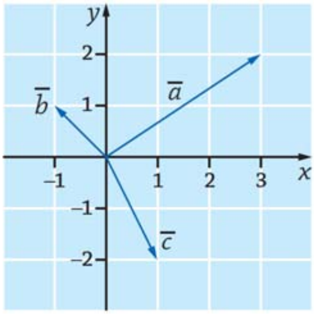
Kertaus

K1. **a)** $\overline{OA} = -\bar{i} + \bar{j} + 3\bar{k}$

b) $B = (3, 0, -5)$

K2.



K3. **a)** $\overline{AB} = (6-(-2))\bar{i} + (2-3)\bar{j} + (-3-(-7))\bar{k} = 8\bar{i} - \bar{j} + 4\bar{k}$

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{8^2 + (-1)^2 + 4^2} = \sqrt{64+1+16} = \sqrt{81} = 9$$

b) $\overline{AB} = (-3-(-1))\bar{i} + \left(-2\frac{1}{2} - 1\frac{1}{2}\right)\bar{j} = -2\bar{i} - 4\bar{j}$

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = \sqrt{4\cdot 5} = 2\sqrt{5}$$

K4. **a)**

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \overline{AO} + \overline{OB} \\ &= -\overline{OA} + \overline{OB} \\ &= -(-2\overline{i} - \overline{j}) + 3\overline{i} + 2\overline{j} \\ &= 2\overline{i} + \overline{j} + 3\overline{i} + 2\overline{j} \\ &= 5\overline{i} + 3\overline{j}\end{aligned}$$

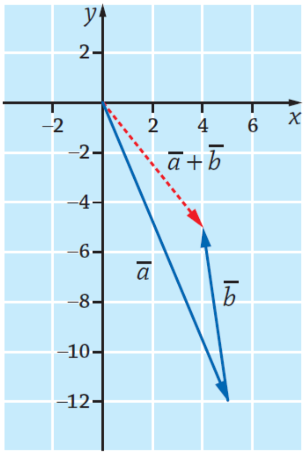
b) Pisteen A paikkavektori $\overline{OA} = x_1\overline{i} + y_1\overline{j}$ ja pisteen B paikkavektori

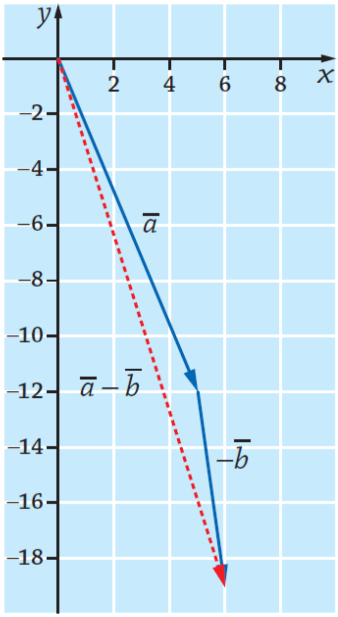
$$\overline{OB} = x_2\overline{i} + y_2\overline{j}$$

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \overline{AO} + \overline{OB} \\ &= -\overline{OA} + \overline{OB} \\ &= -(x_1\overline{i} + y_1\overline{j}) + (x_2\overline{i} + y_2\overline{j}) \\ &= (x_2 - x_1)\overline{i} + (y_2 - y_1)\overline{j}\end{aligned}$$

K5. Summa: $\overline{a}+\overline{b}=(5\overline{i}-12\overline{j})+(-\overline{i}+7\overline{j})=5\overline{i}-\overline{i}-12\overline{j}+7\overline{j}=4\overline{i}-5\overline{j}$

Erotus: $\overline{a}-\overline{b}=(5\overline{i}-12\overline{j})-(-\overline{i}+7\overline{j})=5\overline{i}-12\overline{j}+\overline{i}-7\overline{j}=6\overline{i}-19\overline{j}$





$$\left|\overline{a}\right|=\sqrt{5^2+(-12)^2}=\sqrt{169}=13$$

$$\overline{a}^0=\frac{\overline{a}}{\left|\overline{a}\right|}=\frac{5\overline{i}-12\overline{j}}{13}=\frac{5}{13}\overline{i}-\frac{12}{13}\overline{j}$$

K6. **a)** Vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat yhdensuuntaiset, jos on olemassa luku *t*, siten, että $\overline{a} = t\overline{b}$.

$$\overline{a} = t\overline{b}$$
$$12\overline{i} - 8\overline{j} + 5\overline{k} = t(-6\overline{i} + 4\overline{j} - 3\overline{k})$$
$$12\overline{i} - 8\overline{j} + 5\overline{k} = -6t\overline{i} + 4t\overline{j} - 3t\overline{k}$$

Vektoreiden komponentteihin jaon yksikäsitteisyyden perusteella saadaan yhtälöryhmä, josta ratkaistaan *t*.

$$\begin{cases} 12 = -6t & \|:(-6) \\ -8 = 4t & \|:4 \\ 5 = -3t & \|:(-3) \end{cases}$$
$$\begin{cases} t = -2 \\ t = -2 \\ t = -\dfrac{5}{3} \end{cases}$$

Ei ole olemassa sellaista vakiota *t*, että $\overline{a} = t\overline{b}$. Vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ eivät ole yhdensuuntaiset.

b) Vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat yhdensuuntaiset, jos on olemassa luku *t*, siten, että $\overline{a} = t\overline{b}$.

$$\begin{aligned} \overline{a} &= t\overline{b} \\ r\overline{i} + 8\overline{j} &= t(-2\overline{i} - 5\overline{j}) \\ r\overline{i} + 8\overline{j} &= -2t\overline{i} - 5t\overline{j} \end{aligned}$$

Vektoreiden komponentteihin jaon yksikäsitteisyyden perusteella saadaan yhtälöryhmä, josta ratkaistaan *r*.

$$\begin{cases} r = -2t \\ 8 = -5t \end{cases}$$

Alemmasta yhtälöstä saadaan $t = -\frac{8}{5}$.

Sijoitetaan tämä ylempään yhtälöön.

$$r = -2 \cdot \left(-\frac{8}{5}\right) = \frac{16}{5}$$

Vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat vastakkaissuuntaiset, koska kerroin $t = -\frac{8}{5}$ on negatiivinen.

K7. Merkitään pistettä, johon päädytään, kirjaimella A. Muodostetaan pisteen A paikkavektori $\overline{OA}$.

Pisteen P paikkavektori on $\overline{OP} = -2\bar{i} + 0\bar{j} + 3\bar{k} = -2\bar{i} + 3\bar{k}$.

Kun pisteestä P edetään 6 yksikköä vektorin $\bar{u}$ suuntaan, edetään 6 vektorin $\bar{u}$ yksikkövektoria, eli $6\bar{u}^0$.

Määritetään vektorin $\bar{u}$ yksikkövektori.

$$|\bar{u}| = \sqrt{4^2 + (-1)^2 + 8^2} = 9$$
$$\bar{u}^0 = \frac{\bar{u}}{\bar{u}^0} = \frac{4\bar{i} - \bar{j} + 8\bar{k}}{9} = \frac{4}{9}\bar{i} - \frac{1}{9}\bar{j} + \frac{8}{9}\bar{k}$$

Kun edetään 25 yksikköä vektorille $\bar{v}$ vastakkaiseen suuntaan, edetään 25 vektorin $\bar{v}$ yksikkövektorin vastavektoria, eli $-25\bar{v}^0$.

Määritetään vektorin $\bar{v}$ yksikkövektori.

$$|\bar{v}| = \sqrt{(-14)^2 + (-2)^2 + 5^2} = 15$$
$$\bar{v}^0 = \frac{\bar{v}}{\bar{v}^0} = \frac{-14\bar{i} - 2\bar{j} + 5\bar{k}}{15} = -\frac{14}{15}\bar{i} - \frac{2}{15}\bar{j} + \frac{5}{15}\bar{k}$$

Muodostetaan pisteen A paikkavektori.

$$\begin{aligned}
\overline{OA} &= \overline{OP} + 6\cdot\bar{u}^0 - 25\cdot\bar{v}^0 \\
&= -2\bar{i} + 3\bar{k} + 6\left(\frac{4}{9}\bar{i} - \frac{1}{9}\bar{j} + \frac{8}{9}\bar{k}\right) - 25\left(-\frac{14}{15}\bar{i} - \frac{2}{15}\bar{j} + \frac{5}{15}\bar{k}\right) \\
&= -2\bar{i} + 3\bar{k} + \frac{24}{9}\bar{i} - \frac{6}{9}\bar{j} + \frac{48}{9}\bar{k} + \frac{70}{3}\bar{i} + \frac{10}{3}\bar{j} - \frac{25}{3}\bar{k} \\
&= -2\bar{i} + \frac{8}{3}\bar{i} + \frac{70}{3}\bar{i} - \frac{2}{3}\bar{j} + \frac{10}{3}\bar{j} + 3\bar{k} + \frac{16}{3}\bar{k} - \frac{25}{3}\bar{k} \\
&= 24\bar{i} + \frac{8}{3}\bar{j}
\end{aligned}$$

Päädytään pisteeseen $(24, \frac{8}{3}, 0)$.

K8. Jaetaan vektori $\overline{w}$ komponentteihin, $\overline{w} = s\overline{u} + t\overline{v}$.

$$\begin{aligned} \overline{w} &= s\overline{u} + t\overline{v} \\ -\overline{i} + 5\overline{j} &= s(\overline{i} + \overline{j}) + t(\overline{i} - \overline{j}) \\ -\overline{i} + 5\overline{j} &= s\overline{i} + s\overline{j} + t\overline{i} - t\overline{j} \\ -\overline{i} + 5\overline{j} &= (s+t)\overline{i} + (s-t)\overline{j} \end{aligned}$$

Vektoreiden komponentteihin jaon yksikäsitteisyyden perusteella saadaan yhtälöpari, josta ratkaistaan s ja t.

$$+\begin{cases} s + t = -1 \\ s - t = 5 \end{cases}$$

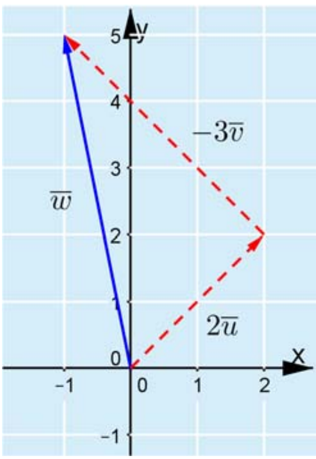
$$\begin{aligned} 2s &= 4 \quad \|:2 \\ s &= 2 \end{aligned}$$

Sijoitetaan $s = 2$ ylempään yhtälöön $s + t = -1$.

$$\begin{aligned} 2 + t &= -1 \\ t &= -3 \end{aligned}$$

$$\overline{w} = 2\overline{u} - 3\overline{v}$$

Piirretään kuva.



K9. **a)** $\overline{a} = 2\overline{i} - 5\overline{j} + 3\overline{k}$ ja $\overline{b} = -\overline{i} - \overline{j} + 4\overline{k}$

Lasketaan pistetulo $\overline{a} \cdot \overline{b}$.

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = 2 \cdot (-1) + (-5) \cdot (-1) + 3 \cdot 4 = -2 + 5 + 12 = 15$$

b) $\overline{a} = -2\overline{j} + \overline{k}$ ja $\overline{b} = 3\overline{i} + \overline{j}$

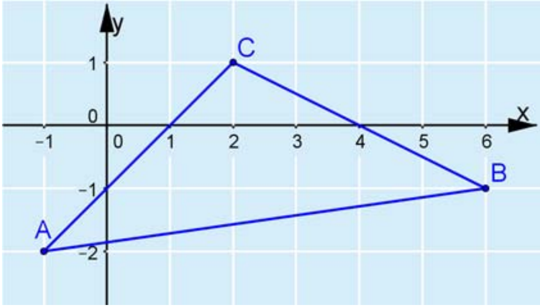
$$\overline{a} \cdot \overline{b} = 0 \cdot 3 + (-2) \cdot 1 + 1 \cdot 0 = -2$$

K10. Vektorit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, jos niiden pistetulo on 0. Lasketaan vektorien $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ pistetulo.

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = 6 \cdot 2 + 2 \cdot 0 - 1 \cdot 12 = 12 - 12 = 0$$

Pistetulo on 0, joten vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

K11. Piirretään kuva.



Kulma A on kolmion sivuvektoreiden $\overline{AB}$ ja $\overline{AC}$ välinen kulma ja kulma C vektoreiden $\overline{CA}$ ja $\overline{CB}$ välinen kulma.
Määritetään kolmion sivuvektorit $\overline{AB}$ ja $\overline{AC}$ sekä $\overline{CA}$ ja $\overline{CB}$.

$$\overline{AB} = (6-(-1))\bar{i} + (-1-(-2))\bar{j} = 7\bar{i} + \bar{j}$$
$$\overline{AC} = (2-(-1))\bar{i} + (1-(-2))\bar{j} = 3\bar{i} + 3\bar{j}$$
$$\overline{CA} = -\overline{AC} = -3\bar{i} - 3\bar{j}$$
$$\overline{CB} = (6-2)\bar{i} + (-1-1)\bar{j} = 4\bar{i} - 2\bar{j}$$

Määritetään kulma A.

$$\cos A = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{|\overline{AB}||\overline{AC}|} = \frac{7\cdot 3 + 1\cdot 3}{\sqrt{7^2+1^2}\cdot\sqrt{3^2+3^2}} = \frac{24}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{18}}$$
$$\sphericalangle A = 36{,}86...^\circ$$
$$\sphericalangle A \approx 36{,}9^\circ$$

Määritetään kulma C.

$$\cos C = \frac{\overline{CA}\cdot\overline{CB}}{|\overline{CA}||\overline{CB}|} = \frac{-3\cdot 4 - 3\cdot(-2)}{\sqrt{(-3)^2+(-3)^2}\cdot\sqrt{4^2+(-2)^2}} = \frac{-6}{\sqrt{18}\cdot\sqrt{20}}$$
$$\sphericalangle C = 108{,}43...^\circ$$
$$\sphericalangle C \approx 108{,}4^\circ$$

Kolmion kulmien summa on 180°. Määritetään kulma B.
$\sphericalangle B = 180^\circ - 36{,}86\ldots^\circ - 108{,}43\ldots^\circ = 34{,}69\ldots^\circ \approx 34{,}7^\circ$

$\sphericalangle A = 36{,}9^\circ$, $\sphericalangle B = 34{,}7^\circ$ ja $\sphericalangle C = 108{,}4^\circ$

K12. Vektoreiden välinen kulma on suora, jos niiden pistetulo on 0. Lasketaan pistetulo $\overline{u} \cdot \overline{v}$.

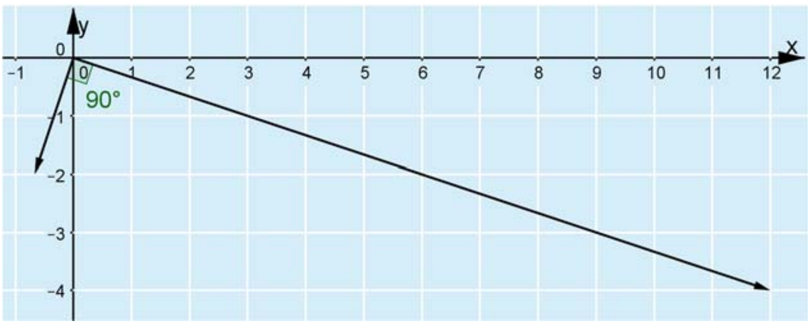
$$\overline{u} \cdot \overline{v} = r \cdot 12 + (-2) \cdot (-4) = 12r + 8$$

Ratkaistaan *r*, kun pistetulo on 0.

$$\begin{aligned} 12r + 8 &= 0 \\ 12r &= -8 \\ r &= \frac{-8}{12} = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Piirretään vektorit $\overline{u} = -\frac{2}{3}\overline{i} - 2\overline{j}$ ja $\overline{v} = 12\overline{i} - 4\overline{j}$,

ja mitataan niiden välinen kulma.



K13. **a)**

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x-y+z=7 \\ x+y-z=-4 \end{cases}$$

Ratkaistaan *x* kahdesta viimeisestä yhtälöstä.

$$+\begin{cases} 2x-y+z=7 \\ \quad x+y-z=-4 \end{cases}$$
$$\begin{aligned} 3x &= 3 \quad \|:3 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Sijoitetaan $x = 1$ kahteen ylempään yhtälöön ja ratkaistaan *z*.

$$+\begin{cases} 1+y+z=2 \\ 2-y+z=7 \end{cases}$$
$$\begin{aligned} 3+2z &= 9 \\ 2z &= 6 \quad \|:2 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

Sijoitetaan $z = 3$ yhtälöön $1 + y + z = 2$ ja ratkaistaan *y*.

$$\begin{aligned} 1+y+3 &= 2 \\ y &= -2 \end{aligned}$$

$x = 1$, $y = -2$ ja $z = 3$

b)

$$\begin{cases} x-y+2z=2 \\ x-y+4z=3 \\ 3x+y-6z=4 \end{cases}$$

Vähennetään kaksi ylintä yhtälöä toisistaan ja ratkaistaan z.

$$-\begin{cases} x-y+2z=2 \\ x-y+4z=3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -2z&=-1 \quad |:(-2) \\ z&=\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Sijoitetaan $z = \frac{1}{2}$ kahteen alimpaan yhtälöön ja ratkaistaan x.

$$\begin{cases} x-y+4\cdot\frac{1}{2}=3 \\ 3x+y-6\cdot\frac{1}{2}=4 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} x-y+2=3 \\ 3x+y-3=4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 4x \quad -1&=7 \\ 4x&=8 \quad \|:4 \\ x&=2 \end{aligned}$$

Sijoitetaan $z = \frac{1}{2}$ ja $x = 2$ yhtälöön $x - y + 2z = 2$ ja ratkaistaan y.

$$\begin{aligned} 2-y+2\cdot\frac{1}{2}&=2 \\ -y&=-1 \quad \|:(-1) \\ y&=1 \end{aligned}$$

$x = 2$, $y = 1$ ja $z = \frac{1}{2}$

K14. a)

$$\begin{cases} 3r+1=5 \\ 6r-2=6 \\ 3+3r=-1 \end{cases}$$

Ratkaistaan r kaikista yhtälöistä.

$$\begin{cases} 3r=4 \quad \|:3 \\ 6r=8 \quad \|:6 \\ 3r=-4 \, \|:3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r=\frac{4}{3} \\ r=\frac{8}{6}=\frac{4}{3} \\ r=-\frac{4}{3} \end{cases}$$

Yhtälöllä ei ole ratkaisua.

b)

$$\begin{cases} t-r+1=2 \\ 3t-4r=1 \\ 2t+3r=12 \end{cases}$$

Ratkaistaan t ja ylimmästä yhtälöstä ja sijoitetaan keskimmäiseen.
$t = 1 + r$

$$\begin{aligned} 3(1+r)-4r &= 1 \\ 3+3r-4r &= 1 \\ -r &= -2 \quad \| : (-1) \\ r &= 2 \end{aligned}$$

Tällöin $t = 1 + 2 = 3$.

Sijoitetaan $r = 2$ ja $t = 3$ alimpaan yhtälöön $2t + 3r = 12$.

$2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 6 + 6 = 12$

Luvut $r = 2$ ja $t = 3$ toteuttavat myös alimman yhtälön, joten ne ovat yhtälöryhmän ratkaisu.

K15.

$$\begin{cases} x+3y+z=5 \\ x-2y+2z=7 \end{cases}$$

Ratkaistaan ylimmästä yhtälöstä *x*.

$x = -3y - z + 5$

Sijoitetaan tämä alempaan yhtälöön.

$$(-3y - z + 5) - 2y + 2z = 7$$
$$-5y + z = 2$$

Tästä on helpointa ratkaista *z*.

$z = 5y + 2$

Sijoitetaan saatu *z* aiemmin saatuun *x*:n yhtälöön.

$$x = -3y - (5y + 2) + 5$$
$$x = -3y - 5y - 2 + 5$$
$$x = -8y + 3$$

Yhtälön ratkaisu on esimerkiksi

$$\begin{cases} x=-8y+3 \\ z=5y+2 \\ y\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

K16. Yhden litran purkkeja on *x* kpl, kolmen litran *y* kpl ja kymmenen litran *z* kpl.

Kirjoitetaan yhtälöt, kun tunnetaan maalin yhteismäärä, kokonaishinta ja purkkien lukumäärä.

$$\begin{cases} x+3y+10z=65 \\ 8x+19y+49z=377 \\ x+y+z=18 \end{cases}$$

Ratkaistaan yhtälöryhmä symbolisen laskennan ohjelmalla.

$x = 5$, $y = 10$ ja $z = 3$

Yhden litran purkkeja on 5 kpl, kolmen litran 10 kpl ja kymmenen litran 3 kpl.

K17. **a)** $\overline{AB} = (15-13)\overline{i} + (7-6)\overline{j} + (-5-(-4))\overline{k} = 2\overline{i} + \overline{j} - \overline{k}$

Muodostetaan suoran vektorimuotoinen yhtälö, eli suoran pisteen $P = (x, y, z)$ paikkavektori.

$$\begin{aligned} \overline{OP} &= \overline{OA} + t\overline{AB} \\ x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k} &= 13\overline{i} + 6\overline{j} - 4\overline{k} + t(2\overline{i} + \overline{j} - \overline{k}) \\ x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k} &= (13+2t)\overline{i} + (6+t)\overline{j} - (4+t)\overline{k} \end{aligned}$$

Muodostetaan suoran parametrimuotoinen yhtälö.

$$\begin{cases} x = 13+2t \\ y = 6+t \\ z = -4-t \end{cases}, \text{ missä } t \in \mathbb{R}$$

b) Piste on suoralla, jos se toteuttaa suoran yhtälön. Sijoitetaan pisteen (3, 1, 1) koordinaatit suoran yhtälöön.

$$\begin{cases} 3 = 13 + 2t \\ 1 = 6 + t \\ 1 = -4 - t \end{cases}$$

Ratkaistaan kaikista t.

$$\begin{cases} -10 = 2t \quad \|: 2 \\ \quad -5 = t \\ \quad\quad 5 = -t \quad \|: (-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = -5 \\ t = -5 \\ t = -5 \end{cases}$$

Kaikista yhtälöistä ratkaistu t on sama, joten piste (3, 1, 1) on suoralla.

K18. Muodostetaan tason yhtälö normaalivektorin ja pisteen P avulla.

$$\begin{aligned} -2(x-7) + 3(y-0) - 5(z-(-2)) &= 0 \\ -2x + 3y - 5z + 14 - 10 &= 0 \\ -2x + 3y - 5z + 4 &= 0 \end{aligned}$$

Piste on tasossa, jos se toteuttaa tason yhtälön.
Sijoitetaan pisteen (12, 5, 3) koordinaatit tason yhtälöön.

$$-2 \cdot 12 + 3 \cdot 5 - 5 \cdot 3 + 4 = -24 + 15 - 15 + 4 = -20$$

Koska tulos ei ole 0, piste ei toteuta tason yhtälöä, eikä siis ole tasossa.

K19. **a)** Muodostetaan pisteen P kautta kulkevan suoran parametrimuotoinen yhtälö.

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 - 5t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 7 + 6t \end{cases}$$

yz-tason pisteiden x-koordinaatti on 0.

Pisteen P kautta kulkeva suora leikkaa yz-tason pisteessä, jonka x-koordinaatti on 0.

Saadaan $x = -1 + 2t = 0$, josta $t = \frac{1}{2}$.

$$y = 2 - 5t = 2 - 5 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$
$$z = 7 + 6t = 7 + 6 \cdot \frac{1}{2} = 7 + 3 = 10$$

yz-tason leikkauspiste on $(0, -\frac{1}{2}, 10)$.

b) Muodostetaan pisteiden *A* ja *B* kautta kulkevan suoran yhtälö.

Suoran suuntavektori on $\overline{AB}$.

$$\overline{AB} = (1-2)\overline{i} + (-7-(-9))\overline{j} + (-3-2)\overline{k} = -\overline{i} + 2\overline{j} - 5\overline{k}$$

Pisteiden *A* ja *B* kautta kulkevan suoran yhtälö on:

$$\begin{cases} x = 2 - s \\ y = -9 + 2s \\ z = 2 - 5s. \end{cases}$$

Ratkaistaan, leikkaavatko suorat.

$$\begin{cases} -1 + 2t = 2 - s \\ 2 - 5t = -9 + 2s \\ 7 + 6t = 2 - 5s \end{cases}$$

$s = -7$ ja $t = 5$

Koska löytyi sellaiset *s* ja *t*, että kaikki yhtälöt toteutuvat, suorat leikkaavat toisensa. Lasketaan suorien leikkauspiste.

Sijoitetaan $s = -7$ suoran *AB* yhtälöön.

$$\begin{cases} x = 2 - (-7) = 2 + 7 = 9 \\ y = -9 + 2 \cdot (-7) = -9 - 14 = -23 \\ z = 2 - 5 \cdot (-7) = 2 + 35 = 37 \end{cases}$$

Leikkauspiste on (9, −23, 37).

K20. Muodostetaan pisteiden A ja B kautta kulkevan suoran parametrimuotoinen yhtälö. Suoran suuntavektori on $\overline{AB}$.

$$\overline{AB} = (8-7)\overline{i} + (-12-(-10))\overline{j} + (-4-(-3))\overline{k} = \overline{i} - 2\overline{j} - \overline{k}$$

Suoran AB yhtälö on:

$$\begin{cases} x = 7+t \\ y = -10-2t \ (t \in \mathbb{R}) \\ z = -3-t \end{cases}$$

Määritetään suoran AB ja tason $2x - y + z - 3 = 0$ leikkauspiste.

$$\begin{aligned} 2(7+t) - (-10-2t) + (-3-t) - 3 &= 0 \\ 14 + 2t + 10 + 2t - 3 - t - 3 &= 0 \\ 3t &= -18 \quad \| : 3 \\ t &= -6 \end{aligned}$$

Sijoitetaan $t = -6$ suoran yhtälöön.

$$\begin{cases} x = 7-6 = 1 \\ y = -10-2\cdot(-6) = -10+12 = 2 \\ z = -3-(-6) = -3+9 = 3 \end{cases}$$

Leikkauspiste on (1, 2, 3).

Tason $2x - y + z - 3 = 0$ normaalivektori on $\overline{n} = 2\overline{i} - \overline{j} + \overline{k}$.

Lasketaan suoran AB suuntavektorin ja tason normaalivektorin välinen kulma α.

$$\cos\alpha = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{n}}{|\overline{AB}||\overline{n}|} = \frac{1\cdot 2 + (-2)\cdot(-1) + (-1)\cdot 1}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}} = \frac{3}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = 60°$$

Suoran ja tason välinen kulma on $90° - 60° = 30°$.

Kokoavia tehtäviä

ILMAN TEKNISIÄ APUVÄLINEITÄ

1. **a)** Piste *C*. *xy*-tasossa pisteen *z*-koordinaatti on 0.

b) $\overline{AB} = (11-(-5))\overline{i} + (-3-2)\overline{j} + (5-7)\overline{k} = 16\overline{i} - 5\overline{j} - 2\overline{k}$

$\overline{BC} = (2-11)\overline{i} + (3-(-3))\overline{j} + (0-5)\overline{k} = -9\overline{i} + 6\overline{j} - 5\overline{k}$

$\overline{CA} = (-5-2)\overline{i} + (2-3)\overline{j} + (7-0)\overline{k} = -7\overline{i} - \overline{j} + 7\overline{k}$

c) $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = \overline{AC} + \overline{CA} = \overline{AA} = \overline{0}$

2. Nelikulmio on suunnikas, jos sen vastakkaiset sivut ovat yhtä pitkät ja yhden suuntaiset. Pitää siis osoittaa, että $\overline{AB} = \overline{DC}$ ja $\overline{AD} = \overline{BC}$.

$\overline{AB} = (20-5)\overline{i} + (5-(-5))\overline{j} = 15\overline{i} + 10\overline{j}$

$\overline{DC} = (10-(-5))\overline{i} + (10-0)\overline{j} = 15\overline{i} + 10\overline{j}$

$\overline{AD} = (-5-5)\overline{i} + (0-(-5))\overline{j} = -10\overline{i} + 5\overline{j}$

$\overline{BC} = (10-20)\overline{i} + (10-5)\overline{j} = -10\overline{i} + 5\overline{j}$

Koska $\overline{AB} = \overline{DC}$ ja $\overline{AD} = \overline{BC}$, nelikulmio on suunnikas.

3. Määritetään pisteen P koordinaatit paikkavektorin avulla.

$$\overline{OP} = \overline{OA} + \overline{AP}$$

Koska $AP : PB = 2 : 3$, on $\overline{AP} = \frac{2}{5}\overline{AB}$.

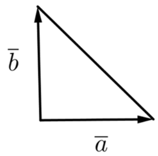
$$\overline{AB} = (4-2)\overline{i} + (3-(-1))\overline{j} + (6-3)\overline{k} = 2\overline{i} + 4\overline{j} + 3\overline{k}$$

$$\begin{aligned}
\overline{OP} &= \overline{OA} + \overline{AP} \\
&= \overline{OA} + \frac{2}{5}\overline{AB} \\
&= 2\overline{i} - \overline{j} + 3\overline{k} + \frac{2}{5}(2\overline{i} + 4\overline{j} + 3\overline{k}) \\
&= 2\overline{i} - \overline{j} + 3\overline{k} + \frac{4}{5}\overline{i} + \frac{8}{5}\overline{j} + \frac{6}{5}\overline{k} \\
&= \frac{14}{5}\overline{i} + \frac{3}{5}\overline{j} + \frac{21}{5}\overline{k}
\end{aligned}$$

Piste P on $\left(\frac{14}{5}, \frac{3}{5}, \frac{21}{5}\right) = \left(2\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 4\frac{1}{5}\right)$.

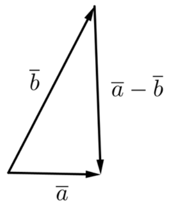
4. **a)** tasakylkinen ja suorakulmainen

Kolmion kaksi sivua ovat yhtä pitkät ja kohtisuorassa toisiaan vastaan.



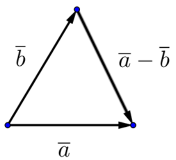
b) suorakulmainen

Käänteinen Pythagoraan lause toteutuu kolmion sivujen pituuksille.



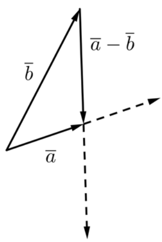
c) tasasivuinen

Kolmion kolmas sivu on vektori $\overline{a}-\overline{b}$. Kolmion kaikki kolme sivua ovat yhtä pitkiä.



d) tylppäkulmainen

Jos vektoreiden pistetulo on negatiivinen, vektoreiden välinen kulma on tylppä.



5. Vektori $\overline{a}$ on yhdensuuntainen vektorin $\overline{i}$ kanssa, joten $\overline{a} = t\overline{i}$ jollakin t:n arvolla.

$$\begin{aligned}
\overline{a} + \overline{b} &= 3\overline{i} + 2\overline{j} \\
t\overline{i} + \overline{b} &= 3\overline{i} + 2\overline{j} \\
\overline{b} &= 3\overline{i} + 2\overline{j} - t\overline{i} \\
\overline{b} &= (3-t)\overline{i} + 2\overline{j}
\end{aligned}$$

Vektoreiden $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ pistetulo on nolla. Ratkaistaan t.

$$\begin{aligned}
\overline{a} \cdot \overline{b} &= 2 \\
t(3-t) + 0 \cdot 2 &= 2 \\
3t - t^2 &= 2 \\
-t^2 + 3t - 2 &= 0
\end{aligned}$$

$$t = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot (-1) \cdot (-2)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-3 \pm 1}{-2}$$

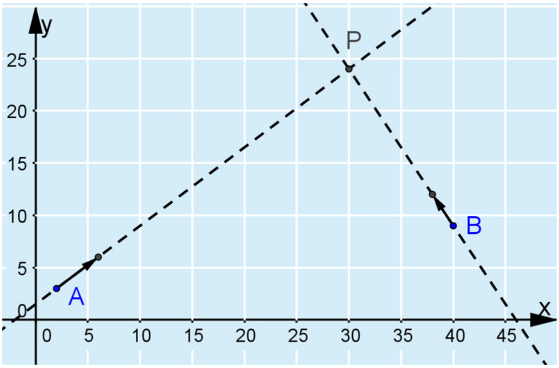
$$t = \frac{-2}{-2} = 1 \quad \text{tai} \quad t = \frac{-4}{-2} = 2$$

$\overline{a} = \overline{i}$ ja $\overline{b} = (3-1)\overline{i} + 2\overline{j} = 2\overline{i} + 2\overline{j}$

tai

$\overline{a} = 2\overline{i}$ ja $\overline{b} = (3-2)\overline{i} + 2\overline{j} = \overline{i} + 2\overline{j}$

6. Piirretään kuva. Merkitään säteiden leikkauspiste *P*.



Muodostetaan pisteen *P* paikkavektori kahdella eri tavalla: pisteen *A* kautta ja pisteen *B* kautta.

$$\overline{OP} = \overline{OA} + t(4\overline{i} + 3\overline{j}) = 2\overline{i} + 3\overline{j} + t(4\overline{i} + 3\overline{j}) = (2+4t)\overline{i} + (3+3t)\overline{j}$$
$$\overline{OP} = \overline{OB} + s(-2\overline{i} + 3\overline{j}) = 40\overline{i} + 9\overline{j} + s(-2\overline{i} + 3\overline{j}) = (40-2s)\overline{i} + (9+3s)\overline{j}$$

$$(2+4t)\overline{i} + (3+3t)\overline{j} = (40-2s)\overline{i} + (9+3s)\overline{j}$$

Saadaan yhtälöpari, josta ratkaistaan *t*.

$$\begin{cases} 2+4t = 40-2s \\ 3+3t = 9+3s \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4t+2s = 38 & \|:2 \\ 3t-3s = 6 & \|:3 \end{cases}$$

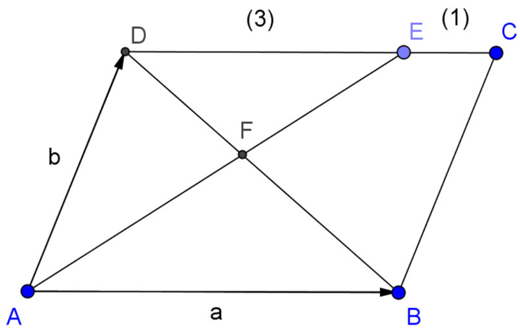
$$+\begin{cases} 2t+s = 19 \\ t-s = 2 \end{cases}$$
$$3t = 21 \quad \|:3$$
$$t = 7$$

$$\overline{OP} = (2+4t)\overline{i} + (3+3t)\overline{j} = (2+4\cdot 7)\overline{i} + (3+3\cdot 7)\overline{j} = 30\overline{i} + 24\overline{j}$$

Piste *P* on (30, 24).

Säteet kohtaavat korkeudella 24 m.

7. Piirretään kuva.



Koska nelikulmio on suunnikas $\overline{DC} = \overline{AB} = \overline{a}$ ja $\overline{BC} = \overline{AD} = \overline{b}$.

Kirjoitetaan vektori $\overline{AF}$ kahdella eri tavalla.

$$\overline{AF} = t\,\overline{AE} = t(\overline{AD} + \overline{DE}) = t(\overline{AD} + \frac{3}{4}\overline{DC}) = t(\overline{b} + \frac{3}{4}\overline{a}) = \frac{3}{4}t\overline{a} + t\overline{b}$$

$$\begin{aligned}\overline{AF} &= \overline{AB} + \overline{BF} = \overline{AB} + s\,\overline{BD} = \overline{AB} + s(\overline{BA} + \overline{AD}) = \overline{a} + s(-\overline{a} + b) \\ &= (1-s)\overline{a} + s\overline{b}\end{aligned}$$

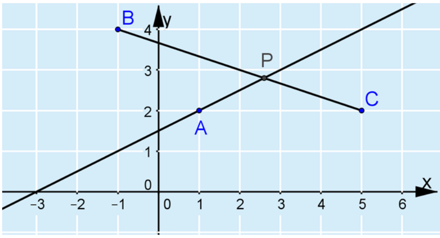
Saadaan yhtälöpari, josta ratkaistaan t.

$$\begin{cases} \frac{3}{4}t = 1 - s \\ t = s \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{4}t &= 1 - t \\ \frac{7}{4}t &= 1 \quad \|:\frac{7}{4} \\ t &= \frac{4}{7} \end{aligned}$$

$$\overline{AF} = \frac{3}{4}t\overline{a} + t\overline{b} = \frac{3}{4}\cdot\frac{4}{7}\overline{a} + \frac{4}{7}\overline{b} = \frac{3}{7}\overline{a} + \frac{4}{7}\overline{b}$$

8. Piirretään kuva.



Piste P on janalla BC, joten $\overline{BP} = t\overline{BC}$ Halutaan tietää, mikä t on.

$$\overline{BA} = (1-(-1))\overline{i} + (2-4)\overline{j} = 2\overline{i} - 2\overline{j}$$
$$\overline{BC} = (5-(-1))\overline{i} + (2-4)\overline{j} = 6\overline{i} - 2\overline{j}$$

Kirjoitetaan vektori $\overline{BP}$ kahdella eri tavalla.

$$\overline{BP} = t\overline{BC} = t(6\overline{i} - 2\overline{j}) = 6t\overline{i} - 2t\overline{j}$$
$$\overline{BP} = \overline{BA} + s(2\overline{i} + \overline{j}) = 2\overline{i} - 2\overline{j} + s(2\overline{i} + \overline{j}) = (2+2s)\overline{i} + (-2+s)\overline{j}$$

Saadaan yhtälöpari, josta ratkaistaan t.

$$\begin{cases} 6t = 2+2s \\ -2t = -2+s \quad \| \cdot(-2) \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} + \begin{cases} 6t = 2+2s \\ 4t = 4-2s \end{cases} \\ \hline 10t = 6 \quad \| :10 \\ t = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5} \end{array}$$

$\overline{BP} = \frac{3}{5}\overline{BC}$, joten piste P jakaa janan BC suhteessa 3 : 2.

Ratkaistaan pisteen P koordinaatit paikkavektorin avulla.

$$\overline{OP} = \overline{OB} + \overline{BP} = -\overline{i} + 4\overline{j} + \frac{3}{5}(6\overline{i} - 2\overline{j}) = -\overline{i} + 4\overline{j} + \frac{18}{5}\overline{i} - \frac{6}{5}\overline{j} = \frac{13}{5}\overline{i} + \frac{14}{5}\overline{j}$$

Piste P on $\left(\frac{13}{5}, \frac{14}{5}\right) = \left(2\frac{3}{5}, 2\frac{4}{5}\right)$.

9. **a)** Vektorit $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa, jos pistetulo $\overline{u}\cdot\overline{v}$ on 0.

$$\overline{u}\cdot\overline{v} = 1\cdot p + 1\cdot(-3) + (-2)\cdot 6 = p - 3 - 12 = p - 15$$
$$p - 15 = 0$$
$$p = 15$$

b) Vektorit $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ ovat yhdensuuntaiset, jos on olemassa luku t siten, että $\overline{v} = t\overline{u}$.

$$\overline{v} = t\overline{u}$$
$$p\overline{i} - 3\overline{j} + 6\overline{k} = t(\overline{i} + \overline{j} - 2\overline{k})$$
$$p\overline{i} - 3\overline{j} + 6\overline{k} = t\overline{i} + t\overline{j} - 2t\overline{k})$$

Saadaan yhtälöryhmä, josta ratkaistaan p.

$$\begin{cases} t = p \\ t = -3 \\ -2t = 6 \end{cases}$$

Kun $t = -3$ on myös $p = -3$. Tällöin myös yhtälö $-2t = 6$ toteutuu.

$p = -3$

10. Kolmion *OAB* kolmas sivuvektori on

$$\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB} = -\overline{OA} + \overline{OB} = -\overline{a} + \overline{b}.$$

Kolmio on tasakylkinen, jos $\left|\overline{OA}\right| = \left|\overline{OB}\right|$ tai $\left|\overline{OA}\right| = \left|\overline{AB}\right|$ tai $\left|\overline{OB}\right| = \left|\overline{AB}\right|$.

Lasketaan $\left|\overline{AB}\right|$.

$$\left|\overline{AB}\right| = \left|-\overline{a} + \overline{b}\right|$$

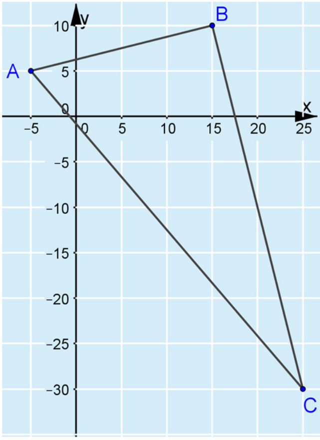
$$\begin{aligned}
\left|-\overline{a} + \overline{b}\right|^2 &= (-\overline{a} + \overline{b}) \cdot (-\overline{a} + \overline{b}) \\
&= -\overline{a} \cdot (-\overline{a} + \overline{b}) + \overline{b} \cdot (-\overline{a} + \overline{b}) \\
&= \overline{a} \cdot \overline{a} - \overline{a} \cdot \overline{b} - \overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{b} \cdot \overline{b} \\
&= \overline{a} \cdot \overline{a} - 2\overline{a} \cdot b + \overline{b} \cdot \overline{b} \\
&= 2\overline{a} \cdot b - 2\overline{a} \cdot b + \overline{b} \cdot \overline{b} \\
&= \overline{b} \cdot \overline{b} \\
&= \left|\overline{b}\right|^2
\end{aligned}$$

On siis voimassa $\left|\overline{AB}\right|^2 = \left|\overline{OB}\right|^2$ joten myös $\left|\overline{AB}\right| = \left|\overline{OB}\right|$.

Kolmion *OAB* sivut *OB* ja *AB* ovat yhtä pitkät, joten kolmio on tasakylkinen.

APUVÄLINEET SALLITTU

11. **a)**



Kolmio on suorakulmainen, jos sen joidenkin sivuvektorien pistetulo on 0. Kuvan perusteella vektorit $\overline{BA}$ ja $\overline{BC}$ näyttäisivät olevan kohtisuorassa.

$$\overline{BA} = (15-(-5))\overline{i} + (10-5)\overline{j} = 20\overline{i} + 5\overline{j}$$
$$\overline{BC} = (25-15)\overline{i} + (-30-10)\overline{j} = 10\overline{i} - 40\overline{j}$$

$$\overline{BA} \cdot \overline{BC} = 20 \cdot 10 + 5 \cdot (-40) = 200 - 200 = 0$$

Kolmio on suorakulmainen.

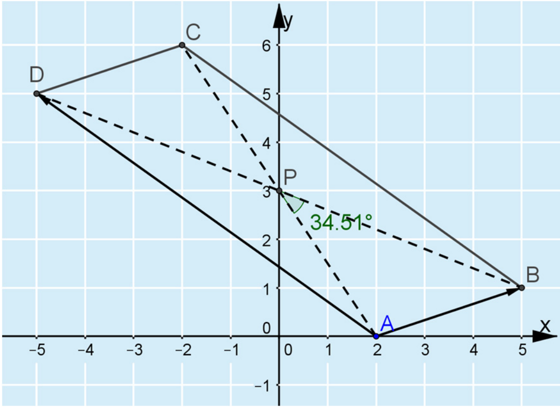
b) Kolmion kolmas sivuvektori on

$$\overline{a} - \overline{b} = 10\overline{i} + 18\overline{j} - (70\overline{i} + 7\overline{j}) = -60\overline{i} + 11\overline{j}.$$

Lasketaan kolmannen sivun pituus.

$$|\overline{a} - \overline{b}| = \sqrt{(-60)^2 + 11^2} = 61$$

12. **a)** Piirretään kuva. Merkitään lävistäjien leikkauspiste P.



$C = (-2, 6)$ ja lävistäjien välinen kulma on 34,5°.

b) Koska $ABCD$ on suunnikas, sen vastakkaiset sivut ovat yhtä pitkät ja yhdensuuntaiset. Tällöin $\overline{DC} = \overline{AB}$.

Ratkaistaan piste C paikkavektorin avulla.

$$\overline{OC} = \overline{OD} + \overline{DC} = \overline{OA} + \overline{AD} + \overline{AB} = 2\overline{i} - 7\overline{i} + 5\overline{j} + 3\overline{i} + \overline{j} = -2\overline{i} + 6\overline{j}$$

Piste C on $(-2, 6)$.

Lävistäjien välinen kulma on vektorien $\overline{PA}$ ja $\overline{PB}$ välinen kulma.

Suunnikkaan lävistäjät puolittavat toisensa, joten

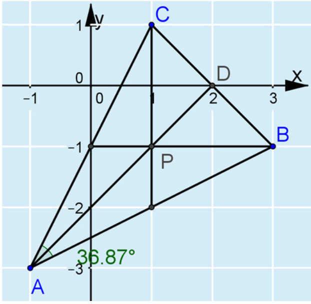
$$\overline{PA} = \frac{1}{2}\overline{CA} = \frac{1}{2}((2-(-2))\overline{i} + (0-6)\overline{j}) = 2\overline{i} - 3\overline{j}.$$

$$\overline{PB} = \frac{1}{2}\overline{DB} = \frac{1}{2}(\overline{DA} + \overline{AB}) = \frac{1}{2}(-\overline{AD} + \overline{AB})$$
$$= \frac{1}{2}(7\overline{i} - 5\overline{j} + 3\overline{i} + \overline{j}) = 5\overline{i} - 2\overline{j}$$

$$\cos(\overline{PA}, \overline{PB}) = \frac{\overline{PA} \cdot \overline{PB}}{|\overline{PA}||\overline{PB}|} = \frac{2 \cdot 5 + (-3) \cdot (-2)}{\sqrt{2^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{5^2 + (-2)^2}} = \frac{16}{\sqrt{377}}$$

$$\sphericalangle(\overline{PA}, \overline{PB}) = 34{,}50...° \approx 34{,}5°$$

13. **a)**



Mediaanien leikkauspiste on $(1, -1)$ ja kulma A on 36,9°.

b) Merkitään mediaanien leikkauspiste P. Ja sivun BC keskipiste D.

$$D = \left(\frac{3+1}{2}, \frac{-1+1}{2}\right) = (2,0)$$

Mediaanilauseen perusteella piste P jakaa mediaanin suhteessa 2 : 1 kärjestä lukien. Tällöin $\overline{AP} = \frac{2}{3}\overline{AD}$.

$$\overline{AD} = (2-(-1))\overline{i} + (0-(-3))\overline{j} = 3\overline{i} + 3\overline{j}$$

Määritetään piste P paikkavektorin avulla.

$$\overline{OP} = \overline{OA} + \overline{AP} = \overline{OA} + \frac{2}{3}\overline{AD} = -\overline{i} - 3\overline{j} + \frac{2}{3}(3\overline{i} + 3\overline{j}) = \overline{i} - \overline{j}$$

Piste P on $(1, -1)$.

Kulma A on vektorien $\overline{AB}$ ja $\overline{AC}$ välinen kulma.

$$\overline{AB} = (3-(-1))\overline{i} + (-1-(-3))\overline{j} = 4\overline{i} + 2\overline{j}$$
$$\overline{AC} = (1-(-1))\overline{i} + (1-(-3))\overline{j} = 2\overline{i} + 4\overline{j}$$

$$\cos(\overline{AB}, \overline{AC}) = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{|\overline{AB}||\overline{AC}|} = \frac{4 \cdot 2 + 2 \cdot 4}{\sqrt{4^2 + 2^2} \cdot \sqrt{2^2 + 4^2}} = \frac{16}{20}$$
$$\sphericalangle(\overline{AB}, \overline{AC}) = 36{,}86...° \approx 36{,}9°$$

14. **a)** Pisteen Q etäisyys pisteestä P on vektorin $\overline{PQ}$ pituus.

$$\overline{PQ} = (11-7)\overline{i} + (0-4)\overline{j} + (-4-3)\overline{k} = 4\overline{i} - 4\overline{j} - 7\overline{k}$$
$$\left|\overline{PQ}\right| = \sqrt{4^2 + (-4)^2 + (-7)^2} = \sqrt{16+16+49} = 9$$

b) Etäisyys xy-tasosta on pisteen p z-koordinaatti 3.

c) Etäisyys x-akselista on pisteen P ja pisteen (7, 0, 0) etäisyys.

$$\sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

d) Tason ja pisteen P etäisyys on tasolla olevan projektiopisteen P' ja pisteen P etäisyys. Projektiopiste on pisteen P kautta kulkevan tason normaalin ja tason leikkauspiste.

Tason normaali on vektorin $2\overline{i} - 3\overline{j} + 6\overline{k}$ suuntainen.

Normaalin yhtälö on

$$\begin{cases} x = 7 + 2t \\ y = 4 - 3t \ (t \in \mathbb{R}) \\ z = 3 + 6t. \end{cases}$$

Ratkaistaan tason ja normaalin leikkauspiste.

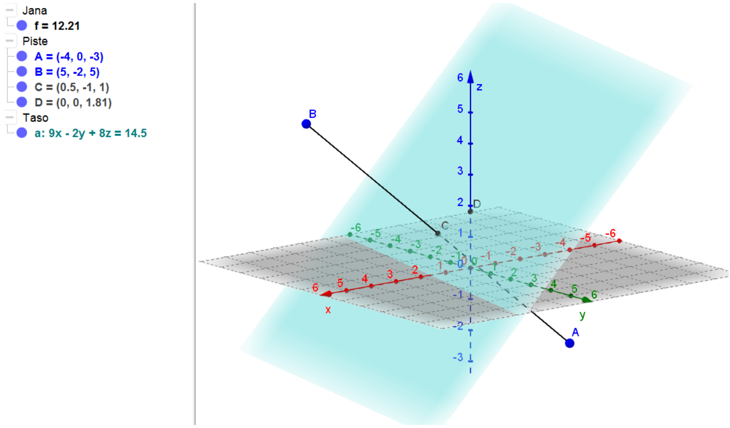
$$\begin{aligned} 2(7 + 2t) - 3(4 - 3t) + 6(3 + 6t) + 127 &= 0 \\ 49t &= -147 \\ t &= -3 \end{aligned}$$

$x = 7 - 6 = 1$, $y = 4 + 9 = 13$ ja $z = 3 - 18 = -15$

Leikkauspiste on $P' = (1, 13, -15)$.

$$\overline{PP'} = (1-7)\overline{i} + (13-4)\overline{j} + (-15-3)\overline{j} = -6\overline{i} + 9\overline{j} - 18\overline{k}$$
$$\left|\overline{PP'}\right| = \sqrt{(-6)^2 + 9^2 + (-18)^2} = 21$$

15. **a)**



Tason yhtälö on $9x - 2y + 8z - 14{,}5 = 0$ ja leikkauspiste (0; 0; 1,8).

b) Janan AB keskipiste on $C = \left(\frac{-4+5}{2}, \frac{0-2}{2}, \frac{-3+5}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, -1, 1\right)$.

Vektori $\overline{AB}$ on tason normaalivektori.

$$\overline{AB} = (5-(-4))\overline{i} + (-2-0)\overline{j} + (5-(-3))\overline{k} = 9\overline{i} - 2\overline{j} + 8\overline{k}$$

Muodostetaan tason yhtälö.

$$9\left(x - \frac{1}{2}\right) - 2(y-(-1)) + 8(z-1) = 0$$
$$9x - 4\frac{1}{2} - 2y - 2 + 8z - 8 = 0$$
$$9x - 2y + 8z - 14\frac{1}{2} = 0$$

z-akselin leikkauspisteessä $x = 0$ ja $y = 0$.

$$9 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 8z - 14\frac{1}{2} = 0$$
$$8z = 14\frac{1}{2}$$
$$z = \frac{29}{16} = 1\frac{13}{16}$$

Leikkauspiste on $\left(0, 0, 1\frac{13}{16}\right)$.

16.

$$\overline{u} = r\overline{a} + s\overline{b} + t\overline{c}$$
$$-7\overline{j} - 3\overline{k} = r(\overline{i} - \overline{j} + 2\overline{k}) + s(2\overline{i} + \overline{j} + \overline{k}) + t(\overline{i} - \overline{k})$$
$$-7\overline{j} - 3\overline{k} = (r + 2s + t)\overline{i} + (-r + s)\overline{j} + (2r + s - t)\overline{k}$$

Saadaan yhtälöryhmä, josta ratkaistaan r, s ja t.

$$\begin{cases} r + 2s + t = 0 \\ \quad -r + s = -7 \\ 2r + s - t = -3 \end{cases}$$

$r = 3$, $s = -4$ ja $t = 5$

$$\overline{u} = 3\overline{a} - 4\overline{b} + 5\overline{c}$$

17. Opiskelija sijoittaa osakkeisiin x €, joukkovelkakirjoihin y € ja korkotilille z €.

Tehtävänannon perusteella saadaan seuraavat yhtälöt, joista ratkaistaan x, y ja z.

$$\begin{cases} x + y + z = 20\,000 \\ z = x + y + 1000 \\ 0{,}07x + 0{,}035y + 0{,}02z = 800 \end{cases}$$

$x = 7357{,}142\ldots$, $y = 2142{,}857\ldots$ ja $z = 10500$

Opiskelija sijoittaa osakkeisiin 7357 €, joukkovelkakirjoihin 2143 € ja korkotilille 10 500 €.

18. Särmiö on suorakulmainen, jos sen sivusärmät ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Vektorit $\overline{a}$, $\overline{b}$ ja $\overline{c}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan jos niiden pistetulo on 0.

$$\begin{cases} \overline{a}\cdot\overline{b} = 2x - 1 + 3 \\ \overline{a}\cdot\overline{c} = -4 - y + z \\ \overline{b}\cdot\overline{c} = -2x + y + 3z \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 2 = 0 \\ -y + z - 4 = 0 \\ -2x + y + 3z = 0 \end{cases}$$

Ratkaistaan x, y ja z.

$$x = -1,\ y = -\frac{7}{2} \text{ ja } z = \frac{1}{2}$$

Lasketaan särmiön särmien pituudet.

$$|\overline{a}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

$$\overline{b} = -\overline{i} + \overline{j} + 3\overline{k}$$

$$|\overline{b}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{11}$$

$$\overline{c} = -2\overline{i} - \frac{7}{2}\overline{j} + \frac{1}{2}\overline{k}$$

$$|\overline{c}| = \sqrt{(-2)^2 + (-\frac{7}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2} = \frac{\sqrt{66}}{2}$$

$$V = |\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot|\overline{c}| = \sqrt{6}\cdot\sqrt{11}\cdot\frac{\sqrt{66}}{2} = 33.$$

19. Pitää esittää $\overline{a}=\overline{u}+\overline{v}$.

Koska $\overline{u}\parallel\overline{b}$, on $\overline{u}=t\overline{b}$.

Koska $\overline{v}\perp\overline{b}$ on $\overline{v}\cdot\overline{b}=0$.

$\overline{a}=\overline{u}+\overline{v}$, joten $\overline{v}=\overline{a}-\overline{u}$.

$$\begin{aligned}\overline{v}\cdot\overline{b}&=(\overline{a}-\overline{u})\cdot\overline{b}=(\overline{a}-t\overline{b})\cdot\overline{b}=\overline{a}\cdot\overline{b}-t\overline{b}\cdot\overline{b}\\&=4\cdot2-5\cdot1+3\cdot(-2)-t(2\cdot2+1\cdot1-2\cdot(-2))\\&=-3-9t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-3-9t&=0\\-9t&=3 \quad \| :(-9)\\t&=-\frac{1}{3}\end{aligned}$$

$$\overline{u}=-\frac{1}{3}\overline{b}=-\frac{1}{3}(2\overline{i}+\overline{j}-2\overline{k})=-\frac{2}{3}\overline{i}-\frac{1}{3}\overline{j}+\frac{2}{3}\overline{k}$$

$$\begin{aligned}\overline{v}&=\overline{a}-\overline{u}=4\overline{i}-5\overline{j}+3k-(-\frac{2}{3}\overline{i}-\frac{1}{3}\overline{j}+\frac{2}{3}\overline{k})\\&=4\frac{2}{3}\overline{i}-4\frac{2}{3}\overline{j}+2\frac{1}{3}\overline{k}\end{aligned}$$

20. Taso leikkaa *xy*-tason pitkin suoraa $-2\overline{i}+\overline{j}+t(\overline{i}+2\overline{j})$. Suoran yhtälöstä voidaan päätellä, että piste (−2, 1, 0) on suoralla ja suoran suuntavektori on $\overline{s}=\overline{i}+2\overline{j}$.

Tason normaalivektori on $\overline{n}=a\overline{i}+b\overline{j}+c\overline{k}$.

Tason normaalivektori on kohtisuorassa vektoria $\overline{s}$ vastaan, joten $\overline{n}\cdot\overline{s}=0$.

Pisteet (−2, 1, 0) ja (−7, −3, 2) sijaitsevat molemmat tasossa. Näiden pisteiden välinen vektori $\overline{a}$ on myös kohtisuorassa vektoria $\overline{n}$ vastaan ja $\overline{a}\cdot\overline{n}=0$.

$$\overline{a}=(-7-(-2))\overline{i}+(-3-1)\overline{j}+(2-0)\overline{k}=-5\overline{i}-4\overline{j}+2\overline{k}$$

Saadaan yhtälöpari.

$$\begin{cases}\overline{n}\cdot\overline{s}=a\cdot1+b\cdot2+c\cdot0=0\\ \overline{n}\cdot\overline{a}=a\cdot(-5)+b\cdot(-4)+c\cdot2=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}a=-2b\\ b=b\\ c=-3b\end{cases}$$

Eräs yhtälöryhmän toteuttava ratkaisu on $a=-2$, $b=1$ ja $c=-3$, jolloin $\overline{n}=-2\overline{i}+\overline{j}-3\overline{k}$.

Tason yhtälö on $-2x+y-3z+d=0$. Koska piste (−7, −3, 2) on tasossa, piste toteuttaa tason yhtälön.

$$\begin{aligned}-2\cdot(-7)-3-3\cdot(2)+d&=0\\ 14-3-6+d&=0\\ d&=-5\end{aligned}$$

Tason yhtälö on $-2x+y-3z-5=0$.