KERTAUS

KERTAUSTEHTÄVIÄ

K1. Ensimmäiselle paidalle on 5 vaihtoehtoa, toiselle 4, kolmannelle 3 ja niin edelleen. Axel voi pitää paitoja 5! = 120:ssä eri järjestyksessä.

Vastaus: 120:ssä eri järjestyksessä

K2. Ensimmäisessä vaiheessa on 5 vaihtoehtoa, toisessa vaiheessa 3 vaihtoehtoa ja kolmannessa vaiheessa 2 vaihtoehtoa. Tuloperiaatteen mukaan puhelimen voi valita $5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$ vaihtoehdosta.

Vastaus: 30 vaihtoehdosta

K3. Yhdeksästä työntekijästä voidaan valita neljän työntekijän ryhmä $\binom{9}{4}$ = 126:lla eri tavalla, joten 126 erilaista kokoonpanoa voi tulla valituksi.

Vastaus: 126 kokoonpanoa

K4. Kun joukkueet pelaavat toisiaan vastaan, ne muodostavat kahden alkion joukkoja. Viidestä alkiosta voidaan muodostaa kahden alkion joukko $\binom{5}{2}$ = 10:llä eri tavalla. Alkusarjassa pelataan siis 10 peliä.

Vastaus: 10 peliä

K5. Seitsemän nuken joukosta voidaan valita kolme $\binom{7}{3} = 35$:llä tavalla, ja kahdeksasta nukesta voidaan valita viisi $\binom{8}{5} = 56$:lla tavalla. Erilaisia nukkekokoonpanoja on yhteensä $35 \cdot 56 = 1960$.

Leikissä voi olla 1960 eri nukkekokoonpanoa.

Vastaus: 1960 nukkekokoonpanoa

K6. Matematiikan kirjat voidaan järjestää $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$ eri tavalla. Vastaavasti psykologian kirjat voidaan järjestää $5!$ eri tavalla ja yhteiskuntaopin kirjat $2!$ eri tavalla. Lisäksi kolme oppiainetta voidaan järjestää $3!$ eri tavalla.

Tuloperiaatteen mukaan on $4! \cdot 5! \cdot 2! \cdot 3! = 34\,560$ eri tapaa järjestää kirjat.

Vastaus: 34 560 järjestystä

K7. **a)** Sanassa PERUNA on kuusi eri kirjainta, joten uuden sanan ensimmäinen kirjain voidaan valita kuudesta vaihtoehdosta, toinen viidestä vaihtoehdosta ja niin edelleen.

Erilaisia merkkijonoja voidaan muodostaa $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6! = 720$ kappaletta.

Vastaus: 720 merkkijonoa

b) Viidellä kirjaimella on $5!$ mahdollista järjestystä, mutta näistä osa on samoja, koska U esiintyy sanassa kahdesti. Luku $5!$ on siis jaettava luvulla, joka kertoo kuinka monessa järjestyksessä kaksi U-kirjainta voivat olla, eli luvulla $2!$.

Erilaisia merkkijonoja voidaan siis muodostaa $\frac{5!}{2!} = 60$ kappaletta.

Vastaus: 60 merkkijonoa

K8. **a)** Viikossa on seitsemän päivää, joista viisi on arkipäiviä, joten

$P(\text{itsenäisyyspäivä on arkipäivänä}) = \frac{5}{7} = 0{,}714... \approx 0{,}71.$

Itsenäisyyspäivä on arkipäivänä todennäköisyydellä $\frac{5}{7} \approx 0{,}71$.

Vastaus: $\frac{5}{7} \approx 0{,}71$

b) Viikossa on seitsemän päivää ja viikonloppuna on kaksi päivää, joten

$P(\text{itsenäisyyspäivä on viikonloppuna}) = \frac{2}{7} = 0{,}285... \approx 0{,}29.$

Itsenäisyyspäivä on viikonloppuna todennäköisyydellä $\frac{2}{7} \approx 0{,}29$.

Vastaus: $\frac{2}{7} \approx 0{,}29$

K9. Muodostetaan taulukko, jossa on kahden arpakuution silmälukujen summat.

1. heiton silmäluku

2. heiton silmäluku							
	6	7	8	9	10	11	12
	5	6	7	8	9	10	11
	4	5	6	7	8	9	10
	3	4	5	6	7	8	9
	2	3	4	5	6	7	8
	1	2	3	4	5	6	7
		1	2	3	4	5	6

Kahden arpakuution heitossa alkeistapauksia on 36 ja alkeistapauksia, joissa silmälukujen summa on 7 tai 8, on 11.

$P(\text{silmälukujen summa on 7 tai 8}) = \frac{11}{36} = 0{,}30555 = 30{,}555...\ \% \approx 31\ \%$

Silmälukujen summa on 7 tai 8 todennäköisyydellä 31 %.

Vastaus: 31 %

K10. Tilastossa on tutkittu 39:ää lukiolaista. Lukiolaisia, joilla lemmikkinä on kissa tai lisko, on 8 + 1 = 9. Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{lemmikkinä kissa tai lisko}) = \frac{9}{39}^{(3} = \frac{3}{13} = 0{,}230 \approx 0{,}23.$$

Lukiolaisella on lemmikkinä kissa tai lisko todennäköisyydellä 0,23.

Vastaus: $\frac{3}{13} \approx 0{,}23$

K11. Korttipakasta voidaan nostaa erilaisia viiden kortin joukkoja $\binom{52}{5}$ kappaletta.

Korttipakassa on 4 ässää, joten siellä on 52 − 4 = 48 muuta korttia. Erilaisia viiden kortin joukkoja, joissa ei ole ässää, eli joissa kortit on valittu muiden 48:n kortin joukosta, on $\binom{48}{5}$ kappaletta.

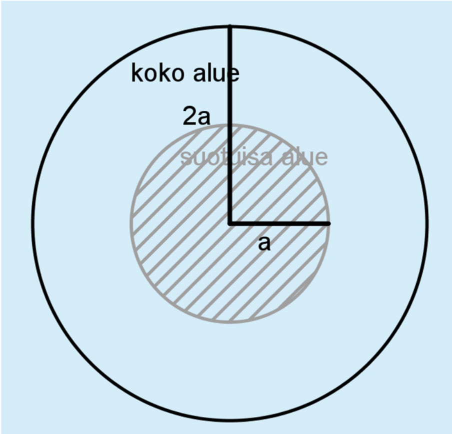
Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{ei yhtään ässää}) = \frac{\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}} = 0{,}658... \approx 0{,}66.$$

Todennäköisyys sille, ettei saada yhtään ässää, kun otetaan pakasta viisi korttia, on 0,66.

Vastaus: 0,66

K12. Merkitään suotuisan alueen sädettä kirjaimella a. Tällöin koko ympyrän säde on $2a$. Piirretään mallikuva.



Käytetään geometrisena mittana pinta-alaa.
Koko alueen pinta-ala on $\pi \cdot (2a)^2 = \pi \cdot 4a^2 = 4\pi a^2$ ja suotuisan alueen pinta-ala πa^2.

Kysytty todennäköisyys on
P(kivi osuu lähemmäksi ympyrän keskipistettä kuin sen kehää)
$$= \frac{\pi a^2}{4\pi a^2} = \frac{1}{4} = 0{,}25.$$

Kivi osuu lähemmäs ympyrän keskipistettä kuin sen kehää todennäköisyydellä $\frac{1}{4} = 0{,}25$.

Vastaus: $\frac{1}{4} = 0{,}25$

K13. Taskussa on aluksi $5 + 3 = 8$ kolikkoa, joista 5 on 50 sentin ja 3 kahden euron kolikoita.

TAPA 1:

Saadaan täsmälleen 2,50 euroa, jos ensimmäinen otettu kolikko on kahden euron kolikko ja toinen 50 sentin kolikko, tai toisin päin.

Jos ensimmäinen kolikko on 2 euron kolikko, niin taskussa on vielä jäljellä 7 kolikkoa, joista 5 on 50 sentin kolikoita. Tällöin todennäköisyys sille, että toisena otettu kolikko on 50 sentin kolikko, on $\frac{5}{7}$.

Jos ensimmäinen kolikko on 50 sentin kolikko, niin taskussa on vielä jäljellä 7 kolikkoa, joista 3 on 2 euron kolikoita. Tällöin todennäköisyys sille, että toisena otettu kolikko on 2 euron kolikko, on $\frac{3}{7}$.

$$\begin{aligned}
&P(\text{täsmälleen 2,50 euroa})\\
&= P(\text{1. kolikko on 2 € ja toinen 50 snt})\\
&\quad + P(\text{1. kolikko on 50 snt ja toinen 2 €})\\
&= P(\text{1. kolikko on 2 €}) \cdot P(\text{toisella 50 snt, kun 1. kolikko oli 2 €})\\
&\quad + P(\text{1. kolikko on 50 snt}) \cdot P(\text{toisella 2 €, kun 1. kolikko oli 50 snt})\\
&= \frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}+\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{7}\\
&= \frac{15}{28}\\
&= 0{,}535...\\
&\approx 0{,}54
\end{aligned}$$

Täsmälleen parkkimaksuun tarvittava 2,50 euroa saadaan todennäköisyydellä $\frac{15}{28} \approx 0{,}54$.

TAPA 2:

Saadaan täsmälleen 2,50 euroa, jos saadaan yksi kahden euron ja yksi 50 sentin kolikko.

Kahden euron kolikko voidaan valita kolmen samanlaisen kolikon joukosta $\binom{3}{1}$ tavalla.

50 sentin kolikko voidaan valita viiden samanlaisen kolikon joukosta $\binom{5}{1}$ tavalla.

Suotuisia kolikkoyhdistelmiä on tuloperiaatteen mukaan $\binom{3}{1}\cdot\binom{5}{1}$ kappaletta.

Kaksi kolikkoa voidaan valita kahdeksan kolikon joukosta $\binom{8}{2}$ eri tavalla.

Kysytty todennäköisyys on $\dfrac{\binom{3}{1}\cdot\binom{5}{1}}{\binom{8}{2}}=\dfrac{15}{28}=0,535...\approx 0,54.$

Täsmälleen parkkimaksuun tarvittava 2,50 euroa saadaan todennäköisyydellä $\frac{15}{28}\approx 0,54.$

Vastaus: $\frac{15}{28}\approx 0,54$

K14. Kaikki valot toimivat, kun ensimmäinen valo toimii ja toinen valo toimii ja kolmas valo toimii ja niin edelleen.
Kysytty todennäköisyys on

P(kaikki valot toimivat)
$= \underbrace{0{,}995 \cdot 0{,}995 \cdot \ldots \cdot 0{,}995}_{\text{24 kpl}}$
$= 0{,}995^{24}$
$= 0{,}88665..$
$= 88{,}665\ldots\ \%$
$\approx 89\ \%$

Todennäköisyys sille, että kaikki valot toimivat, on 89 %.

Vastaus: 89 %

K15. Viljami voittaa ainakin yhden pelin, jos hän voittaa yhden pelin, kaksi peliä tai kolme peliä. Tämän todennäköisyys on helpompi laskea vastatapahtuman ” Viljami ei voita yhtään peliä” avulla kuin suoraan.

Todennäköisyys, että Viljami ei voita yksittäistä peliä on $1-\frac{4}{12}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$.

P(Viljami voittaa ainakin yhden pelin)
$= 1 - P$(Viljami ei voita yhtään peliä)
$= 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3$
$= \frac{19}{27}$
$= 0{,}703...$
$\approx 0{,}70$

Todennäköisyys sille, että Viljami voittaa ainakin yhden pelin, on 0,70.

Vastaus: $\frac{19}{27} \approx 0{,}70$

K16. Merkitään ryhmän tyttöjen määrä kirjaimella n.
Tällöin todennäköisyys sille, että ensimmäinen valittu opiskelija on tyttö, on $\frac{n}{25}$. Jos ensimmäinen valittu opiskelija on tyttö, niin seuraava opiskelija valitaan 24 opiskelijan joukosta, jossa on $n - 1$ tyttöä. Toinen opiskelija on siis tyttö todennäköisyydellä $\frac{n-1}{24}$. Muodostetaan todennäköisyyden avulla yhtälö ja ratkaistaan siitä n.

$$\frac{n}{25}\cdot\frac{n-1}{24}=\frac{7}{20}$$
$$\frac{n(n-1)}{25\cdot 24}=\frac{7}{20}$$
$$\frac{n^2-n}{600}=\frac{7}{20}$$
$$20\left(n^2-n\right)=7\cdot 600$$
$$20n^2-20n=4200$$
$$20n^2-20n-4200=0 \quad \|:20$$
$$n^2-n-210=0$$
$$n=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-210)}}{2\cdot 1}$$
$$n=\frac{1\pm\sqrt{1+840}}{2}$$
$$n=\frac{1\pm\sqrt{841}}{2}$$
$$n=\frac{1\pm 29}{2}$$
$$n=\frac{1+29}{2} \text{ tai } n=\frac{1-29}{2}$$
$$n=15 \text{ tai } n=-14$$

Lukumäärä ei voi olla negatiivinen, joten ryhmässä on 15 tyttöä.

Vastaus: 15 tyttöä

K17. **a)** Neljän henkilön toimikunta seitsemästä henkilöstä voidaan valita $\binom{7}{4} = 35$:llä tavalla.

Kaksi veljestä voidaan valita kahden veljeksen joukosta $\binom{2}{2}$ tavalla.

Loput kaksi henkilöä voidaan valita muiden viiden muun henkilön joukosta $\binom{5}{2}$ eri tavalla. Toimikunta, jossa molemmat veljekset ovat mukana, voidaan siis valita $\binom{2}{2} \cdot \binom{5}{2} = 10$ tavalla.

Kysytty todennäköisyys on
P(molemmat veljekset joutuvat toimikuntaan)

$$= \frac{10^{(5}}{35} = \frac{2}{7} = 0,285... \approx 0,29.$$

Molemmat veljekset joutuvat toimikuntaan todennäköisyydellä 0,29.

Vastaus: $\frac{2}{7} \approx 0,29$

b) Yksi veli voidaan valita kahden veljen joukosta $\binom{2}{1}$ tavalla. Loput kolme henkilöä voidaan valita viiden muun henkilön joukosta $\binom{5}{3}$ eri tavalla. Toimikunta, jossa on vain toinen veljeksistä, voidaan siis valita $\binom{2}{1} \cdot \binom{5}{3} = 20$ tavalla.

Kysytty todennäköisyys on
P(toinen veljeksistä joutuu toimikuntaan)

$$= \frac{20^{(5}}{35} = \frac{4}{7} = 0,571... \approx 0,57.$$

Vain toinen veljeksistä joutuu toimikuntaan todennäköisyydellä 0,57.

Vastaus: $\frac{4}{7} \approx 0,57$

K18. **a)** Vapaa-aikaa vuorokaudesta on 6,3 tuntia eli

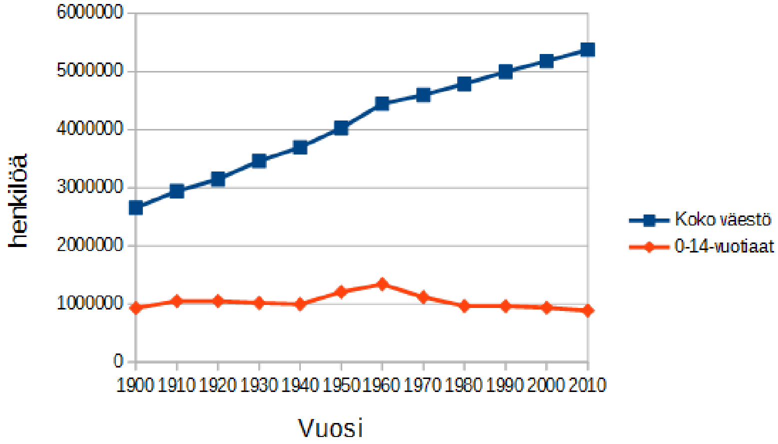
$$\frac{6,3\text{ h}}{24\text{ h}} = 0,2625 = 26,25\ \% \approx 26\ \%\,.$$

Vuorokaudesta on vapaa-aikaa 26 %.

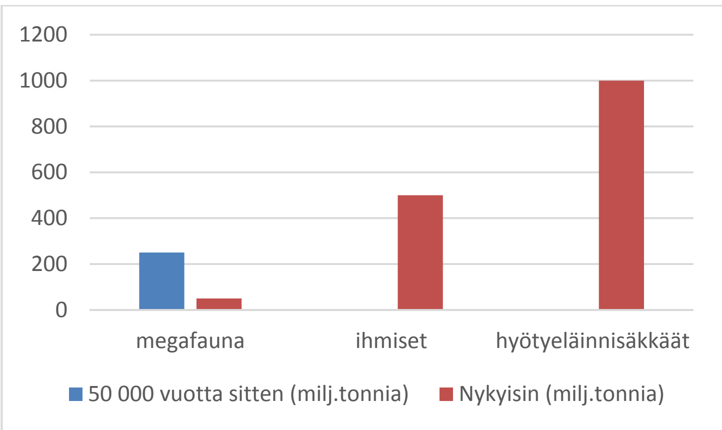
Vastaus: 26 %

b) Ansiotyöhön käytettävä aika voi näyttää pieneltä. Aikaa pienentää se, että kaikki 10–64-vuotiaat eivät tee töitä, eikä töitä yleensä tehdä joka päivä.

K19. Videossa https://vimeo.com/228962209/00d855a41b näytetään, miten tehtävä voidaan ratkaista taulukkolaskentaohjelmalla.



K20. Piirretään pylväskaavio taulukkolaskentaohjelmalla.



K21. Lasketaan suhteelliset frekvenssit f %, summafrekvenssit sf ja suhteelliset summafrekvenssit f %.

kruunien määrä	f	f %	sf	sf %
0	38	$\frac{38}{1000}=3,8\ \%$	38	3,8 %
1	144	$\frac{144}{1000}=14,4\ \%$	38 + 144 = 182	$\frac{182}{1000}=18,2\ \%$
2	342	$\frac{342}{1000}=34,2\ \%$	182 + 342 = 524	$\frac{524}{1000}=52,4\ \%$
3	287	$\frac{287}{1000}=28,7\ \%$	524 + 287 = 811	$\frac{811}{1000}=81,1\ \%$
4	164	$\frac{164}{1000}=16,4\ \%$	811 + 164 = 975	$\frac{975}{1000}=97,5\ \%$
5	25	$\frac{25}{1000}=2,5\ \%$	975 + 25 = 1000	100 %

Vastaus:

kruunien määrä	f %	sf	sf %
0	3,8 %	38	3,8 %
1	14,4 %	182	18,2 %
2	34,2 %	524	52,4 %
3	28,7 %	811	81,1 %
4	16,4 %	975	97,5 %
5	2,5 %	1000	100,0 %

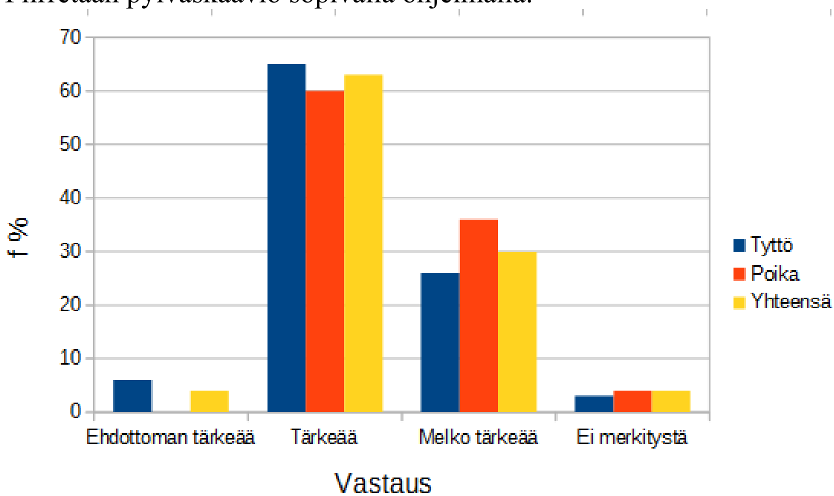
K22. Lasketaan ensin tyttöjen ja poikien vastausten määrät yhteen. Lasketaan lisäksi, kuinka monta kutakin vastausta on yhteensä.

Vastaus	Tyttö	Poika	Yhteensä
ehdottoman tärkeää	2	0	2
tärkeää	20	15	35
melko tärkeää	8	9	17
ei merkitystä	1	1	2
yhteensä	31	25	56

Määritetään suhteelliset frekvenssit.

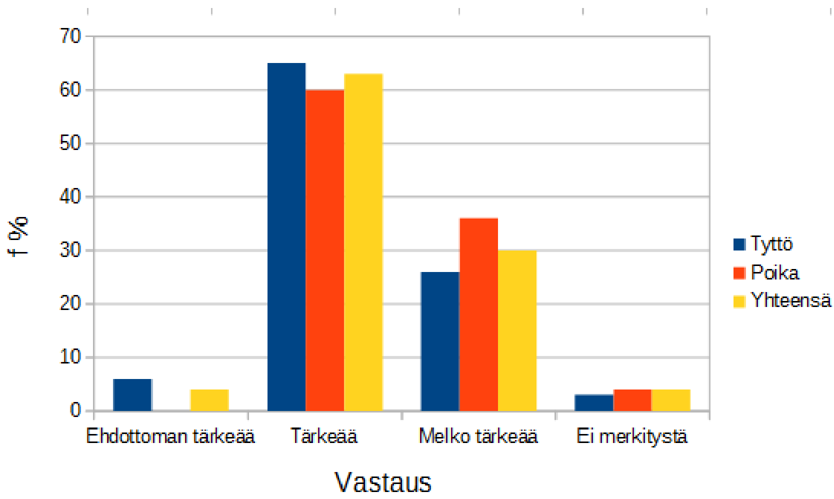
Vastaus	Tyttö	Poika	Yhteensä
ehdottoman tärkeää	$\frac{2}{31} \approx 6\ \%$	$\frac{0}{25} = 0\ \%$	$\frac{2}{56} \approx 4\ \%$
tärkeää	$\frac{20}{31} \approx 65\ \%$	$\frac{15}{25} = 60\ \%$	$\frac{35}{56} \approx 63\ \%$
melko tärkeää	$\frac{8}{31} \approx 26\ \%$	$\frac{9}{25} = 36\ \%$	$\frac{17}{56} \approx 30\ \%$
ei merkitystä	$\frac{1}{31} \approx 3\ \%$	$\frac{1}{25} = 4\ \%$	$\frac{2}{56} \approx 4\ \%$

Piirretään pylväskaavio sopivalla ohjelmalla.



Vastaus:

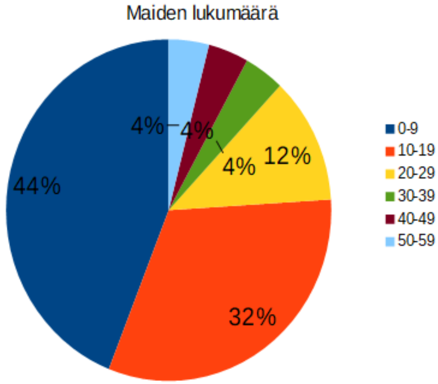
Vastaus	Tyttö	Poika	Yhteensä
ehdottoman tärkeää	6 %	0 %	4 %
tärkeää	65 %	60 %	63 %
melko tärkeää	26 %	36 %	30 %
ei merkitystä	3 %	4 %	4 %



K23. Videossa https://vimeo.com/228962418/7f9f8a96d4 näytetään, miten tehtävä voidaan ratkaista taulukkolaskentaohjelmalla.

Vastaus:

Maiden lukumäärä	f
0-9	11
10-19	8
20-29	3
30-39	1
40-49	1
50-59	1



K24. Järjestetään arvosanat ja määritetään mediaani.
Jonin arvosanat olivat 5, 6, 6, 7, 9 ja 9. Koska arvosanat 6 ja 7 ovat molemmat keskimmäisiä, mediaani on niiden keskiarvo. Siis

$$\text{Md} = \frac{6+7}{2} = 6{,}5 .$$

Nikon arvosanat olivat 5, 6, 7, 7, 8 ja 8. Koska kaksi keskimmäistä arvosanaa ovat molemmat seiskoja, mediaani on Md = 7.

Jonin arvosanojen keskiarvo on

$$\overline{x} = \frac{5+6+6+7+9+9}{6} = \frac{42}{6} = 7 .$$

Nikon arvosanojen keskiarvo on

$$\overline{x} = \frac{5+6+7+7+8+8}{6} = \frac{41}{6} = 6{,}833... \approx 6{,}8 .$$

Vastaus: Joni: Md = 6,5, $\overline{x} = 7$, Niko: Md = 7, $\overline{x} \approx 6{,}8$

K25. Yhden maalin pelejä on eniten, joten moodi on Mo = 1.

Pelien lukumäärä on 5 + 19 + 17 + 17 + 16 + 5 + 3 = 82.
Maalien määrän keskiarvo on

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{5\cdot 0+19\cdot 1+17\cdot 2+17\cdot 3+16\cdot 4+5\cdot 5+3\cdot 6}{82}\\ &= \frac{211}{82}\\ &= 2{,}573...\\ &\approx 2{,}6\end{aligned}$$

.

Vastaus: Mo = 1, $\overline{x} \approx 2{,}6$

K26. Videossa https://vimeo.com/228962531/833046e27b näytetään, miten tehtävä voidaan ratkaista taulukkolaskentaohjelmalla.

Vastaus: [53, 97], Md = 75, $Q_1 = 67{,}5$, $Q_3 = 82{,}5$, $\overline{x} \approx 75{,}3$, $s \approx 10{,}4$

K27. Videossa https://vimeo.com/228962628/ea1504b7ec näytetään, miten korrelaatiokerroin voidaan määrittää taulukkolaskentaohjelmalla.

Tyttären ja äidin pituuksilla on kohtalainen positiivinen korrelaatio. Tämä johtunee siitä, että pituus riippuu osittain perimästä, mutta ei pelkästään siitä. Lisäksi myös isän pituus vaikuttaa lapsen pituuteen.

Vastaus: $r \approx 0{,}49$

KOKOAVIA TEHTÄVIÄ

ILMAN TEKNISIÄ APUVÄLINEITÄ

1. Ensimmäisessä vaiheessa on 2 vaihtoehtoa, toisessa vaiheessa 3 ja viimeisessä vaiheessa 2 vaihtoehtoa. Vaihtoehtojen määrä on tuloperiaatteen mukaan $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$.

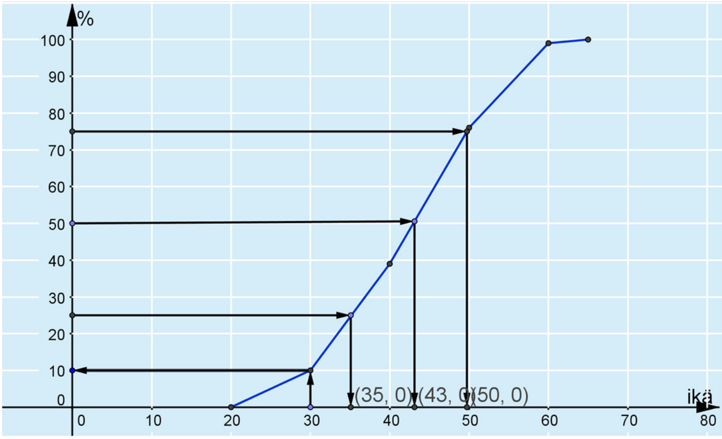
Kolmen ruokalajin kokonaisuuksia on 12.

Vastaus: 12 kokonaisuutta

2. Järjestetään poikasmäärät suuruusjärjestykseen:
1, 1, 2, 2, 3, 3, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7
Huomataan, että lukumäärää 6 on eniten, joten moodi Mo = 6.
Järjestetyn aineiston keskimmäinen arvo on 5, joten mediaani Md = 5.

Vastaus: Mo = 6, Md = 5

3. Piirroksessa havainnollistetaan sitä, miten vastaukset luetaan kuvaajasta.



a) Mediaani-ikä on ikä, jota nuorempia ja vanhempia on puolet palomiehistä. Etsitään y-akselilta arvo 50 % ja huomataan, että sitä vastaava x-akselin arvo on noin 43 vuotta.

Vastaus: n. 43 vuotta

b) Kuvaajasta nähdään, että 25 % palomiehistä oli nuorempia kuin 35 vuotta. Alakvartiili oli siis 35 vuotta.

Vastaus: n. 35 vuotta

c) Kuvaajasta nähdään, että 75 % palomiehistä oli vanhempia kuin 50 vuotta. Alakvartiili oli siis 50 vuotta.

Vastaus: n. 50 vuotta

d) Katsotaan kuvaajalta mikä y-akselin arvo vastaa x-akselin arvoa 30 vuotta. Prosenttiluku on noin 10.

Vastaus: n. 10 %

e) 50 vuotta on yläkvartiili-ikä, joten 50 vuotta täyttäneitä oli 25 %.

Vastaus: n. 25 %

4. Kysytty todennäköisyys voidaan laskea geometrisena todennäköisyytenä. Käytetään geometrisena mittana pituutta. Koko putken pituus on 32 m ja suotuisan osan pituus on 32 m − 4 m = 28 m.

Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{tukos ei ole varaston alla}) = \frac{28}{32}^{(4} = \frac{7}{8} = 0{,}875 \approx 0{,}88.$$

Todennäköisyys sille, että tukos ei ole varaston alla, on 0,88.

Vastaus: $\frac{7}{8} \approx 0{,}88$

5. **a)** Tutkitaan vaihtoehdot I-VII yksi kerrallaan.

Tapahtumassa I kuutosia voi olla enemmänkin, koska muista heitoista ei tiedetä. Ehto ei siis välttämättä täyty.

Tapahtumassa II saadaan 2 kuutosta, joten ehto ei täyty.

Tapahtumassa III saadaan yksi kuutonen ja muilla kerroilla ei saada kuutosta, joten ehto täyttyy varmasti.

Tapahtumassa IV kuutosia voi olla enemmän kuin yksi, joten ehto ei välttämättä täyty.

Tapahtumassa V kuutosia ei välttämättä saada yhtään, joten ehto ei välttämättä täyty.

Tapahtumassa VI ei saada kuutosia, joten ehto ei täyty.

Tapahtumassa VII kuutosia saadaan kaksi, joten ehto ei täyty.

Vastaus: III

b) Tutkitaan tapahtumat I-VII yksi kerrallaan.

Tapahtumassa I saadaan ensin kuutonen ja ehkä vielä lisää kuutosia, joten ehto täyttyy varmasti.

Tapahtumassa II saadaan 2 kuutosta, joten ehto täyttyy varmasti.

Tapahtumassa III saadaan aluksi yksi kuutonen, joten ehto täyttyy varmasti.

Tapahtumassa IV kuutosia saadaan vähintään yksi, joten ehto täyttyy varmasti.

Tapahtumassa V kuutosia ei välttämättä saada yhtään, joten ehto ei välttämättä täyty.

Tapahtumassa VI ei saada kuutosia, joten ehto ei täyty.

Tapahtumassa VII kuutosia saadaan kaksi, joten ehto täyttyy varmasti.

Vastaus: I, II, III, IV ja VII

6. **a)** Opiskelijoita oli yhteensä 120. Kuvan mukaan 3 opiskelijaa valitsi kaikkien aineiden syventäviä kursseja, joten kysytty todennäköisyys on

P(opiskelee kaikkien aineiden syventäviä kursseja)

$$= \frac{3}{120}^{(3} = \frac{1}{40} = 0{,}025.$$

Satunnainen opiskelija opiskelee kaikkien aineiden syventäviä kursseja todennäköisyydellä $\frac{1}{40} = 0{,}025$.

Vastaus: $\frac{1}{40} = 0{,}025$

b) Fysiikan opiskelijoita oli 25. Heistä 3 opiskeli kaikkien muidenkin aineiden syventäviä kursseja, joten kysytty todennäköisyys on

P(fysiikkaa opiskeleva opiskelee kaikkien muidenkin aineiden syventäviä kursseja) $= \frac{3}{25} = 0{,}12.$

Fysiikkaa opiskeleva opiskelee myös kaikkien muiden aineiden syventäviä kursseja todennäköisyydellä $\frac{3}{25} = 0{,}12$.

Vastaus: $\frac{3}{25} = 0{,}12$

c) Kuvan mukaan matematiikan ja fysiikan syventäviä kursseja oli valinnut $10 + 10 + 2 + 3 = 25$ opiskelijaa, ja heistä 10 ei ollut valinnut biologiaa eikä kemiaa. Kysytty todennäköisyys on siis

P(matematiikan ja fysiikan syventäviä kursseja opiskeleva ei opiskele biologiaa eikä kemiaa) $= \frac{10}{25}^{(5} = \frac{2}{5} = 0{,}4.$

Todennäköisyys sille, että matematiikan ja fysiikan syventäviä kursseja opiskeleva ei opiskele biologiaa eikä kemiaa, on $\frac{2}{5} = 0{,}4$.

Vastaus: $\frac{2}{5} = 0{,}4$

7. Taulukoidaan tiedot.

	Sinisilmäisiä	Ruskeasilmäisiä	Yhteensä
16-vuotias	12	10	22
17-vuotias	4	8	12
Yhteensä	16	18	34

a) Ryhmässä on 34 henkilöä, joista 4 on 17-vuotiaita sinisilmäisiä. Kysytty todennäköisyys on

P(valittu henkilö on 17-vuotias sinisilmäinen)

$$= \frac{4}{34}^{(2} = \frac{2}{17} = 0,117... \approx 0,12.$$

Ryhmästä umpimähkään valittu henkilö on 17-vuotias sinisilmäinen todennäköisyydellä $\frac{2}{17} \approx 0,12$.

Vastaus: $\frac{2}{17} \approx 0,12$

b) Ryhmässä oli 18 ruskeasilmäistä, joista 8 oli 17-vuotiaita. Kysytty todennäköisyys on

P(valittu ruskeasilmäinen on 17-vuotias)

$$= \frac{8}{18}^{(2} = \frac{4}{9} = 0,444... \approx 0,44.$$

Ryhmästä umpimähkään valittu ruskeasilmäinen on 17-vuotias todennäköisyydellä $\frac{4}{9} \approx 0,44$.

Vastaus: $\frac{4}{9} \approx 0,44$

APUVÄLINEET SALLITTU

8. Parittomia numeroita ovat 1, 3, 5, 7 ja 9. Ensimmäinen numero voi olla mikä tahansa niistä, joten sille on 5 vaihtoehtoa.

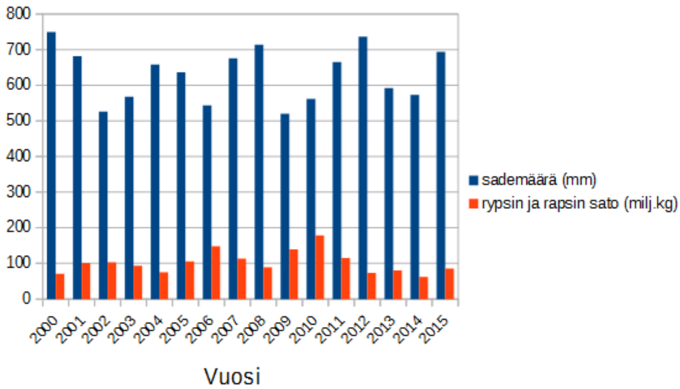
Koska mikään numero ei esiinny kuin kerran, niin toinen numero ei voi olla sama kuin ensimmäinen, joten toiselle numerolle on 4 vaihtoehtoa. Vastaavasti kolmannelle numerolle on 3 vaihtoehtoa ja neljännelle numerolle 2 vaihtoehtoa.

Tuloperiaatteen mukaan erilaisia tunnuslukuvaihtoehtoja on
$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$.

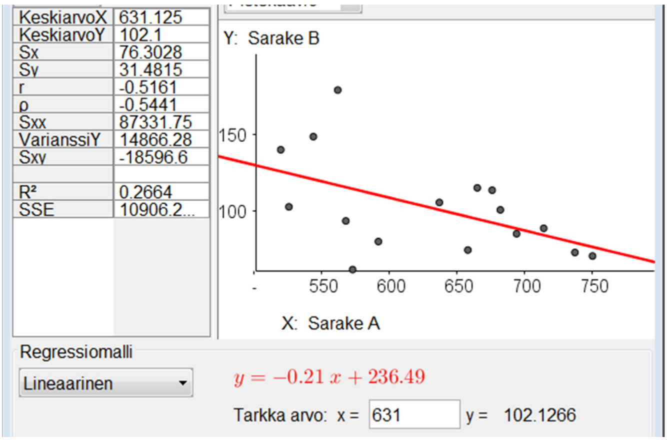
Jere joutuu arvaamaan 120:n eri tunnusluvun joukosta.

Vastaus: 120:n eri tunnusluvun

9. **a)** Piirretään pylväskaavio sopivalla ohjelmalla.



b) Määritetään keskiarvot ja keskihajonnat sopivalla ohjelmalla.



Sademäärän keskiarvo on $\overline{x} \approx 631$ mm ja keskihajonta $s \approx 76{,}3$ mm.

Rypsi- ja rapsisadon keskiarvo on $\overline{x} \approx 102$ miljoonaa kilogrammaa ja keskihajonta $s \approx 31{,}5$ miljoonaa kilogrammaa.

Vastaus: sademäärä: $\overline{x} \approx 631$ mm, $s \approx 76{,}3$ mm; sato:
$\overline{x} \approx 102$ milj. kg, $s \approx 31{,}5$ milj. kg

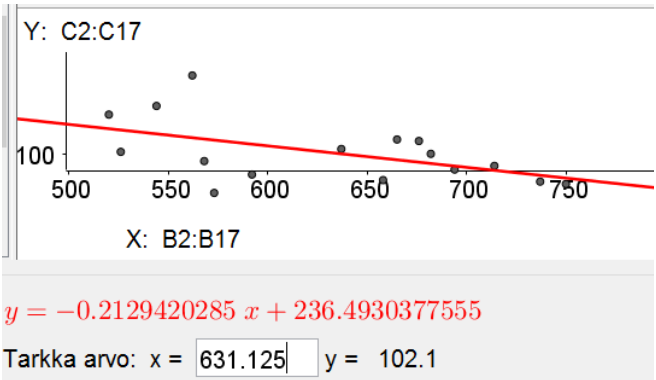
c) Sademäärän ja sadon välinen korrelaatiokerroin ja selitysaste ovat b-kohdan perusteella $r \approx -0{,}52$ ja $r^2 \approx 0{,}27$. Korrelaatio on kohtalainen negatiivinen eli sademäärän kasvaessa sato vähenee. Sademäärä selittää noin 27 % rypsi- ja rapsisadon vaihtelusta.

Vastaus: $r \approx -0{,}52$; $r^2 \approx 0{,}27$. Korrelaatio on kohtalainen negatiivinen eli sademäärän kasvaessa sato vähenee. Sademäärä selittää noin 27 % satomäärän vaihtelusta.

d) Sademäärän ja sadon riippuvuutta kuvaavan regressiosuoran yhtälö on b-kohdan perusteella $y = -0{,}21x + 236{,}49$.

Vastaus: $y = -0{,}21x + 236{,}49$

e) Arvio rypsi- ja rapsisadosta saadaan sijoittamalla regressiosuoran yhtälöön sademäärän keskiarvo $\overline{x} = 631{,}125$.



Ohjelma antaa rypsi- ja rapsisadon suuruudeksi
102,1 milj. kg ≈ 102 milj. kg.

Vastaus: 102 milj.kg

10. **a)** Lasketaan kuinka monella tavalla kuuden koria voidaan valita 10 heiton joukosta. $\binom{10}{6} = 210$, joten kysyttyjä sarjoja on 210.

Erilaisia 10 heiton sarjoja, joissa Jaajo saa tasan 6 koria, on 210.

Vastaus: 210 sarjaa

b) Todennäköisyys, että pallo menee koriin on 0,7, joten todennäköisyys, että pallo ei mene koriin on $1 - 0{,}7 = 0{,}3$.
Ensimmäinen menee koriin todennäköisyydellä 0,7, samoin toinen jne.

Kertolaskusäännön perusteella
P(6 ensimmäistä koriin ja loput 4 ohi)
$= 0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3$
$= 0{,}7^6 \cdot 0{,}3^4$
$= 0{,}000952\ldots$
$= 0{,}0952\ldots\ \%$
$\approx 0{,}095\ \%$

Todennäköisyys sille, että 10 heiton sarjassa 6 ensimmäistä heittoa menee koriin ja loput 4 ohi, on 0,095 %.

Vastaus: 0,095 %

11. Kättelyssä muodostuu pari eli kahden henkilön joukko, joten kun juhlissa on n vierasta, kättelyiden määrä on $\binom{n}{2}$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä n.

$$\binom{n}{2} = 276$$

Sopivalla ohjelmalla yhtälön ratkaisuksi saadaan $n = 24$.
Vieraita oli siis 24.

Vastaus: 24 vierasta

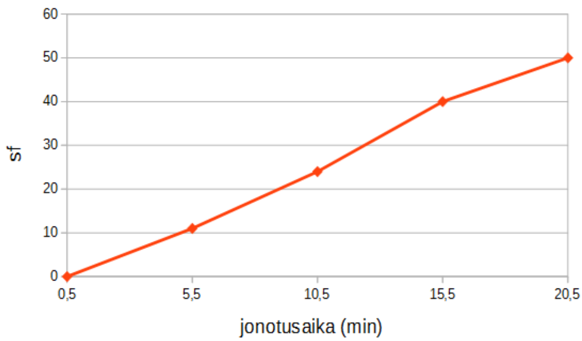
12. **a)** Videossa https://vimeo.com/228962982/ab57c28031 näytetään, miten tehtävä voidaan ratkaista taulukkolaskentaohjelmalla.

Vastaus: Mo = 11 min ja Mo = 15 min, Md = 11 min, $\bar{x} \approx 10{,}5$ min, $s \approx 5{,}3$ min.

b) Videossa https://vimeo.com/228962982/ab57c28031 näytetään, miten tehtävä voidaan ratkaista sopivalla ohjelmalla.

Vastaus:

Jonotusaika (min)	f
0,5 – 5,5	11
5,5 – 10,5	13
10,5 – 15,5	16
15,5 – 20,5	10



13. Puhelin ei joudu korjattavaksi, jos kaikki 150 osaa pysyvät ehjinä. Todennäköisyys, että yksittäinen osa pysyy ehjänä on
100 % − 1 % = 99 %.
Lasketaan todennäköisyys sille, että kaikki osat pysyvät ehjinä.

P(puhelimen kaikki 150 osaa pysyvät ehjinä)
$= 0{,}99^{150}$
$= 0{,}221\ldots$
$\approx 0{,}22$
Todennäköisyys sille, että ainakin yksi osa rikkoontuu, on

P(ainakin yksi osa rikkoutuu)
$= 1 - P$(kaikki osat pysyvät ehjinä)
$= 1 - 0{,}221\ldots$
$= 0{,}778\ldots$
$\approx 0{,}78$
$= 78$ %.

Vastaus: Todennäköisyys, että ainakin 1 osa rikkoutuu, on noin 78 %.

14. **a)** Lasketaan todennäköisyys sille, että toinen osapuoli on syntynyt tammikuussa ja toinen kesäkuussa.

P(toinen tammikuussa ja toinen kesäkuussa)
= *P*(1. tammikuussa ja 2. kesäkuussa, tai 1. kesäkuussa ja 2. tammikuussa)
= *P*(1. tammikuussa) · *P*(2. kesäkuussa)
+ *P*(1. kesäkuussa) · *P*(2. tammikuussa)

$$= \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{12}+\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{12}$$
$$= \frac{1}{72}$$
$$= 0{,}0138...$$
$$\approx 0{,}014$$

Toinen osapuoli on syntynyt tammikuussa ja toinen kesäkuussa todennäköisyydellä 0,014.

Vastaus: $\frac{1}{72} \approx 0{,}014$

b) Jos molemmat ovat syntyneet samassa kuussa, voi ensimmäinen olla syntynyt missä kuussa tahansa, ja toisen pitää olla syntynyt samassa kuussa.

P(molemmat samassa kuussa)
= *P*(toinen samassa kuussa kuin ensimmäinen)

$$= \frac{1}{12}$$
$$= 0{,}0833...$$
$$\approx 0{,}083$$

Molemmat ovat syntyneet samassa kuussa todennäköisyydellä 0,083.

Vastaus: $\frac{1}{12} \approx 0{,}083$

c) Jos pari on syntynyt peräkkäisinä kuukausina, ensimmäinen voi olla syntynyt missä kuussa tahansa, ja toisen pitää olla syntynyt joko edellisenä tai seuraavana kuukautena.

P(peräkkäisinä kuukausissa)
$= P$(toinen edellisenä tai seuraavana kuin ensimmäinen)

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2}{12} \\
&= \frac{1}{6} \\
&= 0{,}166... \\
&\approx 0{,}17
\end{aligned}
$$

Syntymäpäivät ovat peräkkäisinä kuukausina todennäköisyydellä 0,17.

Vastaus: $\frac{1}{6} \approx 0{,}17$

HARJOITUSKOE

H1. **a)** Täydennetään taulukko.

Tulos	f	sf	$f\,\%$	$sf\,\%$
0–4	5	5	$\frac{5}{20}^{(5} = \frac{1}{4} = 25\ \%$	25 %
5–9	8	5 + 8 = 13	$\frac{8}{20}^{(4} = \frac{2}{5} = 40\ \%$	25 % + 40 % = 65 %
10–14	4	13 + 4 = 17	$\frac{4}{20}^{(4} = \frac{1}{5} = 20\ \%$	65 % + 20 % = 85 %
15–19	2	17 + 2 = 19	$\frac{2}{20}^{(2} = \frac{1}{10} = 10\ \%$	85 % + 10 % = 95 %
20–24	1	19 + 1 = 20	$\frac{1}{20} = 5\ \%$	100 %

Vastaus:

Tulos	f	sf	$f\,\%$	$sf\,\%$
0–4	5	5	25 %	25 %
5–9	8	13	40 %	65 %
10–14	4	17	20 %	85 %
15–19	2	19	10 %	95 %
20–24	1	20	5 %	100 %

b) Alle 10 leukaa vetäneet kuuluvat kahteen ensimmäiseen luokkaan, joiden osuus nähdään luokan 5-9 suhteellisen summafrekvenssin arvosta 65 %.

Vastaus: 65 %

c) Ainakin 5 mutta alle 20 leukaa vetäneet kuuluvat toiseen, kolmanteen ja neljänteen luokkaan, joiden yhteenlasketut suhteelliset frekvenssit ovat 40 % + 20 % + 10 % = 70 %.

Vastaus: 70 %

H2. **a)** Elokuvia on yhteensä $2 + 3 = 5$. Ensimmäiselle elokuvalle on 5 vaihtoehtoa, toiselle 4 ja niin edelleen. Tuloperiaatteen mukaan järjestysten määrä on $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

Ira voi katsoa elokuvat 120:ssä eri järjestyksessä.

Vastaus: 120 järjestyksessä

b) Jos komediat katsotaan ensin, ensimmäiselle elokuvalle on 2 vaihtoehtoa ja toiselle 1. Kolmas elokuva on jännityselokuva, ja sille on 3 vaihtoehtoa. Neljännelle on 2 ja viimeiselle 1 vaihtoehto. Tuloperiaatteen mukaan järjestysten määrä on $2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 12$.

Ira voi katsoa elokuvat 12:ssä eri järjestyksessä.

Vastaus: 12 järjestyksessä

c) Ensimmäiselle elokuvalle on 5 vaihtoehtoa ja toiselle 4. Kahden elokuvan jonojen määrä on siis $5 \cdot 4 = 20$. Kaksi elokuvaa voivat kuitenkin olla kummassa tahansa järjestyksessä, joten kahden elokuvan jonojen määrässä on laskettu jokainen elokuvapari kahteen kertaan. Elokuvapareja on siis $\frac{20}{2} = 10$.

Ira voi valita elokuvat 10:llä eri tavalla.

Vastaus: 10 tavalla

H3. Järjestetään aineistot suuruusjärjestykseen.

A 0, 0, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 4
B 1, 1, 2, 2, 2, 4, 4, 4, 5, 6
C 1, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 5

Aineiston A moodi on Mo = 1, joten aineisto A ja tunnusluku II kuuluvat yhteen.

Aineiston B mediaani on lukujen 2 ja 4 keskiarvo eli $\mathrm{Md} = \frac{2+4}{2} = 3$.
Siis aineisto B ja tunnusluku III kuuluvat yhteen.

Aineiston C keskiarvo on $\overline{x} = \frac{1+1+2+2+2+3+4+5}{8} = {}^{(4}\!\!\frac{20}{8} = \frac{5}{2} = 2{,}5$,
joten aineisto C ja tunnusluku I kuuluvat yhteen.

Vastaus: A: II, B: III ja C: I

H4. **a)** Todennäköisyys, että ensimmäinen lapsi on poika, on $\frac{1}{2}$, samoin todennäköisyys sille että toinen lapsi on poika ja todennäköisyys sille, että kolmas lapsi on poika. Kysytty todennäköisyys on kertolaskusäännön mukaan

$$P(\text{kaikki kolme ovat poikia}) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1^3}{2^3} = \frac{1}{8} = 0{,}125.$$

Todennäköisyys sille, että kaikki lapset ovat poikia, on $\frac{1}{8} = 0{,}125$.

Vastaus: $\frac{1}{8} = 0{,}125$

b) Komplementtisäännön mukaan todennäköisyys sille, että perheessä on ainakin yksi tyttölapsi, on

P(ainakin 1 tyttö)
= 1 – P(ei yhtään tyttöä)
= 1 – P(kaikki kolme ovat poikia)
$= 1 - \frac{1}{8}$
$= \frac{7}{8}$
$= 0{,}875.$

Todennäköisyys sille, että perheessä on ainakin yksi tyttölapsi, on $\frac{7}{8} = 0{,}875$.

Vastaus: $\frac{7}{8} = 0{,}875$

c) Perheessä on täsmälleen kaksi tyttölasta, jos tyttöjä ovat vain kaksi ensimmäistä, vain ensimmäinen ja kolmas tai vain toinen ja kolmas. Merkitään T = ”tyttö” ja P = ”poika”. Tällöin suotuisat tapahtumat ovat *TTP*, *TPT* JA *PTT*.

Kysytty todennäköisyys on yhteenlaskusäännön ja kertolaskusäännön mukaan

P(täsmälleen 2 tyttöä)
$= P(TTP) + P(TPT) + P(PTT)$
$= P$(1. on tyttö) · P(2. on tyttö) · P(3. on poika)
$+ P$(1. on tyttö) · P(3. on tyttö) · P(2. on poika)
$+ P$(2. on tyttö) · P(3. on tyttö) · P(2. on poika)

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$$
$$= \frac{3}{8}$$
$$= 0{,}375.$$

Todennäköisyys sille, että perheessä on täsmälleen kaksi tyttölasta, on $\frac{3}{8} = 0{,}375.$

Vastaus: $\frac{3}{8} = 0{,}375$

H5. Lasketaan kunkin henkilön todennäköisyys saada lyhyt tikku.

$$P(\text{Ada saa lyhyen tikun}) = \frac{1}{4}$$

Elin saa lyhyen tikun, jos Ada vetää ensin jonkin kolmesta pitkästä tikusta ja sen jälkeen Elin vetää kolmesta jäljellä olevasta tikusta ainoan lyhyen.

$$\begin{aligned}
&P(\text{Elin saa lyhyen tikun}) \\
&= P(\text{Ada saa pitkän ja Elin lyhyen tikun}) \\
&= P(\text{Ada saa pitkän}) \cdot P(\text{Elin saa lyhyen}) \\
&= \frac{{}^{1}\cancel{3}}{4} \cdot \frac{1}{{}_{1}\cancel{3}} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Joona saa lyhyen tikun, jos Ada vetää ensin jonkin kolmesta pitkästä tikusta, ja sen jälkeen Elin kolmesta jäljellä olevasta tikusta jommankumman pitkän, ja sen jälkeen Joona vetää kahdesta jäljellä olevasta tikusta ainoan lyhyen.

$$\begin{aligned}
&P(\text{Joona saa lyhyen tikun}) \\
&= P(\text{Ada ja Elin saavat pitkän ja Joona lyhyen tikun}) \\
&= P(\text{Ada saa pitkän}) \cdot P(\text{Elin saa pitkän}) \cdot P(\text{Joona saa lyhyen}) \\
&= \frac{{}^{1}\cancel{3}}{4} \cdot \frac{{}^{1}\cancel{2}}{{}_{1}\cancel{3}} \cdot \frac{1}{{}_{1}\cancel{2}} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Kasper saa lyhyen tikun, jos Ada vetää ensin jonkin kolmesta pitkästä tikusta, ja sen jälkeen Elin kolmesta jäljellä olevasta tikusta jommankumman pitkän, ja sen jälkeen Joona vetää kahdesta jäljellä olevasta tikusta ainoan pitkän, ja sen jälkeen Kasper vetää jäljellä olevan tikun.

$$\begin{aligned}
&P(\text{Kasper saa lyhyen tikun})\\
&= P(\text{kolme muuta saavat pitkän ja Kasper lyhyen})\\
&= P(\text{Ada saa pitkän}) \cdot P(\text{Elin saa pitkän})\\
&\quad \cdot P(\text{Joona saa pitkän}) \cdot P(\text{Kasper saa lyhyen})\\
&= \frac{{}^{1}\cancel{3}}{4} \cdot \frac{{}^{1}\cancel{2}}{{}_{1}\cancel{3}} \cdot \frac{1}{{}_{1}\cancel{2}} \cdot \frac{1}{1}\\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Vastaus: Kaikilla on yhtä suuri todennäköisyys.

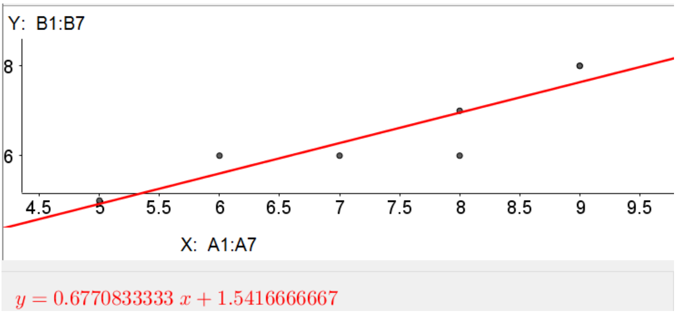
H6. **a)** Kopioidaan luvut sopivaan ohjelmaan ja analysoidaan aineisto.

Tuomarin A antamien arvosanojen keskihajonta on 7,428… ≈ 7,4 ja tuomarin B antamien arvosanojen keskihajonta 6,571… ≈ 6,6.

Vastaus: A: $s \approx 7{,}4$ ja B: $s \approx 6{,}6$

KeskiarvoX	7.4285714286
KeskiarvoY	6.5714285714
Sx	1.511857892
Sy	1.133893419
r	0.9027777778
ρ	0.9337145191
Sxx	13.7142857143
VarianssiY	7.7142857143
Sxy	9.2857142857

b) Suoran yhtälö saadaan ohjelman avulla.



Ohjelma antaa suoran yhtälöksi $y = 0{,}6770\ldots x + 1{,}5416\ldots$ ja korrelaatiokertoimeksi $r = 0{,}902\ldots \approx 0{,}90$.

Vastaus: $y = 0{,}68x + 1{,}54$; $r \approx 0{,}90$

c) Määritetään tuomarin B luultavasti antama arvosana ohjelman avulla.

$y = 0.6770833333\, x + 1.5416666667$

Tarkka arvo: x = 10 y = 8.3125

Kun tuomari A antaa arvosanan 10, antaa tuomari B mallin mukaan arvosanan 8,3125 ≈ 8.

Vastaus: arvosanan 8

H7. **a)** $P(\text{varusmies sairastuu}) = \dfrac{5}{30\,000} = 0{,}000166... \approx 0{,}00017 = 0{,}017\ \%$

Satunnainen varusmies sairastuu aivokalvontulehdukseen todennäköisyydellä 0,017 %.

Vastaus: 0,017 %

b) $P(\text{muu kuin varusmies sairastuu})$

$$= \frac{50-5}{5\,500\,000-30\,000}$$

$$= \frac{45}{5\,470\,000}$$

$$= 0{,}000\,008\,226...$$

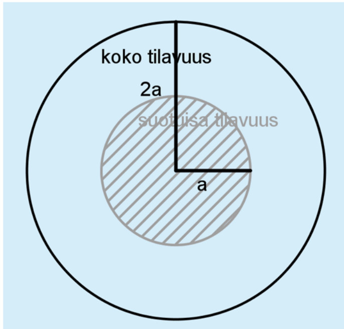
Lasketaan, kuinka moninkertainen varusmiesten sairastumisriski on tähän verrattuna

$$\frac{0{,}000\,166...}{0{,}000\,008\,226...} = 20{,}259...$$

Varusmiehen sairastumisriski on muuhun väestöön nähden 20,259… ≈ 20-kertainen.

Vastaus: n. 20-kertainen

H8. Kyseessä on geometrinen todennäköisyys, jossa mittana on tilavuus. Piste on lähempänä pallon pintaa kuin sen keskipistettä, jos piste ei ole pallon sisällä olevan samankeskisen pienemmän pallon sisällä.
Merkitään pienemmän pallon sädettä kirjaimella a. Tällöin ison pallon säde on $2a$.



Koko pallon tilavuus on

$$\frac{4\pi\cdot(2a)^3}{3}=\frac{4\pi\cdot 2^3a^3}{3}=\frac{4\pi\cdot 8a^3}{3}=\frac{32\pi a^3}{3}$$

Sisällä olevan pienemmän pallon tilavuus on $\frac{4\pi a^3}{3}$.
Lasketaan suotuisa tilavuus eli ison ja pienen pallon tilavuuksien erotus.

$$\frac{32\pi a^3}{3}-\frac{4\pi a^3}{3}=\frac{28\pi a^3}{3}.$$

Kysytty todennäköisyys on
P(piste on lähempänä pallon pintaa kuin keskipistettä)

$$=\frac{\frac{28\pi a^3}{3}}{\frac{32\pi r^3}{3}}$$

$$=\frac{28\pi r^3}{3}:\frac{32\pi r^3}{3}$$

$$=\frac{28\pi r^3}{3}\cdot\frac{3}{32\pi r^3}$$

$$=\frac{28^{(4}}{32}$$

$$=\frac{7}{8}$$

$$=0{,}875$$

$$\approx 0{,}88.$$

Piste on lähempänä pallon pintaa kuin keskipistettä todennäköisyydellä $\frac{7}{8}\approx 0{,}88$.

Vastaus: $\frac{7}{8}\approx 0{,}88$