatta 95 % joka vuosi, joten uusiutumattomien solujen määrä tulee joka vuosi 0,95-kertaiseksi. Muutoskerroin on siten $q = 0{,}95$.

Uusiutumattomien solujen määrä noudattaa siis mallia $f(x) = a \cdot 0{,}95^x$, jossa x on kulunut aika vuosina.

Kun soluista on uusiutunut 90 %, soluista on uusiutumatta 10 % eli $0{,}10a$. Muodostetaan yhtälö uusiutumattomien solujen määrälle ja ratkaistaan siitä vuosien määrä x.

$$\begin{aligned} f(x) &= 0{,}10a \\ a \cdot 0{,}95^x &= 0{,}10a \quad \| : a \\ 0{,}95^x &= 0{,}10 \\ x &= \log_{0{,}95} 0{,}10 \\ x &= 44{,}890\ldots \\ x &\approx 45 \end{aligned}$$

Kestää noin 45 vuotta, että 90 % soluista on uusiutunut.

Vastaus: 45 vuotta

K25. Säteilyn määrä vähenee puoleen aina yhtä pitkässä ajassa, joten väheneminen on eksponentiaalista. Puoliintumisaika on 36 vuotta, joten x vuodessa puoliintumisia tapahtuu $\frac{x}{36}$ kpl. Muutoskerroin q on puoliintumisajan avulla ilmoitettuna 0,5.

Alkuperäisen arvon ja muutoksien jälkeen saavutetun arvon tulee olla samassa yksikössä. Muunnetaan 50 Sv/h päivän säteilyksi:

$$50\frac{\text{Sv}}{\text{h}} = 50\cdot 24\frac{\text{Sv}}{\text{d}} = 1200\frac{\text{Sv}}{\text{d}}.$$

Säteilyn määrä päivässä noudattaa siis mallia $f(x) = 1200\cdot 0{,}5^{\frac{x}{36}}$, jossa x on aika vuosina.

Muodostetaan yhtälö säteilyn määrälle ja ratkaistaan siitä aika x.

$$\begin{aligned}
f(x) &= 0{,}0027 \\
1200\cdot 0{,}5^{\frac{x}{36}} &= 0{,}0027 && \| :1200 \\
0{,}5^{\frac{x}{36}} &= 0{,}000\,002\,25 \\
\frac{x}{36} &= \log_{0,5} 0{,}000\,002\,25 && \| \cdot 36 \\
x &= 36\cdot \log_{0,5} 0{,}000\,002\,25 \\
x &= 675{,}419... \\
x &\approx 680
\end{aligned}$$

Aikaa kuluu noin 680 vuotta.

Vastaus: 680 vuotta

K26. Lineaarisen mallin mukaan $y = kx + b$, jossa x on aika vuosina ja y lintujen määrä parvessa. Vuodessa populaatio oli kasvanut 203 − 194 = 9 yksilöä, joten suoran kulmakerroin on

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{9}{1} = 9 .$$

Sijoitetaan vuosien määrä $x = 0$ ja vastaava lintujen määrä $y = 194$ suoran yhtälöön $y = 9x + b$. Ratkaistaan saadusta yhtälöstä vakiotermi b.

$$194 = 9 \cdot 0 + b$$
$$b = 194$$

Lineaarinen malli havainnoille on siis $y = 9x + 194$.

Eksponentiaalisen mallin mukaan $y = a \cdot q^x$, jossa x on aika vuosina ja y lintujen määrä parvessa. Populaatio kasvoi vuodessa 194 linnusta 203 lintuun, joten muutoskerroin $q = \frac{203}{194}$. Alkuperäinen lintujen määrä a on ensimmäisessä laskennassa havaittu määrä eli $a = 194$.

Eksponentiaalinen malli havainnoille on siten $y = 194 \cdot \left(\frac{203}{194}\right)^x$.

Lasketaan ennusteet lintujen määrälle viiden vuoden kuluttua ensimmäisestä laskennasta.

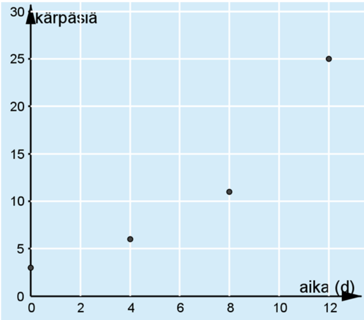
Lineaarinen malli: $y = 9 \cdot 5 + 194 = 239$

Eksponentiaalinen malli: $y = 194 \cdot \left(\frac{203}{194}\right)^5 = 243{,}373...$

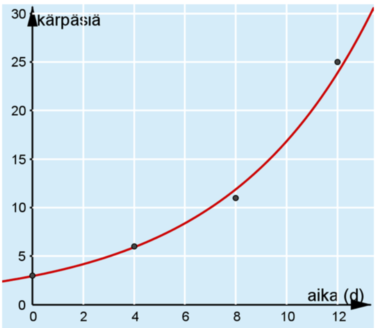
Havaittu arvo oli 230 lintua, joten lineaarinen malli antoi tarkemman ennusteen lintupopulaation kehityksestä.

Vastaus: $y = 9x + 194$ ja $y = 194 \cdot \left(\frac{203}{194}\right)^x$, lineaarinen

K27. Merkitään biojätteen hävittämisestä kulunutta aikaa vuorokausina kirjaimella x ja kärpästen määrää kirjaimella y. Videossa https://vimeo.com/210765708/ea99a79acf näytetään, miten pisteisiin voidaan sovittaa käyrä sopivalla ohjelmalla.



Kärpästen määrä näyttäisi suurin piirtein kaksinkertaistuvan neljän päivän välein, joten kasvu on likimain eksponentiaalista. Sovitetaan pisteisiin eksponentiaalinen malli.



Ohjelma antaa funktioksi $f(x) = 2{,}95 \cdot 1{,}19^x$.

Sijoitetaan $x = 30$ ohjelmalla saatuun funktion lausekkeeseen, jolloin $f(30) = 548{,}365\ldots \approx 550$.

Kuukauden kuluttua biojätteen hävittämisestä kärpäsiä on noin 550.

Vastaus: $f(x) = 2{,}95 \cdot 1{,}19^x$, 550 kärpästä

K28. Merkitään talletuksesta kulunutta aikaa vuosina kirjaimella x. Tilillä oleva pääoma kasvaa eksponentiaalisesti, joten pääoma noudattaa mallia $f(x) = a \cdot q^x$. Talletettu summa on 1000 euroa, joten alkuperäinen arvo $a = 1000$.

Muuttujan arvolla $x = 18$ funktio f saa arvon 3000. Ratkaistaan yhtälöstä $f(18) = 3000$ muutoskerroin q.

$$
\begin{aligned}
1000 \cdot q^{18} &= 3000 \qquad \| : 1000 \\
q^{18} &= 3 \\
q &= _{(}\pm_{)} \sqrt[18]{3} \\
q &= 1{,}06293... \\
q &\approx 1{,}063
\end{aligned}
$$

Pääoman tulee 1,063-kertaistua jokaisen vuoden aikana, joten pääoman tilillä tulee kasvaa noin 6,3 % vuodessa.

Vastaus: 6,3 %

K29. Keskimääräisellä kasvuprosentilla tarkoitetaan prosentuaalista muutosta, joka olisi tapahtunut vuosittain, jos hinta olisi noussut joka vuosi yhtä monta prosenttia. Tällainen kasvu on eksponentiaalista. Kuukausikortin hinta noudattaa siis mallia $f(x) = a \cdot q^x$, jossa alkuperäinen arvo $a = 29$ ja x vuodesta 2002 kulunut aika vuosina.

Vuodesta 2002 vuoteen 2017 oli kulunut 2017 − 2002 = 15 vuotta. Hinta 15 vuoden kuluttua oli 49 €. Ratkaistaan yhtälöstä $f(15) = 49$ muutoskerroin q.

$$29 \cdot q^{15} = 49 \qquad \|:29$$
$$q^{15} = \frac{49}{29}$$
$$q = \sqrt[15]{\frac{49}{29}}$$
$$q = 1{,}0355...$$
$$q \approx 1{,}036$$

Hinta kasvoi noin 1,036-kertaiseksi vuosittain, joten se kasvoi noin 3,6 % vuodessa.

Vastaus: 3,6 %

K30. Liikevaihto kasvoi joka vuosi yhtä monta prosenttia, joten kasvu oli eksponentiaalista. Liikevaihto noudattaa siis mallia $f(x) = a \cdot q^x$, jossa x on kulunut aika vuosina.

Alkuperäistä liikevaihtoa ei tunneta, joten merkitään sitä kirjaimella a (> 0). Kahdessakymmenessä vuodessa liikevaihto kymmenkertaistui eli kasvoi arvoon $10a$. Ratkaistaan yhtälöstä $f(20) = 10a$ muutoskerroin q.

$$a \cdot q^{20} = 10a \qquad \| : a$$
$$q^{20} = 10$$
$$q = _{(}\pm_{)} \sqrt[20]{10}$$
$$q = 1{,}1220...$$
$$q \approx 1{,}122$$

Liikevaihto kasvoi noin 1,122-kertaiseksi jokaisen vuoden aikana, joten liikevaihto kasvoi noin 12,2 % vuodessa.

Vastaus: 12,2 %

K31. Radioaktiivinen aine vähenee eksponentiaalisesti, joten cesium-137-isotoopin määrä noudattaa mallia $f(x) = a \cdot q^x$, jossa x on onnettomuudesta kulunut aika vuosina.

Alkuperäistä radioaktiivisen aineen määrää ei tunneta, joten merkitään sitä kirjaimella a (> 0). Aineen määrä puolittuu 30 vuodessa, joten ajan arvoa $x = 30$ vastaa aineen funktion f arvo $0{,}5a$. Ratkaistaan yhtälöstä $f(30) = 0{,}5a$ muutoskerroin q.

$$\begin{aligned} a \cdot q^{30} &= 0{,}5a \quad \| :a \\ q^{30} &= 0{,}5 \\ q &= _{(\pm)}\sqrt[30]{0{,}5} \\ q &= 0{,}977... \end{aligned}$$

Cesium-137-isotoopin määrä noudattaa siis mallia $f(x) = a \cdot 0{,}977\ldots^x$. Aineen määrä 8 vuotta onnettomuuden jälkeen saadaan sijoittamalla $x = 8$ funktion f lausekkeeseen.

$f(8) = a \cdot 0{,}977\ldots^8 = 0{,}831\ldots a \approx 0{,}83a$

Cesium-137-isotoopin määrä muuttuu kahdeksassa vuodessa noin 0,83-kertaiseksi, joten aineesta on jäljellä noin 83 %.

Vastaus: 83 %

K32. **a)** Olkoon osakkeen arvo alussa a. Ensimmäisen muutoksen jälkeen arvo oli pienentynyt 35 %, joten siitä oli jäljellä 65 %. Osakkeen arvo oli siis muuttunut 0,65-kertaiseksi eli arvoon 0,65a. Kaikki muutokset voidaan laskea vastaavalla tavalla, joten osakkeen arvo neljän päivän jälkeen oli

$$0{,}65 \cdot 0{,}81 \cdot 0{,}91 \cdot 0{,}99a = 0{,}474...a \approx 0{,}47a.$$

Osakkeen arvo muuttui kokonaisuudessaan noin 0,47-kertaiseksi, joten se aleni 100 % − 47 % = 53 %.

Vastaus: 53 %

b) Keskimääräisellä muutosprosentilla tarkoitetaan prosentuaalista muutosta, joka olisi tapahtunut päivittäin, jos arvo olisi muuttunut joka päivä yhtä monta prosenttia. Tällainen muutos on eksponentiaalista. Osakkeen arvo noudattaa siis mallia $f(x) = a \cdot q^x$, jossa x on kulunut aika vuorokausina.

Osakkeen alkuperäistä arvoa ei tunneta, joten merkitään sitä kirjaimella a (> 0). Edellisen kohdan perusteella osakkeen arvo oli 0,474…a, kun aikaa oli kulunut neljä vuorokautta. Ratkaistaan yhtälöstä $f(4) = 0{,}474\ldots a$ muutoskerroin q.

$$\begin{aligned} a \cdot q^4 &= 0{,}474...a \qquad \| : a \\ q^4 &= 0{,}474... \\ q &= _{(\pm)}\sqrt[4]{0{,}474...} \\ q &= 0{,}829... \\ q &\approx 0{,}83 \end{aligned}$$

Osakkeen arvo muuttui vuorokaudessa keskimäärin noin 0,83-kertaiseksi, joten arvo laski 100 % − 83 % = 17 % vuorokaudessa.

Vastaus: 17 %

K33. **a)** Aritmeettisen lukujonon yleinen jäsen on muotoa $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$.
Ensimmäinen jäsen $a_1 = 1$ ja erotusluku $d = 4 - 1 = 3$, joten yleinen jäsen on
$a_n = 1 + (n-1) \cdot 3 = 1 + 3n - 3 = 3n - 2$.

Lasketaan kysytyt jäsenet yleisen jäsenen lausekkeen avulla.

$a_1 = 1$

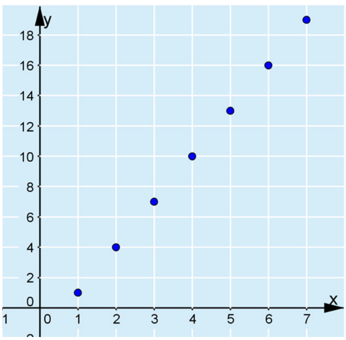
$a_2 = 4$

$a_3 = 3 \cdot 3 - 2 = 7$

$a_4 = 3 \cdot 4 - 2 = 10$

$a_5 = 3 \cdot 5 - 2 = 13$

Lukujonon havainnollistus koostuu erillisistä pisteistä, joiden x-koordinaatti on jäsenen järjestysluku ja y-koordinaatti jäsen. Ensimmäinen jäsen $a_1 = 1$, joten ensimmäinen piste on (1, 1). Seuraavan pisteen x-koordinaatti on aina yhden suurempi ja y-koordinaatti erotusluvun $d = 3$ verran suurempi.



Vastaus: 1, 4, 7, 10 ja 13

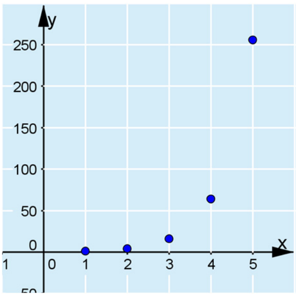
b) Geometrisen lukujonon yleinen jäsen on muotoa $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

Ensimmäinen jäsen a_1 = 1 ja suhdeluku $q = \frac{4}{1} = 4$, joten yleinen jäsen on $a_n = 1 \cdot 4^{n-1} = 4^{n-1}$.

Lasketaan kysytyt jäsenet yleisen jäsenen lausekkeen avulla.

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 4$$
$$a_3 = 4^{3-1} = 4^2 = 16$$
$$a_4 = 4^{4-1} = 4^3 = 64$$
$$a_5 = 4^{5-1} = 4^4 = 256$$

Havainnollistetaan lukujonoa koordinaatistossa. Ensimmäinen jäsen a_1 = 1, joten ensimmäinen piste on (1, 1). Seuraavan pisteen x-koordinaatti on aina yhden suurempi ja y-koordinaatti q- eli nelinkertainen.



Vastaus: 1, 4, 16, 64 ja 256

K34. **a)** $a_3 = 40 \cdot 3 + 30 = 150$

Tulos $a_3 = 150$ tarkoittaa, että tarjoilu maksaa 150 €, jos tarjoilun kesto on kahden ja kolmen tunnin väliltä.

Vastaus: $a_3 = 150$. Tarjoilu maksaa 150 €, jos tarjoilun kesto on 2−3 h.

b) Ratkaistaan järjestysluku n yhtälöstä $a_n = 270$.

$$\begin{aligned} a_n &= 270 \\ 40n + 30 &= 270 \\ 40n &= 240 \quad \| :40 \\ n &= 6 \end{aligned}$$

Tulos tarkoittaa, että tarjoilu maksaa 270 €, jos tarjoilun kesto on kuuden ja seitsemän tunnin väliltä.

Vastaus: $n = 6$. Tarjoilu maksaa 270 €, jos tarjoilun kesto on 6−7 h.

c) Mallin lausekkeessa $40n + 30$ luku 40 kerrotaan alkavan tunnin järjestysluvulla n, joten luku 40 on tarjoilun tuntiveloitus (€/h). Luku 30 on vakiotermi, joten luku 30 on tarjoilun perusmaksu eli minimiveloitus euroina.

Vastaus: tuntiveloitusta 40 €/h ja perusmaksua 30 €

K35. **a)** Lukujonon kaksi ensimmäistä jäsentä ovat 128 ja 64. Keksien määrä pienenee aina yhtä monta prosenttia, joten lukujono on geometrinen.

Lukujonon suhdeluku $q=\frac{64}{128}=0,5$.

Lukujonon kolme seuraavaa jäsentä ovat

$a_3=0,5\cdot a_2=0,5\cdot 64=32$

$a_4=0,5\cdot a_3=0,5\cdot 32=16$

$a_5=0,5\cdot a_4=0,5\cdot 16=8$

Lukujonon viisi ensimmäistä jäsentä ovat 128, 64, 32, 16 ja 8.

Vastaus: 128, 64, 32, 16 ja 8

b) Lasketaan lisää lukujonon jäseniä.

$a_6=0,5\cdot a_5=0,5\cdot 8=4$

$a_7=0,5\cdot a_6=0,5\cdot 4=2$

$a_8=0,5\cdot a_7=0,5\cdot 2=1$

Lukujonon kahdeksas jäsen on 1, joka saadaan, kun ensimmäinen jäsen kerrotaan seitsemän kertaa suhdeluvulla 0,5.

$$128 \xrightarrow{\cdot 0,5} 64 \xrightarrow{\cdot 0,5} 32 \xrightarrow{\cdot 0,5} 16 \xrightarrow{\cdot 0,5} 8 \xrightarrow{\cdot 0,5} 4 \xrightarrow{\cdot 0,5} 2 \xrightarrow{\cdot 0,5} 1$$

Keksejä on siis yksi jäljellä seitsemän tunnin kuluttua. Tämän jälkeen lukujonon jäsenet eivät ole järkeviä.

Vastaus: 7 tunnin kuluttua. Tämän jälkeen lukujonon jäsenet eivät ole järkeviä.

K36. **a)** Myynti kasvaa lineaarisesti, joten lukujono on aritmeettinen. Lukujonon yleinen jäsen ilmaisee myytyjen tuotteiden kappalemäärän n:ntenä kuukautena, joten ensimmäinen jäsen $a_1 = 570$ ja neljäs jäsen $a_4 = 810$.

Sijoitetaan $a_1 = 570$ ja $a_4 = 810$ aritmeettisen lukujonon yleisen jäsenen kaavaan $a_n = a_1 + (n-1)d$ ja ratkaistaan yhtälöstä erotusluku d.

$$\begin{aligned} a_4 &= a_1 + (4-1)d \\ 810 &= 570 + 3d \\ 3d &= 810 - 570 \\ 3d &= 240 \qquad \|:3 \\ d &= 80 \end{aligned}$$

Muodostetaan yleisen jäsenen lauseke ensimmäisen jäsenen $a_1 = 570$ ja erotusluvun $d = 80$ avulla.

$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d = 570 + (n-1)\cdot 80 = 570 + 80n - 80 = 80n + 490$

Lukujonon yleinen jäsen on $a_n = 80n + 490$.

Vastaus: $a_n = 80n + 490$

b) Joulukuun myynti on lukujonon 12. jäsen.

$a_{12} = 490 + 80\cdot 12 = 1450$

Tuotetta myydään joulukuussa 1450 kappaletta.

Vastaus: 1450 tuotetta

c) Videossa https://vimeo.com/210765716/5e20ede399 näytetään, miten tehtävä voidaan ratkaista sopivalla ohjelmalla.

A	B
16	1770
17	1850
18	1930
19	2010
20	2090

Taulukosta havaitaan, että 2000 kappaleen raja ylittyy ensimmäisen kerran 19. kuukautena eli vuoden ja seitsemän kuukauden kuluttua. 2000 kappaleen raja ylittyy siis seuraavan vuoden heinäkuussa.

Vastaus: seuraavan vuoden heinäkuussa

KOKOAVIA TEHTÄVIÄ

ILMAN TEKNISIÄ APUVÄLINEITÄ

1. **a)** Kuvaajan perusteella 30 grammasta pähkinöitä saa noin 0,6 grammaa suolaa.

Vastaus: 0,6 g

b) Kuvaajan perusteella 0,2 grammaa suolaa saadaan noin 10 grammasta pähkinöitä.

Vastaus: 10 g

c) Kuvaajan perusteella jokaisesta 10 gramman annoksesta pähkinöitä saadaan 0,2 grammaa suolaa. Viiteen grammaan suolaa tarvitaan 0,2 gramman lisäyksiä $^{5)}\frac{5}{0,2} = \frac{25}{1} = 25$ kappaletta. Pähkinöitä saisi siis syödä päivässä korkeintaan $25 \cdot 10$ g = 250 g.

Vastaus: 250 g

2. Yhtälön $y = 3^x$ kuvaaja on kasvava eksponenttifunktio eli kuvaaja II.

Yhtälön $y = 3x$ kuvaaja on nouseva suora eli kuvaaja IV.

Yhtälön $y = 0{,}3^x$ kuvaaja on vähenevä eksponenttifunktio eli kuvaaja III.

Yhtälön $y = -3x$ kuvaaja on laskeva suora eli kuvaaja I.

Vastaus: A: II, B: IV, C: III ja D: I

3. **a)** $8^2 - 16^0 + 2^{-1} = 64 - 1 + \frac{1}{2} = 63\frac{1}{2}$

Vastaus: $63\frac{1}{2}$

b) $9^3 \cdot (-9)^4 \cdot 9^{-6} = 9^3 \cdot 9^4 \cdot 9^{-6} = 9^{3+4-6} = 9^1 = 9$

Vastaus: 9

c) $\frac{25^3}{5^3} = \left(\frac{25}{5}\right)^3 = 5^3 = 125$

Vastaus: 125

4. **a)** Muokataan yhtälö ensin muotoon, jossa vasemmalla puolella on ainoastaan potenssimerkintä. Ratkaistaan sitten yhtälö juuren avulla.

$$
\begin{aligned}
3x^2 &= 6 \quad \|:3 \\
x^2 &= 2 \\
x &= \pm\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

Vastaus: $x = \pm\sqrt{2}$

b) Muokataan yhtälö ensin muotoon, jossa vasemmalla puolella on ainoastaan eksponenttilauseke. Ratkaistaan sitten yhtälö samankantaisten potenssien avulla.

$$
\begin{aligned}
2 \cdot 2^x &= 16 \quad \|:2 \\
2^x &= 8 \\
2^x &= 2^3 \\
x &= 3
\end{aligned}
$$

Vastaus: $x = 3$

c) Sievennetään vasemman ja oikean puolen lausekkeet ja ratkaistaan yhtälö.

$$
\begin{aligned}
(3x)^3 + 26 &= x^2 \cdot x \\
3^3 x^3 + 26 &= x^3 \\
27x^3 - x^3 &= -26 \\
26x^3 &= -26 \quad \|:26 \\
x^3 &= -1 \\
x &= \sqrt[3]{-1} \\
x &= -1
\end{aligned}
$$

Vastaus: $x = -1$

5. **a)** Sijoitetaan $(x_1, y_1) = (-1, 2)$ ja $(x_2, y_2) = (3, -2)$ kulmakertoimen kaavaan.

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2-2}{3-(-1)} = \frac{-4}{4} = -1$$

Suoran kulmakerroin on -1.

Vastaus: $k = -1$

b) Suoran yhtälö on muotoa $y = kx + b$. Sijoitetaan $k = -1$ ja pisteen $(-1, 2)$ koordinaatit suoran yhtälöön ja ratkaistaan siitä vakiotermi b.

$2 = -1 \cdot (-1) + b$
$2 = 1 + b$
$b = 1$

Suoran vakiotermi on $b = 1$.

Vastaus: $b = 1$

c) Edellisten kohtien perusteella suoran yhtälö on $y = -x + 1$. Sijoitetaan $y = \frac{1}{4}$ suoran yhtälöön ja ratkaistaan siitä x.

$$\frac{1}{4} = -x + 1$$
$$-\frac{3}{4} = -x \quad \| \cdot (-1)$$
$$x = \frac{3}{4}$$

Suoran pisteen x-koordinaatti on $x = \frac{3}{4}$.

Vastaus: $x = \frac{3}{4}$

6. **a)** $x = \sqrt[5]{7}$ on luku, jonka viides potenssi on 7. Yhtälö on esimerkiksi $x^5 = 7$.

Vastaus: $x^5 = 7$

b) $x = \log_2 9$ on eksponentti, johon luku 2 on korotettava, jotta potenssin arvo olisi 9. Yhtälö on esimerkiksi $2^x = 9$.

Vastaus: $2^x = 9$

c) $x = \ln 11 = \log_e 11$ on eksponentti, johon Neperin luku e on korotettava, jotta potenssin arvo olisi 11. Yhtälö on esimerkiksi $e^x = 11$.

Vastaus: $e^x = 11$

7. **a)** Aritmeettisen lukujonon yleinen jäsen on $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$.
Erotusluku $d = a_3 - a_2 = 6 - 2 = 4$.

Sijoitetaan $n = 3$ ja $a_3 = 6$ yleisen jäsenen kaavaan $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ ja ratkaistaan saadusta yhtälöstä ensimmäinen jäsen a_1.

$$a_3 = a_1 + (3-1) \cdot 4$$
$$6 = a_1 + 2 \cdot 4$$
$$6 = a_1 + 8$$
$$a_1 = -2$$

Yleinen jäsen on siis
$a_n = -2 + (n-1) \cdot 4 = -2 + 4n - 4 = 4n - 6.$

Vastaus: $a_n = 4n - 6$

b) Geometrisen lukujonon yleinen jäsen on $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

Suhdeluku $q = \dfrac{a_3}{a_2} = \dfrac{6}{2} = 3$.

Sijoitetaan $q = 3$, $n = 3$ ja $a_3 = 6$ yleisen jäsenen kaavaan $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ ja ratkaistaan saadusta yhtälöstä ensimmäinen jäsen a_1.

$$6 = a_1 \cdot 3^{3-1}$$
$$6 = a_1 \cdot 3^2$$
$$6 = a_1 \cdot 9 \quad \| :9$$
$$a_1 = \frac{6^{(3}}{9}$$
$$a_1 = \frac{2}{3}$$

Yleinen jäsen on siis $a_n = \dfrac{2}{3} \cdot 3^{n-1}$.

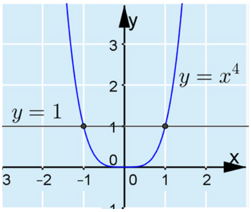
Vastaus: $a_n = \dfrac{2}{3} \cdot 3^{n-1}$

APUVÄLINEET SALLITTU

8. Potenssiyhtälö on $x^n = a$, jossa n ja a ovat vakioita.

a) Potenssiyhtälöllä on kaksi ratkaisua, kun n on parillinen kokonaisluku ja a positiivinen reaaliluku. Esimerkiksi yhtälöllä $x^4 = 1$ on kaksi ratkaisua.

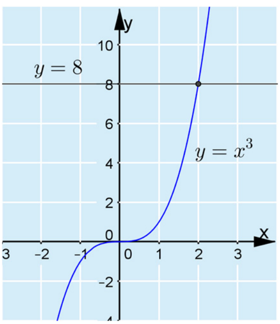
Perustelu kuvaajan avulla:
Suoralla $y = 1$ ja käyrällä $y = x^4$ on kaksi leikkauspistettä, joten yhtälöllä $x^4 = 1$ on kaksi ratkaisua.



Vastaus: esimerkiksi $x^4 = 1$

b) Potenssiyhtälöllä on täsmälleen yksi ratkaisu, kun n on pariton kokonaisluku ja a mikä tahansa reaaliluku tai n on parillinen kokonaisluku ja a nolla. Esimerkiksi yhtälöllä $x^3 = 8$ on täsmälleen yksi ratkaisu.

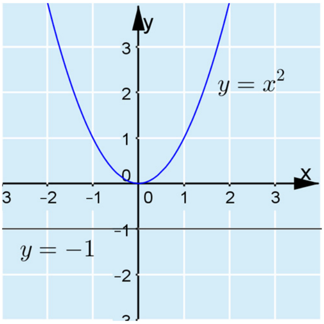
Perustelu kuvaajan avulla:
Suoralla $y = 8$ ja käyrällä $y = x^3$ on yksi leikkauspiste, joten yhtälöllä $x^3 = 8$ on täsmälleen yksi ratkaisu.



Vastaus: esimerkiksi $x^3 = 8$

c) Potenssiyhtälöllä ei ole ratkaisua, kun n on parillinen kokonaisluku ja a negatiivinen reaaliluku. Esimerkiksi yhtälöllä $x^2 = -1$ ei ole ratkaisua.

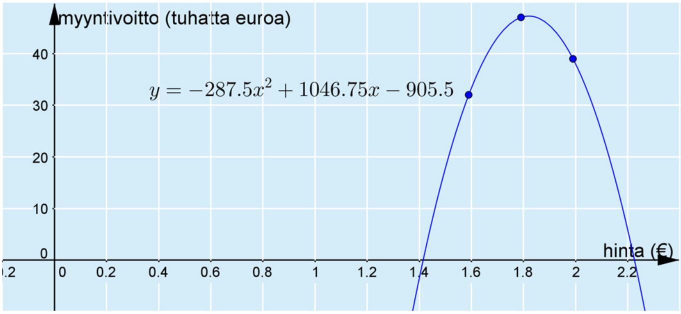
Perustelu kuvaajan avulla:
Suoralla $y = -1$ ja käyrällä $y = x^2$ ei ole leikkauspistettä, joten yhtälöllä $x^2 = -1$ ei ole ratkaisua.



Vastaus: esimerkiksi $x^2 = -1$

9. **a)** Videossa https://vimeo.com/210765219/1e83e80a07 näytetään, miten tehtävä voidaan ratkaista sopivalla ohjelmalla.

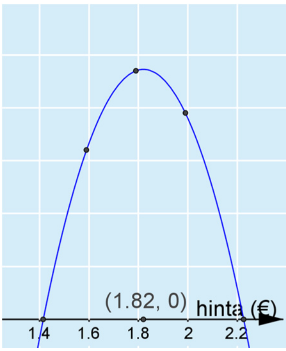
Olkoon x suklaalevyn myyntihinta ja y myynnistä saatu voitto tuhansina euroina. Sovitetaan pisteiden (1,59; 32), (1,79; 47) ja (1,99; 39) kautta toisen asteen polynomifunktio.



Sovitetun polynomifunktion lauseke on
$y = -287{,}5x^2 + 1046{,}75x - 905{,}5$.

Vastaus: $y = -287{,}5x^2 + 1046{,}75x - 905{,}5$

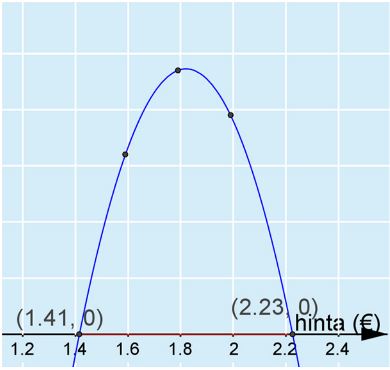
b) Edellisen kohdan kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, joten suurin arvo saavutetaan paraabelin huipussa. Huipun x-koordinaatti on nollakohtien puolessa välissä. Määritetään ohjelman avulla funktion nollakohdat ja niiden keskiarvo.



Myyntivoitto on suurin, kun suklaalevyn hinta on 1,82 euroa.

Vastaus: 1,82 euroa

c) a-kohdan malli on käyttökelpoinen, kun myyntivoitto saa positiivisia arvoja tai arvon nolla. Myyntivoitto on nolla funktion nollakohdissa. Nollakohtien välissä olevilla muuttujan arvoilla myyntivoitto saa positiivisia arvoja.



a-kohdan malli on siis käyttökelpoinen, kun $1{,}41 \leq x \leq 2{,}23$.

Vastaus: $1{,}41 \leq x \leq 2{,}23$

10. **a)** Ostettaessa tasan 100 g marjoja edullisin tapa on punnita ja maksaa massan mukainen hinta 3,5 €. 250 gramman pussi maksaisi enemmän.

Vastaus: punnitaan 100 g

b) 500 g marjoja maksaa punnittuna $5 \cdot 3{,}50$ € = 17,50 € ja valmiiksi pakattuna $2 \cdot 5$ € = 10 €. Edullisinta on ostaa valmiita pusseja.

Vastaus: ostetaan 2 valmiiksi pakattua pussia

c) b-kohdan perusteella huomataan, että valmiissa pusseissa kilohinta on halvempi verrattuna siihen, että asiakas punnitsisi marjat itse. Koko 300 grammaa ei siis kannata punnita itse. Halvin tapa on joko ostaa yksi pussi valmiiksi pakattuja marjoja ja punnita loput tai ostaa koko määrä valmiiksi pakattuina.

Jos asiakas ostaa yhden valmiiksi pakatun pussin ja punnitsee loput 50 g, hinnaksi tulee 5 € + $0{,}5 \cdot 3{,}5$ € = 6,75 €.

Jos asiakas ostaa kaksi valmiiksi pakattua pussia, hinnaksi tulee $2 \cdot 5$ € = 10 €.

Halvin tapa on siis ostaa 1 pussi ja punnita loput 50 g itse.

Vastaus: ostetaan 1 valmiiksi pakattu pussi ja punnitaan 50 g

11. **a)** Kirjan myynti muodostaa aritmeettisen lukujonon 2000, 1900, …

Lukujonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 2000$ ja erotusluku
$d = 1900 - 2000 = -100$.

Yleinen jäsen on

$$\begin{aligned} a_n &= 2000 + (n-1)\cdot(-100) \\ &= 2000 - 100n + 100 \\ &= -100n + 2100. \end{aligned}$$

Kirjan myynti loppuu, kun lukujonon jäsenen suuruus on 0.
Ratkaistaan yhtälöstä $a_n = 0$ vuoden järjestysluku n.

$$\begin{aligned} -100n + 2100 &= 0 \\ -100n &= -2100 \qquad \|:(-100) \\ n &= 21 \end{aligned}$$

Kirjaa ei enää myydä 21. vuonna.

Vastaus: 21. vuonna

b) Kirjan kokonaismyynti on 21 ensimmäisen jäsenen summa. Lasketaan lukujonon jäsenet ja niiden summa taulukkolaskentaohjelmalla.

A	B
1	2000
2	1900
3	1800
4	1700
5	1600
6	1500
7	1400
8	1300
9	1200
10	1100
11	1000
12	900
13	800
14	700
15	600
16	500
17	400
18	300
19	200
20	100
21	0
	21000

Kirjaa myytiin yhteensä 21 000 kappaletta.

Vastaus: 21 000

12. Kasvu oli eksponentiaalista, joten väkiluku noudattaa eksponentiaalista mallia $f(x) = a \cdot q^x$. Alkuperäinen arvo on vuoden 2001 väkiluku $a = 4500$.

Väestö kasvoi 15 vuoden aikana 32 %, joten vuonna 2016 asukkaita oli $1{,}32 \cdot 4500 = 5940$. Siis $f(15) = 5940$.

Sijoitetaan funktion $f(x) = a \cdot q^x$ lausekkeeseen arvot $a = 4500$, $x = 15$ ja $f(15) = 5940$. Ratkaistaan saadusta yhtälöstä muutoskerroin q.

$$\begin{aligned} 4500 \cdot q^{15} &= 5940 \qquad \| : 4500 \\ q^{15} &= 1{,}32 \\ q &= \sqrt[15]{1{,}32} \\ q &= 1{,}018... \end{aligned}$$

Funktion lauseke on siis $f(x) = 4500 \cdot 1{,}018...^x$.

Ennuste vuodelle 2025 saadaan laskemalla funktion arvo muuttujan arvolla $x = 24$.

$$g(24) = 4500 \cdot 1{,}018...^{24} = 7016{,}665... \approx 7020$$

Mallin mukaan asukkaita on 7020 vuonna 2025.

Vastaus: 7020 asukasta

13. Radioaktiivinen hajoaminen on eksponentiaalista. Radioaktiivisen aineen määrä noudattaa siis eksponentiaalista mallia $f(x) = a \cdot q^x$, jossa x on kulunut aika vuosina. Radioaktiivisesta aineesta vähenee vuodessa 0,043 %, joten vuoden jälkeen aineesta on jäljellä
100 % − 0,043 % = 99,957 %. Aineen määrä muuttuu siis joka vuosi 0,99957-kertaiseksi, joten $q = 0{,}99957$.

Merkitään radioaktiivisen aineen alkuperäistä määrää kirjaimella a (> 0). Puoliintumisajan kuluttua aineesta on jäljellä puolet eli $0{,}5a$. Muodostetaan näiden tietojen avulla yhtälö ja ratkaistaan siitä puoliintumisaika x.

$$\begin{aligned} f(x) &= 0{,}5a \\ a \cdot 0{,}99957^x &= 0{,}5a \qquad \| :a \\ 0{,}99957^x &= 0{,}5 \\ x &= \log_{0{,}99957} 0{,}5 \\ x &= 1611{,}623... \\ x &\approx 1610 \end{aligned}$$

Aineen puoliintumisaika on noin 1610 vuotta.

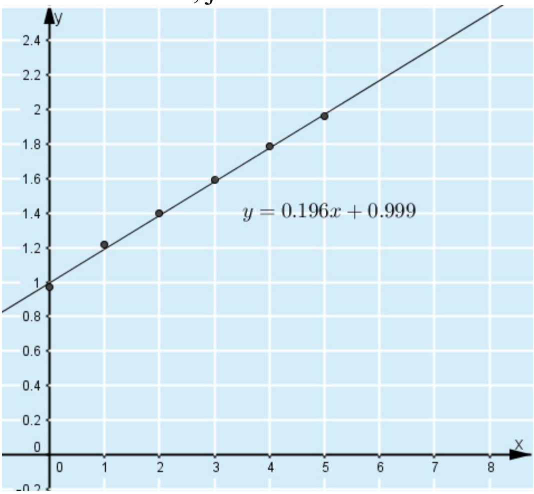
Vastaus: 1610 vuotta

14. Videossa https://vimeo.com/210765230/048afdff1a näytetään, miten tehtävä voidaan ratkaista sopivalla ohjelmalla.

Valitaan vuosi 2010 ajan alkuhetkeksi $x = 0$. Taulukoidaan vuosien ja käyttäjien määriä taulukkolaskentaohjelmalla.

	A	B
1	0	0.97
2	1	1.22
3	2	1.4
4	3	1.59
5	4	1.79
6	5	1.96

Sijoitetaan pisteet koordinaatistoon. Pisteet näyttävät olevan suunnilleen samalla suoralla, joten sovitetaan niihin suora.



Sovitetun suoran yhtälö on $y = 0{,}196x + 0{,}999$, jossa x on vuodesta 2010 kulunut aika vuosina ja y käyttäjien määrä miljardeina.

Ennuste vuodelle 2030 on muuttujan y arvo, kun $x = 20$. Sijoitetaan $x = 20$ ohjelmalla saatuun suoran yhtälöön, jolloin
$y = 4{,}919 \approx 4{,}9$

Mallin mukaan vuonna 2030 on noin 4,9 miljardia sosiaalisen median käyttäjää.

Vastaus: 4,9 miljardia käyttäjää

HARJOITUSKOE

H1. **a)** Minimiveloitus tarkoittaa maksua, joka veloitetaan, vaikka ei siivottaisi ollenkaan. Kun aika on nolla tuntia, siivouksen hinta on 20 euroa. Minimiveloitus on siis 20 euroa.

Vastaus: 20 €

b) Tuntiveloitus saadaan puolisuoran kulmakertoimen avulla. Sijoitetaan pisteiden (0, 20) ja (1, 60) koordinaatit kulmakertoimen kaavaan

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

$$k = \frac{60 - 20}{1 - 0} = \frac{40}{1} = 40$$

Siivousliike veloittaa 40 euroa tunnilta.

Vastaus: 40 €

c) Siivoustyön hinta koostuu perusmaksusta ja tuntiveloituksesta.
20 € + 4 · 40 € = 180 €

Neljän tunnin siivoustyö maksaa 180 €.

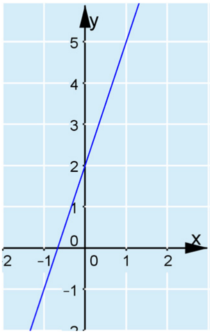
Vastaus: 180 €

d) Kuvaaja on puolisuora, koska aika ei voi saada negatiivisia arvoja.

Vastaus: Aika ei voi olla negatiivinen.

H2. **a)** Suoran $y = kx + b$ kulmakerroin on 3, mutta vakiotermi voi olla mikä tahansa luku. Valitaan vakiotermiksi esimerkiksi 2. Suoran yhtälö on tällöin $y = 3x + 2$.

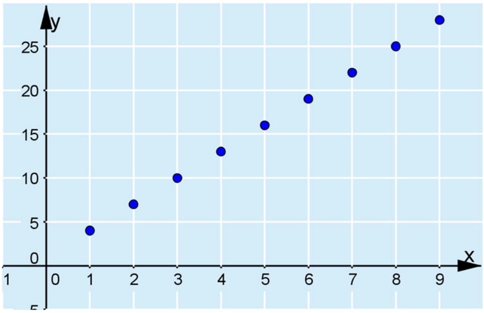
Suoran vakiotermi on 2, joten suora kulkee pisteen (0, 2) kautta. Kulmakerroin on 3, joten suoran pisteen y-koordinaatti kasvaa aina kolmella, kun x-koordinaatti kasvaa yhdellä. Piirretään suora näiden tietojen avulla.



Vastaus: $y = 3x + 2$

b) Aritmeettisen lukujonon $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$ erotusluku $d = 3$, mutta ensimmäinen jäsen voi olla mikä tahansa luku. Valitaan ensimmäiseksi jäseneksi esimerkiksi 4. Lukujonon yleinen jäsen on tällöin
$a_n = 4 + (n-1) \cdot 3 = 4 + 3n - 3 = 3n + 1.$

Lukujonon havainnollistus koostuu erillisistä pisteistä, joiden x-koordinaatti on jäsenen järjestysluku ja y-koordinaatti jäsen. Ensimmäinen jäsen $a_1 = 3 \cdot 1 + 1 = 4$, joten ensimmäinen piste on (1, 4). Seuraavan pisteen x-koordinaatti on aina yhden suurempi ja y-koordinaatti erotusluvun $d = 3$ verran suurempi.



Vastaus: $a_n = 3n + 1$

H3. **a)** Kirjoitetaan suoran $4x + 2y = 4$ yhtälö ratkaistuun muotoon.

$$4x+2y=4$$
$$2y=-4x+4 \quad \|:2$$
$$y=-2x+2$$

Suoran kulmakerroin on −2, joten oikea vaihtoehto on III.

Vastaus: III

b) Aritmeettisen lukujonon 1, $\frac{3}{2}$, 2, … erotusluku on

$$\frac{3}{2}-1=\frac{3}{2}-\frac{2}{2}=\frac{1}{2},$$

joten seuraava jäsen on

$$2+\frac{1}{2}=\frac{4}{2}+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}.$$

Oikea vaihtoehto on I.

Vastaus: I

c) Suoran piste toteuttaa suoran yhtälön $y = 3x + 5$. Sijoittamalla $x = 1$ saadaan muuttujan y arvoksi
$y = 3 \cdot 1 + 5 = 8$.

Piste (1, 8) on suoralla, joten oikea vaihtoehto on III.

Vastaus: III

d) Sievennetään lauseke $(2a)^6+\left(a^3\right)^2$.

$$(2a)^6+\left(a^3\right)^2=2^6a^6+a^{3\cdot 2}=64a^6+a^6=65a^6$$

Oikea vaihtoehto on IV.

Vastaus: IV

e) $x = \log_3 5$ on eksponentti, johon luku 3 on korotettava, jotta potenssin arvo olisi 5. Siis $3^x = 5$. Oikea vaihtoehto on I.

Vastaus: I

f) Geometrisen lukujonon $\frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \ldots$ suhdeluku on

$$q = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{2}{3}} = \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

Oikea vaihtoehto on IV.

Vastaus: IV

H4. **a)** Muokataan yhtälö ensin muotoon, jossa vasemmalla puolella on ainoastaan potenssimerkintä. Ratkaistaan sitten yhtälö juuren avulla.

$$3x^4 - 48 = 0$$

$$3x^4 = 48 \quad \|:3$$

$$x^4 = 16$$

$$x = \pm\sqrt[4]{16}$$

$$x = \pm 2$$

Vastaus: $x = \pm 2$

b) Muokataan yhtälö ensin muotoon, jossa vasemmalla puolella on ainoastaan eksponenttilauseke. Ratkaistaan sitten yhtälö samankantaisten potenssien avulla.

$$5^x \cdot 25^3 = 1$$

$$5^x \cdot \left(5^2\right)^3 = 1$$

$$5^x \cdot 5^{2\cdot 3} = 5^0$$

$$5^x \cdot 5^6 = 5^0$$

$$5^{x+6} = 5^0$$

$$x + 6 = 0$$

$$x = -6$$

Vastaus: $x = -6$

H5. **a)** $f(35)=0{,}11\cdot 35=3{,}85$

Yhdessä desilitrassa kaurahiutaleita on 3,85 g ravintokuitua.

Vastaus: $f(35) = 3{,}85$. Desilitrassa kaurahiutaleita on 3,85 g ravintokuitua.

b) Ratkaistaan yhtälö $f(x) = 30$.

$$\begin{aligned} f(x) &= 30 \\ 0{,}11x &= 30 \qquad \|:0{,}11 \\ x &= 272{,}727... \\ x &\approx 270 \end{aligned}$$

Päivittäinen ravintokuidun tarve saavutetaan syömällä noin 270 grammaa kaurahiutaleita.

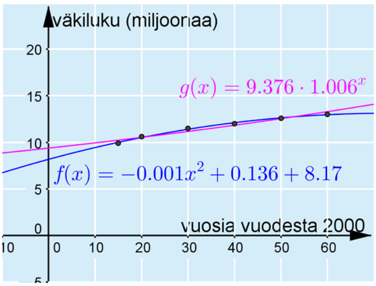
Vastaus: $x \approx 270$. Päivittäinen ravintokuidun tarve saavutetaan syömällä noin 270 grammaa kaurahiutaleita.

H6. **a)** Videossa https://vimeo.com/210765238/4ea1a1199e näytetään, miten tehtävä voidaan ratkaista sopivalla ohjelmalla.

Olkoon *x* vuosien lukumäärä vuodesta 2000 alkaen. Taulukoidaan vuosien ja asukkaiden määriä taulukkolaskentaohjelmalla.

	A	B
1	15	9.9
2	20	10.6
3	30	11.5
4	40	12
5	50	12.6
6	60	13

Sijoitetaan pisteet koordinaatistoon ja sovitetaan niihin toisen asteen polynomifunktio ja eksponentiaalinen malli.



Kuvan perusteella toisen asteen polynomifunktio sopii aineistoon paremmin.

Vastaus: $f(x) = -0{,}001x^2 + 0{,}136x + 8{,}17$ ja $g(x) = 9{,}376 \cdot 1{,}006^x$, 2. asteen polynomifunktio

b) Sijoitetaan $x = 0$ mallien yhtälöihin.

toisen asteen polynomimalli:
$f(0) = 8{,}169\ldots \approx 8{,}2$

eksponentiaalinen malli:
$g(0) = 9{,}375\ldots \approx 9{,}4$

Ruotsin väkiluku vuonna 2000 olisi ollut toisen asteen polynomimallin mukaan noin 8,2 miljoonaa ja eksponentiaalisen mallin mukaan noin 9,4 miljoonaa. Toteutunut väkiluku vuonna 2000 oli 8,9 miljoonaa, joten eksponentiaalinen malli antoi paremman arvion.

Vastaus: 2. asteen polynomimalli: 8,2 miljoonaa, eksponentiaalinen malli: 9,4 miljoonaa. Eksponentiaalinen malli antoi paremman arvion.

H7. **a)** Jokainen 11 cm paksu vesikerros heikentää säteilyn voimakkuutta yhtä monta prosenttia, joten säteilyn heikkeneminen on eksponentiaalista. Läpi pääsevän säteilyn määrä noudattaa eksponentiaalista mallia $f(x) = a \cdot q^x$, jossa x on vesikerroksen paksuus senttimetreinä.

Merkitään alkuperäistä säteilyn määrää kirjaimella a (> 0). 11 cm:n syvyydellä säteily on heikentynyt alkuperäiseen nähden 66,4 %, eli säteilystä on jäljellä 100 % − 66,4 % = 33,6 %. Siten $f(11) = 0{,}336a$. Muodostetaan näiden tietojen avulla yhtälö ja ratkaistaan siitä muutoskerroin q.

$$f(11) = 0{,}336a$$
$$a \cdot q^{11} = 0{,}336a \quad \| : a$$
$$q^{11} = 0{,}336$$
$$q = \sqrt[11]{0{,}336}$$
$$q = 0{,}905...$$

Siis $f(x) = a \cdot 0{,}905...^x$.

Lasketaan 7 senttimetrin vesikerroksen läpi pääsevän säteilyn määrä.

$$f(7) = a \cdot 0{,}905...^7 = 0{,}4995...a \approx 0{,}500a$$

Läpi pääsevän säteilyn määrä on $0{,}500a$ eli noin 50,0 % veden pintaan tulevasta säteilystä.

Vastaus: 50,0 %

b) Sijoitetaan a-kohdan eksponentiaalisen mallin lausekkeeseen $f(x) = a \cdot 0{,}905...^x$ alkuperäinen arvo a = 100 000 ja funktion arvo $1 \cdot 10^{-6}$. Ratkaistaan näin saadusta yhtälöstä vesikerroksen paksuus x.

$$
\begin{aligned}
100000 \cdot 0{,}905...^x &= 1 \cdot 10^{-6} \quad \| : 100000 \\
0{,}905...^x &= 10^{-11} \\
x &= \log_{0{,}905...} 10^{-11} \\
x &= 255{,}457...
\end{aligned}
$$

255 cm paksu vesikerros ei vielä riitä, joten polttoainesauva on upotettava 256 cm paksun vesikerroksen alle.

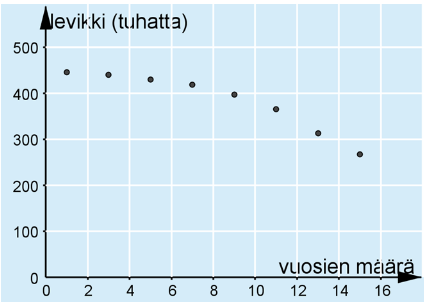
Vastaus: 256 cm

H8. Videossa https://vimeo.com/210765249/5ee167d4a7 näytetään, miten tehtävä voidaan ratkaista sopivalla ohjelmalla.

a) Olkoon *x* vuosien lukumäärä vuodesta 2000 alkaen. Taulukoidaan vuosien ja levikkien määriä taulukkolaskentaohjelmalla.

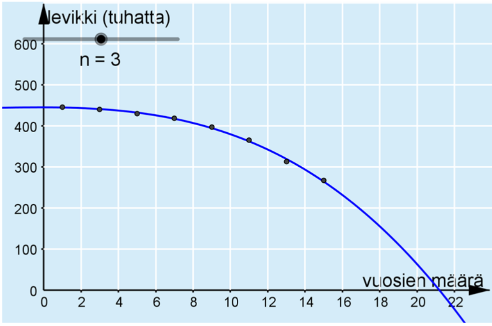
	A	B
1	1	446
2	3	440
3	5	430
4	7	419
5	9	397
6	11	365
7	13	313
8	15	267

Sijoitetaan pisteet koordinaatistoon.



Koska levikin väheneminen on alussa hitaampaa kuin tarkastelujakson loppupuolella, väheneminen ei voi olla eksponentiaalista. Sopivin malli on siis polynomifunktio.

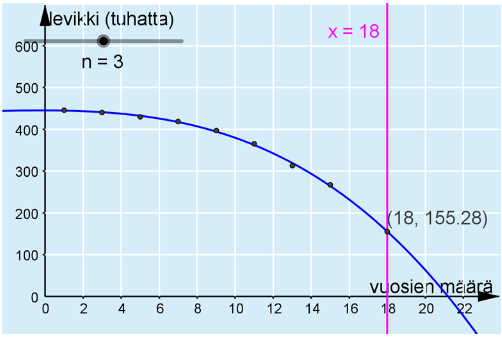
Tutkitaan, mikä polynomifunktion asteluvun pitäisi olla, jotta käyrä sopisi aineistoon mahdollisimman hyvin.



Kolmannen asteen polynomi näyttäisi sopivan aineistoon parhaiten. Kolmannen asteen polynomifunktion lauseke on
$f(x) = -0{,}031x^3 - 0{,}338x^2 - 0{,}109x + 445{,}341$.

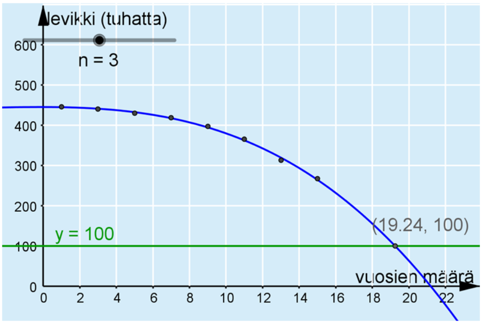
Vastaus: $f(x) = -0{,}031x^3 - 0{,}338x^2 - 0{,}109x + 445{,}341$

b) Määritetään mallin mukainen ennuste vuoden 2018 levikiksi etsimällä suoran $x = 18$ ja polynomifunktion kuvaajan leikkauspiste.



Leikkauspiste on (18; 155,28), joten mallin mukaan levikki on noin 155 000.

Määritetään vuosi, jolloin levikki alittaa 100 000, etsimällä funktion kuvaajan ja suoran $y = 100$ leikkauspiste.



Leikkauspiste on (19,24; 100), joten mallin mukaan levikki alittaa 100 000 vuonna 2019.

Vastaus: 155 000, vuonna 2019