Kertaus

K1. **a)** E

Nouseva suora.

b) A

5. asteen polynomifunktio, pariton funktio

Laskettu piste $f(1) = 1^5 = 1$, joten piste (1, 1) on kuvaajalla.

c) D

Paraabelin mallinen, alaspäin aukeava.

Laskettu piste $f(1) = -1^4 + 1 = 0$, joten piste (1, 0) on kuvaajalla.

d) B

3. asteen polynomifunktio, pariton funktio

Laskettu piste $f(1) = 1^3 - 2 \cdot 1 = -1$, joten piste (1, – 1) on kuvaajalla.

e) F

Toisen asteen polynomifunktio, ylöspäin aukeava paraabeli.

f) C

Toisen asteen polynomifunktio, alaspäin aukeava paraabeli.

K2. **a)** $(2x+3)^2+3x^2$
$=(2x)^2+2\cdot 2x\cdot 3+3^2+3x^2$
$=4x^2+12x+9+3x^2$
$=7x^2+12x+9$

b) $(3-x)(3+x)-x^2$
$=(3^2-x^2)-x^2$
$=9-x^2-x^2$
$=-2x^2+9$

c) $(x^3+1)(x^3-1)$
$=(x^3)^2-1^2$
$=x^6-1$

d) $(x+1)(x-1)(x^2+1)$
$=(x^2-1)(x^2+1)$
$=(x^2)^2-1^2$
$=x^4-1$

K3. **a)** $2x(3x+4)+1$
$=6x^2+8x+1$

b) $3(2x-1)+x(-4x+5)$
$=6x-3-4x^2+5x$
$=-4x^2+11x-3$

c) $-(2x-1)(x+3)$
$=-(2x^2+6x-x-3)$
$=-(2x^2+5x-3)$
$=-2x^2-5x+3$

d) $1-(3x^4+1)^2$
$=1-(9x^8+6x^4+1)$
$=1-9x^8-6x^4-1$
$=-9x^8-6x^4$

K4. **a)** Sijoitetaan funktion $f(x) = x^2 - 2x - 3$ lausekkeeseen $x = -1$ ja $x = 3$.

$$\begin{aligned} f(-1) &= (-1)^2 - 2 \cdot (-1) - 3 \\ &= 1 + 2 - 3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(3) &= 3^2 - 2 \cdot 3 - 3 \\ &= 9 - 6 - 3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Tosi, sillä molemmat ovat tämän funktion nollakohtia, eikä toisen asteen polynomifunktiolla voi olla muita nollakohtia.

b) Sijoitetaan funktion $f(x) = 2x^2 - x$ lausekkeeseen $x = -2$.

$$\begin{aligned} f(-2) &= 2 \cdot (-2)^2 - (-2) \\ &= 8 + 2 \\ &= 10 \end{aligned}$$

Epätosi, sillä $10 \neq -10$.

c) Sijoitetaan funktion $f(x) = 7x - x^3$ lausekkeeseen $x = -1$.

$$\begin{aligned} f(-1) &= 7 \cdot (-1) - (-1)^3 \\ &= -7 + 1 \\ &= -6 \end{aligned}$$

Epätosi, sillä $-6 \neq -8$.

d) Ratkaistaan funktion $f(x) = x^4 + 1$ nollakohdat yhtälöstä $x^4 + 1 = 0$.

$$x^4 + 1 = 0$$
$$x^4 = -1$$

Parillinen potenssi ei voi olla negatiivinen. Yhtälöllä ei ole ratkaisua.

Tosi, sillä tällä funktiolla ei ole nollakohtia.

K5. **a)** Nollakohtia on korkeintaan asteluvun verran. Parittomilla asteluvuilla nollakohtia on vähintään yksi.

b) Ensimmäisen asteen polynomilausekkeen kerroin a kertoo suoran jyrkkyyden ja kulkusuunnan. Suora on nouseva, kun $a > 0$ ja suora on laskeva, kun $a < 0$.

c) Toisen asteen polynomilausekkeen kerroin a kertoo paraabelin aukeamissuunnan ja paraabelin leveyden. Kun $a > 0$, niin paraabeli on ylöspäin aukeava. Kun $a < 0$, niin paraabeli on alaspäin aukeava.

d) Vakio c kertoo kuvaajan ja y-akselin leikkauskohdan.

K6. **a)** $2x^2 + 6x = 2x(x + 3)$ (yhteinen tekijä $2x$)

b) $x^2 – 4 = (x + 2)(x – 2)$ (muistikaava)

c) $x^2 - 2x + 1 = (x – 1)^2$ (muistikaava)

d) $9x^2 – 25 = (3x)^2 – 5^2 = (3x + 5)(3x – 5)$ (muistikaava)

K7. **a)** $3x^2 + 3x - 18 = 3(x^2 + x - 6)$

Jaetaan polynomi $x^2 + x - 6$ tekijöihin nollakohtien avulla.

$$x^2 + x - 6 = 0$$
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1}$$
$$x = \frac{-1 \pm 5}{2}$$
$$x = \frac{4}{2} = 2 \text{ tai } x = \frac{-6}{2} = -3$$

$$3(x^2 + x - 6) = 3(x - 2)(x + 3)$$

b) $2x^2 - 7x + 6$

Jaetaan polynomi $2x^2 - 7x + 6$ tekijöihin nollakohtien avulla.

$$2x^2 - 7x + 6 = 0$$
$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6}}{2 \cdot 2}$$
$$x = \frac{7 \pm 1}{4}$$
$$x = \frac{8}{4} = 2 \text{ tai } x = \frac{\overset{3}{\cancel{6}}}{\underset{2}{\cancel{4}}} = \frac{3}{2}$$

$$2x^2 - 7x + 6 = 2(x - 2)(x - \frac{3}{2}) = (x - 2) \cdot 2 \cdot (x - \frac{3}{2}) = (x - 2)(2x - 3)$$

c) $10x^2 - 3x - 1$

Jaetaan polynomi $10x^2 - 3x - 1$ tekijöihin nollakohtien avulla.

$$10x^2 - 3x - 1 = 0$$
$$x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 10 \cdot (-1)}}{2 \cdot 10}$$
$$x = \frac{3 \pm 7}{20}$$
$$x = \frac{\overset{1}{\cancel{10}}}{\underset{2}{\cancel{20}}} = \frac{1}{2} \text{ tai } x = -\frac{\overset{1}{\cancel{4}}}{\underset{5}{\cancel{20}}} = -\frac{1}{5}$$

$$10(x^2 - 3x - 1) = 10(x - \frac{1}{2})(x + \frac{1}{5}) = 2(x - \frac{1}{2}) \cdot 5(x + \frac{1}{5})$$
$$= (2x - 1)(5x + 1)$$

K8. **a)** Nollakohdista saadaan selville tekijät.
Nollakohtaa $x = 2$ vastaa tekijä $x - 2$ ja
nollakohtaa $x = -1$ vastaa tekijä $x - (-1) = x + 1$.
Eräs mahdollinen toisen asteen polynomi on
$(x - 2)(x + 1) = x^2 + x - 2x - 2 = x^2 - x - 2$.

b) Polynomilla vain yksi nollakohta $x = 3$, joten sillä on tekijä $x - 3$.
Kyseessä on toisen asteen polynomi, joten tekijä on kaksinkertainen.
Eräs mahdollinen toisen asteen polynomi on
$(x - 3)(x - 3) = (x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$.

c) Eräs mahdollinen toisen asteen polynomi on $x^2 + 2$.
Tällä polynomilla ei ole nollakohtia, koska yhtälöllä
$x^2 + 2 = 0$
$x^2 = -2$
ei ole ratkaisuja.

d) Nollakohtia $x = 4$ ja $x = 0$ vastaavat tekijät ovat $x - 4$ ja x.
Eräs mahdollinen toisen asteen polynomi on $x(x - 4) = x^2 - 4x$.

K9. **a)** $3x^5 + 12x^3$
$= 3x^3(x^2 + 4)$

b) $3x^5 - 12x^3$
$= 3x^3(x^2 - 4)$
$= 3x^3(x + 2)(x - 2)$

c) $x^3 - 2x^2 + 3x - 6$
$= x^2(x - 2) + 3(x - 2)$ (ryhmittely)
$= (x - 2)(x^2 + 3)$

d) $x^4 - 1$
$= (x^2 + 1)(x^2 - 1)$
$= (x^2 + 1)(x - 1)(x + 1)$

K10. Jos polynomilla on nollakohta, sillä on myös tekijä.
Tutkitaan diskriminantin avulla, onko polynomilla $x^2 + x + 4$ nollakohtia.

$D = 1 - 4 \cdot 4 = -15 < 0$

Koska diskriminantti on negatiivinen, polynomilla ei ole nollakohtia eikä sitä voida jakaa ensimmäisen asteen tekijöihin.

Tutkitaan diskriminantin avulla, onko polynomilla $x^2 + 4x + 1$ nollakohtia.

$D = 16 - 4 \cdot 1 = 12 > 0$

Koska diskriminantti on positiivinen, polynomilla on kaksi nollakohtaa, joten se voidaan jakaa ensimmäisen asteen tekijöihin.

K11. **a)** $3x + 6 = 0$

$$3x = -6 \;\|\; : 3$$
$$x = -2$$

b) $4x - 5 = 2x + 6$

$$4x - 2x = 6 + 5$$
$$2x = 11 \;\|\; : 2$$
$$x = \frac{11}{2} = 5\frac{1}{2}$$

c) $(3x - 2)(2x - 1) = 0$

$$3x - 2 = 0 \text{ tai } 2x - 1 = 0$$
$$3x = 2 \;\|\; : 3 \qquad 2x = 1 \;\|\; : 2$$
$$x = \frac{2}{3} \qquad x = \frac{1}{2}$$

d) $(3x - 2)(2x - 1) = 2$

$$(3x - 2)(2x - 1) - 2 = 0$$
$$6x^2 - 3x - 4x + 2 - 2 = 0$$
$$6x^2 - 7x = 0$$
$$x(6x - 7) = 0$$
$$x = 0 \text{ tai } 6x - 7 = 0 \;\|\; : 6$$
$$x = 0 \qquad x = \frac{7}{6} = 1\frac{1}{6}$$

K12. **a)** $2x^2 - 80 = 0$

$2x^2 = 80 \quad || : 2$

$x^2 = 40$

$x = \sqrt{40}$ tai $x = -\sqrt{40}$

$x = 2\sqrt{10}$ $\quad x = -2\sqrt{10}$

b) $10x^3 + 20 = 100$

$10x^3 = 100 - 20$

$10x^3 = 80 \quad || : 10$

$x^3 = 8$

$x = \sqrt[3]{8} = 2$

c) $-3x^6 + 150 = 0$

$-3x^6 = -150 \quad || : -3$

$x^6 = 50$

$x = \sqrt[6]{50}$ tai $x = -\sqrt[6]{50}$

K13. **a)**

$$\frac{x}{3}-\frac{x-1}{4}=\frac{x+3}{12} \quad \| \cdot 12$$
$$4x-3(x-1)=x+3$$
$$4x-3x+3-x-3=0$$
$$0=0$$

Yhtälö on tosi, joten $x \in \mathbb{R}$.

b)

$$(x+2)^2=(x+2)(x-2)$$
$$x^2+4x+4=x^2-4$$
$$x^2+4x+4-x^2+4=0$$
$$4x=-8 \quad \| : 4$$
$$x=-2$$

c) $x^2-2x-1=0$

$$x=\frac{2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 1\cdot(-1)}}{2\cdot 1}$$
$$x=\frac{2\pm\sqrt{8}}{2}$$
$$=\frac{2\pm 2\sqrt{2}}{2}$$
$$x=\frac{2}{2}+\frac{2\sqrt{2}}{2}=1+\sqrt{2} \text{ tai } x=\frac{2}{2}-\frac{2\sqrt{2}}{2}=1-\sqrt{2}$$

K14. **a)**

$$\frac{2}{5}x^2-\frac{1}{5}x-2=0 \quad \| \cdot 5$$
$$2x^2-x-10=0$$
$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot2\cdot(-10)}}{2\cdot2}$$
$$x=\frac{1\pm\sqrt{81}}{4}$$
$$x=\frac{1\pm9}{4}$$
$$x=\frac{\cancel{10}^{\,5}}{\cancel{4}_{\,2}}=\frac{5}{2}=2\frac{1}{2} \text{ tai } x=\frac{-\cancel{8}^{\,2}}{\cancel{4}_{\,1}}=-2$$

Nollakohdat ovat $x=-2$ ja $x=2\frac{1}{2}$.

Kuvaajasta luettuna toisen asteen polynomifunktion, jonka kuvaaja on paraabeli (punainen), nollakohdat ovat samat kuin lasketut nollakohdat.

b)

$$\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{3}x^2-x=0 \quad \| \cdot 3$$
$$x^3-2x^2-3x=0$$
$$x(x^2-2x-3)=0$$
$$x=0 \text{ tai } x^2-2x-3=0$$
$$x=0 \qquad x=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot1\cdot(-3)}}{2}$$
$$x=0 \qquad x=\frac{2\pm\sqrt{16}}{2}$$
$$x=0 \qquad x=\frac{2\pm4}{2}$$
$$x=0 \qquad x=3 \text{ tai } x=-1$$

Nollakohdat ovat $x=-1$, $x=0$ ja $x=3$.

Kuvaajasta (sininen) luettuna nollakohdat ovat samat kuin lasketut nollakohdat.

K15. **a)** $f(x) = x^2 + 2x - 3$

$f(0) = 0^2 + 2 \cdot 0 - 3 = -3$

b)

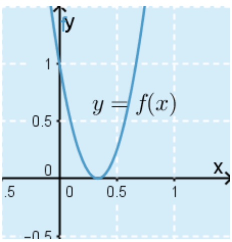
$$f(x) = -3$$
$$x^2 + 2x - 3 = -3$$
$$x^2 + 2x = 0$$
$$x(x + 2) = 0$$
$$x = 0 \text{ tai } x + 2 = 0$$
$$x = 0 \qquad x = -2$$

c)

$$f(x) = 2$$
$$x^2 + 2x - 3 = 2$$
$$x^2 + 2x - 5 = 0$$
$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2 \cdot 1}$$
$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{24}}{2}$$
$$x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{6}}{2}$$
$$x = -1 + \sqrt{6} \text{ tai } x = -1 - \sqrt{6}$$

K16. **a)** $9x^2 - 6x + 1 = 0$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 1}}{2 \cdot 9}$$
$$x = \frac{6 \pm 0}{18}$$
$$x = \frac{1}{3}$$



Kuvaajasta luettuna nollakohta on sama kuin laskettu nollakohta eli $x = \frac{1}{3}$.

b) $-x^4 + 4x^3 - 5x^2 = 0$

$-x^2(x^2 - 4x + 5) = 0$

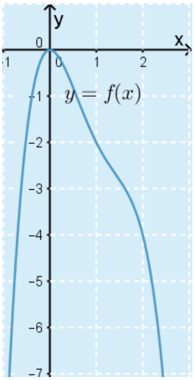
$-x^2 = 0$ tai $x^2 - 4x + 5 = 0$

$x = 0 \qquad x^2 - 4x + 5 = 0$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

ei ratkaisua

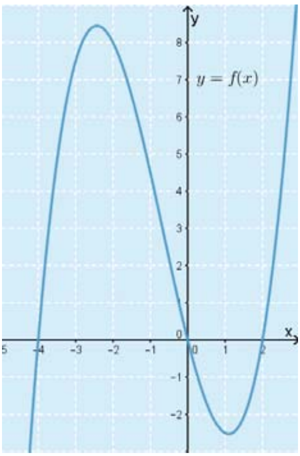


Kuvaajasta luettuna nollakohta on sama kuin laskettu nollakohta eli $x = 0$.

c)

$$\frac{1}{2}x^3 + x^2 - 4x = 0 \parallel \cdot 2$$
$$x^3 + 2x^2 - 8x = 0$$
$$x(x^2 + 2x - 8) = 0$$
$$x = 0 \text{ tai } x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1}$$
$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2}$$
$$= \frac{-2 \pm 6}{2}$$
$$x = \frac{-2+6}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ tai } x = \frac{-2-6}{2} = -\frac{8}{2} = -4$$



Kuvaajasta luettuna nollakohdat ovat samat kuin lasketut nollakohdat eli $x = -4$, $x = 0$ ja $x = 2$.

K17. **a)**

$$2x^5 - 3x^4 - 2x + 3 = 0$$
$$x^4(2x - 3) - (2x - 3) = 0$$
$$(2x - 3)(x^4 - 1) = 0$$
$$2x - 3 = 0 \quad \text{tai} \quad x^4 - 1 = 0$$
$$2x = 3 \;\|:2 \qquad x^4 = 1$$
$$x = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2} \qquad x = 1 \text{ tai } x = -1$$

b)

$$x^3 + 3x^2 = 3x + 9$$
$$x^3 + 3x^2 - 3x - 9 = 0$$
$$x^2(x + 3) - 3(x + 3) = 0$$
$$(x + 3)(x^2 - 3) = 0$$
$$x + 3 = 0 \text{ tai } x^2 - 3 = 0$$
$$x + 3 = 0 \qquad x^2 = 3$$
$$x = -3 \qquad x = \sqrt{3} \text{ tai } x = -\sqrt{3}$$

K18. **a)** $f(x) = qx^2 - 3x + 2$

Funktiolla f voi olla kaksi nollakohtaa, kun se on toisen asteen polynomifuntio, eli $q \neq 0$.

Tutkitaan yhtälön $qx^2 - 3x + 2 = 0$ diskriminanttia. Jos diskriminantti on positiivinen, yhtälöllä on kaksi ratkaisua.

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot q \cdot 2 > 0$$
$$9 - 8q > 0$$
$$-8q > -9 \;\|:(-8)$$
$$q < \frac{9}{8}$$

Funktiolla f on kaksi nollakohtaa, kun $q < \frac{9}{2}$ ja $q \neq 0$.

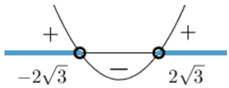
b) $f(x) = 3x^2 + qx + 1$.

Tutkitaan yhtälön $3x^2 + qx + 1 = 0$ diskriminanttia. Jos diskriminantti on positiivinen, yhtälöllä on kaksi ratkaisua ja funktiolla kaksi nollakohtaa.

$$D = q^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 > 0$$
$$q^2 - 12 > 0$$

Lasketaan lausekkeen $q^2 - 12$ nollakohdat.

$$q^2 - 12 = 0$$
$$q^2 = 12$$
$$q = \sqrt{12} \text{ tai } q = -\sqrt{12}$$
$$q = 2\sqrt{3} \text{ tai } q = -2\sqrt{3}$$



Diskriminantti on positiivinen, kun $q < -2\sqrt{3}$ tai $q > 2\sqrt{3}$.

Funktiolla f on kaksi nollakohtaa, kun $q < -2\sqrt{3}$ tai $q > 2\sqrt{3}$.

K19. Funktion arvo on positiivinen, kun kuvaaja on x-akselin yläpuolella.

a) $x < 1$

b) $x < -1$ tai $x > 2$

K20. Funktion arvo on positiivinen, kun epäyhtälö $f(x) > 0$ toteutuu.

a)

$$-\frac{1}{2}x+2>0$$
$$-\frac{1}{2}x>-2 \parallel \cdot(-2)$$
$$x<4$$

Funktion arvo on positiivinen, kun $x < 4$.

b) $2x^2 - 8 > 0$

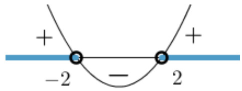
Ratkaistaan nollakohdat.

$2x^2 - 8 = 0$

$2x^2 = 8 \quad \parallel :2$

$x^2 = 4$

$x = 2$ tai $x = -2$



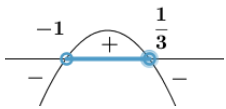
Funktion arvo on positiivinen, kun $x < -2$ tai $x > 2$.

c) $-3x^2 - 2x + 1 > 0$

Ratkaistaan nollakohdat.

$-3x^2 - 2x + 1 = 0$

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot(-3)\cdot1}}{2\cdot(-3)}$$
$$x=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{-6}$$
$$x=\frac{2\pm4}{-6}$$
$$x=\frac{2+4}{-6}=\frac{6}{-6}=-1 \text{ tai } x=\frac{2-4}{-6}=\frac{-2}{-6}=\frac{1}{3}$$



Funktion arvo on positiivinen, kun, kun

$$-1<x<\frac{1}{3}.$$

d) $-x^3 + 216 > 0$

$$-x^3>-216 \parallel :(-1)$$
$$x^3<216$$
$$x<\sqrt[3]{216}$$
$$x<6$$

K21. **a)**

$$\begin{aligned} 2+3x &\geq \frac{2}{3}(6x-3) \\ 2+3x &\geq 4x-2 \\ 3x-4x &\geq -2-2 \\ -x &\geq -4 \qquad \| :(-1) \\ x &\leq 4 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} (x+1)(x+2) &> x+5 \\ x^2+2x+x+2-x-5 &> 0 \\ x^2+2x-3 &> 0 \end{aligned}$$

Nollakohdat:

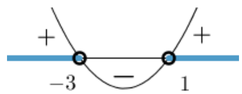
$x^2 + 2x - 3 = 0$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2}$$

$$x = \frac{-2 \pm 4}{2}$$

$$x = \frac{-2+4}{2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ tai } x = \frac{-2-4}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$



$(x + 1)(x + 2) > x + 5$, kun $x < -3$ tai $x > 1$.

c)

$$-2x^2 < 5(x-5)$$
$$-2x^2 < 5x - 25$$
$$-2x^2 - 5x + 25 < 0$$

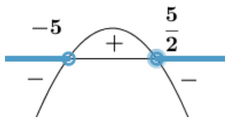
Nollakohdat:

$$-2x^2 - 5x + 25 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4\cdot(-2)\cdot 25}}{2\cdot(-2)}$$
$$= \frac{5 \pm \sqrt{225}}{-4}$$
$$= \frac{5 \pm 15}{-4}$$

$$x = \frac{5+15}{-4} = \frac{20}{-4} = -5 \quad \text{tai} \quad x = \frac{5-15}{-4} = \frac{-10}{-4} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$$

$-2x^2 < 5(x-5)$, kun $x < -5$ tai $x > \frac{5}{2}$.



d)

$$x^3 + x^2 \leq 12x$$
$$x^3 + x^2 - 12x \leq 0$$
$$x(x^2 + x - 12) \leq 0$$

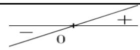
Lausekkeen merkkiin vaikuttaa molempien tekijöiden merkit. Ratkaistaan nollakohdat ja laaditaan merkkikaavio.

Nollakohdat:

$$x^3 + x^2 - 12x = 0$$
$$x(x^2 + x - 12) = 0$$
$$x = 0 \text{ tai } x^2 + x - 12 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot 1\cdot(-12)}}{2\cdot 1}$$
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2}$$
$$x = \frac{-1 \pm 7}{2}$$
$$x = \frac{6}{2} = 3 \text{ tai } x = -\frac{8}{2} = -4$$

$x = -4$ tai $x = 0$ tai $x = 3$

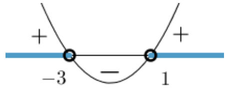
		-4	0	3	
x	$-$	$-$	$+$	$+$	
$x^2 + x - 12$	$+$	$-$	$-$	$+$	
$x(x^2 + x - 12)$	$-$	$+$	$-$	$+$	

$x^3 + x^2 \leq 12x$, eli $x^3 + x^2 - 12x \leq 0$, kun $x \leq -4$ tai $0 \leq x \leq 3$.

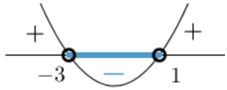
K22. **a)** Funktion arvo on positiivinen, kun epäyhtälö $(x + 1)^2 - 4 > 0$ toteutuu.

Nollakohdat:

$$(x + 1)^2 - 4 = 0$$
$$(x + 1)^2 = 4$$
$$x + 1 = 2 \text{ tai } x + 1 = -2$$
$$x = 1 \text{ tai } \quad x = -3$$



Positiivinen, kun $x < -3$ tai $x > 1$.



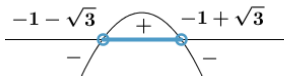
Negatiivinen, kun $-3 < x < 1$.

b) Funktion arvo on positiivinen, kun epäyhtälö $-x^2 - 2x + 2 > 0$ toteutuu.

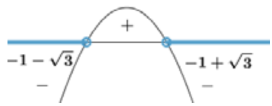
Nollakohdat:

$$-x^2 - 2x + 2 = 0$$
$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 2}}{2 \cdot (-1)}$$
$$x = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{-2}$$
$$x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2}$$
$$x = -\frac{2}{2} + \frac{2\sqrt{3}}{2} = -1 + \sqrt{3}$$
$$\text{tai } x = -\frac{2}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{2} = -1 - \sqrt{3}$$

Positiivinen, kun $-1 - \sqrt{3} < x < -1 + \sqrt{3}$.



Negatiivinen, kun $x < -1 - \sqrt{3}$ tai $x > -1 + \sqrt{3}$.



K23. a)

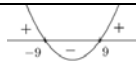
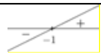
$$x^3 + x^2 \geq 81x + 81$$
$$x^3 + x^2 - 81x - 81 \geq 0$$
$$x^2(x + 1) - 81(x + 1) \geq 0$$
$$(x + 1)(x^2 - 81) \geq 0$$

Ratkaistaan nollakohdat ja laaditaan merkkikaavio.

Nollakohdat:

$$x^2(x + 1) - 81(x + 1) = 0$$
$$(x + 1)(x^2 - 81) = 0$$
$$(x + 1)(x^2 - 81) = 0$$
$$x + 1 = 0 \quad \text{tai} \quad x^2 - 81 = 0$$
$$x = -1 \qquad x^2 = 81$$
$$x = 9 \text{ tai } x = -9$$

-9 $\quad -1$ $\quad 9$

$x^2 - 81$	+	–	–	+	
$x + 1$	–	–	+	+	
$(x^2 - 81)(x + 1)$	–	+	–	+	

$x^3 + x^2 \geq 81x + 81$, eli $x^3 + x^2 - 81x - 81 \geq 0$, kun $-9 \leq x \leq -1$ tai $x \geq 9$.

b) $x^6 + 2x^5 - 32x - 64 < 0$

Ratkaistaan nollakohdat ja laaditaan merkkikaavio.

Nollakohdat:

$$x^6 + 2x^5 - 32x - 64 = 0$$
$$x^5(x + 2) - 32\,(x + 2) = 0$$
$$(x + 2)(x^5 - 32) = 0$$
$x + 2 = 0$ tai $x^5 - 32 = 0$

$x = -2$ $\quad\quad$ $x = \sqrt[5]{32} = 2$

Lasketaan lausekkeen $x^6 + 2x^5 - 32x - 64$ arvo ja päätellään merkki nollakohtien välissä olevissa testikohdissa.

$x = -3$: $(-3)^6 + 2 \cdot (-3)^5 - 32 \cdot (-3) - 64 = 275 > 0$

$x = 0$: $0^6 + 2 \cdot 0^5 - 32 \cdot 0 - 64 = -64 < 0$

$x = 3$: $3^6 + 2 \cdot 3^5 - 32 \cdot 3 - 64 = 1055 > 0$

		-2		2	
$x^6 + 2x^5 - 32x - 64$	+		–		+

$x^6 + 2x^5 - 32x - 64 < 0$, kun $-2 < x < 2$.

K24. **a)** Funktion $f(x) = -x^2 + 4x - 5$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli. Funktio saa vain negatiivisia arvoja, jos sen kuvaaja on kaikilla x:n arvoilla x-akselin alapuolella eli sillä ei ole nollakohtia.

Toisen asteen polynomifunktiolla ei ole nollakohtia, kun vastaavan yhtälön diskriminantti on negatiivinen.

Diskriminantti $D = 4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-5) = 16 - 20 = -4 < 0$.
Funktio saa vain negatiivisia arvoja.

b) Molemmat tulon $(x^2 + 1)(x^4 + 2)$ tekijät ovat positiivisia, koska parilliset potenssit x^2 ja x^4 ovat aina ei-negatiivisia, joten $x^2 + 1 > 0$ ja $x^4 + 2 > 0$. Näin ollen myös niiden tulo on positiivinen. Lauseke ei voi saada negatiivista arvoa, joten epäyhtälö on epätosi.

K25. **a)** $x^2 + px + 3 > 0$

Tutkitaan funktiota $f(x) = x^2 + px + 3$. Kyseessä on toisen asteen polynomifunktio, jonka kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. Jos diskriminantti on negatiivinen, niin silloin funktiolla ei ole yhtään nollakohtaa, ja funktio saa vain positiivisia arvoja.

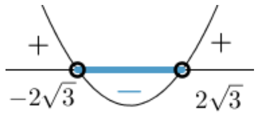
$D = p^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = p^2 - 12 < 0$

Nollakohdat:

$p^2 - 12 = 0$

$p^2 = 12$

$p = 2\sqrt{3}$ tai $p = -2\sqrt{3}$



Diskriminantti on negatiivinen, kun $-2\sqrt{3} < p < 2\sqrt{3}$.

Epäyhtälö $x^2 + px + 3 > 0$ on aina tosi, kun $-2\sqrt{3} < p < 2\sqrt{3}$.

b) $-x^2 + 2x + p \geq 0$

Tutkitaan funktiota $f(x) = -x^2 + 2x + p$. Kyseessä on toisen asteen polynomifunktio, jonka kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli. Epäyhtälö toteutuu vain yhdellä muuttujan x arvolla, kun vain epäyhtälön yhtäsuuruus toteutuu. Kun diskriminantti on nolla, funktiolla on yksi nollakohta ja funktio saa vain negatiivisia arvoja tai arvon nolla.

$D = 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot p = 4 + 4p$

$$4 + 4p = 0$$

$$4p = -4 \quad \| : 4$$

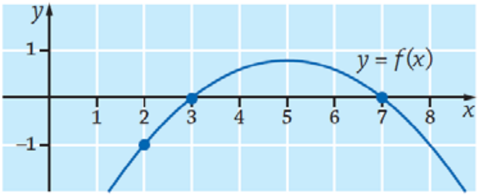
$$p = -1$$

Epäyhtälö $-x^2 + 2x + p \geq 0$ toteutuu vain yhdellä muuttujan arvolla, kun $p = -1$.

Kokoavia tehtäviä

ILMAN TEKNISIÄ APUVÄLINEITÄ

1. **a)** Nollakohdat ovat $x = 3$ ja $x = 7$ ja $f(2) = -1$. Hahmotellaan kuvaaja annettujen pisteiden avulla.



Aukeamissuunnan tulee olla alaspäin, koska funktion arvo on negatiivinen pienemmän nollakohtansa vasemmalla puolella.

b) Huippu sijaitsee nollakohtien puolivälissä, kohdassa $x = \frac{3+7}{2} = 5$.

c) $f(0)$ on negatiivinen ja $f(5)$ on positiivinen.

2. **a)** Jos luku 2 on yhtälön $3x + a = 0$ ratkaisu, se toteuttaa yhtälön.

$$\begin{aligned} 3 \cdot 2 + a &= 0 \\ 6 + a &= 0 \\ a &= -6 \end{aligned}$$

b) $3x - \pi = 0$

$$\begin{aligned} 3x &= \pi \quad \| :3 \\ x &= \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

3. **a)** Luku $x = -1$ on yhtälön $x^4 - x^2 + 3x + 1 = 0$ ratkaisu, jos se toteuttaa yhtälön.

$(-1)^4 - (-1)^2 + 3 \cdot (-1) + 1 = 1 - 1 - 3 + 1 = -2 \neq 0$

Luku $x = -1$ ei ole yhtälön ratkaisu.

b) Luku $x = 0$ on yhtälön ratkaisu, jos se toteuttaa yhtälön.

$0^3 + 7 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 = 0$
Väite on tosi, joten $x = 0$ on yhtälön ratkaisu.

Tutkitaan, onko muita ratkaisuja.

$$x(x^2 + 7x - 2) = 0$$
$$x = 0 \text{ tai } x^2 + 7x - 2 = 0$$
$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1}$$
$$= \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 8}}{2}$$
$$= \frac{-7 \pm \sqrt{57}}{2}$$
$$x = \frac{-7 + \sqrt{57}}{2} \text{ tai } x = \frac{-7 - \sqrt{57}}{2}$$

Väite on epätosi. Yhtälöllä on kaksi muutakin ratkaisua.

c) Tutkitaan mitä arvoja funktio $1{,}1\,x^2 + 2x + 1 = 0$ voi saada. Funktion kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. Ratkaistaan funktion nollakohdat.

$$1{,}1x^2 + 2x + 1 = 0$$
$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1{,}1 \cdot 1}}{2 \cdot 1{,}1}$$
$$= \frac{-2 \pm \sqrt{-0{,}4}}{2 \cdot 1{,}1}$$

Huomataan, että diskriminantti on negatiivinen. Näin ollen funktiolla ei ole nollakohtia. Koska funktion kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, jolla ei ole nollakohtia, funktio saa vain positiivisia arvoja. Funktio ei voi saada negatiivista arvoa $-\sqrt{2}$.
Väite on epätosi.

4. **a)** $(2x+1)^2 = 25$

$2x + 1 = 5$ tai $2x + 1 = -5$

$2x = 4 \qquad 2x = -6$

$x = 2 \qquad x = -3$

b)

$$(2x-1)^2 = (2-x)^2$$
$$4x^2 - 4x + 1 = 4 - 4x + x^2$$
$$4x^2 - 4x + 1 - 4 + 4x - x^2 = 0$$
$$3x^2 - 3 = 0$$
$$3x^2 = 3 \qquad \| :3$$
$$x^2 = 1$$
$$x = 1 \text{ tai } x = -1$$

c)

$$(x^2+1)^2 = (x^2-2)^2$$
$$x^4 + 2x^2 + 1 = x^4 - 4x^2 + 4$$
$$x^4 - x^4 + 2x^2 + 1 + 4x^2 - 4 = 0$$
$$6x^2 - 3 = 0$$
$$6x^2 = 3 \ \| :6$$
$$x^2 = \frac{1}{2}$$
$$x = \sqrt{\frac{1}{2}} \text{ tai } x = -\sqrt{\frac{1}{2}}$$
$$x = {}^{\sqrt{2})}\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad x = -{}^{\sqrt{2})}\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

d) $(x+3)^2 - (x+2)(x-2) > 4$

$$x^2 + 6x + 9 - (x^2 - 4) - 4 > 0$$
$$x^2 + 6x + 9 - x^2 + 4 - 4 > 0$$
$$6x + 9 > 0$$
$$6x > -9 \ \| :6$$
$$x > -\frac{9}{6}^{(3}$$
$$x > -\frac{3}{2}$$

5. **a)** $x = 0$ ja $x = 2$

b) $f(x) = -3$, kun $x = 1$ ja $g(x) = -2$, kun $x = 0$ tai $x = 2$

c) $g(x) \leq 0$, kun $-1 \leq x \leq 3$ ja $h(x) \leq 0$, kun $x \leq -1$ tai $x \geq 3$

d) Funktioiden *f* ja *g*, koska niiden kuvaajat ovat ylöspäin aukeavia paraabeleja.

e) Funktion *h* saamista arvoista suurin on 3. Se saadaan muuttujan *x* arvolla 2.

f) Vakiotermi ilmoittaa *y*-akselin leikkauskohdan. Funktion *g* lausekkeessa vakiotermi on −2.

6. Funktiolla *f* on nollakohta $x = -\frac{1}{2}$, jos $f(-\frac{1}{2}) = 0$.

$$f(-\frac{1}{2}) = (a+1)(-\frac{1}{2})^3 + 3\cdot(-\frac{1}{2}) + 1 = (a+1)(-\frac{1}{8}) - \frac{3}{2} + 1 = -\frac{1}{8}a - \frac{1}{8} - {}^{4)}\frac{1}{2}$$
$$= -\frac{1}{8}a - \frac{5}{8}$$

$$-\frac{1}{8}a - \frac{5}{8} = 0$$
$$-\frac{1}{8}a = \frac{5}{8} \quad \| \cdot 8$$
$$-a = 5$$
$$a = -5$$

Sijoitetaan $a = -5$ funktion lausekkeeseen.
$f(x) = (-5 + 1) \cdot x^3 + 3x + 1 = -4x^3 + 3x + 1$

Tutkitaan, millä muuttujan *x* arvolla funktio saa arvon 1.
$-4x^3 + 3x + 1 = 1$
$-4x^3 + 3x = 0$

$$-x(4x^2-3)=0$$
$$-x=0 \text{ tai } 4x^2-3=0$$
$$x=0 \text{ tai } x^2=\frac{3}{4}$$
$$x=0 \text{ tai } x=\sqrt{\frac{3}{4}} \text{ tai } x=-\sqrt{\frac{3}{4}}$$
$$x=0 \text{ tai } x=\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ tai } x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Funktiolla on nollakohta $x = -\frac{1}{2}$, kun $a = -5$. Funktio saa arvon 1, muuttujan arvoilla $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x = 0$ ja $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

7. **a)** On.

Luku $3-\sqrt{2}$ on luvun $11-6\sqrt{2}$ neliöjuuri, jos luku $3-\sqrt{2}$ on positiivinen ja jos luku $3-\sqrt{2}$ korotettuna toiseen potenssiin on $11-6\sqrt{2}$.

Luku $3-\sqrt{2}=\sqrt{9}-\sqrt{2}$ on positiivinen.

$$(3-\sqrt{2})^2$$
$$=9-2\cdot 3\cdot \sqrt{2}+(\sqrt{2})^2$$
$$=9-6\sqrt{2}+2$$
$$=11-6\sqrt{2}$$

Näin ollen luku $3-\sqrt{2}$ on luvun $11-6\sqrt{2}$ neliöjuuri.

b) Ei ole.

Koska luku $2-\sqrt{5}=\sqrt{4}-\sqrt{5}$ on negatiivinen, se ei voi olla minkään luvun neliöjuuri.

8. $qx^2 + 3x + q = 0$

Jos $q = 0$, yhtälö on ensimmäisen asteen yhtälö ja sillä on yksi ratkaisu.

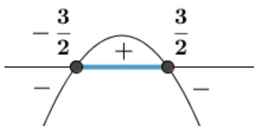
$3x = 0$
$x = 0$

Jos $q \neq 0$, yhtälö on toisen asteen yhtälö.
Toisen asteen yhtälöllä on vähintään yksi ratkaisu, kun diskriminantti on positiivinen tai nolla.
$D = 3^2 - 4q \cdot q = 9 - 4q^2$

$9 - 4q^2 \geq 0$

Lasketaan nollakohdat.

$$9 - 4q^2 = 0$$
$$9 = 4q^2$$
$$q^2 = \frac{9}{4}$$
$$q = \sqrt{\frac{9}{4}} \text{ tai } q = -\sqrt{\frac{9}{4}}$$
$$q = \frac{3}{2} \text{ tai } q = -\frac{3}{2}$$



Yhtälöllä on vähintään yksi ratkaisu, kun $-\frac{3}{2} \leq q \leq \frac{3}{2}$. Kohta $q = 0$ sisältyy tähän väliin.

9. $f(x)^2 + 2f(x) - 3 = 0$

Merkitään $f(x) = z$, jolloin saadaan yhtälö $z^2 + 2z - 3 = 0$.

$$z = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2}$$

$$z = \frac{-2+4}{2} = 1 \quad \text{tai} \quad z = \frac{-2-4}{2} = -3$$

$f(x) = x^2 + 2x - 3 = 1$ tai $f(x) = x^2 + 2x - 3 = -3$.

$$x^2 + 2x - 3 = 1$$
$$x^2 + 2x - 4 = 0$$
$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{2}$$
$$x = -\frac{2}{2} + \frac{2\sqrt{5}}{2} = -1 + \sqrt{5} \quad \text{tai} \quad x = -\frac{2}{2} - \frac{2\sqrt{5}}{2} = -1 - \sqrt{5}$$

tai

$$x^2 + 2x - 3 = -3$$
$$x^2 + 2x = 0$$
$$x(x + 2) = 0$$
$$x = 0 \text{ tai } x + 2 = 0$$
$$x = -2$$

$x = -1 - \sqrt{5}$, $x = -2$, $x = 0$ tai $x = -1 + \sqrt{5}$

10. Ratkaistaan yhtälö.

$$x^3 + ax = x^2 + a^2x$$
$$x^3 + ax - x^2 - a^2x = 0$$
$$x^3 - x^2 + (a - a^2)x = 0$$
$$x(x^2 - x + (a - a^2)) = 0$$

$$x = 0 \text{ tai } x^2 - x + (a - a^2) = 0$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (a - a^2)}}{2 \cdot 1}$$
$$= \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4a + 4a^2}}{2}$$
$$= \frac{1 \pm \sqrt{(2a - 1)^2}}{2}$$

Diskriminantti $(2a - 1)^2$ on positiivinen tai nolla kaikilla a:n arvoilla. Yhtälöllä $x^2 - x + (a - a^2)$ on yksi tai kaksi ratkaisua. Alkuperäisellä yhtälöllä on tämän lisäksi ratkaisu $x = 0$, joten alkuperäisellä yhtälöllä on aina vähintään kaksi ratkaisua.

APUVÄLINEET SALLITTU

11. **a)** Merkitään sädettä kirjaimella r.

$$\pi r^2 = 1000 \quad ||:\pi$$
$$r^2 = \frac{1000}{\pi}$$
$$r = \sqrt{\frac{1000}{\pi}} \approx 17{,}841 \approx 17{,}84 \text{ tai } r = -\sqrt{\frac{1000}{\pi}} (< 0)$$

Säteen tulee olla positiivinen. Säteen pituus on 17,84 metriä.

b) Merkitään kuution särmää x:llä. Kuution tilavuus on $x \cdot x \cdot x = x^3$.

$$x^3 = 10$$
$$x = \sqrt[3]{10} \approx 2{,}154$$

Kuution särmän pituus on 2,15 cm.

12. Toisen asteen polynomifunktion f nollakohdat ovat $x = 2$ ja $x = 4$.
Funktion lauseke on muotoa $f(x) = a(x – 2)(x – 4)$.
Koska piste (3, 2) on funktion kuvaajalla, tulee olla $f(3) = 2$.

$f(3) = a(3 – 2)(3 – 4) = a \cdot 1 \cdot(–1) = –a$
$–a = 2 \quad \| : (–1)$
$a = –2$

Funktion f lauseke on
$f(x) = –2(x – 2)(x – 4) = –2x^2 + 12x – 16$.

Kolmannen asteen polynomifunktion g nollakohdat ovat $x = –2$, $x = 2$ ja $x = 4$. Funktion lauseke on muotoa $g(x) = b(x + 2)(x – 2)(x – 4)$.
Koska piste (0, 3) on funktion kuvaajalla, tulee olla $g(0) = 3$.

$g(0) = b(0 + 2)(0 – 2)(0 – 4) = 16b$
$16b = 3 \quad \| : 16$
$b = \frac{3}{16}$

Funktion g lauseke on:

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{3}{16}(x+2)(x-2)(x-4) \\ &= \frac{3}{16}x^3 - \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{4}x + 3. \end{aligned}$$

Funktioiden lausekkeet ovat $f(x) = –2x^2 + 12x – 16$ ja
$g(x) = \frac{3}{16}x^3 - \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{4}x + 3$.

13. Merkitään kirjaimella x kysyttyä vuosien määrää tästä hetkestä. Tällöin nuoremman serkun ikä on $8 + x$ ja vanhemman serkun ikä on $21 + x$. Vanhemman serkun ikä on kaksinkertainen nuoremman ikään verrattuna. Saadaan yhtälö:

$$
\begin{aligned}
2(8 + x) &= 21 + x \\
16 + 2x &= 21 + x \\
2x - x &= 21 - 16 \\
x &= 5
\end{aligned}
$$

Vanhemman serkun ikä on kaksinkertainen nuoremman serkun ikään verrattuna viiden vuoden kuluttua.

14. Kentän alkuperäinen leveys on x ja pituus on $2x$.
Alkuperäinen pinta-ala on $x \cdot 2x = 2x^2$.
Leveys kasvaa 10 m, joten uusi leveys on $x + 10$.
Pituus kasvaa 10 m, joten uusi pituus on $2x + 10$.

Suuremman kentän pinta-ala on $(x + 10)(2x + 10)$.

Suuremman kentän pinta-ala on kaksinkertainen pienemmän kentän pinta-alaan verrattuna.

$$
\begin{aligned}
(x + 10)(2x + 10) &= 2 \cdot 2x^2 \\
2x^2 + 10x + 20x + 100 &= 4x^2 \\
-2x^2 + 30x + 100 &= 0 \quad \| : (-2) \\
x^2 - 15x - 50 &= 0
\end{aligned}
$$

$$x = \frac{15 + 5\sqrt{17}}{2} \approx 17{,}81 \text{ tai } x = \frac{15 - 5\sqrt{17}}{2} \approx -2{,}81$$

Leveyden tulee olla positiivinen.
Pituus on $2 \cdot 17{,}8 = 35{,}6$.

Kentän leveys on 18 metriä ja pituus on 36 metriä.

15. **a)** Merkitään väkiluvun vuotuista kasvua kuvaavaa kasvukerrointa kirjaimella x.

Asukasluku:

1. vuonna	124 000
2. vuonna	$x \cdot 124\,000$
3. vuonna	$x^2 \cdot 124\,000$
…	
10. vuonna	$x^{10} \cdot 124\,000$

Saadaan yhtälö:

$$x^{10} \cdot 124\,000 = 137\,000 \parallel : 124\,000$$
$$x^{10} = 1{,}10484$$
$$x = \sqrt[10]{1{,}10484} \text{ tai } x = -\sqrt[10]{1{,}10484} < 0$$
$$x \approx 1{,}01002$$

Kasvukerroin on 1,01002 eli vuotuinen kasvu on n. 1,0 %.

b) Sarvikuonojen määrä alussa on a.

Merkitään vuotuista vähenemiskerrointa kirjaimella x.
Sarvikuonojen määrä:
1. vuoden kuluttua xa
2. vuoden kuluttua x^2a
…
5. vuoden kuluttua x^5a

Sarvikuonojen määrä väheni kolmanneksella, eli sarvikuonoja on $\frac{2}{3}$ alkuperäisestä määrästä jäljellä.

Saadaan yhtälö

$$x^5a = \frac{2}{3}a \parallel : a \neq 0$$
$$x^5 = \frac{2}{3}$$
$$x = \sqrt[5]{\frac{2}{3}}$$
$$x = 0{,}9221079 \approx 0{,}922$$

Koska vähenemiskerroin on 0,922, kanta väheni vuodessa keskimäärin 1 – 0,9221079 = 0,07789 = 7,8 %.

Kanta pieneni 7,8 prosenttia vuodessa.

16. $2x^2 - 3x - 14 < 0$

Tutkitaan funktion $f(x) = 2x^2 - 3x - 14$ merkkiä.
Ratkaistaan funktion nollakohdat.

$$2x^2 - 3x - 14 = 0$$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-14)}}{2 \cdot 2}$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{121}}{4}$$

$$= \frac{3 \pm 11}{4}$$

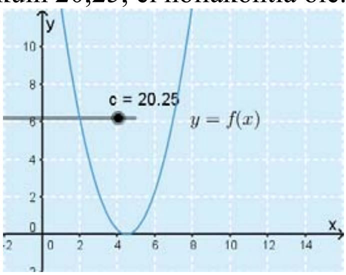
$$x = \frac{14}{4} = 3\frac{1}{2} \quad \text{tai } x = \frac{-8}{4} = -2$$

Funktion f kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.

Epäyhtälö $2x^2 - 3x - 14 < 0$ toteutuu, kun $-2 < x < 3{,}5$.

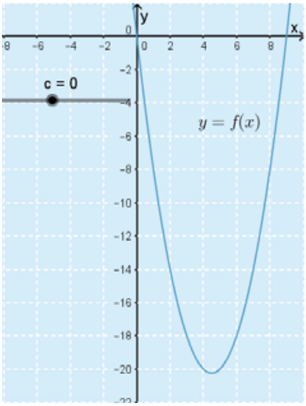
Epäyhtälön toteuttavat positiivisista kokonaisluvuista luvut 1, 2 ja 3.

17. **a)** Funktiolla on yksi nollakohta, kun $c = 20{,}25$. Kun vakio c on suurempi kuin 20,25, ei nollakohtia ole.



$c > 20{,}25$

b)



$c = 0$

c) a-kohta:

Tutkitaan toisen asteen yhtälön $x^2 - 9x + c = 0$ ratkaisuiden lukumäärää diskriminantin avulla. Yhtälöllä ei ole yhtään ratkaisua, jos diskriminantti on negatiivinen.

$$D = (-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot c < 0$$
$$81 - 4c < 0$$
$$-4c < -81 \;\|\; : -4$$
$$c > \frac{-81}{-4} = \frac{81}{4} = 20\frac{1}{4}$$

Funktiolla f ei ole nollakohtia, kun $c > 20\frac{1}{4}$.

b-kohta:

Jos $x = 0$ ja $x = 9$ ovat toisen asteen funktion nollakohdat, ne toteuttavat toisen asteen yhtälön $f(x) = 0$.

Sijoitetaan yhtälöön $x^2 - 9x + c = 0$ luku $x = 0$:

$$0^2 - 9 \cdot 0 + c = 0$$
$$c = 0$$

Sijoitetaan $x = 9$.

$$9^2 - 9 \cdot 9 + c = 0$$
$$c = 0.$$

Funktion f nollakohdat ovat $x = 0$ ja $x = 9$, kun $c = 0$.

18. **a)** Toisen asteen yhtälöllä $3x^2 - ax - 4a = 0$ on täsmälleen yksi ratkaisu silloin, kun diskriminantti on nolla.

$D = (-a)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-4a) = a^2 + 48a$

$a^2 + 48a = 0$

$a(a + 48) = 0$

$a = 0$ tai $a + 48 = 0$

$a = -48$

Ratkaistaan yhtälö $3x^2 - ax - 4a = 0$ molemmilla a:n arvoilla.

Kun $a = 0$:

$3x^2 - 0 \cdot x - 4 \cdot 0 = 0$

$3x^2 = 0$

$x = 0$

Kun $a = -48$:

$3x^2 - (-48)x - 4 \cdot (-48) = 0$

$3x^2 + 48x + 192 = 0$

$x = -8.$

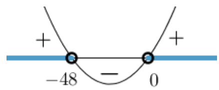
Kun $a = 0$, $x = 0$ ja kun $a = -48$, $x = -8$.

b) Yhtälöllä on kaksi ratkaisua, kun diskriminantti on positiivinen.

$D = a^2 + 48a > 0.$

Yhtälön $a^2 + 48a = 0$ ratkaisut ovat a-kohdan perusteella $a = 0$ ja $a = -48$.

Lausekkeen kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.

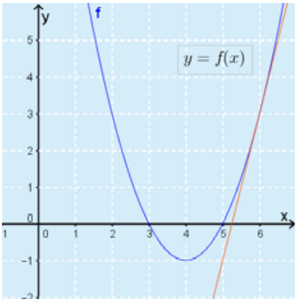


Diskriminantti on positiivinen, kun $a < -48$ tai $a > 0$.

Tällöin yhtälön $3x^2 - ax - 4a = 0$ ratkaisut ovat

$$x = \frac{-(-a) \pm \sqrt{(-a)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-4a)}}{2 \cdot 3} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 48a}}{6}.$$

19.



Paraabeli ei kulje suoran alapuolella, jos paraabelin y-koordinaatti on jokaisessa kohdassa suurempi kuin suoran y koordinaatti samassa kohdassa.

Modostetaan epäyhtälö.

$$x^2 - 8x + 15 \geq 4x - 21$$
$$x^2 - 12x + 36 \geq 0$$

Tutkitaan funktion $f(x) = x^2 - 12x + 36$ kulkua.
Lasketaan nollakohdat:

$$x^2 - 12x + 36 = 0$$
$$x = 6$$

Funktion f kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, jolla on yksi nollakohta. Funktion f arvo on aina positiivinen tai nolla, joten epäyhtälö toteutuu kaikilla muuttujan x arvoilla. Paraabeli kulkee kaikkialla suoran yläpuolella.

Suoralla ja paraabelilla on yhteinen piste, kun yhtäsuuruus toteutuu.
Sijoitetaan $x = 6$ suoran lausekkeeseen $y = 4 \cdot 6 - 21 = 3$.
Yhteinen piste on (6, 3).

20. Koska polynomi $x^3 + bx + c - 3$ on kolmannen asteen polynomi, tulee sillä olla tekijän $x^2 - 1$ lisäksi toinen, ensimmäisen asteen tekijä. Koska kolmannen asteen termin x^3 kerroin on 1, on toinen tekijä muotoa $x + d$.

Polynomin lauseke on muotoa
$(x + d)(x^2 - 1) = x^3 - x + dx^2 - d = x^3 + dx^2 - x - d$.
Jotta saatu polynomin lauseke olisi sama kuin $x^3 + bx + c - 3$, tulee olla
$d = 0$
$b = -1$
$c - 3 = -d$, josta saadaan sijoittamalla $d = 0$
$c = 3$

$b = -1$ ja $c = 3$