Kertaus

K1. **a)** Ratkaistaan suorakulmaisen kolmion kateetin pituus x tangentin avulla.

$$\tan 39° = \frac{x}{3{,}5} \quad || \cdot 3{,}5$$
$$x = 3{,}5 \cdot \tan 39°$$
$$x = 2{,}83...$$
$$x \approx 2{,}8 \text{ (cm)}$$

Kateetin pituus x on 2,8 cm.

b) Ratkaistaan vinokulmaisen kolmion sivun pituus x kosinilauseella.

$$x^2 = 17{,}0^2 + 16{,}3^2 - 2 \cdot 17{,}0 \cdot 16{,}3 \cdot \cos 135°$$
$$x^2 = 946{,}5\ldots$$
$$x = 30{,}76\ldots \text{ (tai } x = -30{,}76\ldots)$$
$$x \approx 30{,}8 \text{ (cm)}$$

Kolmion sivun pituus x on 30,8 cm.

c) Ratkaistaan tasasivuisen kolmion korkeusjanan pituus x kuvan suorakulmaisesta kolmiosta Pythagoraan lauseen avulla. Koska tasasivuisen kolmion korkeusjana puolittaa kannan, on suorakulmaisen kolmion toisen kateetin pituus puolet kannan pituudesta, eli 3.

$$x^2 + 3^2 = 6^2$$
$$x^2 + 9 = 36$$
$$x^2 = 27$$
$$x = \sqrt{27} \text{ (tai } x = -\sqrt{27})$$
$$x = \sqrt{9 \cdot 3} = 3\sqrt{3}$$

K2. **a)** Ratkaistaan kulman α suuruus kosinilauseen avulla.

$$
\begin{aligned}
7{,}7^2 &= 3{,}4^2 + 5{,}6^2 - 2 \cdot 3{,}4 \cdot 5{,}6 \cdot \cos\alpha \\
59{,}29 &= 11{,}56 + 31.36 - 38{,}08 \cdot \cos\alpha \\
16{,}39 &= -\ 38{,}08 \cdot \cos\alpha \\
38{,}08 \cdot \cos\alpha &= -16{,}39 \ \|: 38{,}08 \\
\cos\alpha &= \frac{16{,}37}{-38{,}08} \\
\alpha &= 115{,}46...^\circ \\
\alpha &\approx 115{,}5^\circ
\end{aligned}
$$

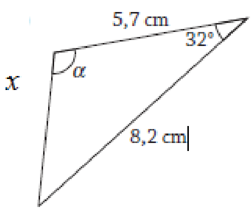
Tehtävässä kysytään tylppää kulmaa. Kulma on tylppä, joten $\alpha = 115{,}5°$.

b) Ratkaistaan kulman α suuruus sinilauseen avulla.

$$
\begin{aligned}
\frac{88}{\sin\alpha} &= \frac{51}{\sin 28^\circ} \\
51 \cdot \sin\alpha &= 88 \cdot \sin 28^\circ \ \|: 51 \\
\sin\alpha &= \frac{88 \cdot \sin 28^\circ}{51} \\
\alpha &= 54{,}10...^\circ \text{ tai } \alpha = 180^\circ - 54{,}10...^\circ = 125{,}89...^\circ \\
\alpha &\approx 54{,}1^\circ \qquad \alpha \approx 125{,}9^\circ
\end{aligned}
$$

Tehtävässä kysytään tylppää kulmaa, joten $\alpha = 125{,}9°$.

c) Kulman ratkaiseminen ei nyt onnistu suoraan sini- eikä kosinilauseella. Ratkaistaan ensin kolmion kolmannen sivun pituus x kosinilauseen avulla.



$x^2 = 8{,}2^2 + 5{,}7^2 - 2 \cdot 8{,}2 \cdot 5{,}7 \cdot \cos 32°$
$x^2 = 20{,}454…$
$x = 4{,}522…$ (tai $x = -4{,}522…$)

Ratkaistaan kulman α suuruus sinilauseen avulla.

$$\frac{8,2}{\sin\alpha} = \frac{4,522...}{\sin 32°}$$

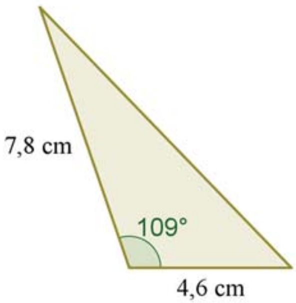
$$4,522...\cdot\sin\alpha = 8,2\cdot\sin 32° \quad ||: 4,522$$

$$\sin\alpha = \frac{8,2\cdot\sin 32°}{4,522...}$$

$$\begin{aligned} &\alpha = 73,90...° \quad \text{tai} \quad &&\alpha = 180° - 73,90...° = 106,09...° \\ &\alpha \approx 73,9° &&\alpha \approx 106,1° \end{aligned}$$

Tehtävässä kysytään tylppää kulmaa, joten α = 106,1°.

K3. **a)** Piirretään kuva.



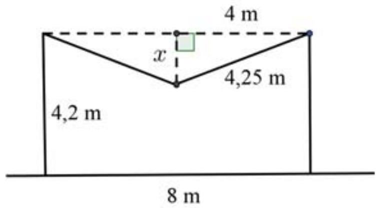
$$A = \frac{1}{2}\cdot 4,6\cdot 7,8\cdot\sin 109° = 16,96... \approx 17\ (\text{cm}^2)\ .$$

Kolmion pinta-ala on 17 cm^2.

b) 109°:n kulman ja sen suplementtikulman180° − 109° = 71° sinit ovat samat, eli sin109° = sin71°. Kolmiolla, jossa sivujen 4,6 cm ja 7,8 cm välinen kulman on 71° on sama pinta-ala kuin a-kohdan kolmiolla

K4. **a)** Koska valaisin roikkuu vaijerin puolessa välissä, on etäisyys valaisimesta vaijerin kiinnityskohtaan

$$\frac{8{,}5\text{ m}}{2} = 4{,}25\text{ m}.$$



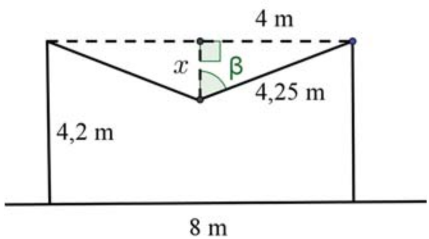
Tällöin vaijeri muodostaa vaakatason kanssa tasakylkisen kolmion. Piirretään kuva.

Tasakylkisen kolmion korkeusjana puolittaa kannan, joten kuvaan muodostuvan suorakulmaisen kolmion toisen kateetin pituus on 4 m. Ratkaistaan suorakulmaisesta kolmiosta x Pythagoraan lauseella.

$$\begin{aligned} x^2 + 4^2 &= 4{,}25^2 \\ x^2 &= 18{,}0625 - 16 \\ x^2 &= 2{,}0625 \\ x &= 1{,}43\ldots \text{ (tai } x = -1{,}43\ldots) \end{aligned}$$

Vaijerin alimman kohdan etäisyys maan pinnasta on
$4{,}2\text{ m} - x = 4{,}2\text{ m} - 1{,}43\ldots\text{ m} = 2{,}76\ldots\text{ m} \approx 2{,}8\text{ m}$.

b) Merkitään kuvaan kysytyn kulman puolikas β. Ratkaistaan kulma β kuvan suorakulmaisesta kolmiosta sinin avulla.

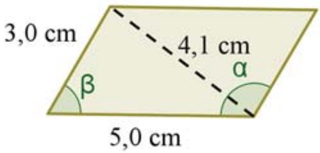


$$\begin{aligned} \sin\beta &= \frac{4}{4{,}25} \\ \beta &= 70{,}25\ldots^\circ \\ \text{tai}\quad \beta &= 180^\circ - 70{,}25\ldots^\circ \\ &= 109{,}7\ldots^\circ \end{aligned}$$

Kulman tulee olla terävä, joten vain $70{,}25\ldots^\circ$ on mahdollinen kulman arvo.

Vaijeriin muodostuu kulma, jonka suuruus on
$2\beta = 2 \cdot 70{,}25\ldots^\circ = 140{,}5\ldots^\circ \approx 141^\circ$.

K5. Piirretään kuva.



Ratkaistaan kulma β kosinilauseen avulla.

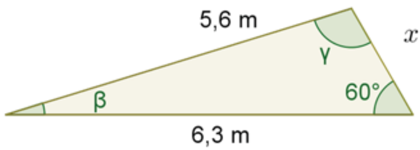
$$4{,}1^2 = 3{,}0^2 + 5{,}0^2 - 2 \cdot 3{,}0 \cdot 5{,}0 \cdot \cos\beta$$
$$16{,}8 = 9{,}0 + 25{,}0 - 30{,}0 \cdot \cos\beta$$
$$-17{,}19 = -30 \cdot \cos\beta$$
$$30 \cdot \cos\beta = 17{,}19 \qquad || : 30$$
$$\cos\beta = \frac{17{,}19}{30}$$
$$\beta = 55{,}04...^\circ$$
$$\beta \approx 55^\circ$$

Suunnikkaan vastakkaiset kulmat ovat yhtä suuret. Koska nelikulmion kulmien summa on 360°, on vierekkäisten kulmien summa 180°.

$$\alpha + \beta = 180^\circ$$
$$\alpha = 180^\circ - \beta$$
$$\alpha = 180^\circ - 55{,}04\ldots^\circ = 124{,}95\ldots^\circ$$
$$\alpha \approx 125^\circ.$$

Suunnikkaan kulmat ovat 55° ja 125°.

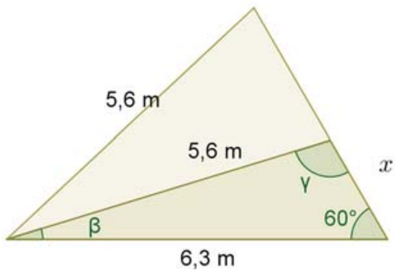
K6. Piirretään kuva. Merkitään kuvaan kysyttyä sivua kirjaimella x ja kolmion tuntemattomia kulmia kirjaimilla β ja γ.



Ratkaistaan sivun pituus x kosinilauseella.

$$
\begin{aligned}
5{,}6^2 &= 6{,}3^2 + x^2 - 2 \cdot 6{,}3 \cdot x \cdot \cos 60^\circ \\
31{,}36 &= 39{,}69 + x^2 - 6{,}3x \\
-x^2 + 6{,}3x - 8{,}33 &= 0 \\
x = 1{,}88\ldots &\text{ tai } x = 4{,}41\ldots \\
x \approx 1{,}9 \text{ (m)} & \quad x \approx 4{,}4 \text{ (m)}
\end{aligned}
$$

Annetuilla mitoilla muodostuu kaksi mahdollista kolmiota.



Kolmion kolmas sivu on 4,4 m tai 1,9 m.

K7. **a)** Ympyrän kehän pituus on $p = 2\pi r = 2\pi \cdot 4 = 8\pi = 25{,}133\ldots \approx 25{,}13$.

b) Ympyrän pinta-ala on $A = \pi r^2 = \pi \cdot 4^2 = 16\pi = 50{,}265\ldots \approx 50{,}27$.

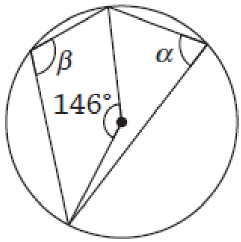
c) Sektorin kaaren pituus on

$$b = \frac{50°}{360°} \cdot p = \frac{50°}{360°} \cdot 8\pi = \frac{10}{9}\pi = 3{,}490... \approx 3{,}49.$$

d) Sektorin pinta-ala on

$$A_{\text{sektori}} = \frac{50°}{360°} \cdot A_{\text{ympyrä}} = \frac{50°}{360°} \cdot 16\pi = \frac{20}{9}\pi = 6{,}981... \approx 6{,}98.$$

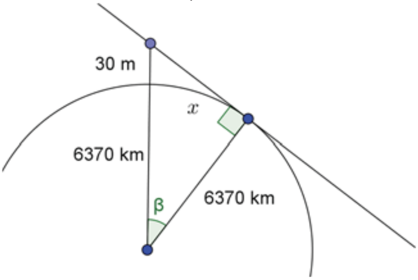
K8. Kulma α on 146°:n kaarta vastaava kehäkulma. Kehäkulma on puolet keskuskulmasta, joten $\alpha = \frac{146°}{2} = 73°$.



Kulma β on kehäkulma, jota vastaavan kaaren asteluku on $360° - 146° = 214°$.

Tällöin $\beta = \frac{214°}{2} = 107°$.

K9. Piirretään kuva. Kysytty etäisyys Maan pintaa pitkin on *x*. Koska maapallon säde ja näkösädettä kuvaava tangentti ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, muodostuu kuvaan suorakulmainen kolmio



Ratkaistaan kulma β suorakulmaisesta kolmiosta kosinin avulla.

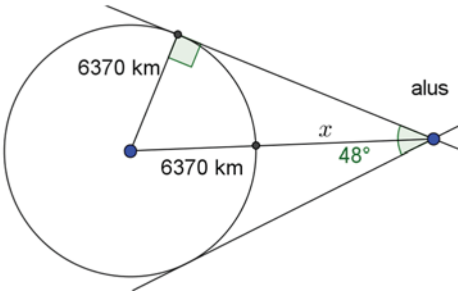
$$\cos\beta = \frac{6370}{6370{,}030}$$
$$\beta = 0{,}175...^\circ$$

Lasketaan kaaren pituus *x*.

$$x = \frac{0{,}175...^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 6370$$
$$x = 19{,}54...$$
$$x \approx 20\ (\text{km})$$

Kiikareilla näkee 20 km päähän merenpinnalle.

K10. Piirretään kuva. Piirretään aluksen sijaintikohdasta maapallolle tangentit. Kulma, jossa maapallo näkyy aluksesta katsottuna, on näiden tangenttien väliin jäävä kulma. Koska tangentti on kohtisuorassa maapallon sädettä vastaan, muodostuu kuvan mukainen suorakulmainen kolmio, jossa toinen terävä kulma on puolet tangenttien välisestä kulmasta, eli 24°.

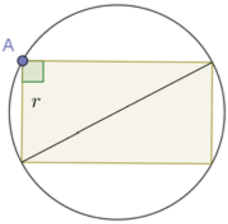


Ratkaistaan tästä kolmiosta aluksen etäisyys maasta x sinin avulla.

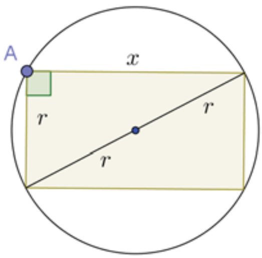
$$
\begin{aligned}
\sin 24^\circ &= \frac{6370}{6370+x} && \| \cdot (6370+x) \\
(6370+x)\cdot \sin 24^\circ &= 6370 && \| : \sin 24^\circ \\
6370 + x &= \frac{6370}{\sin 24^\circ} \\
x &= \frac{6370}{\sin 24^\circ} - 6370 \\
x &= 9291{,}23\ldots \\
x &\approx 9300 \text{ (km)}
\end{aligned}
$$

Aluksen etäisyys on 9300 km.

K11. Piirretään kuva.



Piirretään suorakulmion halkaisija. Kehän pisteessä A oleva kulma on suora kulma. Tällöin samaa kaarta vastaava keskuskulma on 180°, eli kaari on puoliympyrä. Suorakulmion halkaisija on tällöin myös ympyrän halkaisija ja siten pituudeltaan $2r$.

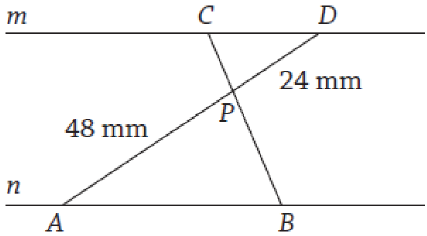


Lasketaan suorakulmion toisen sivun pituus x suorakulmaisesta kolmiosta Pythagoraan lauseella.

$$r^2 + x^2 = (2r)^2$$
$$x^2 = 4r^2 - r^2$$
$$x^2 = 3r^2$$
$$x = \sqrt{3}r \quad (\text{tai } x = -\sqrt{3}r\,)$$

Suorakulmion pinta-ala on $A = r \cdot x = r \cdot \sqrt{3}r = \sqrt{3}r^2$.

K12.



a) Kolmioissa *ABP* ja *DCP* on molemmissa kärki pisteessä *P*. Pisteeseen *P* muodostuvat kulmat ovat ristikulmina yhtä suuret. Koska suorat *m* ja *n* ovat yhdensuuntaiset, ovat samankohtaiset kulmat *A* ja *D* yhtä suuret. Tällöin kolmioissa *ABP* ja *DCP* on kaksi yhtä suurta kulmaa, joten kolmiot ovat yhdenmuotoiset (kk).

b) Kolmioiden *ABP* ja *DCP* vastinsivut ovat esimerkiksi sivut *AP* ja *DP*. Vastinsivujen suhde on mittakaava.

$$\frac{DP}{AP} = \frac{24}{48} = \frac{1}{2}$$

Kolmio *DCP* on kolmion *ABP* pienennös mittakaavassa 1 : 2.

c) Yhdenmuotoisten kuvioiden pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö.

$$\frac{A_{DCP}}{A_{ABP}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

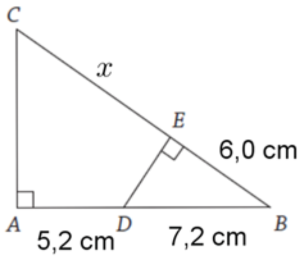
$$\frac{130}{A_{ABP}} = \frac{1}{4}$$

$$A_{ABP} = 130 \cdot 4$$

$$A_{ABP} = 520 \left(\text{mm}^2\right)$$

Kolmion *ABP* pinta-ala on 520 mm^2.

K13. Täydennetään kuvaan mitat. Merkitään janan *CE* pituutta kirjaimella *x*.



Kolmiot *ABC* ja *EBD* ovat yhdenmuotoiset, koska niissä on yhteinen kulma *B* ja molemmissa suora kulma (kk).

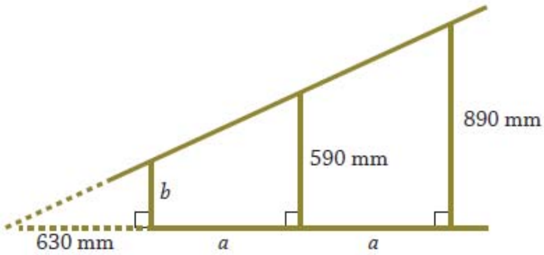
Sivun *AB* pituus on 5,2 cm + 7,2 cm = 12,4 cm.

Yhdenmuotoisten kolmioiden vastinsivujen suhde on vakio.

$$\frac{AB}{EB} = \frac{CB}{DB}$$
$$\frac{12,4}{6,0} = \frac{x+6,0}{7,2} \quad \| \cdot 7,2$$
$$x+6,0 = \frac{12,4}{6,0} \cdot 7,2$$
$$x = 14,88 - 6,0$$
$$x = 8,88$$
$$x \approx 8,9 \text{ (cm)}$$

Janan *CE* pituus on 8,9 cm.

K14.



Kuvaan muodostuu kolme yhdenmuotoista suorakulmaista kolmiota, koska kaikissa on yhteinen terävä kulma ja suora kulma (kk).

Yhdenmuotoisissa kuvioissa vastinsivujen suhde on vakio. Lasketaan suhde suurimmasta ja keskimmäisestä kolmiosta ja ratkaistaan *a*.

$$\begin{aligned}
\frac{890}{590} &= \frac{630+2a}{630+a} \\
590\cdot(630+2a) &= 890\cdot(630+a) \\
371700+1180a &= 560700+890a \\
1180a-890a &= 560700-371700 \\
290a &= 189000 \quad \|:290 \\
a &= 651{,}7\ldots \\
a &\approx 650\ \text{(mm)}
\end{aligned}$$

Lasketaan samoin suhde pienimmästä ja keskimmäisestä suorakulmaisesta kolmiosta ja ratkaistaan *b*.

$$\begin{aligned}
\frac{b}{590} &= \frac{630}{630+a} \quad \|\cdot 590 \\
b &= \frac{630}{630+651{,}7\ldots}\cdot 590 \\
b &= 290\ \text{(mm)}
\end{aligned}$$

Mitat ovat a = 650 mm ja b = 290 mm.

K15. Yhdenmuotoisten kappaleiden tilavuuksien suhde on mittakaavan kuutio. Merkitään isomman pullon korkeutta kirjaimella *x*.

$$\frac{35}{70}=\left(\frac{23}{x}\right)^3$$
$$\frac{35}{70}=\frac{12167}{x^3}$$
$$35x^3=851690 \quad ||:35$$
$$x^3=24334$$
$$x=\sqrt[3]{24334}=28{,}97...$$
$$x\approx 29\ \text{(cm)}$$

Isompi pullo on 29 cm korkea.

K16. **a)** Yhdenmuotoisten kuvioiden pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö. Koska sivuja pidennetään 20 %, on suurennetun kuvion sivut 1,2 kertaiset alkuperäiseen verrattuna. Mittakaava on 1,2 : 1.
Tällöin pinta-alojen suhde on

$$\left(\frac{1{,}2}{1}\right)^2=\frac{1{,}44}{1}.$$

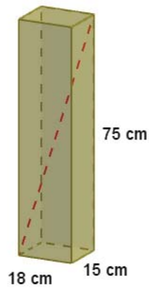
Uusi pinta-ala on 1,44 kertainen alkuperäiseen verrattuna, eli pinta-ala kasvaa 44%.

b) Yhdenmuotoisten kappaleiden tilavuuksien suhde on mittakaavan kuutio. Jos tilavuus kaksinkertaistuu, on tilavuuksien suhde 2:1.

$$\frac{2}{1}=k^3$$
$$k^3=2$$
$$k=\sqrt[3]{2}=1{,}259...\approx 1{,}26$$

Mittakaava on 1,26 : 1, joten mittoja tulee pidentää $\sqrt[3]{2}$ = 1,26 kertaisiksi.

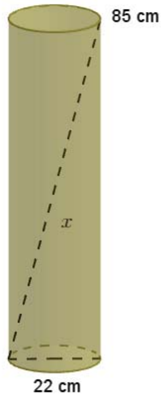
K17. **a)** Pisin etäisyys suorakulmaisen särmiön sisällä on avaruuslävistäjän pituus.



$d^2 = 75^2 + 18^2 + 15^2$
$d^2 = 6174$
$d = 78{,}57\ldots$ (tai $d = -78{,}57\ldots$)
$d \approx 79$ (cm)

Säilytyskoteloon mahtuu 79 cm pitkä sateenvarjo.

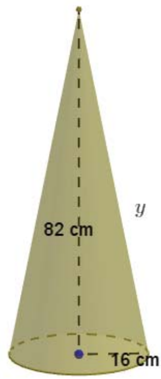
b) Pisin etäisyys suoran ympyrälieriön sisällä on pohjan reunasta kannen vastakkaiseen reunaan. Pohjan halkaisija on $2r = 2 \cdot 11$ cm $= 22$ cm. Suoran ympyrälieriön vaippa on kohtisuorassa pohjaa vastaan. Ratkaistaan pisin etäisyys x suorakulmaisesta kolmiosta Pythagoraan lauseella.



$x^2 = 22^2 + 85^2$
$x^2 = 7709$
$x = 87{,}80\ldots$ (tai $x = -87{,}80\ldots$)
$x \approx 88$ (cm)

Säilytyskoteloon mahtuu 88 cm pitkä sateenvarjo.

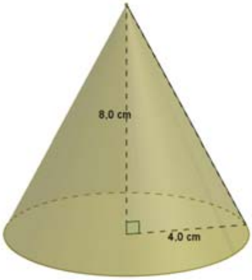
c) Pisin etäisyys suoran ympyräkartion sisällä on huipusta pohjan reunaan. Suoran ympyräkartion korkeusjana kulkee kartion huipusta kohtisuorasti pohjan keskipisteeseen. Ratkaistaan pisin etäisyys y suorakulmaisesta kolmiosta Pythagoraan lauseella.



$y^2 = 82^2 + 16^2$
$y^2 = 6980$
$y = 83{,}54\ldots$ (tai $y = -83{,}54\ldots$)
$y \approx 84$ (cm)

Säilytyskoteloon mahtuu 84 cm pitkä sateenvarjo.

K18. **a)** Piirretään kuva.



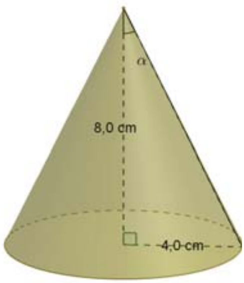
Pohjan säde on lyhemmän kateetin pituus 4,0 cm.
Pohjan halkaisija on 2 · 4,0 cm = 8,0 cm.

b) Kartion korkeus on pidemmän kateetin pituus 8,0 cm.

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot h \\ &= \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 4{,}0^2\cdot 8{,}0 \\ &= 134{,}04\ldots \approx 130\ (\text{cm}^3) \end{aligned}$$

Kartion tilavuus on 130 cm^3.

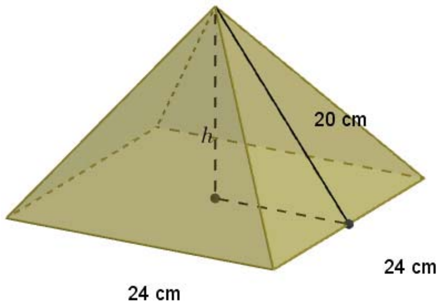
c) Ratkaistaan sivujanan ja korkeusjanan välinen kulma α suorakulmaisesta kolmiosta tangentin avulla.



$$\tan\alpha = \frac{4}{8}$$
$$\alpha = 26{,}56\ldots^\circ$$
$$\alpha \approx 27^\circ$$

Sivujanan ja korkeusjananvälinen kulma on 27°.

K19. Piirretään kuva. Merkitään pyramidin korkeutta kirjaimella h.

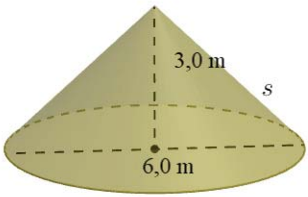


Koska pyramidin korkeusjana on kohtisuorassa pohjaa vastaan, muodostuu kuvaan suorakulmainen kolmio, jonka toisen kateetin pituus on puolet pohjasärmän pituudesta, eli 12 cm. Hypotenuusa on pyramidin sivutahkona olevan kolmion korkeusjana. Ratkaistaan pyramidin korkeus h Pythagoraan lauseella.

$$h^2 + 12^2 = 20^2$$
$$h^2 = 400 - 144$$
$$h^2 = 256$$
$$h = 16 \text{ (tai } h = -16)$$

Korkeus on 16 cm.

K20. Piirretään kuva. Suoran ympyräkartion korkeusjana on kohtisuorassa pohjaa vastaan. Kuvaan muodostuu suorakulmainen kolmio. Merkitään kartion sivujanaa kirjaimella *s*.



Koska teltan leveys on 6,0 m, on pohjaympyrän säde 3,0 m. Ratkaistaan sivujanan pituus *s* suorakulmaisesta kolmiosta Pythagoraan lauseella.

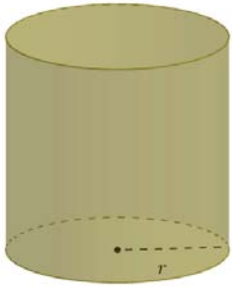
$s^2 = 3{,}0^2 + 3{,}0^2$
$s^2 = 18{,}0$
$s = \sqrt{18{,}0}$ (tai $s = -\sqrt{18{,}0}$)
$s = 4{,}24\ldots$
$s \approx 4{,}2$ (m)

Lasketaan kartion vaipan ala.

$A = \pi rs = \pi \cdot 3{,}0 \cdot 4{,}24\ldots = 39{,}98\ldots \approx 40$ (m^2).

Kankaan pinta-ala on 40 m^2.

K21. Merkitään pohjan sädettä kirjaimella r. Pohjan halkaisija on tällöin $2r$ ja lieriön korkeus on myös $2r$.



Pohjan pinta-ala on 1,0 m^2.

$A_{pohja} = \pi \cdot r^2$

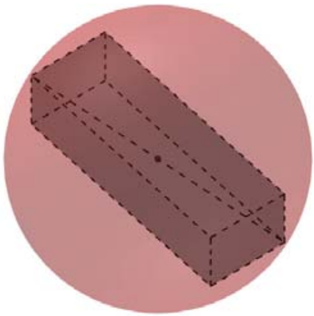
$$\pi \cdot r^2 = 1{,}0 \quad || :\pi$$
$$r^2 = \frac{1{,}0}{\pi}$$
$$r = \sqrt{\frac{1{,}0}{\pi}} \quad \left(\text{tai } r = -\sqrt{\frac{1{,}0}{\pi}}\right)$$
$$r = 0{,}564...$$

Lasketaan lieriön tilavuus.

$$V = A_{pohja} \cdot h = 1{,}0 \cdot 2r = 1{,}0 \cdot 2 \cdot 0{,}564... = 1{,}12... \approx 1{,}1\,(\text{m}^3).$$

Lieriön tilavuus on 1,1 m^3.

K22. Pallon halkaisijan tulee olla yhtä pitkä kuin särmiön avaruuslävistäjä, jotta särmiö mahtuisi pallon sisään.



$$d^2 = 3^2 + 4^2 + 12^2$$
$$d^2 = 169$$
$$d = 13 \text{ (tai } d = -13)$$

Pallon säde on $r = \frac{d}{2} = \frac{13}{2}$.

Pallon tilavuus on

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{13}{2}\right)^3 = \frac{2197\pi}{6}.$$

Kokoavia tehtäviä

ILMAN TEKNISIÄ APUVÄLINEITÄ

1. A−III, B−II, C−ei mikään, D−I

2. **a)** Kolmion kulmien summa on 180°.
Kolmannen kulman suuruus on 180° − 85° − 10° = 85°.
Kolmiossa on kaksi 85°:n kulmaa, joten se on tasakylkinen.

b) Kolmio ei ole tasakylkinen.

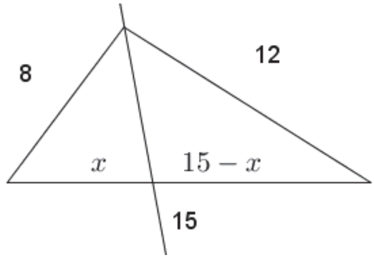
Kolmio on suorakulmainen, jos sen sivujen pituuksille pätee
$a^2 + b^2 = c^2$, missä c on kolmion pisimmän sivun pituus.

$6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$
$9^2 = 81$
$81 \neq 100$

Kolmio ei ole suorakulmainen.

c) Kolmiossa on kaksi yhtä suurta kulmaa, joten kolmio on tasakylkinen.
Kolmion kolmas kulma on 180° − 45° − 45° = 90°. Kolmio on myös suorakulmainen.

3. Kolmion suurin kulma on pisimmän sivun vastainen. Piirretään kuva. Merkitään toista osaa kirjaimella x, jolloin toisen osan pituus on $15 – x$.

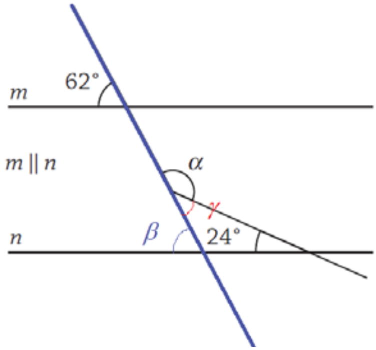


Kulmanpuolittaja jakaa vastaisen sivun viereisten sivujen suhteessa. Kulmanpuolittaja jakaa siis sivun, jonka pituus on 15 suhteessa 8:12.

$$\begin{aligned}
\frac{x}{15-x} &= \frac{8}{12} \\
12x &= 8(15-x) \\
12x &= 120-8x \\
12x+8x &= 120 \\
20x &= 120 \quad \|:20 \\
x &= 6
\end{aligned}$$

Osien pituudet ovat 6 ja 15 – 6 = 9.

4. Jatketaan kuvan 62°:n kulman oikean kyljen suuntaista puolisuoraa ja täydennetään kuvaan kulmat β ja γ.



Kulma β on samankohtainen kulman 62° kanssa ja koska suorat m ja n ovat yhdensuuntaiset, on myös $\beta = 62°$.

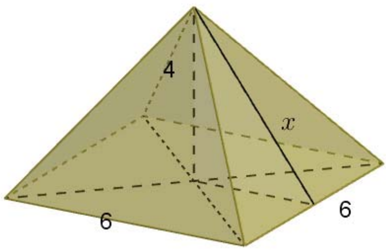
Kulman β vieruskulman suuruus on $180° - 62° = 118°$.

Kuvan kolmion kolmas kulma γ on tällöin
$\gamma = 180° - 118° - 24° = 38°$.

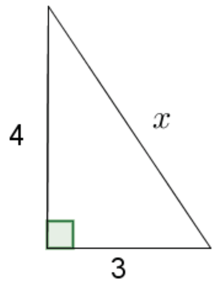
Kulma γ on kulman α vieruskulma.
$\alpha = 180° - 38° = 142°$

5. **a)** $V = \frac{1}{3} A_{\text{pohja}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 4 = 48$

b) Vaippa koostuu neljästä tasakylkisestä kolmiosta, joiden kanta on yhtä pitkä kuin pyramidin pohjaneliön sivun pituus, eli 6.



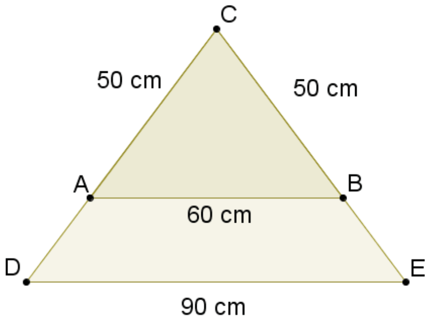
Koska pyramidin korkeusjana on kohtisuorassa pohjaa vastaan, muodostuu suorakulmainen kolmio, jonka toisen kateetin pituus on puolet pohjasärmän pituudesta. Tasakylkisen kolmion korkeus x voidaan ratkaista tämän suorakulmaisen kolmion avulla Pythagoraan lauseella.



$x^2 = 4^2 + 3^2$
$x = 25$
$x = 5$ (tai $x = -5$)

Vaipan pinta-ala on $A = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 = 60$.

6. Piirretään kuva.



Osoitetaan, että alkuperäinen pala *DEC* ja kolmion muotoinen osa *ABC* ovat yhdenmuotoisia. Kolmioissa *DEC* ja *ABC* on yhteinen kulma *C*. Kulmat *D* ja *A* ovat samankohtaiset ja janat *DE* ja *AB* yhdensuuntaiset, joten kulmat *D* ja *A* ovat yhtä suuret. Kolmiot ovat yhdenmuotoiset (kk).

$$\frac{CD}{CA} = \frac{DE}{AB}$$

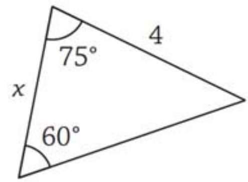
$$\frac{CD}{50} = \frac{90}{60} \quad || \cdot 50$$

$$CD = \frac{\cancel{90}^{3}}{\cancel{60}_{2}} \cdot 50 = \frac{3}{2} \cdot 50 = \frac{150}{2} = 75$$

Koska kolmio *ABC* on tasakylkinen, on myös kolmio *DEC* tasakylkinen. Tällöin *CE* = *CD* = 75.

Alkuperäisen palan sivujen pituudet ovat 75 cm, 75 cm ja 90 cm.

7. Kolmion kolmannen kulman suuruus on 180° − 75° − 60° = 45°. Ratkaistaan sivun x pituus sinilauseen avulla.



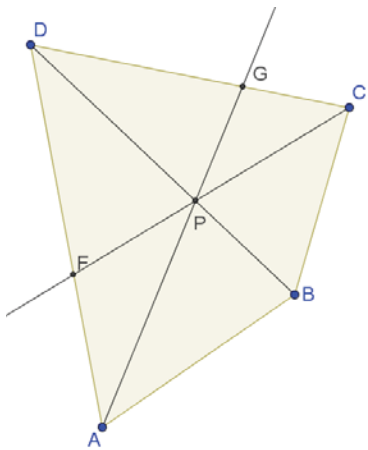
$$\frac{x}{\sin 45°} = \frac{4}{\sin 60°} \quad || \cdot \sin 45°$$

$$x = \frac{4}{\sin 60°} \cdot \sin 45°$$

$$x = \frac{4}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 4 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = {}^{\sqrt{6})}\frac{8}{\sqrt{6}} = \frac{\cancel{8}^{4}\sqrt{6}}{\cancel{6}_{3}}$$

$$= \frac{4\sqrt{6}}{3}$$

8. Piirretään mallikuva ja merkitään kulmanpuolittajien leikkauspistettä kirjaimella P.



Kolmion kulmanpuolittaja jakaa vastaisen sivun viereisten sivujen suhteessa.

Piste P jakaa kolmion BCD sivun BD suhteessa $CB:CD$, eli $\frac{BP}{PD} = \frac{CB}{CD}$.

Piste P jakaa kolmion ABD sivun BD suhteessa $AB:AD$, eli $\frac{BP}{PD} = \frac{AB}{AD}$.

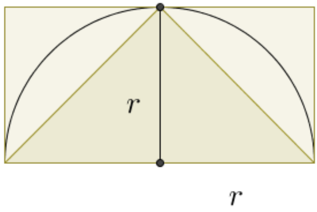
Merkitään suhteet $\frac{BP}{PD}$ yhtä suuriksi.

$$\frac{CB}{CD} = \frac{AB}{AD}$$

$$CB \cdot AD = CD \cdot AB$$

$$AB \cdot CD = AD \cdot CB$$

9. Piirretään kuva poikkileikkauksesta. Merkitään kappaleiden pohjaympyrän sädettä kirjaimella r.



Kartion korkeus on sama kuin puolipallon säde, eli pohjaympyrän säde r.

Kartion tilavuus on $V_{\text{kartio}} = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot r = \frac{1}{3}\pi r^3$.

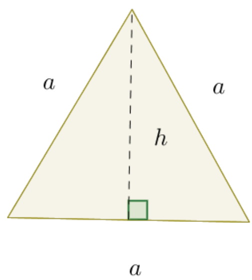
Puolipallon tilavuus on $V_{\text{puolipallo}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi r^3 = 2 \cdot (\frac{1}{3}\pi r^3) = 2V_{\text{kartio}}$.

Lieriön korkeus on sama kuin puolipallon säde, eli pohjaympyrän säde r.

Lieriön tilavuus on $V_{\text{lieriö}} = \pi r^2 \cdot r = \pi r^3 = 3 \cdot (\frac{1}{3}\pi r^3) = 3V_{\text{kartio}}$.

Tilavuuksien suhde on 1:2:3.

10. Piirretään kuva.



Tasasivuisen kolmion korkeusjana puolittaa kannan. Lasketaan kolmion korkeusjanan pituus suorakulmaisesta kolmiosta Pythagoraan lauseella.

$$h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2$$

$$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$$

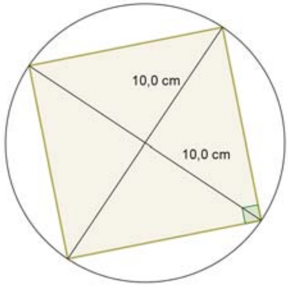
$$h^2 = \frac{3}{4}a^2$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a \quad (\text{tai } \ h = -\frac{\sqrt{3}}{2}a)$$

Tasasivuisen kolmion pinta-ala on $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h = \frac{1}{2}a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

APUVÄLINEET SALLITTU

11. **a)** Piirretään kuva.



Koska neliön lävistäjät puolittavat toisensa, ympyrän keskipiste on neliön lävistäjien leikkauspisteessä.

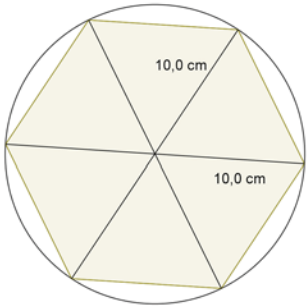
Neliö muodostuu neljästä yhtenevästä tasakylkisestä kolmiosta, joiden kylkien pituus on 10 cm ja huippukulma

$$\frac{360°}{4} = 90°.$$

$$A = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10{,}0 \cdot 10{,}0 \cdot \sin 90° = 200{,}0\ (\text{cm}^2)$$

Neliön pinta-ala on 200,0 cm^2.

b) Ympyrän keskipiste on kuusikulmion lävistäjien leikkauspisteessä.



Kuusikulmio muodostuu kuudesta yhtenevästä tasakylkisestä kolmiosta, joiden kylkien pituudet ovat 10,0 cm ja huippukulma on $\frac{360°}{6} = 60°$.

$$A = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10{,}0 \cdot 10{,}0 \cdot \sin 60°$$
$$= 150 \cdot \sqrt{3} = 259{,}8\ldots \approx 260\ (\text{cm}^2)$$

Kuusikulmion pinta-ala on 260 cm^2.

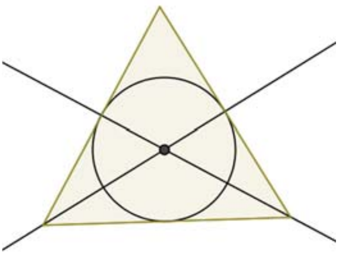
12. Säiliön pääty on ympyrä, jonka säde on 35 cm.
Säiliön tilavuus on $V = \pi \cdot 35^2 \cdot 140 = 538783{,}14\ldots\,(\text{cm}^3)$

Turvakaukalon leveys on sama kuin päädyn halkaisija, 70 cm ja pituus sama kuin säiliön pituus, 140 cm. Merkitään kaukalon korkeutta kirjaimella *h*.

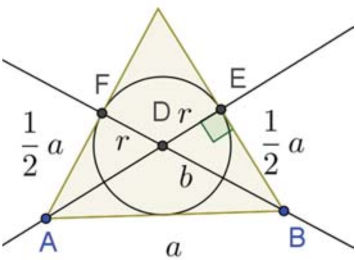
$$\begin{aligned} 70 \cdot 140 \cdot h &= 538783{,}14\ldots \\ 9800h &= 538783{,}14\ldots \quad \|:9800 \\ h &= 54{,}97\ldots \\ h &\approx 55\,(\text{cm}) \end{aligned}$$

Kaukalon tulee olla 55 cm korkea.

13. Kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste on kolmion kulmanpuolittajien leikkauspiste. Piirretään kuva.



Koska kolmio on tasasivuinen, on kulmanpuolittajien leikkauspiste samalla myös korkeusjanojen ja mediaanien leikkauspiste. Merkitään ympyrän sädettä kirjaimella *r* ja kolmion sivua kirjaimella *a*.



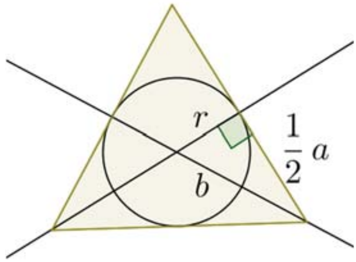
Kulmanpuolittaja *AD* jakaa kolmion *ABF* sivun *FB* viereisten sivujen *AF* ja *AB* suhteessa.

$$\frac{r}{b} = \frac{\frac{1}{2}\cancel{a}}{\cancel{a}}$$

$$\frac{r}{b} = \frac{1}{2}$$

$$b = 2r$$

Ratkaistaan säde *r* kolmion sivun pituuden *a* avulla Pythagoraan lauseella.



$$r^2 + (\frac{1}{2}a)^2 = b^2$$

$$r^2 + (\frac{1}{2}a)^2 = (2r)^2$$

$$r^2 - 4r^2 = -\frac{1}{4}a^2$$

$$-3r^2 = -\frac{1}{4}a^2 \quad |:(-3)$$

$$r^2 = \frac{1}{12}a^2$$

$$r = \frac{1}{\sqrt{12}}a \quad (\text{tai } r = -\frac{1}{\sqrt{12}}a)$$

Lasketaan ympyrän pinta-ala.

$$A_{\text{ympyrä}} = \pi r^2 = \pi \cdot \frac{1}{12}a^2 = \frac{\pi}{12}a^2$$

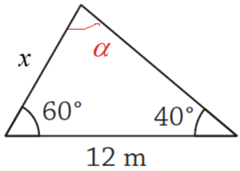
Lasketaan kolmion pinta-ala.

$$A_{\text{kolmio}} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \sin 60° = \frac{1}{2}a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

Pinta-alojen suhde on $\frac{A_{\text{ympyrä}}}{A_{\text{kolmio}}} = \frac{\frac{\pi}{12}\cancel{a^2}}{\frac{\sqrt{3}}{4}\cancel{a^2}} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} = 0,604... \approx 60\%.$

Ympyrän pinta-ala on 60 % kolmion pinta-alasta.

14. Jotta kolmion pinta-ala voidaan laskea, tarvitaan kolmion toisen sivun pituus. Täydennetään kuvaan kolmas kulma α ja toinen sivu x.



Kolmion kulmien summa on 180°, joten kolmas kulma on
$\alpha = 180° - 60° - 40° = 80°$.

Ratkaistaan sivun pituus x sinilauseen avulla.

$$\frac{x}{\sin 40°} = \frac{12}{\sin 80°} \quad || \cdot \sin 40°$$
$$x = \frac{12 \cdot \sin 40°}{\sin 80°}$$
$$x = 7{,}83...$$
$$x \approx 7{,}8 \text{ (m)}$$

Lasketaan kolmion pinta-ala.

$$A = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 7{,}83... \cdot \sin 60° = 40{,}69... \approx 41 \, (\text{m}^2)$$

Kolmion pinta-ala on 41 m^2.

15. Yhdenmuotoisten kappaleiden pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö.

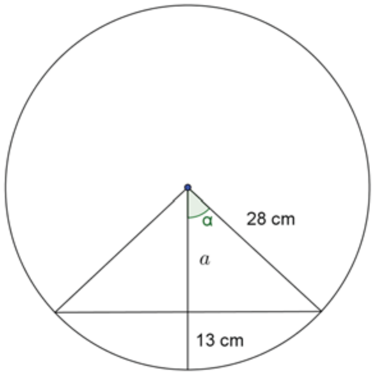
$$\frac{A_{\text{iso}}}{A_{\text{pieni}}} = \left(\frac{100}{75}\right)^2 = \frac{16}{9} = 1{,}777...$$

Isomman kartion pinta on 78 % suurempi kuin pienemmän.

16. Määritetään tynnyrin korkeus *h*, kun tilavuus on
220 l = 220 dm^3 = 220 000 cm^3.

$$\begin{aligned} V &= \pi \cdot 28^2 \cdot h \\ \pi \cdot 28^2 \cdot h &= 220\,000 \quad \|: \pi \cdot 28^2 \\ h &= \frac{220\,000}{\pi \cdot 28^2} \\ h &= 89{,}32... \\ h &\approx 89\ (\text{cm}) \end{aligned}$$

Piirretään kuva pohjaympyrästä.
Koska pohjaympyrän halkaisija on 56 cm, on säde 28 cm.



Lasketaan sen segmentin pinta-ala, jonka tynnyrissä oleva vesi peittää tynnyrin päädystä.

a = 28 cm – 13 cm = 15 cm

Lasketaan sektorin keskuskulman puolikkaan, kulman α, suuruus.

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{15}{28} \\ \alpha &= 57{,}6...^\circ \end{aligned}$$

Keskuskulma on 2 · α = 115,2…°.

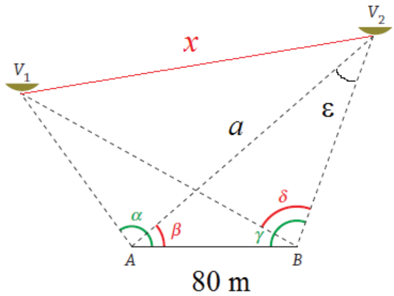
Segmentin pinta-ala on sektorin pinta-ala, josta vähennetään kolmion pinta-ala.

$$\begin{aligned} A_{\text{segmentti}} &= A_{\text{sektori}} - A_{\text{kolmio}} \\ &= \frac{115{,}2...^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 28^2 - \frac{1}{2} \cdot 28 \cdot 28 \cdot \sin 115{,}2...^\circ \\ &= 433{,}6...\ (\text{cm}^2) \end{aligned}$$

Veden tilavuus on
$$V = A_{\text{segmentti}} \cdot h = 433{,}61... \cdot 89{,}32... = 38731{,}6... \approx 39\,000\ (\text{cm}^3).$$

Tynnyrissä olevan veden tilavuus on 39 litraa.

17. Täydennetään kuvaan veneiden välinen etäisyys x, etäisyys $AV_2 = a$ ja kulma ε.

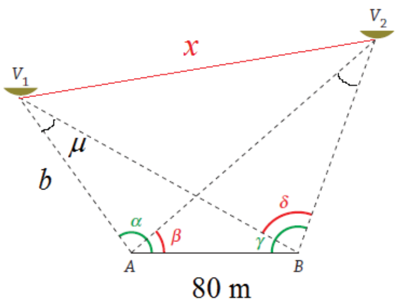


Koska kolmion kulmien summa on 180°,
$\varepsilon = 180° - \beta - \gamma = 180° - 41° - 110° = 29°$.

Ratkaistaan sivun pituus a sinilauseella.

$$\frac{a}{\sin\gamma} = \frac{80}{\sin\varepsilon}$$
$$\frac{a}{\sin 110°} = \frac{80}{\sin 29°} \quad \| \cdot \sin 110°$$
$$a = \frac{80 \cdot \sin 110°}{\sin 29°}$$
$$a = 155{,}06\ldots$$

Täydennetään lisäksi kuvaan etäisyys $AV_1 = b$ ja kulma μ.



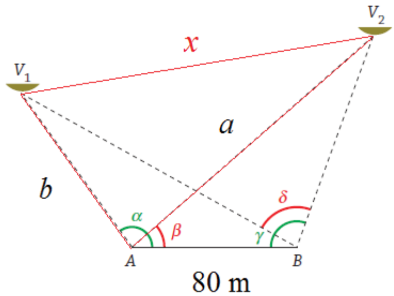
Ratkaistaan sivun pituus b sinilauseella.
Kulma $\mu = 180° - \alpha - (\gamma - \delta) = 180° - 126° - (110° - 81°) = 25°$.

$$\frac{b}{\sin(\gamma-\delta)} = \frac{80}{\sin\mu}$$

$$\frac{b}{\sin 29°} = \frac{80}{\sin 25°} \quad \| \cdot \sin 29°$$

$$b = \frac{80 \cdot \sin 29°}{\sin 25°}$$

$$b = 91{,}77\ldots$$

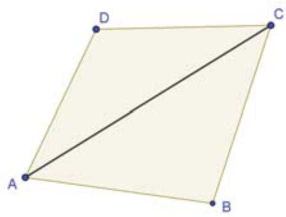


Ratkaistaan sivun x pituus kosinilauseella.

$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\alpha - \beta)$
$x^2 = 155{,}06\ldots^2 + 91{,}77\ldots^2 - 2 \cdot 155{,}06\ldots \cdot 91{,}77\ldots \cdot \cos(126° - 41°)$
$x^2 = 29985{,}8\ldots$
$x = 173{,}1\ldots$ (tai $x = -173{,}1\ldots$)
$x \approx 170$ (m)

Veneiden välinen etäisyys on 170 m.

18. Piirretään mallikuva.

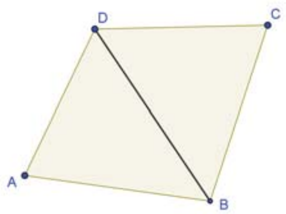


Tarkastellaan ensin lävistäjää *AC*.

Koska lävistäjä *AC* puolittaa kulmat *A* ja *C*, on $\sphericalangle BAC = \sphericalangle CAD$ ja $\sphericalangle DCA = \sphericalangle ACB$. Koska kolmioissa *ABC ja ACD* on kaksi yhtä suurta kulmaa, ovat ne yhdenmuotoiset (kk). Koska kolmioilla on lisäksi yhteinen sivu *AC*, ovat kolmiot yhtenevät (ksk).

Yhtenevien kolmioiden vastinsivut ovat yhtä pitkät, eli
$AB = AD$ ja $CD = CB$.

Tarkastellaan nelikulmion toista lävistäjää *BD*.



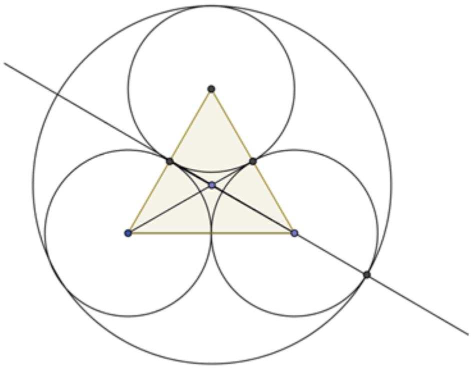
Koska lävistäjä *BD* puolittaa kulmat *D* ja *B*, on $\sphericalangle DBA = \sphericalangle CBD$ ja $\sphericalangle ADB = \sphericalangle BDC$. Koska kolmioissa *ABD ja BCD* on kaksi yhtä suurta kulmaa, ovat ne yhdenmuotoiset (kk). Koska kolmioilla on lisäksi yhteinen sivu *DB* ovat kolmiot yhtenevä (ksk).

Yhtenevien kolmioiden vastinsivut ovat yhtä pitkät, joten
$AB = CB$ ja $AD = CD$.

Nelikulmiolle on siis voimassa $AB = CB = CD = AD$.

Nelikulmion kaikki sivut ovat yhtä pitkiä.

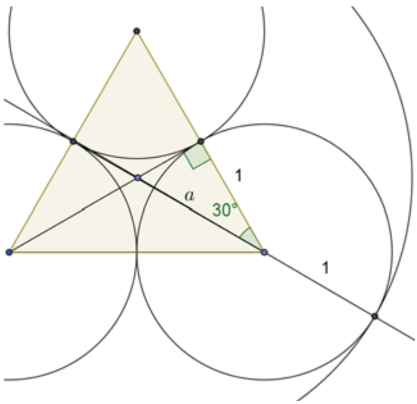
19. **a)** Ympyröiden keskipisteet ovat tasasivuisen kolmion kärkipistessä.



Kolmion sivu pituus on 2.

Ympäripiirretyn ympyrän *m* keskipiste on tasasivuisen kolmion korkeusjanojen (mediaanien, kulmanpuolittajien) leikkaus-pisteessä ja se kulkee korkeusjanan suuntaisen suoran ja pienen ympyrän leikkauspisteen kautta.

b) Kolmion korkeusjana on kohtisuorassa sivua vastaan. Koska tasasivuisen kolmion korkeusjana on samalla myös kulmanpuolittaja, muodostuu suorakulmainen kolmio, jonka toinen kateetti on pituudeltaan 1, hypotenuusa *a* ja toinen terävä kulma 30 °.



Ratkaistaan hypotenuusan pituus a.

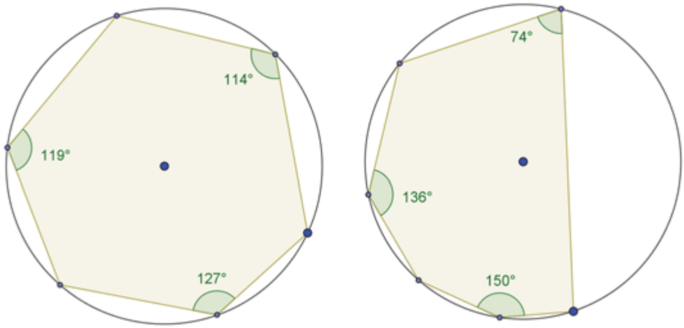
$$\cos 30° = \frac{1}{a}$$

$$a = \frac{1}{\cos 30°}$$

$$a = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

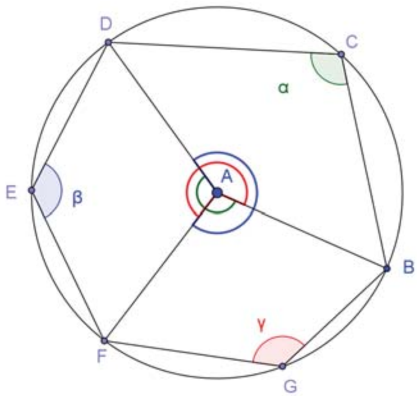
Ympyrän m säteen tarkka arvo on $1 + a = 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

20. Piirretään kuva dynaamisen matematiikan ohjelmalla ja tutkitaan asiaa erilaisilla kuusikulmioilla.



Kulmien summa näyttäisi olevan 360°.

Tutkitaan kuusikulmiota *BCDEFG*. Piste *A* on ympyrän keskipiste.



Kulma α on kaarta *DEB* vastaava kehäkulma. Samaa kaarta vastaava keskuskulma on kulma *DAB*. Näin ollen $\sphericalangle DAB = 2\alpha$.

Kulma β on kaarta *DCF* vastaava kehäkulma, joten $\sphericalangle FAD = 2\beta$.

Kulma γ on kaarta *FEB* vastaava kehäkulma, joten $\sphericalangle BAF = 2\gamma$.

Ympyrästä saadaan, että

$$\sphericalangle DAB + \sphericalangle FAD + \sphericalangle BAF = 2 \cdot 360° = 720°$$

$$2\alpha + 2\gamma + 2\beta = 720°$$

$$2(\alpha + \beta + \gamma) = 720° \quad \|:2$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 360°$$

Tulos pätee riippumatta siitä, miten kuusikulmion kulmat on valittu.