KERTAUS

KERTAUSTEHTÄVIÄ

K1. **a)** Keskimääräinen muutosnopeus välillä [0, 2] saadaan laskemalla kohtia $x = 0$ ja $x = 2$ vastaavien kuvaajan pisteiden kautta piirretyn sekantin kulmakerroin.

Sekantti kulkee kuvan perustella pisteiden (0, −1) ja (2, 2) kautta, joten sekantin kulmakerroin on

$$k = \frac{2-(-1)}{2-0} = \frac{3}{2}.$$

Funktion f keskimääräinen muutosnopeus välillä [0, 2] on $\frac{3}{2}$.

Vastaus: $\frac{3}{2}$

b) Hetkellinen muutosnopeus kohdassa $x = 3$ saadaan laskemalla kohtaa $x = 3$ vastaavaan kuvaajan pisteeseen piirretyn tangentin kulmakerroin.

Tangentti kulkee kuvan perusteella pisteiden (3, −2) ja (2, 1) kautta, joten tangentin kulmakerroin on

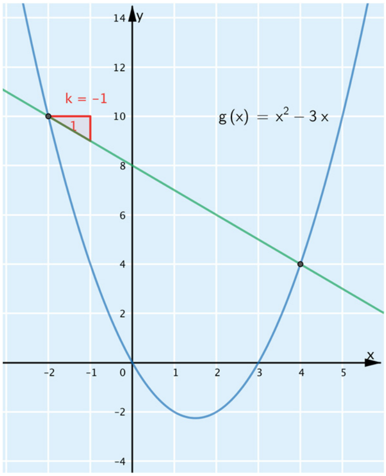
$$k = \frac{1-(-2)}{2-3} = \frac{3}{-1} = -3.$$

Funktion f hetkellinen muutosnopeus kohdassa $x = 3$ on −3.

Vastaus: −3

K2. **a)** Keskimääräinen muutosnopeus välillä [−2, 4] saadaan määrittämällä kohtia $x = -2$ ja $x = 4$ vastaavien kuvaajan pisteiden kautta kulkevan funktiolle g piirretyn sekantin kulmakerroin.

Piirretään sopivalla ohjelmalla funktion g kuvaaja ja kuvaajalle sekantti kohtien $x = -2$ ja $x = 4$ kautta.

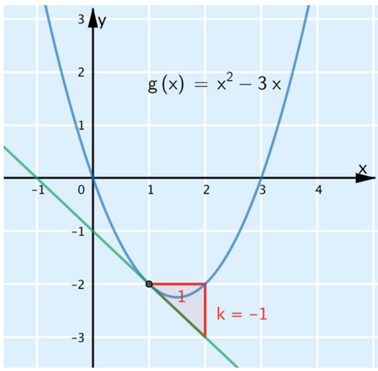


Ohjelma antaa sekantin kulmakertoimeksi $k = -1$, joten funktion g keskimääräinen muutosnopeus välillä [−2, 4] on −1.

Vastaus: −1

b) Hetkellinen muutosnopeus kohdassa $x = 1$ saadaan määrittämällä funktion kuvaajalle kohtaan $x = 1$ piirretyn tangentin kulmakerroin.

Piirretään funktiolle g tangentti kohtaan $x = 1$.



Ohjelma antaa tangentin kulmakertoimeksi $k = -1$, joten funktion g hetkellinen muutosnopeus kohdassa $x = 1$ on −1.

Vastaus: −1

K3. Koska funktion f derivaatta on kaikkialla $f'(x) = 2$, funktion f hetkellinen muutosnopeus on kaikkialla 2 ja funktion f kuvaaja suora, jonka kulmakerroin on $k = 2$. Funktion f lauseke on siis muotoa $f(x) = 2x + b$.

Koska $f(-3) = 5$, voidaan vakiotermi b ratkaista yhtälön avulla.

$$\begin{aligned} 2\cdot(-3)+b &= 5 \\ -6+b &= 5 \\ b &= 11 \end{aligned}$$

Sijoitetaan $b = 11$ funktion lausekkeeseen $f(x) = 2x + b$, jolloin $f(x) = 2x + 11$.

Lasketaan $f(4)$ sijoittamalla $x = 4$ funktion f lausekkeeseen.
$f(4) = 2 \cdot 4 + 11 = 19$

Vastaus: $f(4) = 19$

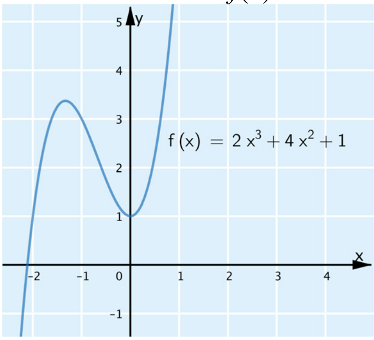
K4. Lasketaan kunnan asukasluvun keskimääräinen muutosnopeus, kun tiedetään, että vuonna 2013 asukkaita oli 10 097 ja vuonna 2017 asukkaita oli 9758.

Asukkaiden määrä muuttui 9758 – 10 097 = −339 asukkaalla, kun aikaa kului 2017 − 2013 = 4 vuotta.

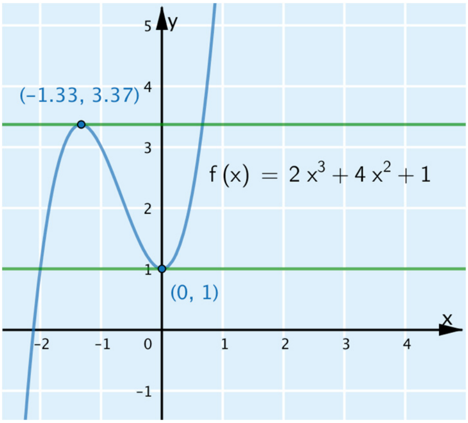
Kunnan asukasluvun keskimääräinen muutosnopeus oli siis
$\frac{-339}{4} = -84,75 \approx -85$ asukasta/vuosi.

Vastaus: −85 asukasta/vuosi

K5. Piirretään funktion $f(x) = 2x^3 + 4x^2 + 1$ kuvaaja.



a) Funktion f derivaatta on nolla niissä kohdissa, joissa funktion f kuvaajalle piirretyt tangentit ovat vaakasuoria. Piirretään funktiolle f vaakasuorat tangentit.



Kohtiin $x \approx 1{,}33$ ja $x \approx 0$ piirretyt tangentit ovat vaakasuoria.
Funktion f derivaatta on nolla muuttujan arvoilla $x \approx 1{,}33$ ja $x \approx 0$.

Vastaus: $x \approx 1{,}33$ ja $x \approx 0$

b) Funktion f derivaatta on negatiivinen, kun funktion kuvaajalle piirretty tangentti on laskeva suora.

Kuvaajan perusteella jokaiseen kohtaan likimain välillä $-1{,}33 < x < 0$ piirretyt tangentit ovat laskevia suoria, joten funktion f derivaatta on negatiivinen, kun muuttuja on likimain välillä $-1{,}33 < x < 0$.

Vastaus: likimain, kun $-1{,}33 < x < 0$

c) Funktion f derivaatta on positiivinen, kun funktion kuvaajalle piirretty tangentti on nouseva suora.

Kuvaajan perusteella jokaiseen kohtaan likimain väleillä $x < -1{,}33$ ja $x > 0$ piirretyt tangentit ovat nousevia suoria, joten funktion f derivaatta on positiivinen, kun muuttuja on likimain väleillä $x < -1{,}33$ ja $x > 0$.

Vastaus: likimain, kun $x < -1{,}33$ ja $x > 0$

K6. **a)** $f(x) = -x + 3$
$f'(x) = -1 + 0 = -1$

b) $g(x) = x^2 + 4x + 4$
$g'(x) = 2x^{2-1} + 4 + 0 = 2x + 4$

b) $h(x) = 3x^4 - 6x^2 - 12$
$h'(x) = 3 \cdot 4x^{4-1} - 6 \cdot 2x^{2-1} - 0 = 12x^3 - 12x$

K7. **a)** Sievennetään lauseke ennen derivoimista.

$$\begin{aligned}(2x-1)(4-3x) &= 2x\cdot 4+2x\cdot(-3x)+(-1)\cdot 4+(-1)\cdot(-3x)\\ &= 8x-6x^2-4+3x\\ &= -6x^2+11x-4\end{aligned}$$

Derivoidaan sievennetty lauseke.

$$D(-6x^2+11x-4)=-6\cdot 2x^{2-1}+11-0=-12x+11$$

Vastaus: $-12x+11$

b) Sievennetään lauseke ennen derivoimista.

$$\frac{6t^3-12t^2}{3}=\frac{6t^3}{3}-\frac{12t^2}{3}=2t^3-4t^2$$

Derivoidaan sievennetty lauseke.

$$D(2t^3-4t^2)=2\cdot 3t^{3-1}-2\cdot 4t^{2-1}=6t^2-8t$$

Vastaus: $6t^2-8t$

K8. **a)** Derivoidaan funktio $f(x) = -3x^3 + 4x + 2$.
$f'(x) = -9x^2 + 4$

Lasketaan derivaatan arvo kohdassa $x = 1$ sijoittamalla $x = 1$ derivaattafunktion lausekkeeseen.
$f'(1) = -9 \cdot 1^2 + 4 = -5$.

Vastaus: $f'(1) = -5$

b) Ratkaistaan derivaatan nollakohdat yhtälöstä $f'(x) = 0$.

$$
\begin{aligned}
-9x^2 + 4 &= 0 \\
-9x^2 &= -4 \quad \| : (-9) \\
x^2 &= \frac{4}{9} \\
x &= \pm\frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

Derivaatan nollakohdat ovat $\pm\frac{2}{3}$.

Vastaus: $x = \pm\frac{2}{3}$

K9. **a)** Lasketaan $f(-2)$ sijoittamalla $x = -2$ funktioon $f(x) = x^2 + 4x + 2$.
$f(-2) = (-2)^2 + 4 \cdot (-2) + 2 = 4 - 8 + 2 = -2$

Derivoidaan funktio $f(x) = x^2 + 4x + 2$.
$f'(x) = 2x + 4$

Lasketaan $f'(-2)$ sijoittamalla $x = -2$ funktioon $f'(x) = 2x + 4$.
$f'(-2) = 2 \cdot (-2) + 4 = 0$

Vastaus: $f(-2) = -2$, $f'(-2) = 0$

b) Ratkaistaan yhtälö $f(x) = -2$.
$x^2 + 4x + 2 = -2$
$x^2 + 4x + 4 = 0$

Sijoitetaan kertoimet $a = 1$, $b = 4$ ja $c = 4$ toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan.

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}$$
$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{2}$$
$$x = -2$$

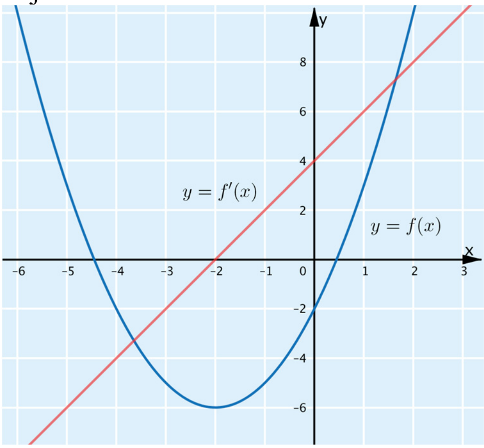
Ratkaistaan yhtälö $f'(x) = -2$.

$$\begin{aligned} 2x + 4 &= -2 \\ 2x &= -6 \quad \| :2 \\ x &= -3 \end{aligned}$$

Vastaus: $x = -2$, $x = -3$

K10. Derivoidaan funktio $f(x) = x^2 + 4x - 2$.
$f'(x) = 2x + 4$

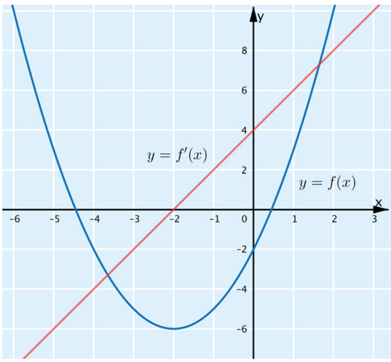
Piirretään funktioiden kuvaajat samaan koordinaatistoon sopivalla ohjelmalla.



Ratkaistaan yhtälö $f'(x) = 0$.

$$2x + 4 = 0$$
$$2x = -4 \quad \|:2$$
$$x = -2$$

Vastaus:



, $x = -2$

K11. Tangentti on vaakasuorassa, kun sen kulmakerroin on 0. Kuvaajan kohtaan piirretyn tangentin kulmakerroin on derivaatan arvo kyseisessä kohdassa. Paraabeli $y = x^2 - 3x + 4$ on funktion $f(x) = x^2 - 3x + 4$ kuvaaja.

Derivoidaan funktio f.
$f'(x) = 2x - 3$

Muodostetaan derivaattafunktion avulla yhtälö ja ratkaistaan siitä kohta, jossa tangentti on vaakasuora.

$$\begin{aligned} 2x - 3 &= 0 \\ 2x &= 3 \quad \| :2 \\ x &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Pisteen x-koordinaatti on $\frac{3}{2}$.
Ratkaistaan pisteen y-koordinaatti x-koordinaatin ja funktion f avulla.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{3}{2}\right) &= \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{3}{2} + 4 \\ &= \frac{9}{4} - {}^{2)}\frac{9}{2} + {}^{4)}\frac{4}{1} \\ &= \frac{9}{4} - \frac{18}{4} + \frac{16}{4} \\ &= \frac{7}{4} \end{aligned}$$

Paraabelin pisteeseen $\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right)$ piirretty tangentti on vaakasuora.

Vastaus: $\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right)$

K12. Tangentti on suora, jonka yhtälö on muotoa $y = kx + b$. Selvitetään suoran yhtälön muodostamista varten suoran kulmakerroin k ja vakiotermi b. Tangentin kulmakerroin on derivaatan arvo siinä kohdassa, johon tangentti on piirretty, eli nyt $k = f'(-2)$.

Derivoidaan funktio $f(x) = -x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + 1$.

$f'(x) = -3x^2 - x + 1$

Kulmakerroin on $k = f'(-2) = -3 \cdot (-2)^2 - (-2) + 1 = -9$.

Suoran yhtälö on siis $y = -9x + b$.

Ratkaistaan vakiotermi b sijoittamalla pisteen $(-2, 5)$ koordinaatit suoran yhtälöön.

$$5 = -9 \cdot (-2) + b$$
$$b = 5 - 18$$
$$b = -13$$

Tangentin yhtälö on $y = -9x - 13$.

Vastaus: $y = -9x - 13$

K13. Derivoidaan funktio $f(x) = -a^2x^2 + 6x$.
$f'(x) = -2a^2x + 6$

Derivaatalla on nollakohta $x = 3$, joten $x = 3$ toteuttaa yhtälön $-2a^2x + 6 = 0$.

Sijoitetaan $x = 3$ yhtälöön $-2a^2x + 6 = 0$, ja ratkaistaan vakio a.

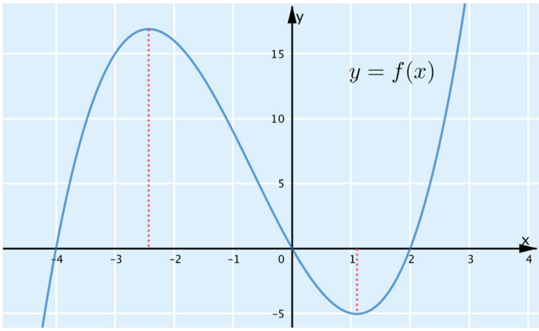
$$\begin{aligned}
-2a^2x + 6 &= 0 \\
-2a^2 \cdot 3 + 6 &= 0 \\
-6a^2 + 6 &= 0 \\
-6a^2 &= -6 \qquad \| : (-6) \\
a^2 &= 1 \\
a &= \pm 1
\end{aligned}$$

Vastaus: $a = \pm 1$

K14. **a)** Kuvan perusteella funktio on kasvava, kun vasemmalta oikealla luettaessa kuvaaja nousee ylöspäin, ja vastaavasti vähenevä, kun kuvaaja laskee alaspäin.

Kuvan perusteella funktio f on kasvava likimain, kun $x \le -2{,}4$ tai $x \ge 1{,}1$.

Funktio f on vähenevä likimain, kun $-2{,}4 \le x \le 1{,}1$.

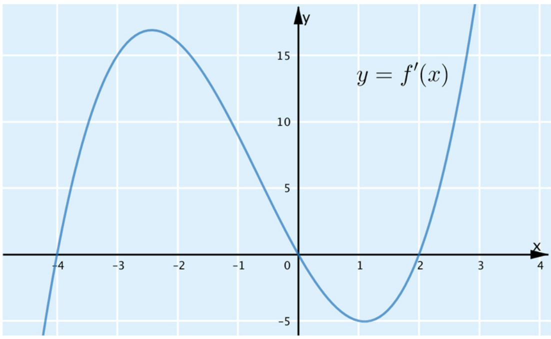


Vastaus: kasvava likimain, kun $x \le -2{,}4$ tai $x \ge 1{,}1$, vähenevä likimain, kun $-2{,}4 \le x \le 1{,}1$

b) Kuvassa on funktion f derivaattafunktion f' kuvaaja. Funktio on kasvava, kun funktion derivaatta on positiivinen. Vastaavasti funktio on vähenevä, kun funktion derivaatta on negatiivinen.

Kuvan perusteella funktio f on kasvava likimain, kun $-4 \le x \le 0$ tai $x \ge 2$.

Funktio f on vähenevä likimain, kun $x \le -4$ tai $0 \le x \le 2$.



Vastaus: kasvava likimain, kun $-4 \le x \le 0$ tai $x \ge 2$, vähenevä likimain, kun $x \le -4$ tai $0 \le x \le 2$

K15. Merkkikaaviossa lukusuora jakautuu funktion nollakohtien rajoittamiin väleihin. Merkkikaaviosta voidaan lukea, minkä merkkisiä arvoja funktio saa kullakin lukusuoran välillä.

	-11	8	27	
$f(x)$ $-$	$+$	$+$	$-$	

a) Merkkikaaviosta nähdään, että funktio saa positiivisia arvoja, kun $-11 < x < 27$ ja $x \neq 8$.

Vastaus: $-11 < x < 27$ ja $x \neq 8$

b) Epäyhtälön $f(x) < 0$ ratkaisu on ne lukusuoran välit, joissa funktio f saa negatiivisia arvoja.

Merkkikaaviosta nähdään, että funktio saa negatiivisia arvoja, kun $x < -11$ tai $x > 27$.

Vastaus: $x < -11$ tai $x > 27$

K16. Kulkukaaviossa ylemmällä rivillä on derivaatan merkit ja alemmalla rivillä funktion kasvavuus ja vähenevyys. Annettujen tietojen perusteella derivaatan nollakohdat ovat -11, 3 ja 9. Nämä arvot jakavat lukusuoran neljään väliin. Merkitään näille väleille tehtävänannon tietojen mukaisesti funktion derivaatan merkit. Funktio on kasvava, kun derivaatta on positiivinen, ja vähenevä, kun derivaatta on negatiivinen.

	-11	3	9	
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	↗	↘	↗	↗

Kulkukaaviosta nähdään, että funktio on vähenevä, kun $-11 \leq x \leq 3$.

Vastaus:

	-11	3	9	
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	↗	↘	↗	↗

$-11 \leq x \leq 3$

K17. Laaditaan funktion f kulkukaavio derivaatan avulla. Derivoidaan funktio
$f(x) = -3x^3 + 6x - 3$.
$f'(x) = -9x^2 + 6$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat yhtälöstä $f'(x) = 0$.

$$\begin{aligned}
-9x^2 + 6 &= 0 \\
-9x^2 &= -6 \qquad \| :(-9) \\
x^2 &= \frac{-6}{-9} \\
x^2 &= \frac{2}{3} \\
x &= \pm\sqrt{\frac{2}{3}} \\
x &\approx \pm 0{,}816...
\end{aligned}$$

Valitaan kohdat nollakohtien rajaamilta lukusuoran väleiltä ja lasketaan derivaatan f' arvot niissä. Laaditaan merkkikaavio.
$f'(-1) = -9 \cdot (-1)^2 + 6 = -3 < 0$
$f'(0) = -9 \cdot 0^2 + 6 = 6 > 0$
$f'(1) = -9 \cdot 1^2 + 6 = -3 < 0$

	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	
$f(x)$	$-$	$+$	$-$
$f'(x)$	↘	↗	↘

Kulkukaaviosta nähdään, että funktio on kasvava, kun $-\sqrt{\frac{2}{3}} \leq x \leq \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Vastaus: $f'(x) = -9x^2 + 6$,

	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	
$f(x)$	$-$	$+$	$-$
$f'(x)$	↘	↗	↘

, $-\sqrt{\frac{2}{3}} \leq x \leq \sqrt{\frac{2}{3}}$

K18. Funktio $s(t) = t^3 - 8t^2 + 16t$ ilmaisee hiukkasen etäisyyden mittarista, joten kun funktio s on kasvava, hiukkanen etääntyy mittarista. Muodostetaan kulkukaavio ja päätellään funktion kasvavuus kulkukaavion avulla.

Derivoidaan funktio.
$s(t) = t^3 - 8t^2 + 16t$
$s'(t) = 3t^2 - 16t + 16$

Määritetään derivaatan nollakohdat yhtälön $s'(x) = 0$ avulla.
$3t^2 - 16t + 16 = 0$
Sijoitetaan kertoimet $a = 3$, $b = -16$ ja $c = 16$ toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan.

$$t = \frac{16 \pm \sqrt{(-16)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 16}}{2 \cdot 3}$$

$$t = \frac{16 \pm \sqrt{64}}{6}$$

$$t = \frac{16 \pm 8}{6}$$

$$t = 4 \quad \text{tai} \quad t = \frac{4}{3}$$

Valitaan kohdat nollakohtien rajaamilta väleiltä ja lasketaan derivaatan s' arvot niissä. Laaditaan merkkikaavio.

$s'(1) = 3 \cdot 1^2 - 16 \cdot 1 + 16 = 3 > 0$
$s'(3) = 3 \cdot 3^2 - 16 \cdot 3 + 16 = -5 < 0$
$s'(5) = 3 \cdot 5^2 - 16 \cdot 5 + 16 = 11 > 0$

	$\frac{4}{3}$	4	
$s'(t)$	$+$	$-$	$+$
$s(t)$	↗	↘	↗

Koska funktio oli rajoitettu välille [0, 4], nähdään kulkukaavion avulla, että funktio on kasvava, kun $0 \leq t \leq \frac{4}{3}$. Joten hiukkanen etääntyy mittarista $\frac{4}{3} \approx 1,33$ sekunnin ajan.

Vastaus: 1,33 sekunnin ajan

K19. Polynomifunktio saa suljetulla välillä suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteissä tai välillä olevissa derivaatan nollakohdissa. Derivoidaan funktio.

$f(x) = x^3 - 6x^2$
$f'(x) = 3x^2 - 12x$

Määritetään derivaatan nollakohdat yhtälöstä $f'(x) = 0$.
$3x^2 - 12x = 0$

Sijoitetaan kertoimet $a = 3$, $b = -12$ ja $c = 0$ toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan.

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 0}}{2 \cdot 3}$$
$$x = \frac{12 \pm \sqrt{144}}{6}$$
$$x = \frac{12 \pm 12}{6}$$
$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x = 4$$

Derivaatan nollakohdista kohta $x = 0$ kuuluu tarkasteltavalle välille. Lasketaan funktion arvo välin päätepisteissä ja välille kuuluvassa derivaatan nollakohdassa.

$f(-2) = (-2)^3 - 6 \cdot (-2)^2 = -32$ (pienin)
$f(0) = 0^3 - 6 \cdot 0^2 = 0$ (suurin)
$f(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 = -27$

Välillä $[-2, 3]$ funktion f suurin arvo on 0 ja pienin arvo -32.

Vastaus: suurin 0, pienin -32

K20. Funktion paikalliset ääriarvokohdat ja paikalliset ääriarvot voidaan etsiä kulkukaavion avulla. Derivoidaan funktio.

$f(x) = x(x^2 - 12) = x^3 - 12x$
$f'(x) = 3x^2 - 12$

Lasketaan derivaatan nollakohdat yhtälöstä $f'(x) = 0$.

$$
\begin{aligned}
3x^2 - 12 &= 0 \\
3x^2 &= 12 \quad \| :3 \\
x^2 &= 4 \\
x &= \pm 2
\end{aligned}
$$

Valitaan kohdat nollakohtien rajaamilta lukusuoran väleiltä ja lasketaan derivaatan f' arvot niissä. Laaditaan kulkukaavio.

$f'(-3) = 3 \cdot (-3)^2 - 12 = 15 > 0$
$f'(0) = 3 \cdot 0^2 - 12 = -12 < 0$
$f'(3) = 3 \cdot 3^2 - 12 = 15 > 0$

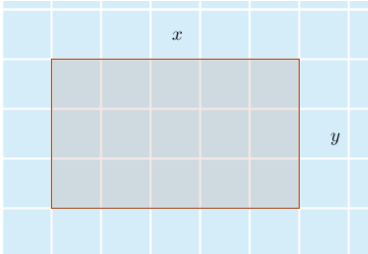
		-2		2	
$f'(x)$	$+$		$-$		$+$
$f(x)$	↗		↘		↗
		max		min	

Funktiolla f on paikallinen maksimikohta $x = -2$ ja paikallinen maksimiarvo on $f(-2) = (-2)^3 - 12 \cdot (-2) = 16$.

Funktiolla f on paikallinen minimikohta $x = 2$ ja paikallinen minimiarvo on $f(2) = 2^3 - 12 \cdot 2 = -16$.

Vastaus: paikallinen maksimikohta -2 ja maksimiarvo 16, paikallinen minimikohta 2 ja minimiarvo -16

K21. Piirretään tilanteesta mallikuva.



Suorakulmion muotoisen alueen pinta-ala on kanta · korkeus. Merkitään kantaa kirjaimella x ja korkeutta kirjaimella y.
$A = xy$

Lisäksi tiedetään, että

$$
\begin{aligned}
2x + 2y &= 5 \\
2y &= 5 - 2x \qquad \| :2 \\
y &= \frac{5}{2} - x.
\end{aligned}
$$

Sijoitetaan tämä tieto pinta-alan lausekkeeseen, jolloin saadaan pinta-alan funktio, jossa muuttujana on kanta x.

$$
\begin{aligned}
A(x) &= x\left(\frac{5}{2} - x\right) \\
A(x) &= \frac{5}{2}x - x^2
\end{aligned}
$$

Jos jommallekummalle sivulle laitetaan puolet aidasta, toisen sivun pituus menee nollaan, ja pinta-ala menee nollaan. Joten kannan x pituus on rajoitettu välille $\left[0, \frac{5}{2}\right]$.

Polynomifunktio saa suljetulla välillä suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteissä tai välillä olevissa derivaatan nollakohdissa. Derivoidaan funktio.

$$
\begin{aligned}
A(x) &= \frac{5}{2}x - x^2 \\
A'(x) &= \frac{5}{2} - 2x
\end{aligned}
$$

Määritetään derivaatan nollakohdat yhtälöstä $A'(x) = 0$.

$$\frac{5}{2}-2x=0$$
$$-2x=-\frac{5}{2} \quad \|:(-2)$$
$$x=\frac{5}{4}$$

Lasketaan funktion arvot suljetun välin päätepisteissä ja derivaatan nollakohdassa. Välin päätepisteet ovat 0 ja $\frac{5}{2}$, joten derivaatan nollakohta $\frac{5}{4}$ on tällä välillä.

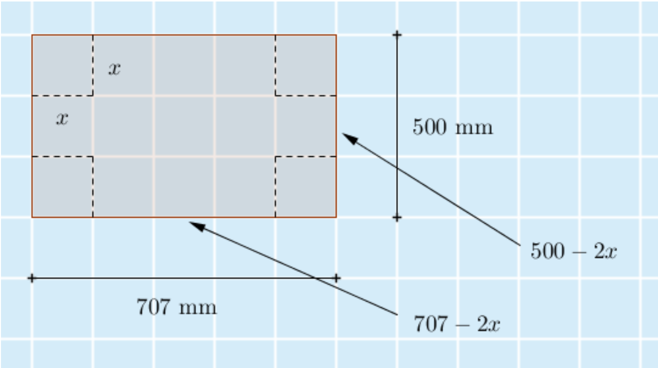
$$A(0)=\frac{5}{2}\cdot 0-0^2=0$$
$$A\left(\frac{5}{4}\right)=\frac{5}{2}\cdot\frac{5}{4}-\left(\frac{5}{4}\right)^2=\frac{25}{16}=1,5625$$
$$A\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{5}{2}\cdot\frac{5}{2}-\left(\frac{5}{2}\right)^2=0$$

Pinta-ala on suurimmillaan, kun kanta on $x = \frac{5}{4}=1,25$ ja korkeus

$$y=\frac{5}{2}-x=\frac{5}{2}-\frac{5}{4}=\frac{10}{4}-\frac{5}{4}=\frac{5}{4}=1,25.$$

Vastaus: 1,25 m ja 1,25 m

K22. Piirretään tilanteesta mallikuva. Merkitään poisleikattavan neliön sivun pituutta kirjaimella x.



Kun sivut taitetaan ylös, muodostuvan laatikon tilavuus on pituus · leveys · korkeus.

Nyt
$V(x) = (707 - 2x)(500 - 2x)x = 4x^3 - 2414x^2 + 353500x$

Jos poisleikattavan neliön sivun pituus on 0, on tilavuus 0.

Jos poisleikattavan neliön sivun pituus on puolet lyhemmästä sivusta, on särmiön pohjan lyhemmän sivun pituus 0.

Poisleikattavan neliön sivun pituus on siis rajoitettu välille [0, 250].

Polynomifunktio saa suljetulla välillä suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteissä tai välillä olevissa derivaatan nollakohdissa.

Derivoidaan funktio.
$V(x) = 4x^3 - 2414x^2 + 353500x$
$V'(x) = 12x^2 - 4828x + 353500$

Määritetään derivaatan nollakohdat yhtälöstä $V'(x) = 0$.

$12x^2 - 4828x + 353500 = 0$

Sijoitetaan kertoimet $a = 12$, $b = -4828$ ja $c = 353500$ toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan.

$$x = \frac{4828 \pm \sqrt{(-4828)^2 - 4 \cdot 12 \cdot 353500}}{2 \cdot 12}$$
$$x = 96{,}239... \quad \text{tai} \quad x = 306{,}093...$$

Lasketaan funktion arvo suljetun välin päätepisteissä ja välille kuuluvissa derivaatan nollakohdissa. Välin päätepisteet ovat 0 ja 250, joten välille kuuluu derivaatan nollakohdista vain 96,239…

$$\begin{aligned} V(0) &= 4 \cdot 0^3 - 2414 \cdot 0^2 + 353500 \cdot 0 = 0 \\ V(96{,}239...) &= 4 \cdot 96{,}239...^3 - 2414 \cdot 96{,}239...^2 + 353500 \cdot 96{,}239... \\ &= 15\ 227\ 592{,}32 \\ V(250) &= 4 \cdot 250^3 - 2414 \cdot 250^2 + 353500 \cdot 250 = 0 \end{aligned}$$

Särmiön tilavuus on suurimmillaan, 15 227 592, 32 mm^3, kun leikatun neliön sivun pituus on 96,239… mm ≈ 96,2 mm.

Vastaus: 96,2 mm

K23. Taulukoidaan tuloja siten, että merkitään lipun hinnan yhden euron muutosten lukumäärää kirjaimella x.

Lipun hinta	Kävijöiden määrä	Tulot
30 €	4000	30 € · 4000 = 120 000 €
30 € + 1 € = 31 €	4000 − 100 = 3900	31 € · 3900 = 120 900 €
30 € + 2 · 1 € = 32 €	4000 − 2 · 100 = 3800	32 € · 3800 = 121 600 €
$30 + x$	$4000 - 100x$	$(30 + x)(4000 - 100x)$

Tulot hinnanmuutosten lukumäärän funktiona ovat
$T(x) = (30 + x)(4000 - 100x) = -100x^2 + 1000x + 120\ 000$

Jos hintaa korotetaan $\frac{4000}{100} = 40$ kertaa, on kävijöitä 0 ja tulot ovat tällöin 0. Jos hintaa alennetaan 30 kertaa, lipun hinta on tällöin 0 ja tulotkin ovat tällöin 0. Joten hinnanmuutosten määrä on rajoitettu välille $[-30, 40]$.

Polynomifunktio saa suljetulla välillä suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteissä tai välillä olevissa derivaatan nollakohdissa.

Derivoidaan funktio.

$$T(x) = -100x^2 + 1000x + 120\ 000$$
$$T'(x) = -200x + 1000$$

Määritetään derivaatan nollakohdat yhtälöstä $T'(x) = 0$.

$$-200x + 1000 = 0$$
$$-200x = -1000 \quad \|:(-200)$$
$$x = 5$$

Lasketaan funktion arvo suljetun välin päätepisteissä ja derivaatan nollakohdassa. Välin päätepisteet ovat −30 ja 40, joten derivaatan nollakohta $x = 5$ kuuluu tälle välille.

$$T(-30) = -100 \cdot (-30)^2 + 1000 \cdot (-30) + 120\ 000 = 0$$
$$T(5) = -100 \cdot 5^2 + 1000 \cdot 5 + 120\ 000 = 122\ 500$$
$$T(40) = -100 \cdot 40^2 + 1000 \cdot 40 + 120\ 000 = 0$$

Lipun hinnalla 30 € + 5 · 1 € = 35 € saadaan suurimmat lipputulot. Suurimmat lipputulot ovat 122 500 €.

Vastaus: 35 €:n hinnalla, 122 500 €

K24. Funktio vähenee nopeimmin kohdassa, jossa funktion derivaatta saa pienimmän arvonsa. Muodostetaan kulkukaavio derivaatalle, joten derivoidaan funktio kahdesti.

$f(x) = x^3 + x^2 - 25x - 25$
$f'(x) = 3x^2 + 2x - 25$
$f''(x) = 6x + 2$

Määritetään derivaatan derivaatan nollakohta yhtälöstä $f''(x) = 0$.

$$\begin{aligned} 6x + 2 &= 0 \\ 6x &= -2 \quad \| :6 \\ x &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Valitaan kohdat nollakohtien rajaamilta lukusuoran väleiltä ja lasketaan derivaatan derivaatan f'' arvot niissä. Laaditaan kulkukaavio.

$f''(-1) = 6 \cdot (-1) + 2 = -4 < 0$
$f''(0) = 6 \cdot 0^2 + 2 = 2 > 0$

		$-\frac{1}{3}$	
$f''(x)$	$-$		$+$
$f'(x)$	↘		↗
		min	

Funktiolla f' on paikallinen minimi kohdassa $x = -\frac{1}{3}$ ja kulkukaavion perusteella tämä kohta on myös funktion pienin arvo. Koska derivaatta saa pienimmän arvonsa kohdassa $x = -\frac{1}{3}$, funktio f vähenee nopeimmin kohdassa $x = -\frac{1}{3}$.

Tangentin yhtälö on muotoa $y = kx + b$, ja nyt

$$k = f'\left(-\frac{1}{3}\right) = 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) - 25 = -\frac{76}{3}$$

Tangentti kulkee pisteen $\left(-\frac{1}{3}, f\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$ kautta. Määritetään pisteen y-koordinaatti.

$$f\left(-\frac{1}{3}\right)=\left(-\frac{1}{3}\right)^3+\left(-\frac{1}{3}\right)^2-25\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)-25=-\frac{448}{27}$$

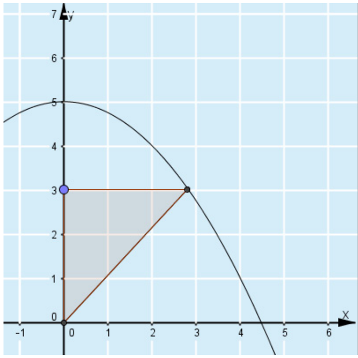
Tangentin vakiotermi saadaan selville sijoittamalla kulmakerroin ja tunnetun pisteen koordinaatit yhtälöön $y = kx + b$.

$$\begin{aligned}-\frac{448}{27}&=-\frac{76}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+b\\ b&=-\frac{448}{27}-\frac{76}{9}\\ b&=-\frac{676}{27}\end{aligned}$$

Tangentin yhtälö on
$$y=-\frac{76}{3}x-\frac{676}{27}$$

Vastaus: $x=-\frac{1}{3}$, $y=-\frac{76}{3}x-\frac{676}{27}$

K25. Hyödynnetään mallikuvaa.



Suorakulmaisen kolmion pinta-ala on $\dfrac{\text{kanta} \cdot \text{korkeus}}{2}$.

Olkoon korkeus y-akselin suuntainen ja kanta x-akselin suuntainen.

Kanta ja korkeus ovat siten paraabelilla $y = -0{,}25x^2 + 5$ olevan pisteen x- ja y-koordinaatit.

$$A(x) = \frac{x \cdot y}{2} = \frac{x(-0{,}25x^2 + 5)}{2} = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{5}{2}x$$

Kuvan avulla nähdään, että jos x-koordinaatti on 0, myös pinta-ala on 0. Suurin mahdollinen muuttujan x arvo saadaan, kun ratkaistaan yhtälö $-0{,}25x^2 + 5 = 0$.

$$\begin{aligned}
-0{,}25x^2 + 5 &= 0 \\
-0{,}25x^2 &= -5 \\
x^2 &= 20 \\
x &= \pm\sqrt{20} \\
x &\approx \pm 4{,}472\ldots
\end{aligned}$$

Hylätään negatiivinen vastaus, joten muuttujan x suurin mahdollinen arvo on $\sqrt{20}$.

Muuttuja x on siis välillä $[0, \sqrt{20}]$.

Polynomifunktio saa suljetulla välillä suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteissä tai välillä olevissa derivaatan nollakohdissa. Derivoidaan funktio A.

$$A(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{5}{2}x$$

$$A'(x) = -\frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{2}$$

Määritetään derivaatan nollakohdat yhtälöstä $A'(x) = 0$.

$$
\begin{aligned}
-\frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{2} &= 0 \\
-\frac{3}{8}x^2 &= -\frac{5}{2} \qquad \|:\left(-\frac{3}{8}\right) \\
x^2 &= \frac{20}{3} \\
x &= \pm\sqrt{\frac{20}{3}} \\
x &\approx \pm 2{,}581..
\end{aligned}
$$

Lasketaan funktion arvo suljetun välin päätepisteissä ja välille kuuluvassa derivaatan nollakohdassa. Välin päätepisteet ovat 0 ja $\sqrt{20}$, joten välille kuuluu derivaatan nollakohta on $\sqrt{\frac{20}{3}}$.

$$
\begin{aligned}
&A(0) = -\frac{1}{8}\cdot 0^3 + \frac{5}{2}\cdot 0 = 0 \\
&A\left(\sqrt{\frac{20}{3}}\right) = -\frac{1}{8}\cdot\left(\sqrt{\frac{20}{3}}\right)^3 + \frac{5}{2}\cdot\sqrt{\frac{20}{3}} = \frac{10\sqrt{15}}{9} = 4{,}303... \\
&A\left(\sqrt{20}\right) = -\frac{1}{8}\cdot\sqrt{20}^3 + \frac{5}{2}\cdot\sqrt{20} = 0
\end{aligned}
$$

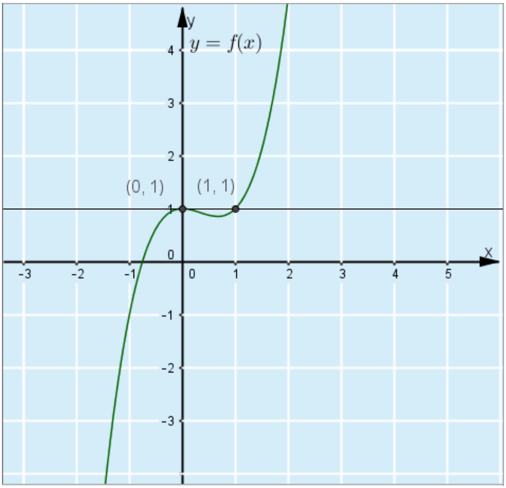
Pinta-ala on suurimmillaan $\frac{10\sqrt{15}}{9} = 4{,}303\ldots \approx 4{,}3$.

Vastaus: $\frac{10\sqrt{15}}{9} \approx 4{,}3$

KOKOAVIA TEHTÄVIÄ

ILMAN TEKNISIÄ APUVÄLINEITÄ

1. **a)** Keskimäärinen muutosnopeus on kuvaajalle kohtien $x = 0$ ja $x = 1$ kautta piirretyn sekantin kulmakerroin. Sekantti kulkee pisteiden (0, 1) ja (1, 1) kautta.



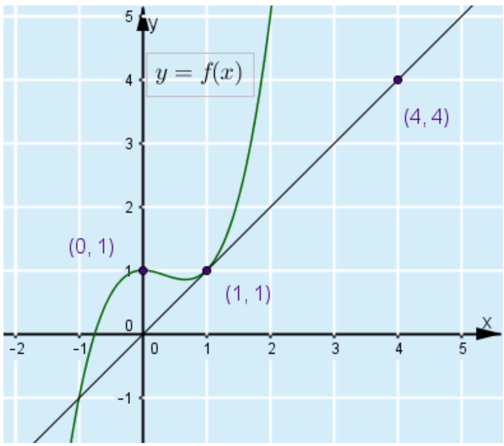
Sekantin kulmakerroin on

$k = \dfrac{1-1}{1-0} = 0,$ joten

funktion *f* keskimääräinen muutosnopeus välillä [0, 1] on 0.

Vastaus: 0

b) Hetkellinen muutosnopeus kohdassa $x = 1$ on tähän kohtaan kuvaajalle piirretyn tangentin kulmakerroin. Tangentti kulkee pisteiden (1, 1) ja (4, 4) kautta.



Tangentin kulmakerroin on $k = \dfrac{4-1}{4-1} = 1,$ joten funktion *f* hetkellinen muutosnopeus kohdassa $x = 1$ on 1.

Vastaus: 1

c) Kuvan perusteella funktio on kasvava, kun vasemmalta oikealla luettaessa kuvaaja nousee ylöspäin, ja vastaavasti vähenevä, kun kuvaaja laskee alaspäin.

Funktio f on kasvava likimain, kun $x \leq 0$ tai $x \geq 0{,}7$. Funktio f on vähenevä likimain, kun $0 \leq x \leq 0{,}7$.

Vastaus: kasvava likimain, kun $x \leq 0$ tai $x \geq 0{,}7$, vähenevä likimain, kun $0 \leq x \leq 0{,}7$

2. **a)** $D(x^2 + 2x - 2) = 2x^{2-1} + 2 - 0 = 2x + 2$

b) Sievennetään lauseke ennen derivointia.
$3x(x - 2) = 3x^2 - 6x$

$D(3x^2 - 6x) = 2 \cdot 3x^{2-1} - 6 = 6x - 6$

c) Sievennetään lauseke ennen derivointia.
$(3x - 3)^2 = 3x \cdot 3x + 3x \cdot (-3) + (-3) \cdot 3x + (-3) \cdot (-3) = 9x^2 - 18x + 9$

$D(9x^2 - 18x + 9) = 2 \cdot 9x^{2-1} - 18 + 0 = 18x - 18$

d) Sievennetään lauseke ennen derivointia.

$$\frac{4x^8 + 32x^2}{16} = \frac{4x^8}{16} + \frac{32x^2}{16} = \frac{1}{4}x^8 + 2x^2$$

$$D\left(\frac{1}{4}x^8 + 2x^2\right) = \frac{1}{4} \cdot 8x^{8-1} + 2 \cdot 2x = 2x^7 + 4x$$

3. **a)** $f(x) = x^2 + 3x - 1$
$f(2) = 2^2 + 3 \cdot 2 - 1 = 9$

b) $f'(x) = D(x^2 + 3x - 1) = 2x + 3$
$f'(2) = 2 \cdot 2 + 3 = 7$

4. **a)** Ratkaistaan epäyhtälö $-3x + 6 > 0$.
Merkitään $f(x) = -3x + 6$.

Ratkaistaan funktion nollakohta yhtälöstä $f(x) = 0$.

$$\begin{aligned} -3x + 6 &= 0 \\ -3x &= -6 \qquad \| :(-3) \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Lasketaan funktion f arvo nollakohdan vasemmalla puolella olevassa pisteessä $x = 0$.
$f(0) = -3 \cdot 0 + 6 = 6 > 0$

Lasketaan funktion f arvo nollakohdan oikealla puolella olevassa pisteessä $x = 3$.
$f(3) = -3 \cdot 3 + 6 = -3 < 0$

Laaditaan merkkikaavio.

	2	
$f(x)$	+	−

Merkkikaaviosta nähdään, että epäyhtälön $-3x + 6 > 0$ ratkaisu on $x < 2$.

Vastaus: $x < 2$

b) Muokataan epäyhtälö $2x^2 + 5x \leq 3$ muotoon, jossa toisella puolella on luku 0, $2x^2 + 5x - 3 \leq 0$.
Merkitään $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$.

Ratkaistaan funktion nollakohdat yhtälöstä $f(x) = 0$.
$2x^2 + 5x - 3 = 0$

Sijoitetaan kertoimet $a = 2$, $b = 5$ ja $c = -3$ toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan.

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2} \\ &= \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{4} \\ &= \frac{-5 \pm 7}{4} \end{aligned}$$

$$x = \frac{-5+7}{4} = \frac{1}{2} \text{ tai } x = \frac{-5-7}{4} = -3$$

Valitaan kohdat nollakohtien rajaamilta lukusuoran väleiltä ja lasketaan funktion f arvot niissä.

$f(-4) = 2 \cdot (-4)^2 + 5 \cdot (-4) - 3 = 9 > 0$
$f(0) = 2 \cdot 0^2 + 5 \cdot 0 - 3 = -3 < 0$
$f(1) = 2 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 - 3 = 4 > 0$

Laaditaan merkkikaavio.

	-3	$\frac{1}{2}$	
$f(x)$	+	−	+

Merkkikaaviosta nähdään, että epäyhtälön $2x^2 + 5x - 3 \leq 0$ ratkaisu on $-3 \leq x \leq \frac{1}{2}$. Tämä on myös epäyhtälön $2x^2 + 5x \leq 3$ ratkaisu.

Vastaus: $-3 \leq x \leq \frac{1}{2}$

5. Funktio on kasvava jollakin välillä, jos sen derivaatta on kyseisellä välillä positiivinen tai nolla välin yksittäisissä pisteissä. Derivoidaan funktio ja tutkitaan derivaatan merkkikaaviota.
$f(x) = -x^2 + 8x - 7$
$f'(x) = -2x + 8$

Laaditaan derivaatalle merkkikaavio. Lasketaan derivaatan nollakohta.
$-2x + 8 = 0$
$-2x = -8 \quad ||:(-2)$
$x = 4$

		4	
$f'(x)$	+		−

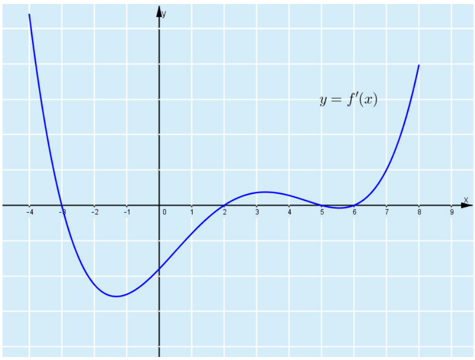
$f'(0) = -2 \cdot 0 + 8 = 8$
$f'(5) = -2 \cdot 5 + 8 = -2$

Merkkikaaviosta nähdään, että derivaatta on positiivinen, kun $x < 4$ ja 0 kun $x = 4$. Joten funktio on kasvava välillä [0, 4].

Vastaus: on

6. Kuvassa on funktion derivaatan kuvaaja. Laaditaan kuvaajan avulla derivaatan kulkukaavio ja päätellään sen avulla funktion f ääriarvokohdat.

Derivaatan nollakohdat ovat $x = -3$, $x = 2$, $x = 5$ ja $x = 6$. Merkitään kulkukaavioon derivaatan nollakohdat ja merkit kullakin välillä.



	-4		-3		2		5		6		8
$f'(x)$		+		−		+		−		+	
$f(x)$		↗		↘		↗		↘		↗	
	min		max		min		max		min		max

Vastaus: paikalliset minimikohdat $x = -4$, $x = 2$ ja $x = 6$, paikalliset maksimikohdat $x = -3$, $x = 5$ ja $x = 8$

7. Polynomifunktio saa suurimman ja pienimmän arvonsa suljetun välin päätepisteissä tai välille kuuluvissa derivaatan nollakohdissa.

a) Derivoidaan funktio.
$f(x) = -x^2 + 3$
$f'(x) = -2x$

Lasketaan derivaatan nollakohta.
$-2x = 0 \quad \|:(-2)$
$x = 0$

Lasketaan funktion arvo kohdissa $x = -4$, $x = 0$ ja $x = 1$.

$f(-4) = -(-4)^2 + 3 = -16 + 3 = -13$ (pienin)
$f(0) = -0^2 + 3 = 3$ (suurin)
$f(1) = -1^2 + 3 = -1 + 3 = 2$

Vastaus: suurin 3, pienin −13

b) Derivoidaan funktio.
$f(x) = -x^3 + 12x + 2$
$f'(x) = -3x^2 + 12$

Lasketaan derivaatan nollakohta.
$-3x^2 + 12 = 0$
$-3x^2 = -12 \quad \|:(-3)$
$x^2 = 4$
$x = \pm 2$

Lasketaan funktion arvo kohdissa $x = -2$, $x = 2$.
$f(-2) = -(-2)^3 + 12 \cdot (-2) + 2 = 8 - 24 + 2 = -14$ (pienin)
$f(-2) = -2^3 + 12 \cdot 2 + 2 = -8 + 24 + 2 = 18$ (suurin)

Vastaus: suurin 18, pienin −14

APUVÄLINEET SALLITTU

8. Derivoidaan funktiot.

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2-5$$
$$f'(x)=x$$

$$g(x)=x^3-2x^2$$
$$g'(x)=3x^2-4x$$

a) Muodostetaan annettu yhtälö ja ratkaistaan siitä muuttujan arvo.

$$f'(x)=g'(x)$$
$$x=3x^2-4x$$
$$3x^2-5x=0$$

Sijoitetaan kertoimet $a = 3$, $b = -5$ ja $c = 0$ toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan.

$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot3\cdot0}}{2\cdot3}$$
$$=\frac{5\pm5}{6}$$
$$x=\frac{5+5}{6}=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}\text{ tai }x=\frac{5-5}{6}=0$$

Vastaus: $x = 0$ tai $x=\frac{5}{3}$

b) Muodostetaan annettu epäyhtälö ja ratkaistaan se.

$$\begin{aligned} f'(x) &> g'(x) \\ x &> 3x^2 - 4x \\ -3x^2 + 5x &> 0 \end{aligned}$$

Merkitään $h(x) = -3x^2 + 5x$.
Funktion nollakohdat saadaan yhtälöstä $h(x) = 0$.
Sijoitetaan kertoimet $a = -3$, $b = 5$ ja $c = 0$ toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan.

$$\begin{aligned} x &= \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 0}}{2 \cdot (-3)} \\ &= \frac{-5 \pm 5}{-6} \end{aligned}$$

$$x = \frac{-5+5}{-6} = 0 \text{ tai } x = \frac{-5-5}{-6} = \frac{-10}{-6} = \frac{5}{3}$$

	0	$\frac{5}{3}$	
$h(x)$	$-$	$+$	$-$

$h(-1) = -3 \cdot (-1)^2 + 5 \cdot (-1) = -8$
$h(1) = -3 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 = 2$
$h(2) = -3 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 = -2$

Merkkikaaviosta nähdään, että lauseke saa nollaa suurempia arvoja, kun $0 < x < \frac{5}{3}$, joten $f'(x) > g'(x)$, kun $0 < x < \frac{5}{3}$.

Vastaus: $0 < x < \frac{5}{3}$

9. Merilinnun sukellus noudattaa funktiota, jossa muuttujana on aika, $t \geq 0$. Sukellus kestää niin kauan kuin etäisyys on negatiivinen, eli merilintu on vedenpinnan alapuolella. Muodostetaan funktion merkkikaavio ja määritetään merkkikaavion avulla sukelluksen kesto.

Ratkaistaan funktion nollakohdat symbolisen laskennan yhtälönratkaisutoiminnolla yhtälöstä $\frac{1}{50}t^2 - \frac{1}{2}t = 0$.

Ratkaisuiksi saadaan $t = 0$ tai $t = 25$.

Muodostetaan merkkikaavio ($t \geq 0$)

	0	25
$f(x)$	$-$	$+$

$$h(10) = \frac{1}{50} \cdot 10^2 - \frac{1}{2} \cdot 10 = 2 - 5 = -3$$
$$h(100) = \frac{1}{50} \cdot 100^2 - \frac{1}{2} \cdot 100 = 2000 - 50 = 1950$$

Lintu on vedenpinnan alapuolella kun $0 \leq t \leq 25$, joten sukellus kestää 25 sekuntia.

Funktion h kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, joten pienin arvo saavutetaan paraabelin huipussa. Derivoidaan funktio h.

$$h(t) = \frac{1}{50}t^2 - \frac{1}{2}t$$
$$h'(t) = \frac{1}{25}t - \frac{1}{2}$$

Lasketaan derivaatan nollakohta.

$$\frac{1}{25}t - \frac{1}{2} = 0$$
$$\frac{1}{25}t = \frac{1}{2} \quad \| : \frac{1}{25}$$
$$t = 12{,}5$$

Sukellus on siis syvimmillään, kun t = 12,5.

$$h(12{,}5)=\frac{1}{50}\cdot 12{,}5^2-\frac{1}{2}\cdot 12{,}5=-3{,}125\approx -3{,}1$$

Sukelluksen syvyys on noin 3,1 m.

Vastaus: 25 sekuntia, 3,1 metrin syvyydellä

10. Muodostetaan pyöräilyreitin mäkiprofiilia noudattavan funktion kulkukaavio. Derivoidaan funktio.

$s(x) = -0{,}009x^3 + 0{,}132x^2 + 1{,}388x + 10$

$s'(x) = -0{,}027x^2 + 0{,}264x + 1{,}388$

Määritetään derivaatan nollakohdat yhtälön $s'(x) = 0$ avulla.

$-0{,}027x^2 + 0{,}264x + 1{,}388 = 0$

Sijoitetaan kertoimet $a = -0{,}027$, $b = 0{,}264$ ja $c = 1{,}388$ toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan.

$$x = \frac{-0{,}264 \pm \sqrt{0{,}264^2 - 4 \cdot (-0{,}027) \cdot 1{,}388}}{2 \cdot (-0{,}027)}$$

$x = -3{,}789\ldots$ tai $x = 13{,}566\ldots$

Hylätään negatiivinen nollakohta, koska $x \geq 0$.

Lasketaan derivaattafunktion arvo nollakohtien määräämillä väleillä.

$s'(1) = -0{,}027 \cdot 1^2 + 0{,}264 \cdot 1 + 1{,}388 = 1{,}625 > 0$

$s'(20) = -0{,}027 \cdot 20^2 + 0{,}264 \cdot 20 + 1{,}388 = -4{,}132 < 0$

	0	13,566…	21
$s\ (x)$	+	−	
$s\ '(x)$	↗	↘	

Kulkukaaviosta nähdään, että funktio on kasvava, kun

$0 \leq x \leq 13{,}566\ldots$

$0 \leq x \leq 13{,}57$

Kulkukaaviosta nähdään, että alusta 13,566… km kohdalle noustaan ylämäkeen, joten nousun määrä saadaan funktion arvojen erotuksena tällä välillä.

$s(13{,}566\ldots) - s(0)$

$= -0{,}009 \cdot 13{,}566\ldots^3 + 0{,}132 \cdot 13{,}566\ldots^2 + 1{,}388 \cdot 13{,}566\ldots + 10$

$\quad - (-0{,}009 \cdot 0^3 + 0{,}132 \cdot 0^2 + 1{,}388 \cdot 0 + 10)$

$= 20{,}65\ldots$

Nousua on $20{,}65\ldots \approx 20{,}7$ metriä.

Vastaus: $0 \leq x \leq 13{,}57$; 20,7 metriä

11. Polynomifunktio saa suurimman arvonsa suljetun välin päätepisteessä tai välille kuuluvassa derivaatan nollakohdassa. Derivoidaan funktio.

$f(x) = -x^3 + 13{,}5x^2 - 41x + 50$
$f'(x) = -3x^2 + 27x - 41$

Määritetään derivaatan nollakohdat yhtälöstä $f'(x) = 0$.
$-3x^2 + 27x - 41 = 0$

Sijoitetaan kertoimet $a = -3$, $b = 27$ ja $c = -41$ toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan.

$$x = \frac{-27 \pm \sqrt{27^2 - 4\cdot(-3)\cdot(-41)}}{2\cdot(-3)}$$
$x = 1{,}93419\ldots$ tai $x = 7{,}06580\ldots$

Lasketaan funktion arvot kohdissa
$x = 0$, $x = 1{,}93419\ldots$, $x = 7{,}06580\ldots$ ja $x = 10$.

$f(0) = -0^3 + 13{,}5 \cdot 0^2 - 41 \cdot 0 + 50 = 50$
$f(1{,}93419\ldots) = -1{,}93419\ldots^3 + 13{,}5 \cdot 1{,}93419\ldots^2 - 41 \cdot 1{,}93419\ldots + 50$
$= 13{,}9669\ldots$
$f(7{,}06580\ldots) = -7{,}06580\ldots^3 + 13{,}5 \cdot 7{,}06580\ldots^2 - 41 \cdot 7{,}06580\ldots + 50$
$= 81{,}5330\ldots$
$f(10) = -10^3 + 13{,}5 \cdot 10^2 - 41 \cdot 10 + 50 = -10$

Suurin arvo on $81{,}5330\ldots \approx 81{,}533$ ja sitä vastaava muuttujan arvo on $7{,}06580\ldots \approx 7{,}066$.

Funktio f kasvaa nopeimmin kohdassa, jossa derivaatan arvo on suurin. Derivoidaan funktion f derivaatta.

$f'(x) = -3x^2 + 27x - 41$
$f''(x) = -6x + 27$

Määritetään nollakohta yhtälön $f''(x) = 0$ avulla.

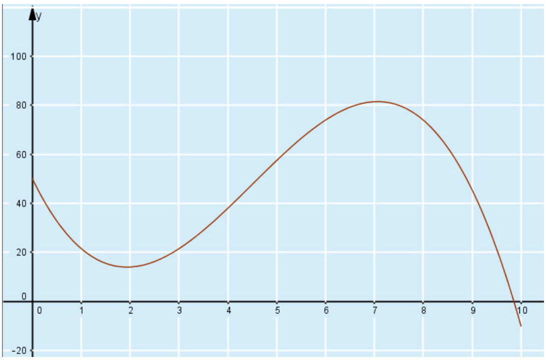
$-6x + 27 = 0$
$-6x = -27 \quad \| :(-6)$
$x = 4{,}500$

Laaditaan funktion f' kulkukaavio.
$f''(1) = -6 \cdot 1 + 27 = 21 > 0$
$f''(5) = -6 \cdot 5 + 27 = -3 < 0$

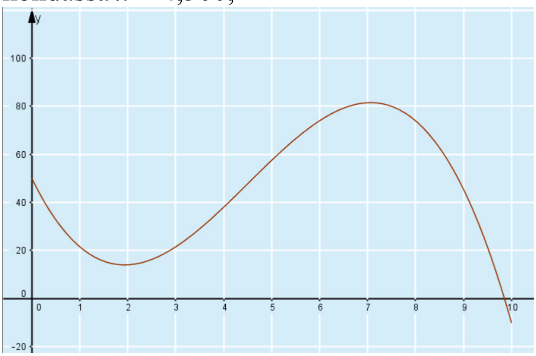
		4,500	
$f''(x)$	+		−
$f'(x)$	↗		↘
		max	

Kulkukaaviosta huomataan, että derivaatta f' saa suurimman arvonsa kohdassa $x = 4{,}500$, joten funktio f kasvaa nopeimmin muuttujan arvolla $x = 4{,}500$.

Piirretään funktion kuvaaja sopivalla ohjelmalla.



Vastaus: suurin arvo 81,533 kohdassa $x \approx 7{,}066$, kasvaa nopeimmin kohdassa $x = 4{,}500$,



12. Merkitään tehtyjen kahden euron suuruisten hinnan muutosten määrää kirjaimella x. Muodostetaan funktio myyntitulolle. Taulukoidaan myyntihintoja, myynnin määriä ja myyntituloja hinnan muutoksen avulla.

Myyntihinta (€ / kpl)	Myynnin määrä (kpl)	Myyntitulo (€)
80	60	$80 \cdot 60$
$80 + 2 \cdot 1 = 82$	$60 - 1 \cdot 1 = 59$	$82 \cdot 59$
$80 + 2 \cdot 2 = 84$	$60 - 1 \cdot 2 = 58$	$84 \cdot 58$
$80 + 2 \cdot x$	$60 - 1 \cdot x$	$(80 + 2x)(60 - x)$

Myyntitulo noudattaa funktiota
$f(x) = (80 + 2x)(60 - x) = -2x^2 + 40x + 4800$

Koska tuotteiden hinta on vähintään 0 euroa, myyntihintaa voidaan laskea enintään 40 kertaa kahdella eurolla. Jos myyntihintaa nostetaan 60 kertaa, myynnin määrä laskee nollaan kappaleeseen. Hinnanmuutosten lukumäärä on välillä $[-40, 60]$.

Polynomifunktion suurin arvo löytyy välin päätepisteistä tai välillä olevista derivaatan nollakohdista. Derivoidaan funktio.
$f(x) = -2x^2 + 40x + 4800$
$f'(x) = -4x + 40$

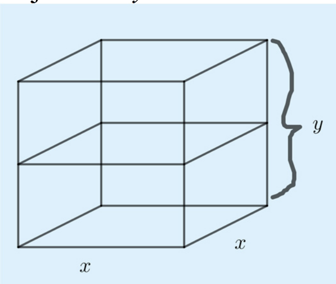
Määritettään derivaatan nollakohta yhtälöstä $f'(x) = 0$.
$-4x + 40 = 0$
$-4x = -40 \quad ||:(-4)$
$x = 10$

Määritetään myyntitulon arvo kohdissa $x = -40$, $x = 10$ ja $x = 60$.
$f(-40) = -2 \cdot (-40)^2 + 40 \cdot (-40) + 4800 = 0$
$f(10) = -2 \cdot 10^2 + 40 \cdot 10 + 4800 = 5000$
$f(60) = -2 \cdot 60^2 + 40 \cdot 60 + 4800 = 0$

Suurin myyntitulo saadaan, kun hintaa nostetaan 10 kertaa, eli asetetaan myyntihinnaksi $80 + 10 \cdot 2 = 100$ euroa. Suurin myyntitulo on 5000 euroa.

Vastaus: 100 euroa, 5000 euroa

13. Merkitään laatikon pohjaneliön sivun pituutta kirjaimella x ja korkeutta kirjaimella y.



a) Laatikossa on 12 pohjaneliön sivun mittaista sivua. Pohjaneliön sivun mitan on oltava vähintään 0 cm, muutoin laatikolla ei ole tilavuutta. Lisäksi, jos pohjaneliön sivut kuluttavat kaiken käytettävän terästangon, laatikolla ei ole tilavuutta. Joten

$12x \leq 960 \quad \|:12$

$x \leq 80$

Pohjaneliön sivun mitta on valittava väliltä [0, 80]

Laatikossa on 4 pystysuoraa tankoa. Pystysuoran tangon on oltava myös vähintään 0 cm. Jos pystysuorat tangot kuluttavat kaiken käytettävän terästangon, laatikolla ei ole tilavuutta. Joten

$4y \leq 960 \quad \|:4$

$y \leq 240$

Korkeus on valittava väliltä [0, 240]

Vastaus: pohjaneliön sivun mitta väliltä [0, 80], korkeus väliltä [0, 240]

b) Laatikon tilavuus on $V = x \cdot x \cdot y$.

Tiedetään, että

$$\begin{aligned} 12x + 4y &= 960 \\ 4y &= 960 - 12x \quad \|:4 \\ y &= 240 - 3x. \end{aligned}$$

Sijoitetaan y:n lauseke tilavuuden lausekkeeseen, jolloin muodostuu tilavuuden funktio pohjaneliön sivun pituuden x avulla.

$$V(x) = x \cdot x \cdot (240 - 3x) = 240x^2 - 3x^3$$

Edellisessä kohdassa havaittiin, että x on välillä $[0, 80]$. Polynomifunktio saa suljetulla välillä suurimman arvonsa välin päätepisteessä tai välillä olevassa derivaatan nollakohdassa. Derivoidaan tilavuuden funktio.

$$V(x) = 240x^2 - 3x^3$$
$$V'(x) = 480x - 9x^2$$

Määritetään derivaatan nollakohdat yhtälöstä $V'(x) = 0$ sopivalla ohjelmalla.

Yhtälön ratkaisut ovat $x = 0$ tai $x = \frac{160}{3}$.

Tilavuuden suurin arvo on joko kohdassa $x = 0$, $x = \frac{160}{3}$ tai $x = 80$.

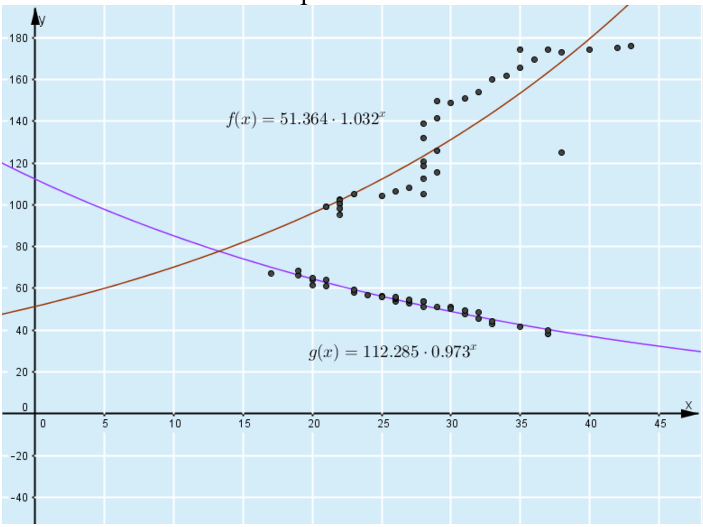
Lasketaan funktion arvo näissä kohdissa.

$$V(0) = 240 \cdot 0^2 - 3 \cdot 0^3 = 0$$
$$V\left(\frac{160}{3}\right) = 240 \cdot \left(\frac{160}{3}\right)^2 - 3 \cdot \left(\frac{160}{3}\right)^3 = 227\ 555{,}55...$$
$$V(80) = 240 \cdot 80^2 - 3 \cdot 80^3 = 0$$

Tilavuus on suurimmillaan 227 555,55… $cm^3 \approx 228\ dm^3$

Vastaus: 228 dm^3

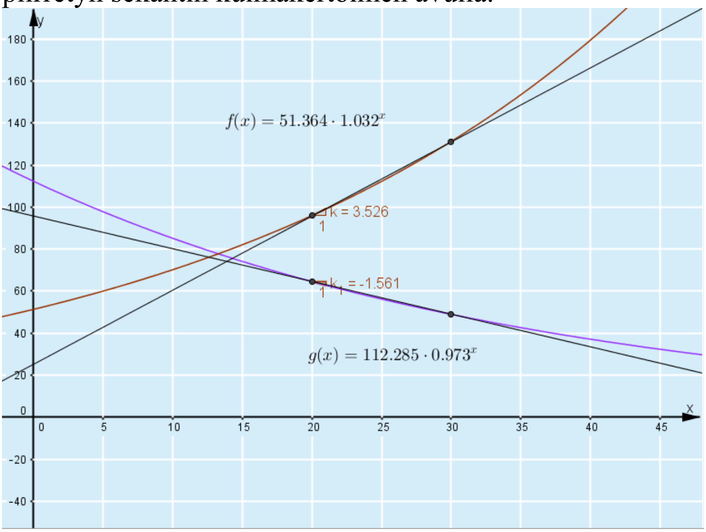
14. **a)** Sovitetaan aineistoon eksponenttifunktiot.



Funktio miesten aineistolle on $f(x) = 51{,}364 \cdot 1{,}032^x$.
Funktio naisten aineistolle on $g(x) = 112{,}285 \cdot 0{,}973^x$.

Vastaus: miehet: $f(x) = 51{,}364 \cdot 1{,}032^x$, naiset: $g(x) = 112{,}285 \cdot 0{,}973^x$

b) Määritetään keskimääräinen muutosnopeus annettujen pisteiden kautta piirretyn sekantin kulmakertoimen avulla.

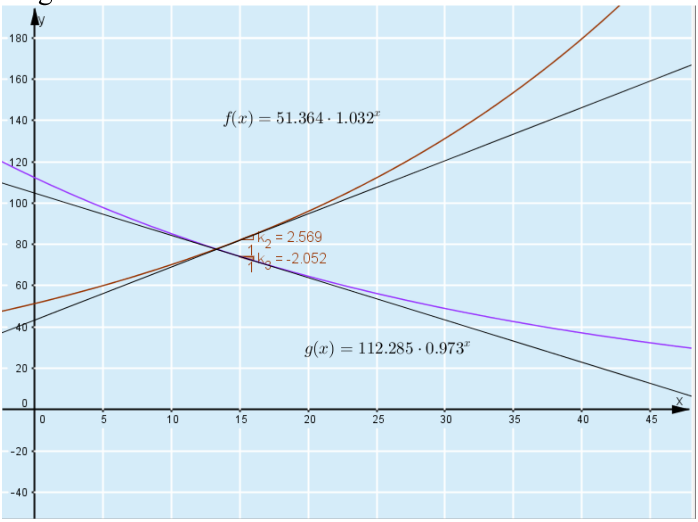


Koska tupakoitsijoiden osuus kasvaa *x*-akselilla siirryttäessä oikealle, kulmakerroin kertoo kuinka monta uutta keuhkosyöpä tapausta muodostuu lisää vuodessa, jos tupakoitsijoiden osuus kasvaa yhdellä prosentilla.

Miehille muodostuu 3,526 tapausta enemmän yhtä prosenttiyksikön kasvua kohden.
Naisille muodostuu 1,561 tapausta vähemmän yhtä prosenttiyksikön kasvua kohden.

Vastaus: miehet: 3,526/prosenttiyksikkö,
naiset: −1,562/prosenttiyksikkö

c) Määritetään hetkellinen muutosnopeus kohtaan $x = 15$ piirretyn tangentin kulmakertoimen avulla.



Miehille muodostuu 2,569 tapausta enemmän yhtä prosenttiyksikön kasvua kohden.
Naisille muodostuu 2,052 tapausta vähemmän yhtä prosenttiyksikön kasvua kohden.

Vastaus: miehet: 2,569/prosenttiyksikkö,
naiset: −2,052/prosenttiyksikkö