KERTAUS

KERTAUSTEHTÄVIÄ

K1. $P(-1) = 3\cdot(-1) + 2\cdot(-1)^2 + 3\cdot(-1)^3 = -3 + 2 - 3 = -4$

K2. **a)** $x^2 - 3x + 7x - 5x^2 = -4x^2 + 4x$
b) $5x^2 - 3 - (1 - x^2) = 5x^2 - 3 - 1 + x^2 = 6x^2 - 4$
c) $(x + 3)(x^2 - 4) = x^3 - 4x + 3x^2 - 12 = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$

Vastaus: **a)** $-4x^2 + 4x$ **b)** $6x^2 - 4$ **c)** $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$

K3. Sievennetään polynomi:

$$P(x) = 2(3x + 2x^2 - 3) - 3x(x^2 - 2x) + 5 - x$$
$$= \underline{6x} + \underline{\underline{4x^2}} - 6 - 3x^3 + \underline{\underline{6x^2}} + 5 - \underline{x} = -3x^3 + 10x^2 + 5x - 1$$

a) asteluku on 3

b) toisen asteen termin kerroin on 10

c) vakiotermi on -1

d) $P(2) = -3\cdot2^3 + 10\cdot2^2 + 5\cdot2 - 1 = -3\cdot8 + 10\cdot4 + 5\cdot2 - 1$
$= -24 + 40 + 10 - 1 = 25$

Vastaus: **a)** 3 **b)** 10 **c)** -1 **d)** 25

K4. **a)** $(y + 4)^2 + (y + 4)\cdot 2 = (y + 4)(y + 4) + 2y + 8$
$= y^2 + 4y + 4y + 16 + 2y + 8 = y^2 + 10y + 24$

b) $(k + 3)(k - 3) - (k - 3)^2 = k^2 - 3k + 3k - 9 - (k - 3)(k - 3)$
$= k^2 - 9 - (k^2 - 3k - 3k + 9) = k^2 - 9 - (k^2 - 6k + 9)$
$= k^2 - 9 - k^2 + 6k - 9 = 6k - 18$

Vastaus: **a)** $y^2 + 10y + 24$ **b)** $6k - 18$

K5. **a)** $P(x) + Q(x) = 2x + 3x^2 + 3x = 3x^2 + 5x$

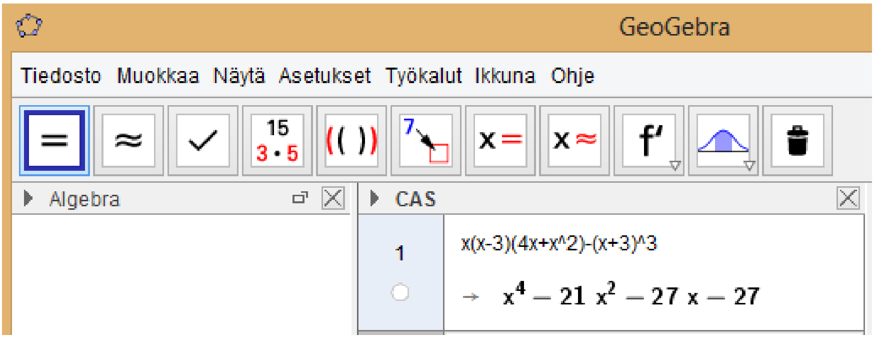
b) $P(x) - Q(x) = 2x - (3x^2 + 3x) = 2x - 3x^2 - 3x = -3x^2 - x$

c) $P(x) \cdot Q(x) = 2x \cdot (3x^2 + 3x) = 2x \cdot 3x^2 + 2x \cdot 3x = 6x^3 + 6x^2$

d) $\dfrac{Q(x)}{P(x)} = \dfrac{3x^2 + 3x}{2x} = \dfrac{3x^2}{2x} + \dfrac{3x}{2x} = \dfrac{3x}{2} + \dfrac{3}{2}$

Vastaus: **a)** $3x^2 + 5x$ **b)** $-3x^2 - x$ **c)** $6x^3 + 6x^2$ **d)** $\dfrac{3}{2}x + \dfrac{3}{2}$

K6. Sievennykseen voi käyttää esimerkiksi symbolista laskinta tai GeoGebraa.



Vastaus: $x^4 - 21x^2 - 27x - 27$

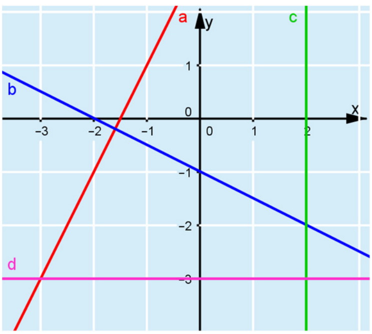
K7. Suoran $y = 2x + 3$ vakiotermi on 3, joten piste (0, 3) on suoralla. Kulmakerroin on 2, joten lisää pisteitä saadaan kulkemalla aina yksi yksikkö oikealle ja kaksi yksikköä ylös.

Suoran $y = -\frac{1}{2}x - 1$ vakiotermi on –1, joten piste (0, –1) on suoralla.

Kulmakerroin on $-\frac{1}{2}$, joten lisää pisteitä saadaan kulkemalla aina yksi yksikkö oikealle ja puoli yksikköä alas.

Suoralla $x = 2$ ovat ne pisteet, joiden x-koordinaatti on 2. Tällaisia pisteitä ovat esimerkiksi (2, 0), (2, 1) ja (2,2). Suora on y-akselin suuntainen.

Suoralla $y = –3$ ovat ne pisteet, joiden y-koordinaatti on –3. Tällaisia pisteitä ovat esimerkiksi (0, –3), (1, –3) ja (2, –3). Suora on x-akselin suuntainen.



K8. **a)** Funktion f kuvaaja leikkaa y-akselin pisteessä (0, –2), eli vakiotermi $b = –2$. Kuvaaja nousee kaksi yksikköä, kun mennään yksi yksikkö oikealle, eli kulmakerroin $k = 2$. Siis $f(x) = 2x – 2$.
Funktion f nollakohta on kuvaajan perusteella $x = 1$.

b) Funktion g kuvaaja leikkaa y-akselin pisteessä (0, 1), eli vakiotermi $b = 1$. Kuvaaja se laskee yhden yksikön, kun mennään kolme yksikköä oikealle, eli $k=-\frac{1}{3}$. Siis $g(x)=-\frac{1}{3}x+1$.
Funktion g nollakohta on kuvaajan perusteella $x = 3$.

c) Funktio h saa joka kohdassa arvon –2, joten se on vakiofunktio $h(x) = –2$. Funktio h ei leikkaa x-akselia, eli sillä ei ole nollakohtaa.

Vastaus: **a)** $f(x) = 2x – 2$, $x = 1$ **b)** $g(x)=-\frac{1}{3}x+1$, $x = 3$
c) $h(x) = –2$, ei nollakohtaa.

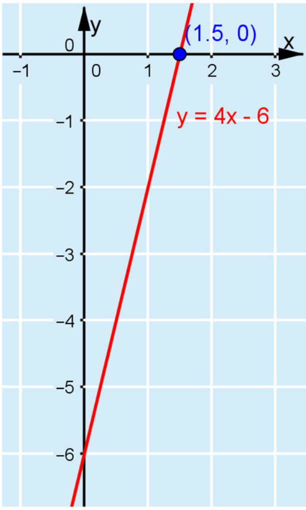
K9. **a)** Vakiotermin on oltava 4 ja kulmakertoimen negatiinen luku. Esimerkiksi $y = –2x + 4$ käy.

b) Kulmakertoimen on oltava –3. Esimerkiksi $y = –3x + 1$ käy.

c) Suoran on oltava y-akselin suuntainen eli muotoa $x = a$. Esimerkiksi suora $x = 1$ käy.

Vastaus: **a)** $y = –2x + 4$ **b)** $y = –3x + 1$ **c)** $x = 1$

K10. Suoran ja y-akselin leikkauspiste (0, –6) nähdään vakiotermistä –6. Kulmakerroin on 4, joten suora nousee neljä yksikköä, kun mennään yksi yksikkö oikealle.



Piirtämällä suora nähdään, että suora leikkaa x-akselin, kun $x \approx 1,5$. Tarkistetaan vielä laskemalla, että y-koordinaatti on nolla, kun $x = 1,5$:
$y = –4 \cdot 1,5 + 6 = 0$.

Vastaus: suoran ja x-akselin leikkauspiste on (1,5; 0).

K11. **a)** $2x + 3 = -5$

$2x = -5 - 3$

$2x = -8 \quad || : 2$

$x = -4$

b) $x - 3 = 4 - 2x$

$x + 2x = 4 + 3$

$3x = 7 \qquad || : 3$

$x = \frac{7}{3}$

c) $9x = 4x$

$9x - 4x = 0$

$5x = 0 \qquad || : 5$

$x = 0$

Vastaus: **a)** $x = -4$ **b)** $x = \frac{7}{3}$ **c)** $x = 0$

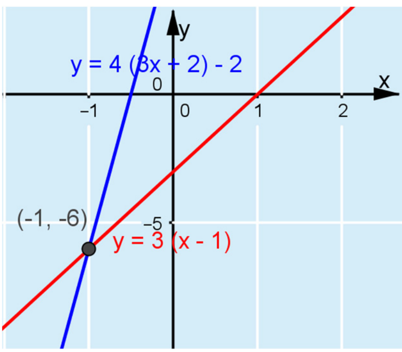
K12. **a)** $3(x - 1) = 4(3x + 2) - 2$

$3x - 3 = 12x + 8 - 2$

$3x - 12x = 6 + 3$

$-9x = 9 \qquad ||:(-9)$

$x = -1$

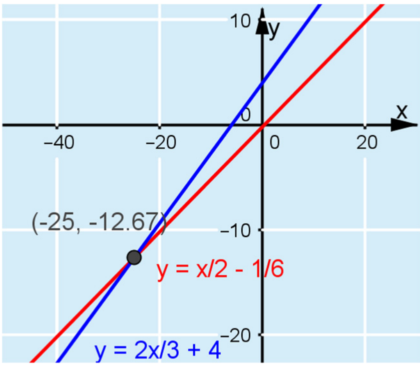


b)

$$\overset{3)}{\frac{x}{2}}-\frac{1}{6}=\overset{2)}{\frac{2x}{3}}+4$$

$$\frac{3x}{6}-\frac{1}{6}=\frac{4x}{6}+4 \quad \|\cdot 6$$

$$3x-1=4x+24$$
$$3x-4x=24+1$$
$$-x=25 \ \|:(-1)$$
$$x=-25$$



Vastaus: **a)** $x=-1$ **b)** $x=-25$

K13. $2(2x-3)-3(3x-2)-5=3x+3$

$$4x-6-9x+6-5=3x+3$$
$$-5x-5=3x+3$$
$$-5x-3x=3+5$$
$$-8x=8 \ \|:(-8)$$
$$x=-1$$

Tutkitaan sijoittamalla, toteuttaako $x=-1$ yhtälön $x^2+x=-2$:

$(-1)^2+(-1)=0\neq-2$
$x=-1$ ei toteuta yhtälöä $x^2+x=-2$.

Vastaus: $x=-1$. Ei toteuta.

K14. Merkitään kuukausipalkkaa kirjaimella x. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se.

$$^{15)}\frac{x}{4}+{}^{12)}\frac{x}{5}+{}^{10)}\frac{x}{6}+960=x$$

$$\frac{15x}{60}+\frac{12x}{60}+\frac{10x}{60}+960=x \quad \| \cdot 60$$

$$15x+12x+10x+57600=60x$$

$$37x-60x=-57600$$

$$-23x=-57600 \quad \| :(-23)$$

$$x=2504{,}34...$$

Vastaus: 2 500 €.

K15. Merkitään pienempien kukkien määrää kirjaimella p. Pienempien kukkien yhteishinta on tällöin $2{,}5p$.
Isompien kukkien määrä $i = 13 - p$ ja yhteishinta $7(13 - p)$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se.

$$2{,}5p + 7(13 - p) = 55$$

$$2{,}5p + 91 - 7p = 55$$

$$-4{,}5p = 55 - 91$$

$$-4{,}5p = -36 \quad \| :(-4{,}5)$$

$$p = 8$$

Isompien kukkien määrä oli 13 – 8 = 5.

Vastaus: 8 pientä ja 5 isoa kukkaa

K16. **a)** $\begin{cases} y = 2x + 5 \\ 3y + x = 1 \end{cases}$

Sijoitetaan ylemmästä yhtälöstä saatava muuttujan y lauseke alempaan:

$$\begin{aligned} 3(2x + 5) + x &= 1 \\ 6x + 15 + x &= 1 \\ 7x &= 1 - 15 \\ 7x &= -14 \qquad \|:7 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

Sijoitetaan $x = -2$ yhtälöön $y = 2x + 5$:

$y = 2\cdot(-2) + 5 = -4 + 5 = 1$

Tarkistus:

$2\cdot(-2) + 5 = 1$
$3\cdot 1 + (-2) = 1$

Yhtälöparin ratkaisu on siis $x = -2$, $y = 1$.

b) $\begin{cases} 2x+2y=1 \\ x+2y=0 \end{cases}$

$\begin{cases} 2x+2y=1 \\ x=-2y \end{cases}$

Sijoittamalla saadaan

$2\cdot(-2y)+2y=1$

$-4y+2y=1$

$-2y=1 \quad \|:(-2)$

$y=-\frac{1}{2}=-0{,}5$

Sijoitetaan saatu muuttujan y arvo yhtälöön $x=-2y$:

$x=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$

$x=1$

Laskujen perusteella leikkauspiste on $(1,\ -\frac{1}{2})$.

Tarkistetaan piirtämällä. Ratkaistaan ensin molemmista yhtälöistä y.

$2x+2y=1$

$2y=1-2x \qquad \|:2$

$y=\frac{1}{2}-x$

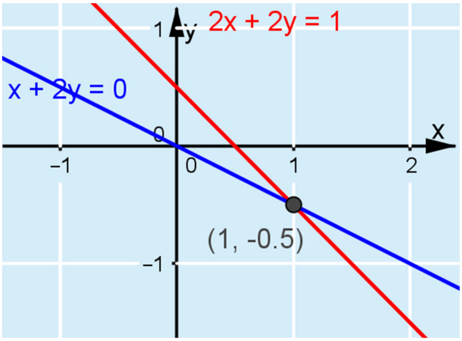
$y=-x+\frac{1}{2}$

Vakiotermi on $\frac{1}{2}$, joten suora leikkaa y-akselin pisteessä $(0,\ \frac{1}{2})$.

Kulmakerroin on -1, joten lisää pisteitä saadaan kulkemalla aina yksi yksikkö oikealle ja yksi yksikkö alas.

$$x + 2y = 0$$
$$2y = -x \parallel : 2$$
$$y = -\frac{1}{2}x$$

Vakiotermi on 0, joten suora leikkaa y-akselin pisteessä (0, 0).
Kulmakerroin on $-\frac{1}{2}$, joten lisää pisteitä saadaan kulkemalla aina yksi yksikkö oikealle ja puoli yksikköä alas.



Vastaus: **a)** $x = -2$, $y = 1$ **b)** $(1, -\frac{1}{2})$

K17. Suorien leikkauspiste saadaan yhtälöparilla

$$\begin{cases} y = -x + 3 \\ y = 3x + 1 \end{cases}$$

Sijoittamalla saadaan

$$\begin{aligned} -x + 3 &= 3x + 1 \\ -x - 3x &= 1 - 3 \\ -4x &= -2 \quad \|:(-4) \\ x &= \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Sijoitetaan $x = \frac{1}{2}$ yhtälöön $y = -x + 3$:

$$y = -\frac{1}{2} + 3 = -\frac{1}{2} + \frac{6}{2} = \frac{5}{2}$$

Vastaus: Suorien leikkauspiste on $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$

K18. Merkitään kivennäisveden hintaa muuttujalla *v* ja proteiinipatukan hintaa muuttujalla *p*.

Jussin ostoksista saadaan yhtälö $3v + 5p = 10{,}95$ ja Katariinan ostoksista yhtälö $v + 3p = 4{,}85$.

Saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} 3v + 5p = 10{,}95 \\ v + 3p = 4{,}85 \quad \| \cdot (-3) \end{cases}$$

$$+\begin{cases} 3v + 5p = 10{,}95 \\ -3v - 9p = 14{,}55 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 3v - 3v + 5p - 9p &= 10{,}95 - 14{,}55 \\ -4p &= -3{,}6 \qquad \| : (-4) \\ p &= 0{,}9 \end{aligned}$$

Sijoitetaan p = 0,9 yhtälöön $v + 3p = 4{,}85$:

$$\begin{aligned} v + 3 \cdot 0{,}9 &= 4{,}85 \\ v + 2{,}7 &= 4{,}85 \\ v &= 4{,}85 - 2{,}7 \\ v &= 2{,}15 \end{aligned}$$

Vastaus: kivennäisveden kappalehinta on 2,15 € ja proteiinipatukan 0,90€.

K19. Helikopterin nopeus Lahteen päin oli $\dfrac{99\text{ km}}{\frac{1}{2}\text{ h}} = 198\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$ ja Helsinkiin päin $\dfrac{99\text{ km}}{\frac{33}{60}\text{ h}} = 180\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$. Toisaalta helikopterin nopeus maan suhteen on helikopterin nopeuden h ja tuulen nopeuden w summa tai erotus riippuen tuulen suunnasta. Saadaan yhtälöpari

$$
\begin{aligned}
&\begin{cases} h + w = 198 \\ h - w = 180 \end{cases} \quad + \\
&h + h + w - w = 198 + 180 \\
&2h = 378 \quad \| :2 \\
&h = 189
\end{aligned}
$$

Helikopterin nopeus ilman tuulta oli siis $189\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$, joten tuulen nopeus oli $198\dfrac{\text{km}}{\text{h}} - 189\dfrac{\text{km}}{\text{h}} = 9\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$

Vastaus: $9\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$

K20. **a)** $f(x) = x(2 - x) = 2x - x^2$
Funktio on toisen asteen polynomifunktio. Koska toisen asteen termin kerroin on negatiivinen, kuvaajaparaabeli aukeaa alaspäin.

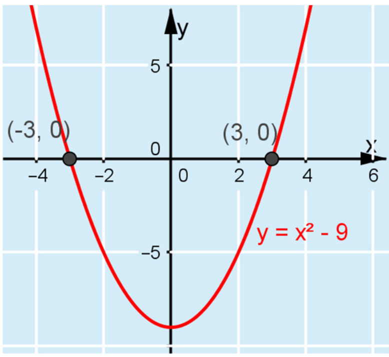
b) $f(x) = x^2 - x(x - 1) = x^2 - x^2 + x = x$
Funktio ei ole toisen asteen polynomifunktio.

c) $f(x) = (x - 2)(x - 1) = x^2 - x - 2x + 2 = x^2 - 3x + 2$
Funktio on toisen asteen polynomifunktio. Koska toisen asteen termin kerroin on positiivinen, kuvaajaparaabeli aukeaa ylöspäin.

d) $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x} = \dfrac{x^2}{x} - \dfrac{x}{x} = x - 1.$
Funktio ei ole toisen asteen polynomifunktio.

Vastaus: **a)** On. Alaspäin. **b)** Ei ole. **c)** On. Ylöspäin. **d)** Ei ole.

K21. Piirretään paraabeli $y = x^2 - 9$.

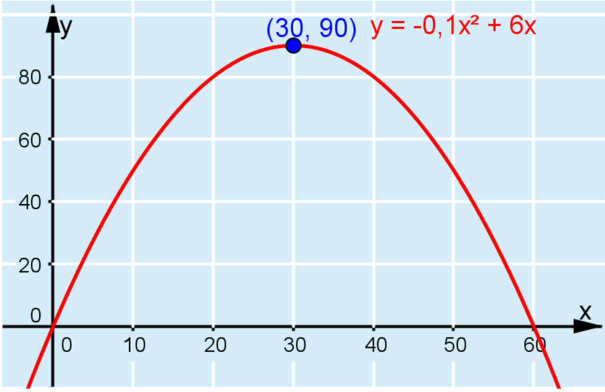


Kuvaajan perusteella funktion nollakohdat ovat –3 ja 3. Tarkistetaan laskemalla:

$f(-3) = (-3)^2 - 9 = 9 - 9 = 0$
$f(3) = 3^2 - 9 = 9 - 9 = 0$

Vastaus: Funktion nollakohdat ovat $x = -3$ ja $x = 3$.

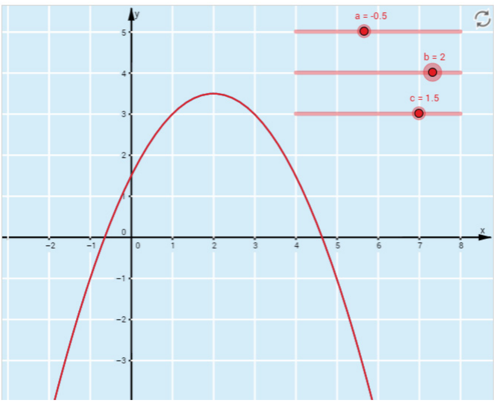
K22. Piirretään paraabeli $y = –0{,}1x^2 + 6x$.



Kuvasta nähdään, että jäätelön myynti on suurimmillaan, kun lämpötila on 30 °C. Tällöin jäätelöä myydään 90 litraa päivässä.

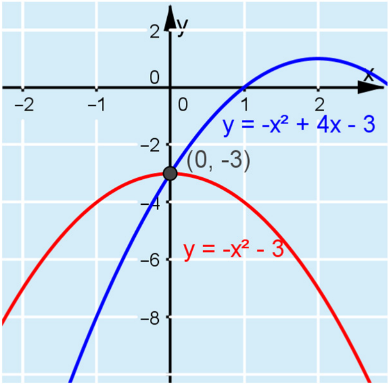
Vastaus: 30 °C, 90 litraa päivässä

K23. Appletin avulla kokeilemalla huomataan, että sininen ja punainen paraabeli ovat päällekkäin, kun punaisen paraabelin yhtälö on $y = –0{,}5x^2 + 2x + 1{,}5$.



Sinisen paraabelin yhtälö on siten myös $y = –0{,}5x^2 + 2x + 1{,}5$.

K24. **a)** Piirretään paraabelit sopivalla ohjelmalla ja määritetään niiden yhteiset pisteet.

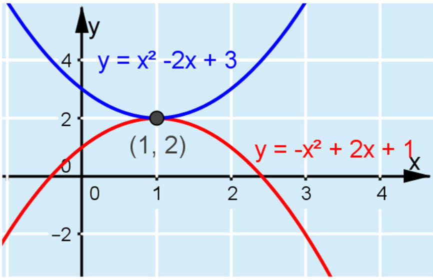


Vain yksi yhteinen piste löytyi, (0, –3). Tarkistetaan, onko piste molemmilla paraabeleilla, sijoittamalla $x = 0$ paraabelien yhtälöihin.

$y = -0^2 + 4 \cdot 0 - 3 = -3$
$y = -0^2 - 3 = -3$

Piste (0, –3) on molemmilla paraabeleilla.

b) Piirretään paraabelit sopivalla ohjelmalla ja määritetään niiden yhteiset pisteet.



Vain yksi yhteinen piste löytyi, (1, 2). Tarkistetaan, onko piste molemmilla paraabeleilla, sijoittamalla $x = 1$ paraabelien yhtälöihin.

$y = -1^2 + 2 \cdot 1 + 1 = 2$
$y = 1^2 - 2 \cdot 1 + 3 = 2$

Piste (1, 2) on molemmilla paraabeleilla.

Vastaus: **a)** (0, –3) **b)** (1, 2)

K25. **a)** $-2x^2 - x + 3 = 0$
Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla ($a = -2$, $b = -1$, $c = 3$)

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 3}}{2 \cdot (-2)}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{-4}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{-4}$$

$$x = \frac{1 \pm 5}{-4}$$

$$x = \frac{1+5}{-4} = \frac{6}{-4} = -\frac{3}{2} \text{ tai } x = \frac{1-5}{-4} = \frac{-4}{-4} = 1$$

b) $2x - 1 - x^2 = 0$

Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla ($a = -1$, $b = 2$, $c = -1$)

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1)}}{2 \cdot (-1)}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{-2}$$

$$x = \frac{-2 \pm 0}{-2}$$

$$x = \frac{-2}{-2}$$

$$x = -1$$

c) $x(3x + 1) = 5$

$3x^2 + x = 5$

$3x^2 + x - 5 = 0$

Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla ($a = 3$, $b = 1$, $c = -5$)

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-5)}}{2 \cdot 3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 60}}{6} = \frac{-1 \pm \sqrt{61}}{6}$$

$$x = \frac{-1 + \sqrt{61}}{6} \quad \text{tai} \quad x = \frac{-1 - \sqrt{61}}{6}$$

Vastaus: **a)** $x = -\dfrac{3}{2}$ tai $x = 1$ **b)** $x = -1$

c) $x = \dfrac{-1 + \sqrt{61}}{6}$ tai $x = \dfrac{-1 - \sqrt{61}}{6}$

K26. **a)** $x^2 + 4 = 0$

$x^2 = -4 < 0$

Yhtälöllä ei ole ratkaisua, koska minkään reaaliluvun neliö ei ole negatiivinen.

b) $4x^2 - 9 = 0$

$$4x^2 = 9 \quad \|:4$$

$$x^2 = \frac{9}{4}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{9}{4}}$$

$$x = \pm\frac{3}{2}$$

c)

$$^{2)}\frac{x}{2} + \frac{3x^2}{4} = 0$$

$$\frac{2x}{4} + \frac{3x^2}{4} = 0 \quad \|\cdot 4$$

$$2x + 3x^2 = 0$$

Otetaan muuttaja x yhteiseksi tekijäksi.

$x(2 + 3x) = 0$

Tulon nollasäännöllä

$x = 0$ tai $2 + 3x = 0$

$$3x = -2 \quad \|:3$$

$$x = -\frac{2}{3}$$

Yhtälö $2x + 3x^2 = 0$ voidaan ratkaista myös ratkaisukaavalla ($a = 3$, $b = 2$, $c = 0$).

Vastaus: **a)** Ei ratkaisua **b)** $x = \pm\frac{3}{2}$ **c)** $x = -\frac{2}{3}$ tai $x = 0$

K27. Olkoon kysytty luku x. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se.

$$x^2 = \frac{1}{4}x \quad \|\cdot 4$$
$$4x^2 = x$$
$$4x^2 - x = 0$$

Otetaan muuttuja x yhteiseksi tekijäksi.
$x(4x - 1) = 0$

Tulon nollasäännön mukaan
$x = 0$ tai $4x - 1 = 0$
$4x = 1 \quad \|:4$
$x = \frac{1}{4}$

Yhtälö $4x^2 - x = 0$ voidaan ratkaista myös ratkaisukaavalla
($a = 4$, $b = -1$, $c = 0$).

Vastaus: 0 tai $\frac{1}{4}$

K28. Kolmion pinta-ala on kannan ja korkeuden tulo jaettuna kahdella. Kateettien välinen kulma on suora, joten ne ovat kanta ja korkeus. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se.

$$\frac{(x-2)(3x-1)}{2} = 21 \quad \| \cdot 2$$

$$(x-2)(3x-1) = 42$$

$$3x^2 - x - 6x + 2 = 42$$

$$3x^2 - 7x - 40 = 0$$

Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla ($a = 3$, $b = -7$, $c = -40$)

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-40)}}{2 \cdot 3} = \frac{7 \pm \sqrt{529}}{6} = \frac{7 \pm 23}{6}$$

$$x = \frac{7+23}{6} = \frac{30}{6} = 5 \text{ tai } x = \frac{7-23}{6} = \frac{-16}{6} = -\frac{8}{3}$$

Pituus ei voi olla negatiivinen, joten $x = -\frac{8}{3}$ voidaan hylätä.

Kateettien pituudet ovat $x - 2 = 5 - 2 = 3$ (m) ja $3x - 1 = 3 \cdot 5 - 1 = 14$ (m).

Vastaus: 3 m ja 14 m

K29. **a)** $\frac{1}{2} \cdot 75 \cdot 3{,}2^2 = 384 \text{ (J)}$

b)
$$
\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2}mv^2 \quad \| \cdot 2 \\
2E &= mv^2 \quad \| : m \\
\frac{2E}{m} &= v^2 \\
\pm\sqrt{\frac{2E}{m}} &= v \\
\pm\sqrt{\frac{2 \cdot 9600}{4{,}1}} &= v \\
\pm 68{,}4319\ldots &= v
\end{aligned}
$$

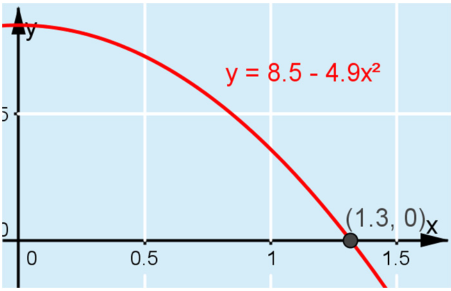
Nopeuden suunnalla ei ole väliä, joten negatiivista nopeutta ei tarvitse antaa vastauksessa.

Vastaus: **a)** 380 J **b)** 68 m/s

K30. Televisio osuu maahan, kun $y = 0$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se.

$$
\begin{aligned}
0 &= 8{,}5 - 4{,}9x^2 \\
4{,}9x^2 &= 8{,}5 \qquad \| : 4{,}9 \\
x^2 &= 1{,}7346... \\
x &= \sqrt{1{,}7346...} \\
x &= 1{,}3170...
\end{aligned}
$$

Televisio osuu maahan 1,3 metrin etäisyydellä seinästä.
Tarkistetaan piirtämällä.



Piirtäminen antaa saman tuloksen.

Vastaus: 1,3 metrin päässä seinästä

K31. Taulukoidaan suureiden arvoja.

Suure A	Suure B
10	4
x	14

a) Suureet ovat suoraan verrannolliset, joten saadaan yhtälö

$$\frac{10}{x} = \frac{4}{14}.$$

Kerrotaan ristiin:

$4x = 10 \cdot 14$

$4x = 140 \quad \|:4$

$$x = \frac{140}{4} = 35$$

b) Suureet ovat kääntäen verrannolliset, joten verrantoyhtälö on

$$\frac{x}{10} = \frac{14}{4} \quad \| \cdot 10$$

$$x = \frac{4 \cdot 10}{14} = \frac{40^{(2}}{14} = \frac{20}{7}$$

Vastaus: **a)** $x = 35$ **b)** $x = \frac{20}{7}$

K32. Lasketaan, kuinka paljon yksi kilogramma pähkinöitä maksaa. Taulukoidaan suureiden arvoja.

massa (g)	hinta (€)
240	3,90
1000	x

Pähkinöiden määrän kaksinkertaistuessa myös hinta kaksinkertaistuu, joten pähkinöiden hinta on suoraan verrannollinen massaan. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se.

$$\frac{240}{1000}=\frac{3{,}90}{x}$$

Kerrotaan ristiin:

$$240x = 3{,}90\cdot 1000 \qquad \|:240$$

$$x=\frac{3900}{240}=16{,}25$$

Vastaus: Pähkinöiden kilohinta on 16,25 €.

K33. Taulukoidaan suureiden arvoja.

aika (h)	keskinopeus (km/h)
2,5	80
x	100

Ajan kaksinkertaistuessa keskinopeus puolittuu, joten aika ja keskinopeus ovat kääntäen verrannolliset. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se.

$$\frac{x}{2{,}5}=\frac{80}{100} \qquad \|\cdot 2{,}5$$

$$x=\frac{80}{100}\cdot 2{,}5$$

$$x=2$$

Vastaus: Matka kestäisi 2 tuntia.

K34. Taulukoidaan suureiden arvoja.

matka (m)	aika^2 (s^2)
4,9	1^2
55	x^2

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se.

$$\frac{4,9}{55}=\frac{1^2}{x^2}$$

$$4,9x^2 = 1\cdot 55 \quad \|:4,9$$

$$x^2=\frac{55}{4,9}$$

$$x=\pm\sqrt{\frac{55}{4,9}}$$

$$x\approx \pm 3,3503$$

Negatiivinen ratkaisu voidaan hylätä, koska kamera putosi vasta hetkellä $x = 0$.

Vastaus: Putoaminen kestää noin 3,4 sekuntia.

K35. Taulukoidaan suureiden arvoja.

hinta (€)	myynti (kpl)
25	3400
1,15 · 25	x

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se.

$$\frac{{}^{1}\cancel{25}}{1,15\cdot {}^{1}\cancel{25}}=\frac{x}{3400}$$

$$\frac{1}{1,15}=\frac{x}{3400}$$

$$1,15\cdot x = 1\cdot 3\,400 \| : 1,15$$

$$x = 2956,5\ldots$$

Paitoja myydään noin 3 000 kappaletta.

Vastaus: 3 000 kappaletta

K36. **a)** 100 % + 13 % = 113 % = 1,13
Tuotteen lopullinen hinta on $1{,}13a$.

b) 100 % – 41 % = 59 % = 0,59
Tuotteen lopullinen hinta on $0{,}59a$.

Vastaus: **a)** $1{,}13a$ **b)** $0{,}59a$

K37. 100 % – 17 % = 83 % = 0,83.

Merkitään puhelimen alkuperäistä hintaa muuttujalla x. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se.

$$0{,}83x = 543 \quad ||:0{,}83$$
$$x = \frac{543}{0{,}83}$$
$$x \approx 654{,}22\ (€)$$

Alennus oli 654,22 € – 543 € = 111,22 €.

Vastaus: Puhelimen alkuperäinen hinta oli 654,22 € ja alennus oli 111,22 €.

K38. Merkitään miesopiskelijoiden määrää muuttujalla x.
Koska 100 % + 25 % = 125 % = 1,25, niin naisopiskelijoita on $1{,}25x$.
Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se.

$$x + 1{,}25x = 207$$
$$2{,}25x = 207 \quad ||:2{,}25$$
$$x = 92$$

Naisopiskelijoiden määrä on $1{,}25 \cdot 92 = 115$.

Vastaus: Naisopiskelijoita hyväksytään 115 ja miesopiskelijoita 92.

K39. Merkitään kenkien hintaa vakiolla a ja prosenttikerrointa kirjaimella x. Koska 100 % + 23 % = 123 % =1,23, niin kenkien hinta on korotuksen jälkeen 1,23a.
Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se.

$$\begin{aligned} 1{,}23ax &= a \quad \|:a \\ 1{,}23x &= 1 \quad \|:1{,}23 \\ x &= \frac{1}{1{,}23} \approx 0{,}813 \end{aligned}$$

100 % – 81,3 % = 18,7 % ≈ 19 %

Vastaus: 19 %

K40. Merkitään lisättävän hapon määrää grammoina muuttujalla x. Varsinaista happoa siitä on 40 % eli 0,4x.

Varsinaista happoa on aluksi 400 g · 0,25 = 100 g ja lopuksi 100 + 0,4x grammaa.

Liuoksen määrä aluksi on 400 g ja lopuksi 400 + x grammaa.

Liuoksen vahvuuden on oltava lopuksi 30 %. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se.

$$\begin{aligned} 0{,}3(400 + x) &= 100 + 0{,}4x \\ 120 + 0{,}3x &= 100 + 0{,}4x \\ 0{,}3x - 0{,}4x &= 100 - 120 \\ -0{,}1x &= -20 \quad \| \cdot (-10) \\ x &= 200 \end{aligned}$$

Happoa on siis lisättävä 200 g.

Vastaus: 200 g

ILMAN TEKNISIÄ APUVÄLINEITÄ

1. **a)** -4
b) $x = 0$ tai $x = 2$
c) $x = -1$ ja $x = 3$

Vastaus: **a)** -4 **b)** $x = 0$ tai $x = 2$ **c)** $x = -1$ ja $x = 3$

2. **a)** 74,2 cm (1 desimaali)
b) 1 100 m^2 (2 merkitsevää numeroa)

Vastaus: **a)** 74,2 cm **b)** 1 100 m^2

3. $5x^2 + 4x + 6 - 2x(3x + 2)$
$= 5x^2 + 4x + 6 - 6x^2 - 4x$
$= -x^2 + 6$

Kun $x = 3$, on lausekkeen arvo
$-3^2 + 6 = -9 + 6 = -3$.

Vastaus: $-x^2 + 6$, arvo -3

4. **a)**

$$\begin{aligned} 6x + 9 &= 3 - 6x \\ 6x + 6x &= 3 - 9 \\ 12x &= -6 \qquad \| : 12 \\ x &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} x^2 + 3 &= 19 \\ x^2 &= 19 - 3 \\ x^2 &= 16 \\ x &= \pm\sqrt{16} \\ x &= \pm 4 \end{aligned}$$

$x = 4$ tai $x = -4$

c) $x^2 + x - 6 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2}$$

$$x = \frac{-1 \pm 5}{2}$$

$$x = \frac{-1 + 5}{2} \text{ tai } x = \frac{-1 - 5}{2}$$

$$x = \frac{4}{2} \text{ tai } x = \frac{-6}{2}$$

$$x = 2 \text{ tai } x = -3$$

Vastaus: **a)** $x = -\dfrac{1}{2}$ **b)** $x = 4$ tai $x = -4$ **c)** $x = -3$ tai $x = 2$

5. **a)** Taulukoidaan suureiden arvoja.

Työntekijöitä	Aurattuja pihoja
5	25
4	x

Työntekijöiden ja aurattujen pihojen määrät ovat suoraan verrannolliset. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se.

$$\frac{5}{4} = \frac{25}{x}$$

$5x = 4 \cdot 25$

$5x = 100 \quad \| :5$

$x = 20$

Koska pihoja olisi ehditty aurata vain 20, olisi 25 – 20 = 5 pihaa jäänyt auraamatta.

b) Taulukoidaan suureiden arvoja.

Työntekijöitä	aika (min)
5	120
4	x

Työntekijöiden määrä ja pihojen auraamiseen kuluva aika ovat kääntäen verrannolliset, joten

$$\frac{5}{4} = \frac{x}{120}$$

$$4x = 5 \cdot 120 \quad \| : 4$$

$$x = 150$$

Pihojen auraaminen olisi kestänyt 150 min = 2 h 30 min.

Vastaus: **a)** 5 yhtiön **b)** 2 h 30 min

6. Sijoitetaan $a = 1$ ja $y = 4x$ yhtälöön $ax + y = -10$:

$$1 \cdot x + 4x = -10$$

$$5x = -10 \quad \| : 5$$

$$x = -2$$

Lasketaan y-koordinaatti.

$y = 4x$

$y = 4 \cdot (-2)$

$y = -8$

Kun $a = 1$, niin leikkauspiste on $(-2, -8)$.

Ratkaistaan yhtälöstä $ax + y = -10$ muuttuja y:

$$ax + y = -10 \quad \| -ax$$

$$y = -ax - 10$$

Suoran kulmakerroin on siis $-a$ ja vakiotermi -10. Suoran $y = 4x$ kulmakerroin taas on 4 ja vakiotermi 0. Suorat eivät leikkaa, jos niillä on sama kulmakerroin, eli jos

$$-a = 4 \quad \| \cdot (-1)$$

$$a = -4$$

Vastaus: leikkauspiste $(-2, -8)$, eivät leikkaa jos $a = -4$

7. Yhtälö A esittää ylöspäin aukeavaa paraabelia, joten kuvaaja 3 on ainoa mahdollisuus.
Yhtälö B esittää origon kautta kulkevaa suoraa, joten kuvaaja 1 on ainoa mahdollinen.
Yhtälö C esittää alaspäin aukeavaa paraabelia, joten kuvaaja 2 on ainoa mahdollinen.
Yhtälö D esittää nousevaa suoraa, joka kulkee pisteen (0, 2) kautta, joten kuvaaja 4 on ainoa mahdollinen.

Vastaus: A ja 3, B ja 1, C ja 2, D ja 4

APUVÄLINEET SALLITTU

8. Taulukoidaan valuuttojen arvoja.

euroa	kruunua
50	465
80	x

Eurojen ja kruunujen määrät ovat suoraan verrannolliset. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se.

$$\frac{50}{80} = \frac{465}{x}$$

$$50x = 80 \cdot 465 \quad \| : 50$$

$$x = 744$$

Vastaus: 744 kruunua

9. **a)** 1,0 · 0,8 = 0,8

Vastaus: 0,8 litraa

b) Kulutus kasvaa alkuperäiseen palatessa 2 dl = 0,2 l eli

$$\frac{0,2}{0,8} = 0,25 = 25\%$$

Vastaus: **a)** 8 dl päivässä **b)** 25 %

10. Merkitään lainan määrää muuttujalla x. Vuosikorko on tällöin $0{,}021x$. Saadaan yhtälö

$$\begin{aligned} 0{,}021x &= 210{,}37 && \Vert : 0{,}021 \\ x &= 10017{,}619... \end{aligned}$$

Vastaus: 10 017,62 €

11.

$$\begin{aligned} -0{,}019x + 48{,}45 &= -0{,}008x + 25{,}9 \\ -0{,}019x + 0{,}008x &= 25{,}9 - 48{,}45 \\ -0{,}011x &= -22{,}55 && \Vert : (-0{,}011) \\ x &= 2050 \end{aligned}$$

Vastaus: saavuttavat, vuonna 2050

12. Merkitään pienten pullojen määrää kirjaimella p ja isojen pullojen määrää kirjaimella i. Muodostetaan yhtälöpari.

$$\begin{cases} p + i = 216 \\ 0{,}75p + 1{,}5i = 198 \end{cases}$$

Ratkaistaan ylemmästä yhtälöstä $p = 216 - i$ ja sijoitetaan alempaan yhtälöön:

$$\begin{aligned} 0{,}75(216 - i) + 1{,}5i &= 198 \\ 162 - 0{,}75i + 1{,}5i &= 198 && \Vert - 162 \\ 0{,}75i &= 36 && \Vert : 0{,}75 \\ i &= 48 \end{aligned}$$

Vastaus: 48

13. Hyppääjä on meressä, kun $y = 0$. Saadaan yhtälö

$$-4,9x^2+11,2=0 \quad \| -11,2$$
$$-4,9x^2=-11,2 \quad \| :(-4,9)$$
$$x^2=2,285...$$
$$x=\pm\sqrt{2,285...}$$
$$x=\pm 1,511...$$

Negatiivinen etäisyys ei kelpaa.

Vastaus: 1,5 m

14. Taulukoidaan suureiden arvoja.

Korkeus³ (cm³)	Tilavuus (l)
$11,5^3$	0,33
1400^3	x

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se.

$$\frac{11,5^3}{1400^3}=\frac{0,33}{x}$$
$$11,5^3\cdot x=0,33\cdot 1400^3 \quad \| :11,5^3$$
$$x=\frac{0,33\cdot 1400^3}{11,5^3}$$
$$x=595\,394,09...$$

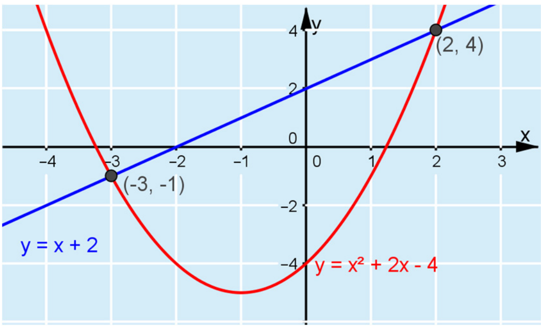
600 000 l = 600 m³

Vastaus: 600 m³

HARJOITUSKOE

H1. **a)** $x \approx -3$ ja $x \approx 1$
b) $(-1{,}6)$
c) 4,5
d) 4,5
e) $x \approx -2{,}4$ tai $x \approx 0{,}4$
f) $x = -1$

H2. Piirretään sopivalla ohjelmalla suora ja paraabeli, ja määritetään niiden leikkauspisteet.



Kuvan perusteella paraabelin ja suoran leikkauspisteet näyttäisivät olevan $(-3, -1)$ ja $(2, 4)$. Tarkistetaan laskemalla.

Piste $(-3, -1)$:
$(-3)^2 + 2\cdot(-3) - 4 = -1$, joten piste on paraabelilla.
$-3 + 2 = -1$, joten piste on suoralla.

Piste $(2, 4)$:
$2^2 + 2\cdot 2 - 4 = 4$, joten piste on paraabelilla.
$2 + 2 = 4$, joten piste on suoralla.

Tarkistuksen perusteella paraabelin ja suoran leikkauspisteet ovat $(-3, -1)$ ja $(2, 4)$.

Vastaus: $(-3, -1)$ ja $(2, 4)$

H3. **a)** $6x^2 - 3x^3 + 7 - 3x(4x + 1)$
$= 6x^2 - 3x^3 + 7 - 12x^2 - 3x$
$= -3x^3 - 6x^2 - 3x + 7$

b) $-3 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 7 = -5$

c)

$$\begin{aligned} 4(x + 3) &= 4x + 5(x + 3) \\ 4x + 12 &= 4x + 5x + 15 \\ 4x - 4x - 5x + 12 &= 15 - 12 \\ -5x &= 3 \qquad \| : (-5) \\ x &= -\frac{3}{5} \end{aligned}$$

d) $x^2 + 4x - 5 = 0$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{36}}{2}$$

$$x = \frac{-4 \pm 6}{2}$$

$$x = \frac{-4 + 6}{2} \text{ tai } x = \frac{-4 - 6}{2}$$

$x = 1$ tai $x = -5$

Vastaus: **a)** $-3x^3 - 6x^2 - 3x + 7$ **b)** -5 **c)** $x = -\frac{3}{5}$ **d)** $x = -5$ tai $x = 1$

H4. **a)** Taulukoidaan suureiden arvoja.

Työpäivän pituus (h)	Työpäivien määrä
8	54
x	48

Työpäivien määrä ja työpäivän pituus ovat kääntäen verrannolliset. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se.

$$\frac{8}{x} = \frac{48}{54}$$
$$48x = 8 \cdot 54$$
$$48x = 432 \quad \| : 48$$
$$x = 9$$

Työtä pitäisi tehdä 9 tuntia päivässä.

b) Merkitään juomien määriä kirjaimilla x ja y. Muodostetaan yhtälöpari ja ratkaistaan se.

$$\begin{cases} x + y = 5{,}5 & \| \cdot (-10) \\ 10x + 8y = 50 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rl} & \begin{cases} -10x - 10y = -55 \\ 10x + 8y = 50 \end{cases} \\ + & \\ \hline & -2y = -5 \quad \| : (-2) \\ & y = 2{,}5 \end{array}$$

Sijoitetaan $y = 2{,}5$ yhtälöön $x + y = 5{,}5$.

$$x + 2{,}5 = 5{,}5$$
$$x = 5{,}5 - 2{,}5$$
$$x = 3$$

Vastaus: Sokeripitoisempaa juomaa on 3 l ja vähäsokerisempaa juomaa on 2,5 l.

H5. **a)** Kiinteässä olomuodossa on 100 % – 43 % = 57 % = 0,57.
Toisaalta kiinteitä aineita jäi 40 g.
Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se.

$$0{,}57x = 40 \qquad \| : 0{,}57$$
$$x \approx 70$$

Ruutierän massa oli siis 70 g.

b) Taulukoidaan liuosten ja suolan määriä.

	10–prosenttinen liuos	25–prosenttinen liuos	19-prosenttinen liuos
liuoksen määrä (l)	3	x	$3 + x$
suolan määrä (g)	$3 \cdot 0{,}1 = 0{,}3$	$0{,}25x$	$0{,}19(3 + x)$

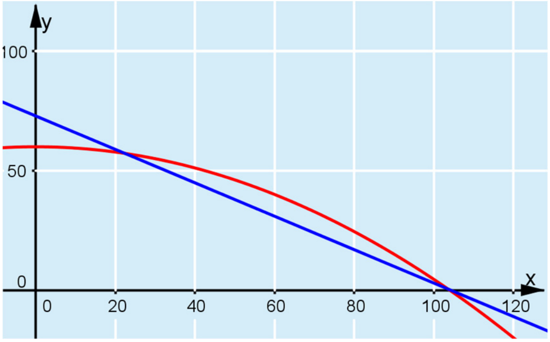
Muodostetaan suolan määrän avulla yhtälö ja ratkaistaan se.

$$\begin{aligned} 0{,}3 + 0{,}25x &= 0{,}19(3 + x) \\ 0{,}3 + 0{,}25x &= 0{,}57 + 0{,}19x \\ 0{,}25x - 0{,}19x &= 0{,}57 - 0{,}3 \\ 0{,}06x &= 0{,}27 \qquad \|:0{,}06 \\ x &= \frac{0{,}27}{0{,}06} = 4{,}5 \end{aligned}$$

25-prosenttista liuosta tarvitaan siis 4,5 litraa.

Vastaus: **a)** 70 g **b)** 4,5 litraa

H6. **a)**



b) Vaakasuora etäisyys n. 104 m ja korkeussuunnassa n. 60 m.

c) Sijoitetaan yhtälöön $y=-\frac{9{,}81}{2}\left(\frac{x}{v}\right)^2+60$ arvot $x=104$ ja $y=60$.

$$0=-\frac{9{,}81}{2}\left(\frac{104}{v}\right)^2+60$$

$$0=-4{,}905\left(\frac{104}{v}\right)^2+60$$

$$-4{,}905\left(\frac{104}{v}\right)^2=60 \quad \| :(-4{,}905)$$

$$\left(\frac{104}{v}\right)^2=12{,}232\ldots$$

$$\frac{104^2}{v^2}=12{,}232\ldots \quad \| \cdot v^2$$

$$104^2=12{,}232\ldots\cdot v^2 \quad \| :104^2$$

$$v^2=884{,}208\ldots$$

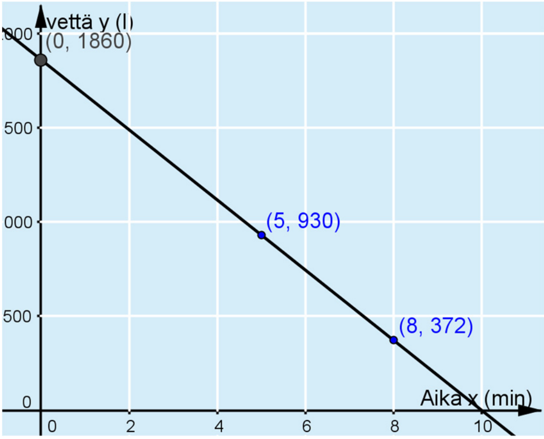
$$v=\pm\sqrt{884{,}208\ldots}$$

$$v\approx\pm30$$

30 m/s = 30 · 3,6 km/h = 108 km/h

Vastaus: **b)** Vaakasuora etäisyys n. 104 m ja korkeussuunnassa n. 60 m
c) 108 km/h

H7. **a)** Koska on kuvattava vesimäärää ajan funktiona, niin aika tulee x-akselille ja vesimäärä y-akselille.
Piirretään sopivalla ohjelmalla pisteiden (5, 930) ja (8, 372) kautta suora.



Kulmakerroin on $k = \dfrac{372-930}{8-5} = -186$ (l/min) ja vakio $b = 1860$ (l).
Kysytty lineaarinen funktio on siis $f(x) = -186x + 1860$, jossa $f(x)$ on tynnyrin vesimäärä on ajan x kuluttua.

b) $f(0) = -186 \cdot 0 + 1860 = 1860$, tämä tarkoittaa, että vesimäärä oli alussa 1860 litraa.

c)
$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ -186x + 1860 &= 0 \\ -186x &= -1860 \quad \| : (-186) \\ x &= 10 \end{aligned}$$
Tämä tarkoittaa, että tynnyri on tyhjä 10 minuutin kuluttua.

d) Kulmakerroin –186 tarkoittaa, että vesi vähenee nopeudella 186 l/min.

e) Piste (1,5; 1581) on suoralla, koska $f(1{,}5) = -186 \cdot 1{,}5 + 1860 = 1581$.

Vastaus: **a)** $f(x) = -186x + 1860$ **b)** $f(0) = 1860$, vesimäärä oli alussa 1860 litraa **c)** $x = 10$, tynnyri on tyhjä 10 minuutin kuluttua **d)** kulmakerroin –186 (l/min) on veden vähenemisnopeus **e)** on

H8. **a)** Valitaan esimerkiksi $s = 2$ ja $t = 6$.

$$\begin{cases} u+v=\dfrac{6}{2} \\ u-v=\dfrac{2}{6} \end{cases}$$

$$+\begin{cases} u+v=3 \\ u-v=\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$$2u=\frac{10}{3} \quad \| :2$$

$$u=\frac{5}{3}$$

Sijoitetaan $u=\dfrac{5}{3}$ yhtälöön $u + v = 3$ ja ratkaistaan v.

$$\frac{5}{3}+v=3$$

$$v=3-\frac{5}{3}$$

$$v=\frac{4}{3}$$

Siis $u=\dfrac{5}{3}$ ja $v=\dfrac{4}{3}$.

b) Koska $u=\dfrac{c}{b}=\dfrac{5}{3}$ ja $v=\dfrac{a}{b}=\dfrac{4}{3}$ on $3c = 5b$ ja $4b = 3a$. Tästä saadaan $a=\dfrac{4}{3}b$ ja $c=\dfrac{5}{3}b$. Ratkaisuna ovat siis $a = 4$, $b = 3$ ja $c = 5$, sekä kaikki kolmikot, jotka näistä luvuista saadaan, kun kaikkia kolmea lukua kasvatetaan samassa suhteessa.

c) $4^2 + 3^2 = 5^2$, joten luvut $a = 4$, $b = 3$ ja $c = 5$ toteuttavat Pythagoraan lauseen.

Yleisemmin, kun $a = \frac{4}{3}b$ ja $c = \frac{5}{3}b$, niin

$$a^2 + b^2 = \frac{16}{9}b^2 + b^2 = \frac{25}{9}b^2 = \left(\frac{5}{3}b\right)^2 = c^2.$$

Sijoittamalla alussa $s = 3$ ja $t = 4$ saadaan yhtälöparista $\begin{cases} u + v = \frac{4}{3} \\ u - v = \frac{3}{4} \end{cases}$

ratkaisuna $u = \frac{25}{24}$ ja $v = \frac{7}{24}$.

Tästä jatketaan edelleen: $u = \frac{c}{b} = \frac{25}{24}$ ja $v = \frac{a}{b} = \frac{7}{24}$. Näin saadaan $24c = 25b$ ja $24a = 7b$, joista $c = \frac{25}{24}b$ ja $a = \frac{7}{24}b$. Ratkaisuna ovat luvut $a = 7$ ja $b = 24$ sekä $c = 25$, sekä kaikki kolmikot, jotka näistä luvuista saadaan, kun kaikkia kolmea lukua kasvatetaan samassa suhteessa.

Ne toteuttavat Pythagoraan lauseen, sillä

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= \left(\frac{7}{24}b\right)^2 + b^2 \\ &= \frac{49}{576}b^2 + b^2 \\ &= \frac{625}{576}b^2 \\ &= \left(\frac{25}{24}b\right)^2 \\ &= c^2 \end{aligned}$$

Vastaus: **a)** Jos esimerkiksi $s = 2$ ja $t = 6$, niin $u = \frac{5}{3}, v = \frac{4}{3}$.

b) $a = 4$, $b = 3$ ja $c = 5$, sekä kaikki kolmikot, jotka näistä luvuista saadaan, kun kaikkia kolmea lukua kasvatetaan samassa suhteessa.

c) Sijoittamalla alussa $s = 3$ ja $t = 4$ saadaan luvut $c = \frac{25}{24}b$ ja $a = \frac{7}{24}b$.

Ne toteuttavat Pythagoraan lauseen.