

1 PERUSLASKUTAITOJA

ALOITA PERUSTEISTA

1A. **a)** $4 - 5 \cdot 3 = 4 - 15 = -11$

Vastaus: -11

b) $-2 \cdot (-6 + 5) = -2 \cdot (-1) = 2$

Vastaus: 2

c) $\frac{12}{3} - 10 \cdot 2 = 4 - 20 = -16$

Vastaus: -16

d) $8 + 2 \cdot 3 - 28 : 4 = 8 + 6 - 7 = 7$

Vastaus: 7

2A. a) $\frac{43 + 2 \cdot 3}{7 \cdot 7} = \frac{43 + 6}{49} = \frac{49}{49} = 1$

Vastaus: 1

b) $\overset{5)}{\frac{2}{3}} + \overset{3)}{\frac{4}{5}} = \frac{10}{15} + \frac{12}{15} = \frac{22}{15}$

Vastaus: $\frac{22}{15}$

c) $\frac{3}{\underset{1}{\cancel{2}}} \cdot \overset{2}{\frac{\cancel{4}}{5}} = \frac{6}{5}$

Vastaus: $\frac{6}{5}$

d) $\frac{2}{5} : \frac{3}{5} = \frac{2}{\underset{1}{\cancel{5}}} \cdot \overset{1}{\frac{\cancel{5}}{3}} = \frac{2}{3}$

Vastaus: $\frac{2}{3}$

3A. a) Muunnetaan prosenttiluvut desimaaliluvuiksi.

$$24 \% = 0,24$$

$$6 \% = 0,06$$

$$137 \% = 1,37$$

Vastaus: 0,24; 0,06 ja 1,37

b) Muunnetaan prosenttiluvut murtoluvuiksi.

$$17 \% = \frac{17}{100}$$

$$75 \% = \frac{75}{100} \stackrel{(25)}{=} \frac{3}{4}$$

$$56 \% = \frac{56}{100} \stackrel{(4)}{=} \frac{14}{25}$$

Vastaus: $\frac{17}{100}$, $\frac{3}{4}$ ja $\frac{14}{25}$

c) Muunnetaan murtoluvut prosenttiluvuiksi.

$$\frac{90}{100} = 90\%$$

$$\frac{3}{5} = 0,6 = 60\%$$

$$\frac{3}{2} = 1,5 = 150\%$$

Vastaus: 90 %, 60 % ja 150 %

4A. Koska $(2^2)^3 = 2^{2 \cdot 3} = 2^6$, niin lausekkeet A ja II kuuluvat yhteen.

Koska $2^2 \cdot 2^3 = 2^{2+3} = 2^5$, niin lausekkeet B ja IV kuuluvat yhteen.

Koska $(2 \cdot 3)^2 = 6^2 = 36$, niin lausekkeet C ja III kuuluvat yhteen.

Koska $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$, niin lausekkeet D ja V kuuluvat yhteen.

Koska $\frac{2^3}{2^2} = 2^{3-2} = 2^1 = 2$, niin lausekkeet E ja I kuuluvat yhteen.

Vastaus: A: II, B: IV, C: III, D: V ja E: I

5A. a) $1^9 \cdot 9^1 = 1 \cdot 9 = 9$

Vastaus: 9

b) $-3^2 + (-5)^2 + (-2)^3 = -9 + 25 - 8 = 8$

Vastaus: 8

c) $0^4 - 4^0 + 4^{-2} = 0 - 1 + \frac{1}{4^2} = -1 + \frac{1}{16} = -\frac{15}{16}$

Vastaus: $-\frac{15}{16}$

d) $5^3 \cdot 5^0 \cdot 5^{-2} = 5^{3+0-2} = 5^1 = 5$

Vastaus: 5

e) $\frac{3^3 \cdot 3^4}{3^5} = \frac{3^{3+4}}{3^5} = \frac{3^7}{3^5} = 3^{7-5} = 3^2 = 9$

Vastaus: 9

f) $[(-1)^3]^4 = (-1)^{3 \cdot 4} = (-1)^{12} = 1$

Vastaus: 1

6A. a) Sievennetään lauseke.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} = \overset{4)}{\frac{1}{2}} + \overset{2)}{\frac{1}{4}} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} + \frac{2}{8} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

Vastaus: $\frac{7}{8}$

b) Lasketaan lausekkeen $\frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}$ arvo, kun $x = 3$.

$$\frac{3^2 - 2 \cdot 3 + 1}{3 - 1} = \frac{9 - 6 + 1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Vastaus: 2

7A. Koska porkkanan massa on noin 50 grammaa = 0,05 kg = $5 \cdot 10^{-2}$ kg, niin A ja IV kuuluvat yhteen.

Koska hiuksen kasvunopeus on noin

$$1 \text{ cm/kk} = 10 \text{ mm/kk} = \frac{10}{30} \text{ mm/päivä} \approx 0,3 \text{ mm/päivä},$$

niin B ja I kuuluvat yhteen.

Koska Suomen valtion vuositulot ovat noin

50 miljardia euroa = 50 000 000 000 € = $5 \cdot 10^{10}$ €, niin C ja V kuuluvat yhteen.

Koska henkilön sydän lyö 60 kertaa minuutissa, on lyöntejä 18 vuoden aikana noin $60 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365 \cdot 18 = 567\,648\,000 \approx 6 \cdot 10^8$. Näin ollen D ja II kuuluvat yhteen.

Koska ämpärillinen vettä on noin 10 litraa = 10 000 ml = $1 \cdot 10^4$ ml, niin E ja III kuuluvat yhteen.

Vastaus: A: IV, B: I, C: V, D: II ja E: III

- 8A.** a) Minuutissa on 60 sekuntia, joten $37 \text{ min} = 37 \cdot 60 \text{ s} = 2220 \text{ s}$.

Vastaus: 2220 s

- b) Tunnissa on 60 minuuttia, joten $37 \text{ min} = \frac{37}{60} \text{ h}$.

Vastaus: $\frac{37}{60} \text{ h}$

- c) Vuorokaudessa on 24 tuntia, joten b-kohdan perusteella

$$37 \text{ min} = \frac{37}{60} \text{ h} = \frac{37}{60} \cdot \frac{1}{24} \text{ d} = \frac{37}{1440} \text{ d}.$$

Vastaus: $\frac{37}{1440} \text{ d}$

- 9A.** a) Laskussa on tehty laskujärjestysvirhe. Kertolasku suoritetaan ennen yhteenlaskua.

$$3 + 5 \cdot 2 = 3 + 10 = 13$$

Vastaus: 13

- b) Jakolaskussa jaettava on kerrottava jakajan käänteisluvulla. Laskussa on jakaja kerrottu jaettavan käänteisluvulla.

$$\frac{4}{7} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{2} = \frac{12}{14} = \frac{6}{7}$$

Vastaus: $\frac{6}{7}$

- c) Negatiivinen potenssi 4^{-2} tarkoittaa luvun 4^2 käänteislukua.

$$4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$$

Vastaus: $\frac{1}{16}$

- d) Supistaessa murtoluvun osoittaja ja nimittäjä jaetaan samalla luvulla. Tässä tehtävässä osoittajilla ja nimittäjillä ei ole yhteisiä tekijöitä, joilla voisi supistaa, joten suoritetaan murtolukujen kertolasku kertomalla osoittajat keskenään ja nimittäjät keskenään.

$$\frac{9}{16} \cdot \frac{3}{2} = \frac{27}{32}$$

Vastaus: $\frac{27}{32}$

- 10A. a)** Lasketaan 42 prosenttia 34,50 eurosta prosenttikertoimen $42 \% = 0,42$ avulla.
 $0,42 \cdot 34,50 \text{ €} = 14,49 \text{ €}$

Vastaus: 14,49 euroa

- b)** Lasketaan 7 prosenttia 1500,23 eurosta prosenttikertoimen $7 \% = 0,07$ avulla.
 $0,07 \cdot 1500,23 \text{ €} = 105,0161 \text{ €} \approx 105,02 \text{ €}$

Vastaus: 105,02 euroa

- c)** Lasketaan 0,23 prosenttia 58,90 eurosta prosenttikertoimen $0,23 \% = 0,0023$ avulla.
 $0,0023 \cdot 58,90 \text{ €} = 0,135... \text{ €} \approx 0,14 \text{ €}$

Vastaus: 0,14 euroa

- d)** Lasketaan 130 prosenttia 8,00 eurosta prosenttikertoimen $130 \% = 1,3$ avulla.
 $1,3 \cdot 8,00 \text{ €} = 10,40 \text{ €}$

Vastaus: 10,40 euroa

- 11A. a)** Suolapitoisuus on suolan massan ja koko meetvurstin massan osamäärä.

$$\frac{9}{250} = 0,036 = 3,6 \%$$

Vastaus: 3,6 %

- b)** Koska $\frac{1\,300\,000}{5\,500\,000} = 0,23623...$, niin Viron asukasluku oli 23,623... %

Suomen asukasluvusta. Virossa oli siis

$100 \% - 23,623... \% = 76,376... \% \approx 76 \%$ vähemmän asukkaita kuin Suomessa.

Vastaus: 76 %

12A. Sievennetään lauseke.

$$\begin{aligned}
& x(4x - 2) - 3x(x - 1) - x \\
&= x \cdot 4x + x \cdot (-2) - 3x \cdot x - 3x \cdot (-1) - x \\
&= 4x^2 - 2x - 3x^2 + 3x - x \\
&= x^2
\end{aligned}$$

Lasketaan lausekkeen arvo, kun $x = -1$.

$$(-1)^2 = 1$$

Vastaus: 1

13A. a) Sievennetään lauseke.

$$5a^2 - (2a)^2 = 5a^2 - 2^2a^2 = 5a^2 - 4a^2 = a^2$$

Vastaus: a^2

b) Sievennetään lauseke.

$$(5 + x^2) - (4x^2 + x) = 5 + x^2 - 4x^2 - x = -3x^2 - x + 5$$

Lasketaan sievennetyn lausekkeen arvo, kun $x = -2$.

$$-3 \cdot (-2)^2 - (-2) + 5 = -3 \cdot 4 + 2 + 5 = -5$$

Vastaus: -5

14A. Muodostetaan polynomien $-x^2 + 2x$ ja $2x^2 - 3x + 1$ summa.

$$(-x^2 + 2x) + (2x^2 - 3x + 1) = -x^2 + 2x + 2x^2 - 3x + 1 = x^2 - x + 1$$

Muodostetaan polynomien $-x^2 + 2x$ ja $2x^2 - 3x + 1$ tulo.

$$\begin{aligned}
& (-x^2 + 2x)(2x^2 - 3x + 1) \\
&= -x^2 \cdot 2x^2 - x^2 \cdot (-3x) - x^2 \cdot 1 + 2x \cdot 2x^2 + 2x \cdot (-3x) + 2x \cdot 1 \\
&= -2x^4 + 3x^3 - x^2 + 4x^3 - 6x^2 + 2x \\
&= -2x^4 + 7x^3 - 7x^2 + 2x
\end{aligned}$$

Vastaus: $x^2 - x + 1$ ja $-2x^4 + 7x^3 - 7x^2 + 2x$

15A. Jos luku b on 50 % suurempi kuin luku a , niin luku b on $100 \% + 50 \% = 150 \%$ luvusta a . Siis $b = 1,5a$, joten väite A ja kaava 3 liittyvät toisiinsa.

Jos luku a on neljäsosa luvusta b , niin luku b on nelinkertainen lukuun a nähden. Siis $b = 4a$, joten väite B ja kaava 5 liittyvät toisiinsa.

Jos luku b on puolet luvusta a , niin $b = \frac{1}{2}a = 0,5a$. Väite C ja kaava 2 liittyvät siis toisiinsa.

Jos luku b on 25 % suurempi kuin luku a , niin luku b on $100 \% + 25 \% = 125 \%$ luvusta a . Siis $b = 1,25a = \frac{125}{100}a = \frac{5}{4}a$, joten väite D ja kaava 6 liittyvät toisiinsa.

Jos luku b on kaksinkertainen lukuun a verrattuna, niin $b = 2a$. Väite E ja kaava 1 liittyvät siis toisiinsa.

Jos luku a on nelinkertainen lukuun b verrattuna, niin luku b on neljäsosa luvusta a . Siis $b = \frac{1}{4}a$, joten väite F ja kaava 4 liittyvät toisiinsa.

Vastaus:

Sanallinen muoto	A	B	C	D	E	F
Kaavan numero	3	5	2	6	1	4

16A. ${}^9)\frac{5}{7} - {}^7)\frac{6}{9} = \frac{45}{63} - \frac{42}{63} = \frac{3}{63} > 0$, joten $\frac{5}{7} > \frac{6}{9}$.

Vastaus: $\frac{5}{7}$

VAHVISTA OSAAMISTA

17A. a) Luvun -1 vastaluku on $-(-1) = 1$.

Vastaus: 1

b) Luvun 5 käänteisluku on $\frac{1}{5}$.

Vastaus: $\frac{1}{5}$

c) Luvun -1 vastaluvun ja luvun 5 käänteisluvun keskiarvo on

$$\frac{1 + \frac{1}{5}}{2} = \frac{\frac{6}{5}}{2} = \frac{6}{5} : 2 = \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{5}$$

Vastaus: $\frac{3}{5}$

$$18A. \quad a) \quad \frac{1}{2} : \frac{2}{3} - \frac{3}{\cancel{4}} \cdot \overset{1}{\cancel{4}} \overset{1}{5} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} - \frac{3}{5} = \overset{5)}{\frac{3}{4}} - \overset{4)}{\frac{3}{5}} = \frac{15}{20} - \frac{12}{20} = \frac{3}{20}$$

$$\text{Vastaus: } \frac{3}{20}$$

b)

$$\begin{aligned} & \frac{3}{4} - \frac{5}{6} : \left(2\frac{1}{6} - 3\frac{2}{3} \right) \\ &= \frac{3}{4} - \frac{5}{6} : \left(\frac{13}{6} - \overset{2)}{\frac{11}{3}} \right) \\ &= \frac{3}{4} - \frac{5}{6} : \left(\frac{13}{6} - \frac{22}{6} \right) \\ &= \frac{3}{4} - \frac{5}{6} : \left(-\frac{9}{6} \right) \\ &= \frac{3}{4} - \overset{1}{\cancel{6}} \cdot \left(-\overset{1}{\cancel{6}} \frac{9}{9} \right) \\ &= \overset{9)}{\frac{3}{4}} + \overset{4)}{\frac{5}{9}} \\ &= \frac{27}{36} + \frac{20}{36} \\ &= \frac{47}{36} \end{aligned}$$

$$\text{Vastaus: } \frac{47}{36}$$

c)

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{6}{7} + \frac{1}{4} : \frac{7}{9} \\
 & = -\frac{1}{\cancel{3}^1} \cdot \frac{\cancel{9}^3}{\cancel{8}^4} \cdot \frac{\cancel{6}^3}{7} + \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{7} \\
 & = -\frac{\overset{7)}{9}}{4} + \frac{9}{28} \\
 & = -\frac{63}{28} + \frac{9}{28} \\
 & = -\frac{54}{28} \quad (2) \\
 & = -\frac{27}{14}
 \end{aligned}$$

Vastaus: $-\frac{27}{14}$

19B. Pojista lyhyen matematiikan aikoo kirjoittaa $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$. Koska poikia on $\frac{5}{9}$ abiturienteista, lyhyen matematiikan kirjoittavia poikia on $\frac{5}{9} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{9}$ abiturienteista.

Tytöistä lyhyen matematiikan aikoo kirjoittaa $\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{7} = \frac{3}{7}$. Koska tyttöjä on

$\frac{4}{9}$ abiturienteista, lyhyen matematiikan kirjoittavia tyttöjä on $\frac{4}{9} \cdot \frac{\overset{1)}{\cancel{3}}}{7} = \frac{4}{21}$

abiturienteista.

Abiturienteista lyhyen matematiikan kirjoittaa

$$\overset{7)}{\frac{2}{9}} + \overset{3)}{\frac{4}{21}} = \frac{14}{63} + \frac{12}{63} = \frac{26}{63}.$$

Vastaus: $\frac{26}{63}$

20A. Luvut 27 ja 31 voidaan kirjoittaa summina $20 + 7$ ja $30 + 1$.

$$\begin{aligned}
 27 \cdot 31 &= (20 + 7)(30 + 1) \\
 &= 20 \cdot 30 + 20 \cdot 1 + 7 \cdot 30 + 7 \cdot 1 \\
 &= 20 \cdot 30 + 7 \cdot 30 + 20 \cdot 1 + 7 \cdot 1 \\
 &= 600 + 210 + 20 + 7 \\
 &= 837,
 \end{aligned}$$

joten Jussin päättely on oikein.

Vastaus: on

21A. Sievennetään lausekkeet.

$$\text{a)} \quad \left(\frac{5a}{2}\right)^2 = \frac{(5a)^2}{2^2} = \frac{5^2 a^2}{4} = \frac{25a^2}{4}$$

$$\text{Vastaus: } \frac{25a^2}{4}$$

$$\text{b)} \quad (-3a^4)^2 = (-3)^2 \cdot (a^4)^2 = 9a^{4 \cdot 2} = 9a^8$$

$$\text{Vastaus: } 9a^8$$

$$\text{c)} \quad \frac{(a^3)^5}{a^2 \cdot a^9} = \frac{a^{3 \cdot 5}}{a^{2+9}} = \frac{a^{15}}{a^{11}} = a^{15-11} = a^4$$

$$\text{Vastaus: } a^4$$

$$\text{d)} \quad \left(\frac{2}{a^6}\right)^{-3} = \left(\frac{a^6}{2}\right)^3 = \frac{(a^6)^3}{2^3} = \frac{a^{6 \cdot 3}}{8} = \frac{a^{18}}{8}$$

$$\text{Vastaus: } \frac{a^{18}}{8}$$

22A. Lasketaan lausekkeiden arvot annetuilla muuttujan arvoilla.

$$\text{a)} \quad \frac{2a+3b}{a-b} = \frac{2 \cdot \frac{5}{2} + 3 \cdot \frac{7}{3}}{\frac{5}{2} - \frac{2}{3}} = \frac{5+7}{\frac{15}{6} - \frac{4}{6}} = \frac{12}{\frac{1}{6}} = 12 \cdot \frac{6}{1} = 72$$

Vastaus: 72

$$\text{b)} \quad \frac{x+1}{y-1} + \frac{y-1}{x+1} = \frac{\frac{1}{2}+1}{\frac{3}{2}-1} + \frac{\frac{3}{2}-1}{\frac{1}{2}+1} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = 3 + \frac{1}{3} = \frac{9}{3} + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$$

Vastaus: $\frac{10}{3}$

c)

$$\begin{aligned} \frac{a^2 - c^2}{b - c} &= \frac{1^2 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2}{-2 - \left(-\frac{1}{2}\right)} \\ &= \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)}{-2 + \frac{1}{2}} \\ &= \frac{1 - \frac{1}{4}}{-2 + \frac{1}{2}} \\ &= \frac{\frac{3}{4}}{-\frac{3}{2}} \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \cdot \left(-\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right) \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Vastaus: $-\frac{1}{2}$

23B. a) Protonin ja elektronin massojen suhde on

$$\frac{1,67 \cdot 10^{-27}}{9,11 \cdot 10^{-31}} = 1833,150... \approx 1830, \text{ joten } 1830\text{:n elektronin massa on yhtä suuri kuin yhden protonin massa.}$$

Vastaus: 1830:n elektronin

b) Jupiterin ja Saturnuksen massojen suhde on

$$\frac{1,90 \cdot 10^{27}}{5,68 \cdot 10^{26}} = 3,345..., \text{ joten Jupiter on } 334,5... \% - 100 \% = 234,5... \% \approx 235 \% \text{ Saturnusta painavampi.}$$

Vastaus: 235 %

24A. Sievennetään lausekkeet.

a) $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}(ab)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = a^1b^1 = ab$

Vastaus: ab

b)

$$\begin{aligned} & \frac{5x+3y}{3} + \frac{x-6y}{2} \\ &= \frac{5x}{3} + \frac{3y}{3} + \frac{x}{2} + \frac{-6y}{2} \\ &= \overset{2)}{\frac{5}{3}x} + y + \overset{3)}{\frac{1}{2}x} - 3y \\ &= \frac{10}{6}x - 2y + \frac{3}{6}x \\ &= \frac{13}{6}x - 2y \end{aligned}$$

Vastaus: $\frac{13}{6}x - 2y$

25A. Sievennetään lausekkeet, kun $P(x) = 3x$ ja $Q(x) = 2x^2 - 2x + 3$.

a) $P(x) + Q(x) = (3x) + (2x^2 - 2x + 3) = 3x + 2x^2 - 2x + 3 = 2x^2 + x + 3$

Vastaus: $2x^2 + x + 3$

b) $P(x) - Q(x) = (3x) - (2x^2 - 2x + 3) = 3x - 2x^2 + 2x - 3 = -2x^2 + 5x - 3$

Vastaus: $-2x^2 + 5x - 3$

c) $P(x) \cdot Q(x) = 3x \cdot (2x^2 - 2x + 3)$
 $= 3x \cdot 2x^2 + 3x \cdot (-2x) + 3x \cdot 3$
 $= 6x^3 - 6x^2 + 9x$

Vastaus: $6x^3 - 6x^2 + 9x$

d) $\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{2x^2 - 2x + 3}{3x} = \frac{2x^2}{3x} + \frac{-2x}{3x} + \frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\cancel{3}x} = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} + \frac{1}{x}$

Vastaus: $\frac{2}{3}x - \frac{2}{3} + \frac{1}{x}$

26A. a) Sievennetään lauseke.

$$x^2 + x - (x^2 - x) = x^2 + x - x^2 + x = 2x$$

Lasketaan lausekkeen arvo, kun $x = \frac{1}{2}$.

$$2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

Vastaus: 1

b) Sievennetään lauseke.

$$\begin{aligned} & (a + b)^2 - (a - b)^2 \\ &= (a + b)(a + b) - (a - b)(a - b) \\ &= a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b - (a \cdot a - a \cdot b - b \cdot a + b \cdot b) \\ &= a^2 + ab + ab + b^2 - (a^2 - ab - ab + b^2) \\ &= a^2 + 2ab + b^2 - (a^2 - 2ab + b^2) \\ &= a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2 \\ &= 4ab \end{aligned}$$

Lasketaan lausekkeen arvo, kun $a = 100^{300}$ ja $b = 100^{-300}$.

$$4 \cdot 100^{300} \cdot 100^{-300} = 4 \cdot 100^{300-300} = 4 \cdot 100^0 = 4 \cdot 1 = 4$$

Vastaus: $4ab$, 4

27B. Alpo maksaa alkuosuuden hinnasta $\frac{21,90 \text{ €}}{3} = 7,30 \text{ €}$.

Sanna maksaa alkuosuudesta Alpon tapaan 7,30 € ja puolet keskiosuuden hinnasta. Keskiosuuden hinta on $28,20 \text{ €} - 21,90 \text{ €} = 6,30 \text{ €}$, josta puolet on $\frac{6,30 \text{ €}}{2} = 3,15 \text{ €}$. Sanna maksaa siis yhteensä $7,30 \text{ €} + 3,15 \text{ €} = 10,45 \text{ €}$.

Pauli maksaa loput eli $33,50 \text{ €} - 7,30 \text{ €} - 10,45 \text{ €} = 15,75 \text{ €}$.

Vastaus: Alpo 7,30 €, Sanna 10,45 € ja Pauli 15,75 €

28A. a) TAPA 1: Kun tuotteen hinta nousee 10 %, uusi hinta on $100 \% + 10 \% = 110 \%$ alkuperäisestä eli siihen nähden 1,1-kertainen. Koska hinta 299 € nousee kaksi kertaa peräkkäin 10 %, on lopullinen hinta $1,1 \cdot 1,1 \cdot 299 \text{ €} = 361,79 \text{ €}$.

TAPA 2: Kun tuotteen hinta nousee 20 %, uusi hinta on $100 \% + 20 \% = 120 \%$ alkuperäisestä eli siihen nähden 1,2-kertainen. Uusi hinta on $1,2 \cdot 299 \text{ €} = 358,80 \text{ €}$.

Vastaus: Tavalla 1 loppuhinta on korkeampi

b) TAPA 1: Kun tuotteen hinta laskee 10 %, uusi hinta on $100 \% - 10 \% = 90 \%$ alkuperäisestä eli siihen nähden 0,9-kertainen. Koska hinta 299 € ensin laskee 10 % ja sitten nousee 10 %, on lopullinen hinta $0,9 \cdot 1,1 \cdot 299 \text{ €} = 296,01 \text{ €}$.

TAPA 2: Koska hinta 299 € ensin nousee 10 % ja sitten laskee 10 %, on lopullinen hinta $1,1 \cdot 0,9 \cdot 299 \text{ €} = 296,01 \text{ €}$.

Vastaus: Loppuhinta on sama molemmilla tavoilla.

c) TAPA 1: Kun tuotteen hinta nousee 20 %, uusi hinta on $100 \% + 20 \% = 120 \%$ alkuperäisestä eli siihen nähden 1,2-kertainen. Kun tuotteen hinta laskee 20 %, uusi hinta on $100 \% - 20 \% = 80 \%$ alkuperäisestä eli siihen nähden 0,8-kertainen. Koska hinta 299 € ensin nousee 20 % ja sitten laskee 20 %, on lopullinen hinta $1,2 \cdot 0,8 \cdot 299 \text{ €} = 287,04 \text{ €}$.

TAPA 2: Kun tuotteen hinta nousee 30 %, uusi hinta on $100 \% + 30 \% = 130 \%$ alkuperäisestä eli siihen nähden 1,3-kertainen. Kun tuotteen hinta laskee 30 %, uusi hinta on $100 \% - 30 \% = 70 \%$ alkuperäisestä eli siihen nähden 0,7-kertainen. Koska hinta 299 € ensin nousee 30 % ja sitten laskee 30 %, on lopullinen hinta $1,3 \cdot 0,7 \cdot 299 \text{ €} = 272,09 \text{ €}$.

Vastaus: Tavalla 1 loppuhinta on korkeampi

- 29B. a)** Yhdessä vuorokaudessa puolen tunnin kohdalla tapahtuvia lyöntejä on 24 ja täyden tunnin kohdalla tapahtuvia lyöntejä $2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 12) = 156$. Vuorokaudessa lyöntejä kertyy siis $24 + 156 = 180$, joten viikossa kertyy $7 \cdot 180 = 1260$ lyöntiä.

Yhtä lyöntiä kohti punnus laskeutuu

$$\frac{1120 \text{ mm}}{1260} = 0,888\dots \text{ mm} \approx 0,9 \text{ mm}.$$

Vastaus: 0,9 mm

- b)** Koska punnus oli laskeutunut 650 mm, niin kello oli lyönyt

$$\frac{650}{0,888\dots} = 731,25 \approx 731 \text{ kertaa}.$$

Kohdan a perusteella aikaa oli kulunut $\frac{731}{180} = 4,061\dots$ vuorokautta eli 4 kokonaista vuorokautta.

Viimeisen, perjantaina kello 12.05 alkavan vuorokauden aikana kello löi $731 - 4 \cdot 180 = 11$ kertaa.

Kello 12.30, 13.00 ja 13.30 kello löi kerran, 14.00 kahdesti, 14.30 kerran, 15.00 kolmesti ja 15.30 kerran. Näistä kertyy 10 lyöntiä. Kello 16.00 tulee seuraava, 11. lyönti. Kun punnus oli laskeutunut 650 mm, oli siis perjantai ja kello oli 16.00.

Vastaus: perjantai klo 16.00

30B. Opiskelija-alennus on 50 %, joten opiskelijalle jää lipusta maksettavaksi $100 \% - 50 \% = 50 \%$. Kukin opiskelija maksaa siis lipustaan $0,5 \cdot 20 \text{ €} = 10 \text{ €}$.

Eläkeläisalennus on 30 %, joten eläkeläiselle jää lipusta maksettavaksi $100 \% - 30 \% = 70 \%$. Kukin eläkeläinen maksaa siis lipustaan $0,7 \cdot 20 \text{ €} = 14 \text{ €}$.

Lippujen keskihinnaksi tulee $\frac{7 \cdot 10 \text{ €} + 5 \cdot 14 \text{ €} + 8 \cdot 20 \text{ €}}{20} = 15 \text{ €}$.

Vastaus: 15 euroa

31A. a) Lasketaan, kuinka monta viikkoa 1001 vuorokaudessa on.
 $\frac{1001}{7} = 143$, joten 1001 vuorokaudessa on 143 kokonaista viikkoa.
 Koska vuoden 2030 ensimmäinen päivä on tiistai, on 1001 päivän kuluttua myös tiistai.

Vastaus: tiistai

b) a-kohdan mukaan vuoden 2030 ensimmäinen päivä on tiistai.
 Lasketaan tämän tiedon avulla vuoden 2100 vuoden ensimmäinen viikonpäivä.
 Vuodet 2040, 2044, 2048, ..., 2092 ja 2096 ovat karkausvuosia.
 $\frac{2096 - 2040}{4} + 1 = 15$, joten tutkittavaan ajanjaksoon sisältyy 15 karkausvuotta. Tutkittavassa ajanjaksossa on siis $70 \cdot 365 + 15 = 25\,565$ päivää.

Lasketaan, kuinka monta viikkoa 25 565:ssa vuorokaudessa on.
 $\frac{25\,565}{7} = 3652,142\dots$, joten tutkittavassa ajanjaksossa on 3652 kokonaista viikkoa.

$25\,565 - 3652 \cdot 7 = 1$, joten tutkittavassa ajanjaksossa on 3652 kokonaista viikkoa ja 1 päivä. Yhden päivän kuluttua tiistaista on keskiviikko, joten vuoden 2100 ensimmäinen päivä on keskiviikko.

Vastaus: keskiviikko

32A. a) Omenan C-vitamiinipitoisuus on

$$\frac{4,0 \text{ mg}}{100 \text{ g}} = \frac{0,004 \text{ g}}{100 \text{ g}} = 0,00004 = 0,004\%.$$

persikan C-vitamiinipitoisuus on $\frac{7,0 \text{ mg}}{100 \text{ g}} = \frac{0,007 \text{ g}}{100 \text{ g}} = 0,00007 = 0,007\%.$

C-vitamiinipitoisuusprosenttien erotus on $0,007 - 0,004 = 0,003$, joten persikan C-vitamiinipitoisuus on $0,003$ prosenttiyksikköä suurempi kuin omenan C-vitamiinipitoisuus.

Vastaus: $0,003$ prosenttiyksikköä

b) Omenan massa on 175 g , mikä on $1,75$ -kertainen määrä 100 g :aan nähden. Omenassa on siis $1,75 \cdot 1,8 \text{ g} = 3,15 \text{ g} \approx 3,2 \text{ g}$ kuitua.

Persikan massa on 135 g , mikä on $1,35$ -kertainen määrä 100 g :aan nähden. Persikassa on siis $1,35 \cdot 2,1 = 2,835 \text{ g} \approx 2,8 \text{ g}$ kuitua.

Koska $\frac{3,15}{2,835} = 1,111\dots$, omenassa on

$111,1\dots\% - 100\% = 11,1\dots\% \approx 11\%$ enemmän kuitua kuin persikassa.

Vastaus: omenassa, 11% enemmän

33A. a) Koska $\frac{4}{3} : \frac{4}{9} = \frac{\overset{1}{\cancel{4}}}{\underset{1}{\cancel{3}}} \cdot \frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{\underset{1}{\cancel{4}}} = 3$, niin $\frac{4}{3}$ on 300 % luvusta $\frac{4}{9}$. Se on siis

$$300 \% - 100 \% = 200 \% \text{ suurempi kuin } \frac{4}{9}.$$

Vastaus: 200 %

b) Merkitään lukua kirjaimella a , jolloin $\frac{2}{5}$ luvusta on $\frac{2}{5}a$.

$$\frac{\overset{1}{\cancel{a}}}{\frac{\underset{1}{\cancel{2}}}{\underset{5}{\cancel{a}}}} = 1 : \frac{2}{5} = 1 \cdot \frac{5}{2} = \frac{5}{2} = 2,5, \text{ joten luku on } 250 \% \text{ kahdesta}$$

viidesosastaan.

Vastaus: 250 %

34A. Merkitään alkuperäistä hintaa kirjaimella a .

Kun hintaa korotetaan 45 %, uudeksi hinnaksi tulee $1,45a$.

Kun tämän jälkeen hintaa korotetaan 62 %, lopulliseksi hinnaksi tulee $1,62 \cdot 1,45a = 2,349a$.

Jos alkuperäistä hintaa korotetaan ensin 62 % ja sitten 45 %, lopulliseksi hinnaksi tulee vastaavalla tavalla $1,45 \cdot 1,62a = 2,349a$. Lopullinen hinta ei siis riipu korotusten järjestyksestä.

Lopullinen hinta on 234,9 % alkuperäisestä hinnasta, joten hinta nousee yhteensä $234,9 \% - 100 \% = 134,9 \%$.

Vastaus: 134,9 %

35B. Hammastahnan alkuperäinen yksikköhinta on $\frac{1,50 \text{ €}}{100 \text{ ml}} = 0,015 \frac{\text{€}}{\text{ml}}$.

Putkilon uusi tilavuus on $1,25 \cdot 100 \text{ ml} = 125 \text{ ml}$ ja uusi hinta

$1,4 \cdot 1,50 \text{ €} = 2,1 \text{ €}$. Uusi yksikköhinta on siis $\frac{2,10 \text{ €}}{125 \text{ ml}} = 0,0168 \frac{\text{€}}{\text{ml}}$.

$\frac{0,0168}{0,015} = 1,12$, joten uusi yksikköhinta on 112 % vanhasta. Yksikköhinta nousee siis $112 \% - 100 \% = 12 \%$.

Vastaus: 12 %

- 36A. a)** Merkitään osakkeen alkuperäistä arvoa kirjaimella a .
Koska $100 \% - 46 \% = 54 \%$, niin osakkeen arvo tuli muutoksissa 0,54-kertaiseksi, 1,15-kertaiseksi ja 1,34-kertaiseksi.
Osakkeen arvo oli muutosten jälkeen
 $a \cdot 0,54 \cdot 1,15 \cdot 1,34 = 0,832 \dots a < a$, joten arvo oli muutosten jälkeen pienempi kuin ennen muutoksia.

Vastaus: pienempi

- b)** Ennen viimeistä nousua osakkeen arvo oli $a \cdot 0,54 \cdot 1,15 = 0,621a$.

Koska $\frac{\overset{1}{a}}{0,621\underline{a}} = \frac{1}{0,621} = 1,610\dots$, niin osakkeen alkuperäinen arvo on

$161,0\dots \%$ sen arvosta ennen viimeistä nousua. Jälkimmäisen nousun olisi siis pitänyt olla $161,0\dots \% - 100 \% = 61,0\dots \% \approx 61 \%$, jotta osakkeen arvo olisi palannut alkuperäiselle tasolle.

Vastaus: 61 %

37A. Sievennetään lausekkeet.

$$\text{a)} \quad \frac{x^2}{3x} + \frac{\overset{1}{\cancel{2}}(1-x)}{\underset{3}{\cancel{6}}} = \frac{x}{3} + \frac{1-x}{3} = \frac{x+1-x}{3} = \frac{1}{3}$$

Vastaus: $\frac{1}{3}$

$$\text{b)} \quad \frac{(x+2)(x-2)}{x^2-4} = \frac{x^2-2x+2x-4}{x^2-4} = \frac{x^2-4}{x^2-4} = 1$$

Vastaus: 1

$$\text{c)} \quad \frac{x^{3+n}x^{4+n}}{x^7} = \frac{x^{3+n+4+n}}{x^7} = \frac{x^{2n+7}}{x^7} = x^{2n+7-7} = x^{2n}$$

Vastaus: x^{2n}

38A. a) Taulukoidaan alennusprosentit.

Ostoksen kokonaissumma (€)	Alennus (€)	Alennus (%)
50	5	$\frac{5}{50} = 10$
100	15	$\frac{15}{100} = 15$
300	40	$\frac{40}{300} \approx 13$
600	100	$\frac{100}{600} \approx 17$

Vastaus:

Ostoksen kokonaissumma (€)	Alennus (%)
50	10
100	15
300	13
600	17

b) Riston saama alennus on 5 € ja alennusprosentti

$$\frac{5}{80} = 0,0625 = 6,25 \%$$

Maurin saama alennus on 15 € ja alennusprosentti

$$\frac{15}{200} = 0,075 = 7,5 \%$$

Alennusprosenttien ero on $7,5 - 6,25 = 1,25$ prosenttiyksikköä.

Vastaus: 1,25 prosenttiyksikköä

c) Jos Risto ja Mauri olisivat yhdistäneet ostoksensa, ostosten kokonaissumma olisi ollut $80 \text{ €} + 200 \text{ €} = 280 \text{ €}$. Tällöin alennus olisi ollut 40 € ja alennusprosentti $\frac{40}{280} = 0,14285... = 14,285... \% \approx 14 \%$.

Vastaus: 14 %

- 39A. a)** Luvut ovat toistensa vastalukuja, jos niiden summa on nolla. Lasketaan lukujen $\frac{21}{17}$ ja $-1\frac{16}{68}$ summa.

$$\frac{21}{17} + \left(-1\frac{16}{68}\right) = \frac{21}{17} - \frac{68+16}{68} = \frac{21}{17} - \frac{84}{68} = \frac{21}{17} - \frac{84^{(4)}}{68} = \frac{21}{17} - \frac{21}{17} = 0$$

Koska lukujen $\frac{21}{17}$ ja $-1\frac{16}{68}$ summa on 0, ne ovat vastalukuja.

Vastaus: –

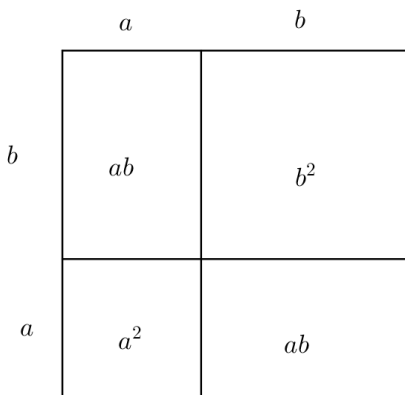
- b)** Lasketaan lukujen $2\frac{3}{5}$ ja $\frac{15}{39}$ tulo.

$$2\frac{3}{5} \cdot \frac{15}{39} = \frac{13}{5} \cdot \frac{5}{13} = 1$$

Koska lukujen $2\frac{3}{5}$ ja $\frac{15}{39}$ tulo on 1, ne ovat käänteislukuja.

Vastaus: –

- 40A.** Geometrisesti kahden luvun tulo vastaa sellaisen suorakulmion pinta-alaa, jonka sivujen mitat ovat tulon tekijöitä. Merkitään pienemmän neliön sivua kirjaimella a ja suuremman neliön sivua kirjaimella b .



Koska suurimman neliön sivun pituus on $a + b$, on neliön pinta-ala $(a + b)^2$. Toisaalta kuvion koostuu kahdesta neliöstä, joiden pinta-alat ovat a^2 ja b^2 , ja kahdesta yhtä suuresta suorakulmiosta, joiden yhteispinta-ala on $2ab$, on kuvion kokonaispinta-ala $a^2 + 2ab + b^2$. Näin ollen $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Vastaus: –

SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

- 41A.** Jos vaihdetaan jokainen polynomin $P(x) = x^2 + 3x - 5$ termien etumerkeistä, saadaan polynomi $Q(x) = -x^2 - 3x + 5$. Lasketaan nämä kaksi polynomia yhteen:

$$P(x) + Q(x) = (x^2 + 3x - 5) + (-x^2 - 3x + 5) = x^2 + 3x - 5 - x^2 - 3x + 5 = 0$$

Polynomin $P(x)$ vastapolynomi on siis $-x^2 - 3x + 5$.

Vastaus: $-x^2 - 3x + 5$

- 42A. a)** Lavennetaan lausekkeet $\frac{1}{x-1}$ ja $\frac{1}{x+1}$ samannimisiksi, jonka jälkeen yhdistetään osoittajat.

$$\begin{aligned}
 & \overset{x+1)}{\frac{1}{x-1}} - \overset{x-1)}{\frac{1}{x+1}} \\
 &= \frac{x+1}{(x-1)(x+1)} - \frac{x-1}{(x+1)(x-1)} \\
 &= \frac{x+1-(x-1)}{(x+1)(x-1)} \\
 &= \frac{x+1-x+1}{x^2+x-x-1} \\
 &= \frac{2}{x^2-1}
 \end{aligned}$$

Vastaus: $\frac{2}{x^2-1}$

- b)** Jakolasku lasketaan kertomalla jaettava jakajan käänteisluvulla.

$$\begin{aligned}
 & \frac{a+3}{a} \cdot \frac{3a+9}{2a} \\
 &= \frac{a+3}{a} \cdot \frac{2a}{3a+9}
 \end{aligned}$$

Jaetaan nimittäjä tekijöihin, jolloin lauseke saadaan muotoon

$$\frac{a+3}{a} \cdot \frac{2a}{3(a+3)}$$

Lauseke $a+3$ esiintyy kertolaskussa sekä osoittajassa että nimittäjässä, joten se supistuu pois. Samoin käy lausekkeelle a . Sievennettävä lauseke saadaan tällöin muotoon

$$\frac{1}{1} \cdot \frac{2 \cdot 1}{3} = \frac{2}{3}$$

Vastaus: $\frac{2}{3}$

43A. a) Sievennetään lauseke.

$$\begin{aligned}
& (2a + b)^2 - (2a - b)^2 \\
&= (2a + b)(2a + b) - (2a - b)(2a - b) \\
&= 4a^2 + 2ab + 2ab + b^2 - (4a^2 - 2ab - 2ab + b^2) \\
&= 4a^2 + 4ab + b^2 - (4a^2 - 4ab + b^2) \\
&= 4a^2 + 4ab + b^2 - 4a^2 + 4ab - b^2 \\
&= 8ab
\end{aligned}$$

Sijoitetaan lausekkeeseen $ab = 2$.

$$8 \cdot 2 = 16$$

Vastaus: 16

b) Lasketaan lausekkeen $\frac{a^2 - b^2}{a - b}$ arvo, kun $a = 1$ ja $b = \frac{1}{2}$.

$$\frac{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1 - \frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{\cancel{4}_2} \cdot \frac{\cancel{2}^1}{1} = \frac{3}{2}$$

Vastaus: $\frac{3}{2}$ **c)** Käytetään apuna tietoa $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

$$\begin{aligned}
& (2a + b)^2 - (2a - b)^2 \\
&= (2a)^2 + 2 \cdot 2a \cdot b + b^2 - [(2a)^2 + 2 \cdot 2a \cdot (-b) + (-b)^2] \\
&= 4a^2 + 4ab + b^2 - (4a^2 - 4ab + b^2) \\
&= 4a^2 + 4ab + b^2 - 4a^2 + 4ab - b^2 \\
&= 8ab
\end{aligned}$$

Sijoitetaan lausekkeeseen $ab = 2$.

$$8 \cdot 2 = 16$$

Vastaus: 16

d) Käytetään apuna tietoa $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

$$\frac{a^2 - b^2}{a - b} = \frac{(a + b)(a - b)}{a - b}$$

Koska lauseke $a + b$ kerrotaan ja jaetaan samalla lausekkeella $a - b$, niin lauseke $a - b$ supistuu pois ja lauseke sievenee muotoon $a + b$.

Sijoitetaan sievennettyyn lausekkeeseen $a = 1$ ja $b = \frac{1}{2}$.

$$a = 1 \text{ ja } b = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Vastaus: $\frac{3}{2}$

44A. Sijoittamalla lausekkeeseen $\frac{a(a-1)}{x} + ax$ muuttujan x paikalle lauseke

$$a-1 \text{ saadaan } \frac{a(a-1)}{a-1} + a(a-1).$$

Lausekkeen alkuosassa $\frac{a(a-1)}{a-1}$ on luku a kerrottuna ja jaettuna samalla lausekkeella $a-1$, joten lauseke $a-1$ supistuu pois. Sievennetään jäljelle jäänyt lauseke.

$$a + a(a-1) = a + a^2 - a = a^2$$

Lausekkeen arvo on siis a^2 .

Vastaus: a^2

45A. Merkitään kappaleen alkuperäistä massaa kirjaimella m ja alkuperäistä tilavuutta kirjaimella V . Uusi massa on tällöin $0,88m$ ja uusi tilavuus $1,12V$.

Kappaleen alkuperäinen tiheys on ρ , ja uusi tiheys on

$$\frac{0,88m}{1,12V} = \frac{0,88}{1,12} \frac{m}{V} = \frac{0,88}{1,12} \rho = 0,78571... \rho.$$

Uusi tiheys on $78,5... \%$ vanhasta tiheydestä, joten tiheys on pienentynyt $100\% - 78,571... \% = 21,428... \% \approx 21 \%$.

Vastaus: pienenee 21%

46A. Esitetään 5-järjestelmän luku 41302_5 10-järjestelmässä.

$$4 \cdot 5^4 + 1 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 0 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^0 = 2702_{10}$$

Siis $41302_5 = 2702_{10}$.

Esitään suurin luvun 2 potenssi, jonka arvo on korkeintaan 2702.

$$2^{11} = 2048 > 2702$$

$$2^{12} = 4096 > 2702$$

Suurin luvun 2 potenssi, jonka arvo on korkeintaan 2702, on siis 2^{11} . 2-järjestelmässä esitettynä 10-järjestelmän luvussa 2702 on siis $11 + 1 = 12$ numeroa. Numeroista kukin on potenssin 2^n kerroin, jossa $n = 0, 1, \dots, 11$. Luku 1 on potenssin 2^{11} kerroin. Selvitetään muiden potenssien kertoimet.

$$2702 - 2^{11} = 654$$

$654 - 2^{10} = -370 < 0$, joten potenssin 2^{10} kerroin on 0.

$654 - 2^9 = 142 \geq 0$, joten potenssin 2^9 kerroin on 1.

$142 - 2^8 = -114 < 0$, joten potenssin 2^8 kerroin on 0.

$142 - 2^7 = 14 \geq 0$, joten potenssin 2^7 kerroin on 1.

$14 - 2^6 = -50 < 0$, joten potenssin 2^6 kerroin on 0.

$14 - 2^5 = -18 < 0$, joten potenssin 2^5 kerroin on 0.

$14 - 2^4 = -2 < 0$, joten potenssin 2^4 kerroin on 0.

$14 - 2^3 = 6 \geq 0$, joten potenssin 2^3 kerroin on 1.

$6 - 2^2 = 2 \geq 0$, joten potenssin 2^2 kerroin on 1.

$2 - 2^1 = 0 \geq 0$, joten potenssin 2^1 kerroin on 1.

$0 - 2^0 = -1 < 0$, joten potenssin 2^0 kerroin on 0.

Tarkistetaan:

$$\begin{aligned} & 1 \cdot 2^{11} + 0 \cdot 2^{10} + 1 \cdot 2^9 + 0 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 \\ & + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 \\ & = 2^{11} + 2^9 + 2^7 + 2^3 + 2^2 + 2^1 \\ & = 2702 \end{aligned}$$

Siis $41302_5 = 101\,010\,001\,110_2$.

Vastaus: 2702_{10} ja $101\,010\,001\,110_2$

- 47B.** a) Koska $\frac{1}{1} = \frac{8}{8} > \frac{5}{8} > \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, luku $\frac{1}{2}$ on suurin mahdollinen yhteenlaskettava.

$$\frac{5}{8} - \overset{4)}{\frac{1}{2}} = \frac{5}{8} - \frac{4}{8} = \frac{1}{8}, \text{ joten toinen yhteenlaskettava on } \frac{1}{8}.$$

$$\text{Siis } \frac{5}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}.$$

$$\text{Vastaus: } \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$$

- b) Koska $\overset{2)}{\frac{5}{13}} - \overset{13)}{\frac{1}{2}} = \frac{10}{26} - \frac{13}{26} = -\frac{3}{26}$, luku $\frac{1}{2}$ on liian suuri yhteenlaskettavaksi.

$$\overset{3)}{\frac{5}{13}} - \overset{13)}{\frac{1}{3}} = \frac{15}{39} - \frac{13}{39} = \frac{2}{39}, \text{ joten suurin mahdollinen yhteenlaskettava on } \frac{1}{3}.$$

$$\frac{2}{39} - \frac{1}{19} = \frac{2}{39} - \frac{2}{38} < 0, \text{ joten } \frac{1}{19} \text{ on liian suuri toiseksi yhteenlaskettavaksi, jos ensimmäinen yhteenlaskettava on } \frac{1}{3}.$$

$$\overset{20)}{\frac{2}{39}} - \overset{39)}{\frac{1}{20}} = \frac{40}{780} - \frac{39}{780} = \frac{1}{780}, \text{ joten jos ensimmäinen yhteenlaskettava on } \frac{1}{3}, \text{ niin toinen yhteenlaskettava on } \frac{1}{20} \text{ ja kolmas } \frac{1}{780}.$$

$$\text{Siis } \frac{5}{13} = \frac{1}{3} + \frac{1}{20} + \frac{1}{780}$$

$$\text{Vastaus: } \frac{1}{3} + \frac{1}{20} + \frac{1}{780}$$

48A. Sievennetään lauseke.

$$(n+4)^2 - n^2 = (n+4)(n+4) - n^2 = n^2 + 4n + 4n + 16 - n^2 = 8n + 16$$

Koska $8 \cdot n = 8n$ ja $8 \cdot 2 = 16$, lauseke $8n + 16$ voidaan kirjoittaa muotoon $8(n+2)$.

Koska luvussa $8(n+2)$ on tulon tekijänä luku 8, on luku $8(n+2)$ jaollinen luvulla 8. Näin ollen myös luku $8(n+2) = (n+4)^2 - n^2$ on jaollinen luvulla 8.

Luku $(n+4)^2 - n^2$ on jaollinen luvulla 16, jos $n+2$ on jaollinen luvulla 2. Näin käy täsmälleen silloin, kun n on jaollinen luvulla 2, eli kun n on parillinen.

Vastaus: kun n on parillinen

49A. Luvut $2^{77\,232\,917} - 1$, $2^{77\,232\,917}$ ja $2^{77\,232\,917} + 1$ ovat peräkkäisiä kokonaislukuja, joten niistä täsmälleen yksi on kolmella jaollinen.

Koska luku $2^{77\,232\,917} - 1$ on alkuluku, se ei ole kolmella jaollinen.

Koska luvun $2^{77\,232\,917}$ tekijöinä on vain kakkosia, se ei ole kolmella jaollinen.

Koska kumpikaan luvuista $2^{77\,232\,917} - 1$ ja $2^{77\,232\,917}$ ei ole kolmella jaollinen, niin luku $2^{77\,232\,917} + 1$ on kolmella jaollinen.

Vastaus: kolmella

50A. a) Koska $5 \geq 0$, niin luvun 5 itseisarvo on $|5| = 5$.

Vastaus: 5

b) Koska $-73 < 0$, niin luvun -73 itseisarvo on $|-73| = -(-73) = 73$.

Vastaus: 73

c) Lausekkeen $x + 2$ itseisarvo riippuu siitä, onko lausekkeen arvo ei-negatiivinen vai negatiivinen.

Jos $x \geq -2$, niin $x + 2 \geq 0$. Tällöin $|x + 2| = x + 2$.

Jos $x < -2$, niin $x + 2 < 0$. Tällöin $|x + 2| = -(x + 2) = -x - 2$.

Vastaus:

$$|x + 2| = \begin{cases} x + 2, & \text{kun } x \geq -2 \\ -x - 2, & \text{kun } x < -2 \end{cases}$$

2 YHTÄLÖITÄ

ALOITA PERUSTEISTA

51A. Luku on yhtälön ratkaisu, jos luku toteuttaa yhtälön.

a) Sijoitetaan luku $x = 3$ yhtälöön.

$$\begin{aligned} 2 \cdot 3 - 6 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Yhtälö on tosi, joten $x = 3$ on yhtälön ratkaisu.

Vastaus: on

b) Sijoitetaan luku $x = 3$ yhtälöön.

$$\begin{aligned} 2 \cdot 3 + 5 &= 3 + 7 \\ 11 &= 10 \end{aligned}$$

Yhtälö on epätosi, joten $x = 3$ ei ole yhtälön ratkaisu.

Vastaus: ei ole

52A. a)

$$\begin{aligned} 5x - 25 &= 0 \\ 5x &= 25 && \parallel :5 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Vastaus: $x = 5$

b)

$$\begin{aligned} 2x + 9 &= 5x - 3 \\ 2x - 5x &= -3 - 9 \\ -3x &= -12 && \parallel :(-3) \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Vastaus: $x = 4$

53A. a)

$$\begin{aligned}
 2(x+4) - 3 &= 3x \\
 2x + 8 - 3 &= 3x \\
 2x - 3x &= -8 + 3 \\
 -x &= -5 \quad \| :(-1) \\
 x &= 5
 \end{aligned}$$

Tarkistetaan sijoittamalla ratkaisu alkuperäiseen yhtälöön.

$$\begin{aligned}
 2(5+4) - 3 &= 3 \cdot 5 \\
 2 \cdot 9 - 3 &= 15 \\
 15 &= 15
 \end{aligned}$$

Yhtälö on tosi, joten $x = 5$ on yhtälön ratkaisu.

Vastaus: $x = 5$

b)

$$\begin{aligned}
 \frac{x}{3} + \frac{2x}{3} &= 2 \quad \| \cdot 3 \\
 x + 2x &= 6 \\
 3x &= 6 \quad \| :3 \\
 x &= 2
 \end{aligned}$$

Tarkistetaan sijoittamalla ratkaisu alkuperäiseen yhtälöön.

$$\begin{aligned}
 \frac{2}{3} + \frac{2 \cdot 2}{3} &= 2 \\
 \frac{2}{3} + \frac{4}{3} &= 2 \\
 \frac{6}{3} &= 2 \\
 2 &= 2
 \end{aligned}$$

Yhtälö on tosi, joten $x = 2$ on yhtälön ratkaisu.

Vastaus: $x = 2$

c)

$$\begin{aligned}
 \frac{x}{4} - \frac{6x-2}{4} &= 8 && \parallel \cdot 4 \\
 x - (6x-2) &= 32 \\
 x - 6x + 2 &= 32 \\
 -5x &= 30 && \parallel : (-5) \\
 x &= -6
 \end{aligned}$$

Tarkistetaan sijoittamalla ratkaisu alkuperäiseen yhtälöön.

$$\begin{aligned}
 \frac{-6}{4} - \frac{6 \cdot (-6) - 2}{4} &= 8 \\
 -\frac{6}{4} - \frac{-38}{4} &= 8 \\
 -\frac{6}{4} + \frac{38}{4} &= 8 \\
 \frac{32}{4} &= 8 \\
 8 &= 8
 \end{aligned}$$

Yhtälö on tosi, joten $x = -6$ on yhtälön ratkaisu.

Vastaus: $x = -6$

- 54A.** a) Yhtälö on toisen asteen yhtälö, jonka kertoimet ovat $a = 2$, $b = 1$ ja $c = -10$. Sijoitetaan kertoimet ratkaisukaavaan ja sievennetään lauseke.

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
 x &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-10)}}{2 \cdot 2} \\
 x &= \frac{-1 \pm \sqrt{81}}{4} \\
 x &= \frac{-1 \pm 9}{4} \\
 x &= \frac{-1+9}{4} = \frac{8}{4} = 2 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-1-9}{4} = \frac{-10}{4} = -\frac{5}{2}
 \end{aligned}$$

Vastaus: $x = 2$ tai $x = -\frac{5}{2}$

- b) Yhtälö on toisen asteen yhtälö, jonka kertoimet ovat $a = -1$, $b = -3$ ja $c = 4$. Sijoitetaan kertoimet ratkaisukaavaan ja sievennetään lauseke.

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
 x &= \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 4}}{2 \cdot (-1)} \\
 x &= \frac{3 \pm \sqrt{25}}{-2} \\
 x &= \frac{3 \pm 5}{-2} \\
 x &= \frac{3+5}{-2} = \frac{8}{-2} = -4 \quad \text{tai} \quad x = \frac{3-5}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1
 \end{aligned}$$

Vastaus: $x = -4$ tai $x = 1$

- c) Yhtälö on toisen asteen yhtälö, jonka kertoimet ovat $a = 1$, $b = -2$ ja $c = 0$. Sijoitetaan kertoimet ratkaisukaavaan ja sievennetään lauseke.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm 2}{2}$$

$$x = \frac{2+2}{2} = \frac{4}{2} = 2 \quad \text{tai} \quad x = \frac{2-2}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

Vastaus: $x = 2$ tai $x = 0$

55A. a) Ratkaistaan yhtälöpari $\begin{cases} x + 2y = -4 \\ 2x - y = -3 \end{cases}$ yhteenlaskumenetelmällä.

Eliminoidaan ensin muuttuja x .

$$\begin{array}{rcl} \begin{cases} x + 2y = -4 \\ 2x - y = -3 \end{cases} & \parallel \cdot (-2) & \\ \begin{cases} -2x - 4y = 8 \\ 2x - y = -3 \end{cases} & & \\ + & & \\ \hline -2x + 2x - 4y - y = 8 - 3 & & \\ -5y = 5 & \parallel : (-5) & \\ y = -1 & & \end{array}$$

Sijoitetaan $y = -1$ ylempään alkuperäiseen yhtälöön $x + 2y = -4$ ja ratkaistaan x .

$$\begin{aligned} x + 2 \cdot (-1) &= -4 \\ x - 2 &= -4 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

Tarkistetaan sijoittamalla ratkaisu $x = -2$, $y = -1$ molempiin yhtälöparin yhtälöihin.

$$\begin{array}{rcl} -2 + 2 \cdot (-1) &= & -4 \\ -4 &= & -4 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} 2 \cdot (-2) - (-1) &= & -3 \\ -3 &= & -3 \end{array}$$

Molemmat yhtälöt toteutuvat, joten yhtälöparin ratkaisu on $x = -2$ ja $y = -1$.

Vastaus: $x = -2$ ja $y = -1$

b) Ratkaistaan yhtälöpari $\begin{cases} y - x + 1 = 0 \\ 4y = 12 - x \end{cases}$ sijoitusmenetelmällä.

$$\begin{cases} y - x + 1 = 0 \\ 4y = 12 - x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ 4y = 12 - x \end{cases}$$

Sijoitetaan ylempi yhtälö alempaan yhtälöön ja ratkaistaan saadusta yhtälöstä muuttuja x .

$$\begin{aligned} 4 \cdot (x - 1) &= 12 - x \\ 4x - 4 &= 12 - x \\ 5x &= 16 \quad \| :5 \\ x &= \frac{16}{5} \end{aligned}$$

Sijoitetaan $x = \frac{16}{5}$ yhtälöön $y = x - 1$ ja sievennetään.

$$y = \frac{16}{5} - 1 = \frac{16}{5} - \frac{5}{5} = \frac{11}{5}$$

Tarkistetaan sijoittamalla ratkaisu $x = \frac{16}{5}$, $y = \frac{11}{5}$ molempiin yhtälöparin yhtälöihin.

$$\begin{aligned} \frac{11}{5} - \frac{16}{5} + 1 &= 0 & 4 \cdot \frac{11}{5} &= {}^5) 12 - \frac{16}{5} \\ -\frac{5}{5} + 1 &= 0 & \frac{44}{5} &= \frac{60}{5} - \frac{16}{5} \\ 0 &= 0 & \frac{44}{5} &= \frac{44}{5} \end{aligned}$$

Molemmat yhtälöt toteutuvat, joten yhtälöparin ratkaisu on $x = \frac{16}{5}$ ja $y = \frac{11}{5}$.

Vastaus: $x = \frac{16}{5}$ ja $y = \frac{11}{5}$

56A. a) Yhtälö on verranto. Ratkaistaan se kertomalla ristiin.

$$\begin{aligned}\frac{x+2}{5} &= \frac{x-3}{6} \\ 6(x+2) &= 5(x-3) \\ 6x+12 &= 5x-15 \\ x &= -27\end{aligned}$$

Vastaus: $x = -27$

b) Ratkaistaan verranto kertomalla ristiin.

$$\begin{aligned}\frac{x}{3} &= \frac{3}{x} \\ x^2 &= 9 \\ x &= \pm\sqrt{9} \\ x &= \pm 3\end{aligned}$$

Vastaus: $x = \pm 3$

c) Ratkaistaan verranto kertomalla ristiin.

$$\begin{aligned}\frac{1}{27} &= \frac{x^3}{2^3} \\ 27x^3 &= 8 \quad ||: 27 \\ x^3 &= \frac{8}{27} \\ x &= \sqrt[3]{\frac{8}{27}} \\ x &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

Vastaus: $x = \frac{2}{3}$

57A. a)

$$4x^3 = 32 \quad \| :4$$

$$x^3 = 8$$

$$x = \sqrt[3]{8}$$

$$x = 2$$

Vastaus: $x = 2$ **b)**

$$5x^4 - 5 = 0$$

$$5x^4 = 5 \quad \| :5$$

$$x^4 = 1$$

$$x = \pm \sqrt[4]{1}$$

$$x = \pm 1$$

Vastaus: $x = \pm 1$ **c)**

$$\frac{1}{16}x^5 + 2 = 0$$

$$\frac{1}{16}x^5 = -2 \quad \| \cdot 16$$

$$x^5 = -32$$

$$x = \sqrt[5]{-32}$$

$$x = -2$$

Vastaus: $x = -2$

58A. a)

$$x^2 = 64$$

$$x = \pm\sqrt{64}$$

$$x = \pm 8$$

Vastaus: $x = \pm 8$

b)

$$2^y = 64$$

$$2^y = 2^6$$

$$y = 6$$

Koska kantaluvut (2) ovat yhtäsuuret myös eksponenttien (y ja 6) oltava yhtäsuuret

Vastaus: $y = 6$

c)

$$z^3 = 64$$

$$z = \sqrt[3]{64}$$

$$z = 4$$

Vastaus: $z = 4$

59A. a)

$$2^x = 2$$

$$2^x = 2^1$$

$$x = 1$$

Kun kantaluvut ovat yhtä suuret, myös eksponenttien oltava yhtä suuret.

Vastaus: $x = 1$

b)

$$2^x = \frac{1}{2}$$

$$2^x = 2^{-1}$$

$$x = -1$$

Vastaus: $x = -1$

c)

$$2^x = 8^2$$

$$2^x = (2^3)^2$$

$$2^x = 2^6$$

$$x = 6$$

Vastaus: $x = 6$

d)

$$3^x = \frac{1}{3^5}$$

$$3^x = 3^{-5}$$

$$x = -5$$

Vastaus: $x = -5$

e)

$$10^x = 1000$$

$$10^x = 10^3$$

$$x = 3$$

Vastaus: $x = 3$

f)

$$10^x = 0,01$$

$$10^x = \frac{1}{100}$$

$$10^x = \frac{1}{10^2}$$

$$10^x = 10^{-2}$$

$$x = -2$$

Vastaus: $x = -2$

60A. Merkitään matkan kokonaishintaa kirjaimella x . Alkuperäinen yhden matkustajan hinta oli $\frac{x}{11}$. Kun matkustajia tuli kaksi lisää, yhden matkustajan hinta pieneni 10 eurolla. Yhden matkustajan hinnan lauseke on siis $\frac{x}{11} - 10$. Toisaalta yhden matkustajan hinta saadaan lausekkeella $\frac{x}{13}$. Merkitään nämä lausekkeet yhtä suuriksi ja ratkaistaan matkan kokonaishinta x .

$$\begin{aligned}
 \frac{x}{11} - 10 &= \frac{x}{13} \\
 {}^{13)} \frac{x}{11} - {}^{11)} \frac{x}{13} &= 10 \\
 \frac{13x}{143} - \frac{11x}{143} &= 10 \\
 \frac{2x}{143} &= 10 \quad || \cdot 143 \\
 2x &= 1430 \quad || : 2 \\
 x &= 715
 \end{aligned}$$

Matkan kokonaishinta oli 715 €, joten yhden matkustajan hinta oli $\frac{715 \text{ €}}{13} = 55 \text{ €}$.

Vastaus: 55 euroa

- 61A. a)** Merkitään osakkeen alkuperäistä arvoa kirjaimella x . Osakkeen arvo nousi 50 %, joten se tuli $100 \% + 50 \% = 150 \% = 1,5$ -kertaiseksi. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä osakkeen alkuperäinen arvo x .

$$\begin{aligned} 1,50x &= 12 & \parallel : 1,50 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

Osakkeen alkuperäinen arvo oli 8 euroa.

Vastaus: 8 euroa

- b)** Merkitään osakkeen alkuperäistä arvoa kirjaimella x . Osakkeen arvo nousi ensin 20 %, eli osakkeen arvo tuli 1,20-kertaiseksi ja laski sitten 20 %, eli osakkeen arvo tuli 0,80-kertaiseksi. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä osakkeen alkuperäinen arvo.

$$\begin{aligned} 0,80 \cdot 1,20x &= 8,30 \\ 0,96x &= 8,30 & \parallel : 0,96 \\ x &= 8,645... \\ x &\approx 8,65 \end{aligned}$$

Osakkeen alkuperäinen arvo oli 8,65 euroa.

Vastaus: 8,65 euroa

62A. a) Merkitään kilohintaa kirjaimella x ja kirjataan tiedot taulukkoon.

Hinta (€)	Paino (g)
8,80	450
x	1000

Kahvipapujen hinta ja paino ovat suoraan verrannolliset. Muodostetaan verranto ja ratkaistaan siitä kilohinta x .

$$\begin{aligned}\frac{8,80}{x} &= \frac{450}{1000} \\ 450x &= 8,80 \cdot 1000 \quad || : 450 \\ x &= 19,555... \\ x &\approx 19,56\end{aligned}$$

Kahvipapujen kilohinta on 19,56 €.

Vastaus: 19,56 €/kg

b) Merkitään koulumatkaan autolla kuluvaa aikaa kirjaimella x ja kirjataan tiedot taulukkoon.

Aika (min)	Nopeus (km/h)
15	35
x	55

Aika ja nopeus ovat kääntäen verrannolliset. Muodostetaan verranto ja ratkaistaan siitä aika x .

$$\begin{aligned}\frac{15}{x} &= \frac{55}{35} \\ 55x &= 15 \cdot 35 \quad || : 55 \\ x &= 9,545... \\ x &\approx 10\end{aligned}$$

Autolla koulumatka kestää noin 10 minuuttia.

Vastaus: 10 min

VAHVISTA OSAAMISTA

63B. a)

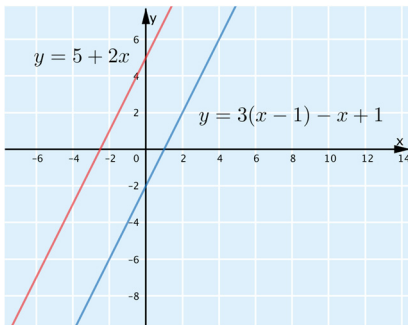
$$3(x-1) - x + 1 = 5 + 2x$$

$$3x - 3 - x + 1 = 5 + 2x$$

$$3x - 2x - x = 5 + 3 - 1$$

$$0 = 7$$

Piirretään alkuperäisen yhtälön vasemmalla puolella ja oikealla puolella olevia lausekkeita vastaavien funktioiden kuvaajat.



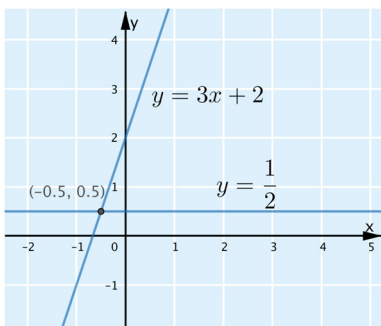
Suorat näyttäisivät olevan yhdensuuntaisia, joten niillä ei ole yhteisiä pisteitä ja yhtälöllä ei siten ole ratkaisua.

Vastaus: ei ratkaisua

b)

$$\begin{aligned}
 3x + 2 &= \frac{1}{2} \\
 3x &= -\frac{3}{2} & \parallel :3 \\
 x &= -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Piirretään alkuperäisen yhtälön vasemmalla puolella ja oikealla puolella olevia lausekkeita vastaavien funktioiden kuvaajat.



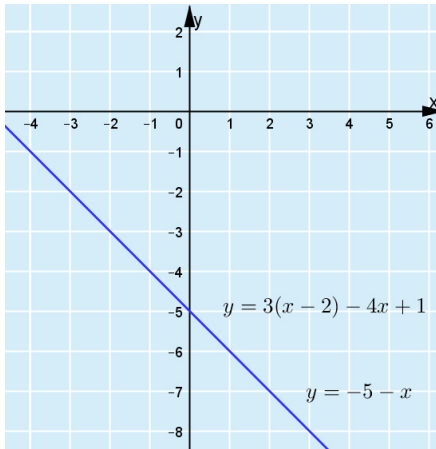
Suorat näyttävät leikkaavan kohdassa $x = -\frac{1}{2}$, joten ratkaisu on oikein.

Vastaus: $x = -\frac{1}{2}$

c)

$$\begin{aligned}3(x - 2) - 4x + 1 &= -5 - x \\3x - 6 - 4x + 1 &= -5 - x \\-5 - x &= -5 - x \\0 &= 0\end{aligned}$$

Piirretään alkuperäisen yhtälön vasemmalla puolella ja oikealla puolella olevia lausekkeita vastaavien funktioiden kuvaajat.



Suorat yhtyvät, joten yhtälö toteutuu kaikilla x :n arvoilla.

Vastaus: yhtälö toteutuu kaikilla muuttujan x arvoilla

64A. a)

$$3x + 2 = x - 4(5x - 1)$$

$$3x + 2 = x - 20x + 4$$

$$3x - x + 20x = 4 - 2$$

$$22x = 2 \quad \| : 22$$

$$x = \frac{2}{22} \stackrel{(2)}{=} \frac{1}{11}$$

Vastaus: $x = \frac{1}{11}$

b)

$$\stackrel{(15)}{\frac{x}{10}} + \stackrel{(10)}{\frac{x}{15}} = \stackrel{(150)}{x} + 1$$

$$\frac{15x}{150} + \frac{10x}{150} = \frac{150x}{150} + 1 \quad \| \cdot 150$$

$$15x + 10x = 150x + 150$$

$$-125x = 150 \quad \| : (-125)$$

$$x = -\frac{150}{125} \stackrel{(25)}{=} -\frac{6}{5}$$

Vastaus: $x = -\frac{6}{5}$

65A. Suorien leikkauspiste on yhtälöparin $\begin{cases} x + 5y = 1 \\ x - 5y = 5 \end{cases}$ ratkaisu. Ratkaistaan yhtälöpari.

$$\begin{array}{r} \begin{cases} x + 5y = 1 \\ x - 5y = 5 \end{cases} \\ \hline x + x + 5y - 5y = 1 + 5 \\ 2x = 6 \quad \parallel : 2 \\ x = 3 \end{array}$$

Ratkaistaan leikkauspisteen y -koordinaatti sijoittamalla $x = 3$ ylempään alkuperäiseen yhtälöön.

$$\begin{array}{r} 3 + 5y = 1 \\ 5y = -2 \quad \parallel : 5 \\ y = -\frac{2}{5} \end{array}$$

Vastaus: pisteessä $\left(3, -\frac{2}{5}\right)$

66A. a)

$$3x(2x - 4) = -x(1 - x) - 12$$

$$6x^2 - 12x = -x + x^2 - 12$$

$$5x^2 - 11x + 12 = 0$$

Yhtälö on toisen asteen yhtälö, jonka kertoimet ovat $a = 5$, $b = -11$ ja $c = 12$. Sijoitetaan kertoimet toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan ja sievennetään lauseke.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-11) \pm \sqrt{(-11)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 12}}{2 \cdot 5}$$

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 240}}{10}$$

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{-119}}{10}$$

Juurrettava on negatiivinen luku, joten yhtälöllä ei ole ratkaisua.

Vastaus: ei ratkaisua

b)

$$x(x - 5) = 20$$

$$x^2 - 5x - 20 = 0$$

Yhtälö on toisen asteen yhtälö, jonka kertoimet ovat $a = 1$, $b = -5$ ja $c = -20$. Sijoitetaan kertoimet toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan ja sievennetään lauseke.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-20)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 80}}{2}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{105}}{2}$$

$$\text{Vastaus: } x = \frac{5 \pm \sqrt{105}}{2}$$

c)

$$x^2 = \frac{1}{4}(4x - 1)$$

$$x^2 = x - \frac{1}{4} \quad || \cdot 4$$

$$4x^2 = 4x - 1$$

$$4x^2 - 4x + 1 = 0$$

Yhtälö on toisen asteen yhtälö, jonka kertoimet ovat $a = 4$, $b = -4$ ja $c = 1$. Sijoitetaan kertoimet toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan ja sievennetään lauseke.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 4}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{8}$$

$$x = \frac{4^{(4)}}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Vastaus: } x = \frac{1}{2}$$

d)

$$(x + 2)^2 = 4$$

$$(x + 2)(x + 2) = 4$$

$$x^2 + 2x + 2x + 4 = 4$$

$$x^2 + 4x = 0$$

Yhtälö on toisen asteen yhtälö, jonka kertoimet ovat $a = 1$, $b = 4$ ja $c = 0$. Sijoitetaan kertoimet toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan ja sievennetään lauseke.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-4 \pm 4}{2}$$

$$x = \frac{-4 + 4}{2} = 0 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-4 - 4}{2} = \frac{-8}{2} = -4$$

Vastaus: $x = 0$ tai $x = -4$

67A. a)

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}x - 1 &= \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3}x - 1 &= \frac{2}{3} & \parallel \cdot 3 \\ 2x - 3 &= 2 \\ 2x &= 5 & \parallel : 2 \\ x &= \frac{5}{2}\end{aligned}$$

Vastaus: $x = \frac{5}{2}$

b)

$$\begin{aligned}\frac{2x}{2x+3} &= \frac{2x+1}{8} \\ 16x &= (2x+3)(2x+1) \\ 16x &= 4x^2 + 2x + 6x + 3 \\ -4x^2 + 8x - 3 &= 0\end{aligned}$$

Yhtälö on toisen asteen yhtälö, jonka kertoimet ovat $a = -4$, $b = 8$ ja $c = -3$. Sijoitetaan kertoimet toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan ja sievennetään lauseke.

$$\begin{aligned}x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x &= \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot (-4) \cdot (-3)}}{2 \cdot (-4)} \\ x &= \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 48}}{-8} \\ x &= \frac{-8 \pm 4}{-8} \\ x &= \frac{-8+4}{-8} = \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2} \quad \text{tai} \quad x = \frac{-8-4}{-8} = \frac{-12}{-8} = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

Vastaus: $x = \frac{1}{2}$ tai $x = \frac{3}{2}$

68A. a) Ratkaistaan yhtälöt.

$$\frac{3}{5}x + 2 = 1$$

$$\frac{3}{5}x = -1 \quad \| \cdot 5$$

$$3x = -5 \quad \| : 3$$

$$x = -\frac{5}{3}$$

$$3x^2 - 7x - 20 = 0$$

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-20)}}{2 \cdot 3}$$

$$= \frac{7 \pm \sqrt{49 + 240}}{6}$$

$$= \frac{7 \pm \sqrt{289}}{6}$$

$$= \frac{7 \pm 17}{6}$$

$$= \frac{7+17}{6} = \frac{24}{6} = 4 \quad \text{tai} \quad x = \frac{7-17}{6} = -\frac{10}{6} = -\frac{5}{3}$$

Molemmilla yhtälöillä on ratkaisuna $x = -\frac{5}{3}$.

Vastaus: on

b) Merkitään lausekkeet yhtä suuriksi ja ratkaistaan saatu yhtälö.

$$2x + 3 = -(x + 3)$$

$$2x + 3 = -x - 3$$

$$3x = -6 \quad \| : 3$$

$$x = -2$$

Vastaus: $x = -2$

69A. Lausekkeen nollakohdat ratkaistaan yhtälöstä $(x + 1)(2 - x) - 2 = 0$.

$$\begin{aligned}(x + 1)(2 - x) - 2 &= 0 \\ 2x - x^2 + 2 - x - 2 &= 0 \\ -x^2 + x &= 0\end{aligned}$$

Yhtälö on toisen asteen yhtälö, jonka kertoimet ovat $a = -1$, $b = 1$ ja $c = 0$. Sijoitetaan kertoimet toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan ja sievennetään lauseke.

$$\begin{aligned}x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 0}}{2 \cdot (-1)} \\ x &= \frac{-1 \pm 1}{-2} \\ x = \frac{-1+1}{-2} = \frac{0}{-2} = 0 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-1-1}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1\end{aligned}$$

Lausekkeen nollakohtia ovat $x = 0$ ja $x = 1$

Vastaus: $x = 0$ tai $x = 1$

70A. a) Ratkaistaan yhtälöpari.

$$\begin{array}{rcl}
 \begin{cases} 2x + y = 4 \\ -x + 2y = 1 \end{cases} & \parallel \cdot (-2) & \\
 \begin{cases} -4x - 2y = -8 \\ -x + 2y = 1 \end{cases} & & \\
 \hline
 -4x - x - 2y + 2y = -8 + 1 & & \\
 -5x = -7 & \parallel : (-5) & \\
 x = \frac{7}{5} & &
 \end{array}$$

Ratkaistaan muuttuja y yhtälöstä $2x + y = 4$.

$$\begin{aligned}
 2x + y &= 4 \\
 y &= 4 - 2x \\
 y &= 4 - 2 \cdot \frac{7}{5} \\
 y &= {}^{\text{5)}} 4 - \frac{14}{5} \\
 y &= \frac{20}{5} - \frac{14}{5} \\
 y &= \frac{6}{5}
 \end{aligned}$$

Vastaus: $x = \frac{7}{5}$ ja $y = \frac{6}{5}$

b) Ratkaistaan yhtälöpari.

$$\begin{array}{r} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{x} + y = 1 \\ \frac{1}{x} - y = 2 \end{array} \right. \\ \hline \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + y - y = 1 + 2 \\ \frac{2}{x} = 3 \quad \| \cdot x \\ 2 = 3x \quad \| : 3 \\ x = \frac{2}{3} \end{array}$$

Ratkaistaan muuttuja y yhtälöstä $\frac{1}{x} + y = 1$.

$$\begin{array}{l} \frac{1}{x} + y = 1 \\ y = 1 - \frac{1}{x} \\ y = 1 - \frac{1}{\frac{2}{3}} = 1 - 1 \cdot \frac{3}{2} = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \end{array}$$

Vastaus: $x = \frac{2}{3}$ ja $y = -\frac{1}{2}$

71A. a)

$$4x^5 + 36 = 3x^5 - 81$$

$$x^5 = -117$$

$$x = \sqrt[5]{-117}$$

$$\text{Vastaus: } x = \sqrt[5]{-117}$$

b)

$$x(3x + 4) = 2(2x + 6)$$

$$3x^2 + 4x = 4x + 12$$

$$3x^2 = 12 \quad \parallel : 3$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm\sqrt{4}$$

$$x = \pm 2$$

$$\text{Vastaus: } x = \pm 2$$

c)

$$(x^4)^2 + 15 = 14$$

$$x^8 = -1$$

Minkään reaaliluvun parillinen potenssi ei ole negatiivinen, joten yhtälöllä ei ole ratkaisua.

Vastaus: ei ratkaisua

- 72B. a)** Koska kantaluvut ovat yhtä suuret, myös eksponenttien oltava yhtä suuret.

$$\begin{aligned}5^{2x+4} &= 5^{-x} \\2x+4 &= -x \\3x &= -4 \quad \parallel :3 \\x &= -\frac{4}{3} \\x &\approx -1,33\end{aligned}$$

$$\text{Vastaus: } x = -\frac{4}{3} \approx -1,33$$

- b)** Ratkaistaan yhtälö logaritmin avulla.

$$\begin{aligned}10^x &= 12 \\x &= \log_{10} 12 \\x &= \lg 12 \\x &\approx 1,08\end{aligned}$$

$$\text{Vastaus: } x = \lg 12 \approx 1,08$$

- c)** Koska $2^3 = 8$, yhtälön oikealle puolelle saadaan luvun 2 potenssi.

$$\begin{aligned}2^{3x+1} &= 8 \\2^{3x+1} &= 2^3 \\3x+1 &= 3 \\3x &= 2 \quad \parallel :3 \\x &= \frac{2}{3} \\x &\approx 0,67\end{aligned}$$

$$\text{Vastaus: } x = \frac{2}{3} \approx 0,67$$

d) Koska $3^3 = 27$, yhtälön vasemmalle puolelle saadaan luvun 3 potenssi.

$$\begin{aligned}
 3 \cdot 27^x &= \frac{1}{9^x} \\
 3 \cdot (3^3)^x &= 9^{-x} \\
 3 \cdot 3^{3x} &= (3^2)^{-x} \\
 3^{1+3x} &= 3^{-2x} \\
 1+3x &= -2x \\
 5x &= -1 \quad \| :5 \\
 x &= -\frac{1}{5} \\
 x &= -0,20
 \end{aligned}$$

$$\text{Vastaus: } x = -\frac{1}{5} = -0,20$$

e)

$$\begin{aligned}
 5e^x - 15 &= 0 \\
 5e^x &= 15 \quad \| :5 \\
 e^x &= 3 \\
 x &= \log_e 3 \\
 x &= \ln 3 \\
 x &\approx 1,10
 \end{aligned}$$

$$\text{Vastaus: } x = \ln 3 \approx 1,10$$

f)

$$\begin{aligned}
 10 \cdot 7^x + 40 &= 0 \\
 10 \cdot 7^x &= -40 \quad \| :10 \\
 7^x &= -4
 \end{aligned}$$

Luvun 7 potenssi ei voi olla negatiivinen, joten yhtälöllä ei ole ratkaisua.

Vastaus: ei ratkaisua

73A. a) Esimerkiksi yhtälön $x^2 - 1 = 0$ yksi juuri on $x = 1$, koska

$$x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm 1$$

Vastaus: esim. $x^2 - 1 = 0$

b) Yhtälö toteutuu, kun $x = 2$. Sijoitetaan $x = 2$ yhtälöön ja ratkaistaan kerroin a .

$$x(x - 5) + ax = 2$$

$$2 \cdot (2 - 5) + 2a = 2$$

$$2 \cdot (-3) + 2a = 2$$

$$-6 + 2a = 2$$

$$2a = 8 \quad \parallel : 2$$

$$a = 4$$

Vastaus: $a = 4$

74B. Merkitään Aadan ostaman kryptovaluutan määrää kirjaimella x .
Kun valuutan arvo romahti 62 %, Aadan valuutan arvo väheni $0,62x$.
Toisaalta arvo väheni 42 520 €.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä alkuperäinen kryptovaluutan määrä x .

$$0,62x = 42\,520 \quad \parallel : 0,62$$

$$x = 68\,580,645\dots$$

$$x \approx 68\,580,65$$

Aada oli ostanut kryptovaluuttaa 68 580,65 eurolla.

Vastaus: 68 580,65 eurolla

- 75A.** Merkitään yhden BitCoinin kauppahintaa vuotta aiemmin kirjaimella x . BitCoinin arvo nousi 900 %, eli se tuli $100 \% + 900 \% = 1000 \% = 10$ -kertaiseksi vuodessa.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä kauppahinta x .

$$\begin{aligned} 10x &= 16\,000 & \parallel :10 \\ x &= 1600 \end{aligned}$$

Yhden BitCoinin kauppahinta vuotta aiemmin oli 1600 \$.

Vastaus: 1600 \$

- 76A.** a) Merkitään aikaa kirjaimella x . Merkitään tiedot taulukkoon.

Maalarien määrä	Aika (työpäivää)
2	5
1	x

Mitä enemmän työntekijöitä, sitä nopeammin urakka tulee tehdyksi. Suureet ovat siis kääntäen verrannolliset.

Muodostetaan verranto ja ratkaistaan siitä aika x .

$$\begin{aligned} \frac{2}{1} &= \frac{x}{5} \\ x &= 10 \end{aligned}$$

Yhdeltä maalarilta aikaa kuluisi 10 työpäivää.

Vastaus: 10 työpäivää

b) Merkitään aikaa kirjaimella x . Merkitään tiedot taulukkoon.

Maalarien määrä	Aika (työpäivää)
2	5
15	x

Suureet ovat siis kääntäen verrannolliset.

Muodostetaan verranto ja ratkaistaan siitä aika x .

$$\begin{aligned}\frac{2}{15} &= \frac{x}{5} \\ 15x &= 10 \quad \parallel :15 \\ x &= \frac{10}{15} \\ x &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

Viideltätoista maalarilta aikaa kului $\frac{2}{3}$ työpäivää. Tämä on

$$\frac{2}{3} \cdot 8 \text{ h} = 5,333\dots \text{h} = 5 \text{ h } 20 \text{ min.}$$

Vastaus: 5 h 20 min

77B. Merkitään autojen määrää kirjaimella a ja mopojen määrää kirjaimella m . Koska yhdessä autossa on 4 rengasta, niin a :ssa autossa on $4a$ rengasta ja vastaavasti m :ssä mopossa on $2m$ rengasta. Kulkuneuvojen ja renkaiden määristä saadaan yhtälöt. Muodostetaan yhtälöistä yhtälöpari ja ratkaistaan siitä autojen ja mopojen määrät.

$$\begin{cases} a + m = 30 \\ 4a + 2m = 96 \end{cases}$$

Symbolisen laskennan ohjelmalla yhtälöparin ratkaisuksi saadaan $a = 18$ ja $m = 12$.

Parkkipaikalla on 18 autoa ja 12 mopoa.

Vastaus: 18 autoa ja 12 mopoa

- 78B.** Merkitään minun ikääni nyt kirjaimella m ja lapseni ikää nyt kirjaimella l . ”Nyt ikäni on 7 vuotta enemmän kuin lapseni ikä kolminkertaisena” muodostaa valituilla kirjaimilla yhtälön $m = 3l + 7$.

Minun ikäni 9 vuotta sitten oli $m - 9$ ja lapseni ikä $l - 9$. Tuolloin lapseni ikä 11-kertaisena oli $11(l - 9)$. Muodostetaan tiedoista yhtälöpari ja ratkaistaan siitä iät m ja l .

$$\begin{cases} m - 9 = 11(l - 9) + 1 \\ m = 3l + 7 \end{cases}$$

Symbolisen laskennan ohjelmalla yhtälöparin ratkaisuksi saadaan $m = 43$ ja $l = 12$.

Minä olen nyt 43-vuotias ja lapseni 12-vuotias.

Vastaus: 43 vuotta, 12 vuotta

- 79B.** Merkitään talvinopeusrajoitusta kirjaimella x . Kirjataan tiedot taulukkoon.

Nopeus (km/h)	Aika (min)
x	15
$x + 20$	12

Nopeus ja aika ovat kääntäen verrannolliset. Muodostetaan verranto ja ratkaistaan siitä nopeus x .

$$\frac{x}{x + 20} = \frac{12}{15}$$

Symbolisen laskennan ohjelmalla yhtälön ratkaisuksi saadaan $x = 80$ km/h.

Talvinopeusrajoitus on 80 km/h.

Vastaus: 80 km/h

- 80A.** Merkitään varren halkaisijaa 90 vrk:n ikäisenä kirjaimella x . Merkitään tehtävän tiedot taulukkoon.

Halkaisija (mm)	$\sqrt{\text{ikä}} \left(\sqrt{\text{vrk}} \right)$
12	$\sqrt{40}$
x	$\sqrt{90}$

Varren halkaisija on suoraan verrannollinen kasvin iän neliöjuureen. Muodostetaan verranto ja ratkaistaan siitä varren halkaisija x .

$$\begin{aligned} \frac{12}{x} &= \frac{\sqrt{40}}{\sqrt{90}} \\ \sqrt{40}x &= 12 \cdot \sqrt{90} \quad \parallel : \sqrt{40} \\ x &= 18 \end{aligned}$$

Kasvin varsi on 18 mm paksu.

Vastaus: 18 mm

81B. Loppumatkaan kuluva aika on $t = \frac{\text{matka}}{\text{nopeus}} = \frac{30 \text{ km}}{80 \text{ km/h}} = \frac{3}{8} \text{ h}$.

$$15 \text{ min} = \frac{1}{4} \text{ h}$$

Kokouksen alkuun on aikaa $\left(\frac{3}{8} - \frac{1}{4}\right) \text{ h} = \frac{1}{8} \text{ h}$.

Nopeudella 70 km/h loppumatkaan kuluu aikaa

$$t = \frac{\text{matka}}{\text{nopeus}} = \frac{30 \text{ km}}{70 \text{ km/h}} = \frac{3}{7} \text{ h}.$$

Herra Hoppulainen myöhästyisi siis

$$\left(\frac{3}{7} - \frac{1}{8}\right) \text{ h} = 0,3035... \text{ h} = 18,214... \text{ min} \approx 18 \text{ min}.$$

Jotta hän olisi ajoissa perillä, hänen tulisi ajaa nopeudella

$$v = \frac{\text{matka}}{\text{aika}} = \frac{30 \text{ km}}{\frac{1}{8} \text{ h}} = 240 \text{ km/h}.$$

Vastaus: noin 18 minuuttia, 240 km/h

- 82B.** Merkitään Diofantoksen elinikää kirjaimella x . Muodostetaan tarinan avulla yhtälö ja ratkaistaan siitä x .

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x$$

Symbolisen laskennan ohjelmalla yhtälön ratkaisuksi saadaan $x = 84$.

Diofantos saavutti 84 elinvuotta.

Vastaus: 84 vuotta

- 83B.** Merkitään lisättävän veden määrää kirjaimella x .
Suolan määrä 10-prosenttisessa liuoksessa on $0,1 \cdot 4 \text{ kg} = 0,4 \text{ kg}$.

Uuden liuoksen kokonaismassa on $4 + x \text{ kg}$, ja suolan määrä uudessa liuoksessa on $0,08(4 + x)$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä tilavuus x .

$$\begin{aligned} 0,4 &= 0,08(4 + x) \\ 0,4 &= 0,32 + 0,08x \\ 0,08x &= 0,08 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Vettä on lisättävä 1 kg.

Vastaus: 1 kg

84B. Merkitään lisättävän kuohuviinin määrää kirjaimella x . Kirjataan tiedot taulukkoon.

	Mansikkamehu (l)	Kuohuviini (l)	Yhteensä
Sekoitus alussa	$0,3 \cdot 4,0 = 1,2$	$0,7 \cdot 4,0 = 2,8$	4,0
Lisäys	0	x	x
Sekoitus lopussa	1,2	$2,8 + x$	$4 + x$

Lopullisessa sekoituksessa on oltava 20 % mansikkamehua, eli $0,2 \cdot (4 + x)$ litraa.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä lisättävän kuohuviinin määrä x .

$$\begin{aligned}
 0,2(4 + x) &= 1,2 & \parallel : 0,2 \\
 4 + x &= 6 \\
 x &= 2
 \end{aligned}$$

Kuohuviiniä täytyy lisätä 2 litraa.

Vastaus: 2 litraa

85B. Merkitään meetvurstin massaa kirjaimella a , jolloin rasvan massa on $0,36a$. Merkitään poistettavan rasvan määrää kirjaimella x .

Uutta meetvurstia on tällöin $a - x$ ja siinä on rasvaa $0,36a - x$.

Muodostetaan yhtälö, kun tiedetään, että uuden meetvurstin rasvapitoisuus on $30\% = 0,3$. Ratkaistaan yhtälöstä ohjelman avulla poistettavan rasvan määrä x .

$$0,3(a - x) = 0,36a - x$$

1	Ratkaise($0.3(a-x)=0.36a-x$)
☐	$\rightarrow \left\{ x = \frac{3}{35} a \right\}$
2	$\{x = 0.08571428571429a\}$

Lasketaan kuinka monta prosenttia vähennettävän rasvan määrä $0,0857...a$ on alkuperäisestä rasvan määrästä $0,36a$.

$$\frac{0,0857...a}{0,36a} = 0,238...$$

Alkuperäisestä rasvan määrästä on vähennettävä $23,8...\% \approx 24\%$ rasvaa.

Vastaus: 24%

- 86B. a)** Sijoitetaan yhtälöön luvut kehon massa = 10, EQ -luku = 1,0 ja ratkaistaan ohjelman avulla koiran aivojen massa x .

$$1,0 = \frac{x}{0,012 \cdot 10^{\frac{2}{3}}}$$

1	Ratkaise($1=x/(0.012*10^{(2/3)})$)
☐	$\approx \{x = 0.055699\}$

Koiran aivojen massa on $0,0556... \text{ kg} \approx 0,056 \text{ kg} = 56 \text{ g}$.

Vastaus: 56 g

- b)** Sijoitetaan yhtälöön luvut EQ -luku = 7,5, aivojen massa = 1,35 ja ratkaistaan ohjelman avulla ihmisen keskimääräinen massa x .

1	Ratkaise($7.5=1.35/(0.012*x^{(2/3)})$)
☐	$\approx \{x = -58.0947501931, x = 58.0947501931\}$

Negatiivinen ratkaisu ei ole mahdollinen, joten ihmisen keskimääräisenä massana on käytetty lukuarvoa $58,094... \text{ kg} \approx 58 \text{ kg}$.

Vastaus: 58 kg

SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

- 87A.** Muokataan yhtälöä muotoon, jossa yhtälön toisella puolella on vain $\frac{x}{y}$.

$$\begin{aligned}\frac{x+y}{x-y} &= \frac{5}{2} \\ 2(x+y) &= 5(x-y) \\ 2x+2y &= 5x-5y \\ -3x &= -7y \quad \| :(-3y) \\ \frac{x}{y} &= \frac{7}{3}\end{aligned}$$

Vastaus: $\frac{x}{y} = \frac{7}{3}$

- 88A. a)** Yhtälöparilla on ääretön määrä ratkaisuja, jos yhtälöparin yhtälöt ovat sama yhtälö. Muokataan alempaa yhtälöä ja valitaan vakioille k ja b sellaiset arvot, että yhtälöt ovat samat.

$$\begin{cases} -12x + 4y = 20 \\ 4y = kx + b \end{cases} \quad \begin{cases} -12x + 4y = 20 \\ -kx + 4y = b \end{cases}$$

Huomataan, että, jos $k = 12$ ja $b = 20$ yhtälöt ovat samat ja yhtälöparilla on ääretön määrä ratkaisuja.

Vastaus: $k = 12$, $b = 20$

- b)** Yhtälöparilla ei ole ratkaisua, jos yhtälöitä vastaavat suorat ovat yhdensuuntaiset, mutta eivät yhdy. Muutetaan molemmat yhtälöt ratkaistuun muotoon.

$$\begin{cases} -12x + 4y = 20 \\ 4y = kx + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4y = 12x + 20 & \parallel : 4 \\ 4y = kx + b & \parallel : 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3x + 5 \\ y = \frac{k}{4} + \frac{b}{4} \end{cases}$$

Jotta suorat olisivat yhdensuuntaiset, on kulmakertoimien oltava yhtä suuret. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä k .

$$\frac{k}{4} = 3 \quad \parallel \cdot 4$$

$$k = 12$$

Jotta suorat eivät yhtyisi on suorien vakiotermien oltava eri suuret siis

$$\frac{b}{4} \neq 5 \quad \parallel \cdot 4$$

$$b \neq 20$$

Yhtälöparilla ei ole yhtään ratkaisua, jos $k = 12$ ja $b \neq 20$.

Vastaus: $k = 12, b \neq 20$

- c)** Yhtälöparilla on yksi ratkaisu, jos yhtälöitä vastaavat suorat leikkaavat toisensa eli ovat eri suuntaiset. Tämä tapahtuu a- ja b- kohtien perusteella silloin, kun $k \neq 12$.

Vastaus: $k \neq 12$

89A. Yhtälö toteutuu, kun $x = -1$. Sijoitetaan $x = -1$ yhtälöön ja ratkaistaan vakio a .

$$\begin{aligned}
 ax^2 + (a^2 - 1)x + 1 &= 0 \\
 a(-1)^2 + (a^2 - 1)(-1) + 1 &= 0 \\
 a - a^2 + 1 + 1 &= 0 \\
 -a^2 + a + 2 &= 0 \\
 a &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 2}}{2 \cdot (-1)} \\
 a &= \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{-2} \\
 a &= \frac{-1 - 3}{-2} = 2 \quad \text{tai} \quad a = \frac{-1 + 3}{-2} = -1
 \end{aligned}$$

Sijoitetaan alkuperäiseen yhtälöön ensin $a = 2$ ja ratkaistaan yhtälö.

$$\begin{aligned}
 ax^2 + (a^2 - 1)x + 1 &= 0 \\
 2x^2 + (2^2 - 1)x + 1 &= 0 \\
 2x^2 + 3x + 1 &= 0 \\
 x &= \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} \\
 x &= \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{4} \\
 x &= \frac{-3 - 1}{4} = -1 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-3 + 1}{4} = -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Kun $a = 2$, on toinen juuri $x = -\frac{1}{2}$.

Sijoitetaan alkuperäiseen yhtälöön $a = -1$ ja ratkaistaan yhtälö.

$$\begin{aligned}
 ax^2 + (a^2 - 1)x + 1 &= 0 \\
 -x^2 + ((-1)^2 - 1)x + 1 &= 0 \\
 -x^2 + 1 &= 0 \\
 -x^2 &= -1 \\
 x^2 &= 1 \\
 x &= \pm 1
 \end{aligned}$$

Kun $a = -1$, on toinen juuri $x = 1$.

Vastaus: $a = 2$, $x = -\frac{1}{2}$ ja $a = -1$, $x = 1$

- 90A.** a) Yhtälön juuret x_1 ja x_2 saadaan toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla. Lasketaan juurten summa.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} - b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-2b}{2a} \\ &= -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

Vastaus: $-\frac{b}{a}$

- b) Kohdan a mukaan yhtälön $x^2 - 3x + 1 = 0$ juurten summa on $-\frac{b}{a} = -\frac{-3}{1} = 3$.

Vastaus: 3

- 91A.** Yhtälön $x^2 + x + a = 0$ diskriminantti on $D = b^2 - 4ac = 1 - 4 \cdot 1 \cdot a$.

Toisen asteen yhtälön juuret ovat yhtä suuret, kun diskriminantti on 0. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä vakio a .

$$\begin{aligned} 1 - 4a &= 0 \\ -4a &= -1 & \| :(-4) \\ a &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Ratkaistaan toisen asteen yhtälö $x^2 + x + \frac{1}{4} = 0$.

Ratkaisukaavalla saadaan:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4}}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 0}{2 \cdot 1} = -\frac{1}{2}.$$

Vastaus: $a = \frac{1}{4}, x = -\frac{1}{2}$

92A. a) Sijoitetaan $a = 5$ ja $y = 3$ muunnoskaavaan $\log_a y = \frac{\log_b y}{\log_b a}$.

$$\log_5 3 = \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 5} = \frac{\lg 3}{\lg 5}$$

Vastaus: $\frac{\lg 3}{\lg 5}$

b) Yhtälön $4^x = 6$ ratkaisu on $x = \log_4 6 = \frac{\log_{10} 6}{\log_{10} 4} = \frac{\lg 6}{\lg 4}$.

Vastaus: –

- 93B.** Merkitään syntymäpäivää merkinnällä pvkkvv.
Muodostetaan ajatustenlukemistempun laskutoimitusten lauseke.

1. $pv + 18$
2. $(pv + 18) \cdot 25$
3. $((pv + 18) \cdot 25) - 333$
4. $((pv + 18) \cdot 25 - 333) \cdot 8$
5. $((pv + 18) \cdot 25 - 333) \cdot 8 - 554$
6. $\frac{(((pv + 18) \cdot 25) - 333) \cdot 8 - 554}{2}$
7. $\frac{(((pv + 18) \cdot 25) - 333) \cdot 8 - 554}{2} + kk$
8. $\left(\frac{(((pv + 18) \cdot 25) - 333) \cdot 8 - 554}{2} + kk \right) \cdot 5$
9. $\left(\left(\frac{(((pv + 18) \cdot 25) - 333) \cdot 8 - 554}{2} + kk \right) \cdot 5 \right) + 692$
10. $\left(\left(\left(\frac{(((pv + 18) \cdot 25) - 333) \cdot 8 - 554}{2} + kk \right) \cdot 5 \right) + 692 \right) \cdot 20$
11. $\left(\left(\left(\left(\frac{(((pv + 18) \cdot 25) - 333) \cdot 8 - 554}{2} + kk \right) \cdot 5 \right) + 692 \right) \cdot 20 \right) + vv$
12. $\left(\left(\left(\left(\left(\frac{(((pv + 18) \cdot 25) - 333) \cdot 8 - 554}{2} + kk \right) \cdot 5 \right) + 692 \right) \cdot 20 \right) + vv \right) + 32\,940$

Sievennetään lauseke sopivalla ohjelmalla.

► CAS	
1	$((((((((((pv+18)*25)-333)*8)-554)/2)+kk)*5)+692)*20+vv)-32940$ PoistaSulkeet: 100 kk + 10000 pv + vv

Tulokseksi saadaan $10\,000\,pv + 100\,kk + vv$ eli luku pvkkvv.

Vastaus: –

94A. Välivaiheessa B on kirjain a korvattu yhtä suurella lausekkeella $4a - 3a$ ja kirjain b korvattu yhtä suurella lausekkeella $4b - 3b$ sekä kirjain c korvattu yhtä suurella lausekkeella $4c - 3c$.

Välivaiheessa C on termejä siirretty yhtälön puolelta toiselle.

Välivaiheessa D on yhtälön vasemmalla puolella otettu yhteinen tekijä 4 ja oikealla puolella yhteinen tekijä 3.

Välivaiheen D jälkeen on yhtälö jaettu puolittain lausekkeella $(a + b - c)$ ja saatu välivaihe E.

Tässä vaiheessa on tehty virhe, koska jakajana olevan lausekkeen arvo on nolla, sillä vaiheesta A nähdään, että $a + b - c = 0$. Nollalla ei saa jakaa.

Vastaus: Välivaiheessa B on kirjain a korvattu yhtä suurella lausekkeella $4a - 3a$ ja kirjain b korvattu yhtä suurella lausekkeella $4b - 3b$ sekä kirjain c korvattu yhtä suurella lausekkeella $4c - 3c$.

Välivaiheessa C on termejä siirretty yhtälön puolelta toiselle.

Välivaiheessa D on yhtälön vasemmalla puolella otettu yhteinen tekijä 4 ja oikealla puolella yhteinen tekijä 3.

Välivaiheen D jälkeen on yhtälö jaettu puolittain lausekkeella $(a + b - c)$ ja saatu välivaihe E. Tässä vaiheessa on tehty virhe, koska jakajana olevan lausekkeen arvo on nolla, sillä vaiheesta A nähdään, että $a + b - c = 0$. Nollalla ei saa jakaa.

- 95A. a)** Esimerkiksi yhtälöryhmällä $\begin{cases} y = x \\ y = 2x \\ y = 3x \end{cases}$ on vain yksi ratkaisu. Ratkaistaan

ensin yhtälöryhmän kahden ensimmäisen yhtälön muodostama yhtälöpari.

$$\begin{cases} y = x \\ y = 2x \\ x = 2x \\ -x = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

Sijoitetaan $x = 0$ yhtälöryhmän ensimmäiseen yhtälöön, jolloin saadaan $y = 0$. Sijoittamalla $x = 0, y = 0$ yhtälöryhmän viimeiseen yhtälöön huomataan, että se toteutuu, joten yhtälöryhmän ainoa ratkaisu on $x = 0$ ja $y = 0$.

Vastaus: esim. $\begin{cases} y = x \\ y = 2x \\ y = 3x \end{cases}$

- b)** Esimerkiksi yhtälöryhmällä $\begin{cases} y = x \\ y = 2x \\ y = x + 1 \end{cases}$ ei ole ratkaisua. Kahden

ensimmäisen yhtälön muodostaman yhtälöparin ratkaisu on a-kohdan perusteella $x = 0$ ja $y = 0$.

Sijoittamalla $x = 0, y = 0$ yhtälöryhmän viimeiseen yhtälöön huomataan, että se ei toteudu, joten yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua.

Vastaus: esim. $\begin{cases} y = x \\ y = 2x \\ y = x + 1 \end{cases}$

c) Kohta a:

Yhtälöryhmä, jolla on yksi ratkaisu, tarkoittaa graafisesti sitä, että yhtälöryhmän suorilla on täsmälleen yksi sellainen piste, jonka kautta kaikki kolme suoraa kulkevat.

Kohta b:

Yhtälöryhmä, jolla ei ole ratkaisua, tarkoittaa graafisesti sitä, että kaikki yhtälöryhmän suorat eivät leikkaa samassa pisteessä.

Kohdan b yhtälöryhmän kahden ylimmän suoran leikkauspiste on piste $(0, 0)$. Ylin suora ja alin suora eivät leikkaa toisiaan laisinkaan, koska ne ovat yhdensuuntaiset.

Vastaus: a-kohta: kaikilla kolmella suoralla on yhteinen leikkauspiste,
b-kohta: kaikilla kolmella suoralla ei ole yhteistä leikkauspistettä

96A. a) Ratkaistaan yhtälöryhmä
$$\begin{cases} x - y = 3 \\ x + y + z = 5 \\ x - 2y + z = 8 \end{cases}.$$

Kahdesta alimmasta yhtälöstä saadaan eliminointia muuttujat x ja z ja ratkaistua muuttuja y .

$$\begin{array}{rcl} \begin{cases} x + y + z = 5 \\ x - 2y + z = 8 \\ -x - y - z = -5 \\ x - 2y + z = 8 \end{cases} & \parallel \cdot (-1) & \\ \hline -3y & = & 3 \\ y & = & -1 \end{array}$$

Sijoitetaan saatu muuttujan y arvo ylimpään yhtälöön, jolloin saadaan $x - (-1) = 3$
 $x = 2.$

Sijoitetaan $x = 2$ ja $y = -1$ keskimmäiseen yhtälöön, jolloin saadaan $2 - 1 + z = 5$
 $z = 4.$

Yhtälöryhmän ratkaisu on siis
$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 4 \end{cases}.$$

Vastaus:
$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 4 \end{cases}$$

b) Ratkaistaan yhtälöryhmä
$$\begin{cases} 2x + 3y - 2z = 1 \\ 10x - 6y - 5z = -6 \\ -7x + 2y + 5z = 5 \end{cases}$$

Eliminoidaan toisesta ja kolmannelta yhtälöstä muuttuja z .

$$\begin{cases} 10x - 6y - 5z = -6 \\ -7x + 2y + 5z = 5 \end{cases}$$

$$3x - 4y = -1$$

Eliminoidaan ensimmäisestä ja toisesta yhtälöstä muuttuja z .

$$\begin{cases} 2x + 3y - 2z = 1 & || \cdot 5 \\ 10x - 6y - 5z = -6 & || \cdot (-2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10x + 15y - 10z = 5 \\ -20x + 12y + 10z = 12 \end{cases}$$

$$-10x + 27y = 17$$

Muodostetaan yhtälöpari ja ratkaistaan siitä muuttujat x ja y .

$$\begin{cases} 3x - 4y = -1 & || \cdot 10 \\ -10x + 27y = 17 & || \cdot 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 30x - 40y = -10 \\ -30x + 81y = 51 \end{cases}$$

$$41y = 41 \quad || : 41$$

$$y = 1$$

Sijoitetaan $y = 1$ yhtälöön $3x - 4y = -1$, jolloin saadaan

$$3x - 4 \cdot 1 = -1$$

$$3x = 3$$

$$x = 1$$

Sijoitetaan $x = 1$ ja $y = 1$ ylimpään yhtälöön, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 - 2z &= 1 \\ 5 - 2z &= 1 \\ -2z &= -4 \\ z &= 2 \end{aligned}$$

Yhtälöryhmän ratkaisu on siis $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$.

Vastaus: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$

97B. Merkitään pienempää luonnollista lukua kirjaimella x . Seuraava luonnollinen luku on $x + 1$.

Muodostetaan lukujen neliöiden erotusten avulla yhtälö ja ratkaistaan ohjelman avulla siitä luku x .

$$(x+1)^2 - x^2 = 681$$

1	Ratkaise((x+1)^2-x^2=681)
☐	→ {x = 340}

Luvut ovat 340 ja $340 + 1 = 341$.

Vastaus: 340 ja 341

98B. Muokataan yhtälöä.

$$a(x+1)^2 = x^2 + 1$$

$$a(x+1)(x+1) = x^2 + 1$$

$$a(x^2 + 2x + 1) = x^2 + 1$$

$$ax^2 + 2ax + a - x^2 - 1 = 0$$

$$ax^2 - x^2 + 2ax + a - 1 = 0$$

$$(a-1)x^2 + 2ax + a - 1 = 0$$

Toisen asteen yhtälöllä täsmälleen yksi juuri silloin, kun diskriminantti $D = 0$. Muodostetaan diskriminantin avulla yhtälö ja ratkaistaan ohjelman avulla siitä a .

$$D = b^2 - 4ac$$

$$b^2 - 4ac = 0$$

$$(2a)^2 - 4(a-1)(a-1) = 0$$

1 	Ratkaise((2a)^2-4(a-1)(a-1)=0, a) → $\left\{ a = \frac{1}{2} \right\}$
---	---

Vastaus: $a = \frac{1}{2}$

- 99A. a)** Yhtälön ratkaiseminen on aloitettu jakamalla yhtälö puolittain luvulla 2, jolloin on saatu välivaihe (F).
 Vaiheen (F) jälkeen yhtälöstä on vähennetty puolittain termi x^2 , jolloin on saatu välivaihe (C).
 Vaiheen (C) jälkeen on avattu sulkeet, jolloin on saatu välivaihe (E).
 Vaiheen (E) jälkeen yhtälöön on lisätty puolittain lauseke $-4 - x$, jolloin on saatu välivaihe (D).
 Vaiheen (D) jälkeen on yhdistetty samanmuotoiset termit ja käännetty yhtälö ympäri, jolloin on saatu välivaihe (B).
 Vaiheen (B) jälkeen on yhtälö jaettu puolittain luvulla -3 , jolloin on saatu yhtälön ratkaisu (G).

Vastaus:

Välivaiheen järjestysnumero	1	2	3	4	5	6	7
Välivaihe	A	F	C	E	D	B	G

- b)** Yhtälön ratkaiseminen on aloitettu vaihtamalla yhtälön puolet keskenään. Tämän jälkeen on siirretty termit $4x$ ja 8 puolelta toiselle, jolloin on saatu välivaihe (B).
 Vaiheen (B) jälkeen yhtälöön on lisätty puolittain luku 4, jolloin on saatu välivaihe (E).
 Vaiheen (E) jälkeen polynomi $x^2 - 4x + 4$ on muutettu muotoon $(x - 2)^2$ ja luku 16 on muutettu potenssiksi 4^2 , jolloin on saatu välivaihe (F).
 Vaiheen (F) jälkeen on otettu neliöjuuri, jolloin on saatu välivaihe (D).
 Vaiheen (D) jälkeen on yhtälöön lisätty puolittain luku 2, jolloin on saatu yhtälön ratkaisu (G).
 Huomataan, että välivaihe (C) ei kuulu tämän yhtälön ratkaisuun.

Vastaus:

Välivaiheen järjestysnumero	1	2	3	4	5	6
Välivaihe	A	B	E	F	D	G

100A. Koska $T = -\lg p$ eli $T = -\log_{10} p$, niin $p = 10^{-T}$.

- a) Alkoholinkäytöstä johtuvan kuoleman todennäköisyys on
 $p = 10^{-3,8} = 0,000158\dots$

Tapaturmaisen kuoleman todennäköisyys on

$$p = 10^{-3,4} = 0,000398\dots$$

Tapaturmaisen kuoleman todennäköisyys on suurempi.

Vastaus: tapaturmaisen kuoleman

- b) Tieliikenteessä loukkaantumisen todennäköisyys on
 $p = 10^{-3,2} = 0,000630\dots$

Suomalaisia on noin 5,4 miljoonaa, joten suomalaisia loukkaantuu keskimäärin tieliikenteessä vuosittain
 $0,000630\dots \cdot 5\,400\,000 = 3407,169\dots \approx 3400$.

Vastaus: 3400

101A. a)

$$t^2 - \frac{5}{2}t + 1 = 0 \quad \| \cdot 2$$

$$2t^2 - 5t + 2 = 0$$

$$t = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2}$$

$$= \frac{5 \pm 3}{4}$$

$$= \frac{5+3}{4} = \frac{8}{4} = 2 \quad \text{tai} \quad t = \frac{5-3}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Vastaus: $t = 2$ tai $t = \frac{1}{2}$

b) TAPA 1:

Yhtälö $[f(x)]^2 - \frac{5}{2}f(x) + 1 = 0$, on sama kuin a-kohdan yhtälö, mutta nyt muuttujan t paikalla on funktio $f(x)$.

Kuvassa olevan suoran yhtälö on $y = \frac{1}{2}x + 1$, joten $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$.

Kohdassa a yhtälön ratkaisuiksi saatiin $t = 2$ ja $t = \frac{1}{2}$.

Nyt $t = f(x)$, joten muuttuja x saadaan ratkaistua yhtälöistä

$$f(x) = 2 \text{ ja } f(x) = \frac{1}{2}.$$

Ratkaistaan yhtälöt.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x + 1 &= 2 \\ \frac{1}{2}x &= 1 & \| \cdot 2 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x + 1 &= \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}x &= -\frac{1}{2} & \| \cdot 2 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

TAPA 2:

Kuvassa olevan suoran yhtälö on $y = \frac{1}{2}x + 1$, joten $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$.

Sijoitetaan $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ yhtälöön $[f(x)]^2 - \frac{5}{2}f(x) + 1 = 0$, jolloin saadaan yhtälö

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2}x + 1\right)^2 - \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}x + 1\right) + 1 = 0 \\ & \left(\frac{1}{2}x + 1\right)\left(\frac{1}{2}x + 1\right) - \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}x + 1\right) + 1 = 0 \\ & \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x + 1 - \frac{5}{4}x - \frac{5}{2} + 1 = 0 \quad || \cdot 4 \\ & x^2 + 2x + 2x + 4 - 5x - 10 + 4 = 0 \\ & x^2 - x - 2 = 0 \\ & x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} \\ & x = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} \\ & x = \frac{1 \pm 3}{2} \\ & x = \frac{1-3}{2} = -1 \quad \text{tai} \quad x = \frac{1+3}{2} = 2 \end{aligned}$$

Vastaus: $x = 2$ tai $x = -1$

3 FUNKTIOITA

ALOITA PERUSTEISTA

102A. Suoran yhtälössä $y = kx + b$ kulmakerroin on k ja vakiotermi b . Kulmakerroin k ilmoittaa, kuinka monta yksikköä liikutaan y -akselin suunnassa, kun kuljetaan yksi yksikkö oikealle. Vakiotermi b on kuvaajan ja y -akselin leikkauspisteen y -koordinaatti.

Suora 1:

Kulmakerroin $k = 2$ ja vakiotermi $b = 0$, joten suoran yhtälö on $y = 2x + 0$ eli $y = 2x$.

Suora 2:

Kulmakerroin $k = -1$ ja vakiotermi $b = 1$, joten suoran yhtälö on $y = -1 \cdot x + 1 = -x + 1$.

Suora 3:

Kulmakerroin $k = 0$ ja vakiotermi $b = -\frac{1}{2}$, joten suoran yhtälö on $y = 0x - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$.

Vastaus: Suora 1: $y = 2x$, Suora 2: $y = -x + 1$, Suora 3: $y = -\frac{1}{2}$

103A. a) Kulmakerroin on $k = \frac{3-5}{8-7} = \frac{-2}{1} = -2$.

Vastaus: $k = -2$

- b)** Suoran yhtälö on a-kohdan perusteella muotoa $y = -2x + b$. Sijoitetaan yhtälöön pisteen $(7, 5)$ koordinaatit $x = 7$ ja $y = 5$ ja ratkaistaan vakiotermi b .

$$5 = -2 \cdot 7 + b$$

$$5 = -14 + b$$

$$b = 19$$

Vastaus: $b = 19$

- c)** Kohdan a perusteella suoran kulmakerroin on -2 ja kohdan b perusteella suoran vakiotermi on 19 . Suoran yhtälö on siis $y = -2x + 19$.

Vastaus: $y = -2x + 19$

104A. a) Suoran kulmakerroin on $k = \frac{5-3}{2-1} = \frac{2}{1} = 2$.

Suoran yhtälö on muotoa $y = 2x + b$. Sijoitetaan suoran yhtälöön pisteen $(1, 3)$ koordinaatit ja ratkaistaan vakiotermi b .

$$3 = 2 \cdot 1 + b$$
$$b = 1$$

Suoran yhtälö on $y = 2x + 1$.

Vastaus: $y = 2x + 1$

b) Origon on piste $(0, 0)$.

Suoran kulmakerroin on $k = \frac{5-0}{-3-0} = \frac{5}{-3} = -\frac{5}{3}$.

Suoran yhtälö on muotoa $y = -\frac{5}{3}x + b$. Koska suora kulkee origon kautta, sen vakiotermi on 0.

Suoran yhtälö on siis $y = -\frac{5}{3}x$.

Vastaus: $y = -\frac{5}{3}x$

c) Suoran kulmakerroin on $k = \frac{-24 - (-24)}{-11 - (-4)} = \frac{0}{-7} = 0$.

Suoran yhtälö on muotoa $y = 0x + b = b$.

Sijoittamalla pisteen $(-4, -24)$ y -koordinaatti yhtälöön $y = b$ saadaan suoran yhtälöksi $y = -24$.

Vastaus: $y = -24$

- 105A. a)** Suora leikkaa x -akselin, kun $y = 0$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä suoran ja x -akselin leikkauspisteen x -koordinaatti.

$$\begin{aligned} 3x - 6 \cdot 0 &= 12 \\ 3x &= 12 & \| :3 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Suora leikkaa x -akselin pisteessä $(4, 0)$.

Vastaus: $(4, 0)$

- b)** Suora leikkaa y -akselin, kun $x = 0$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä suoran ja y -akselin leikkauspisteen y -koordinaatti.

$$\begin{aligned} 3 \cdot 0 - 6 \cdot y &= 12 \\ -6y &= 12 & \| :(-6) \\ y &= -2 \end{aligned}$$

Suora leikkaa y -akselin pisteessä $(0, -2)$.

Vastaus: $(0, -2)$

c) TAPA 1:

Suoran kulmakerroin saadaan selville, kun ratkaistaan yhtälöstä y .

$$\begin{aligned} 3x - 6y &= 12 \\ -6y &= -3x + 12 && \| :(-6) \\ y &= \frac{-3}{-6}x + \frac{12}{-6} \\ y &= \frac{1}{2}x - 2 \end{aligned}$$

Suoran kulmakerroin on $k = \frac{1}{2}$.

TAPA 2:

Kohtien a ja b perusteella suora kulkee pisteiden $(4, 0)$ ja $(0, -2)$ kautta, joten suoran kulmakerroin on

$$k = \frac{-2 - 0}{0 - 4} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}.$$

Vastaus: $k = \frac{1}{2}$

106A. a) Funktio on muotoa $f(x) = a \cdot q^x$.

Sijoitetaan tiedon $f(0) = 2$ perusteella yhtälöön $y = a \cdot q^x$ luvut $x = 0$ ja $y = 2$, jolloin saadaan $a \cdot q^0 = 2$. Koska $q^0 = 1$, niin tämän yhtälön ratkaisu on $a = 2$.

Vastaavasti tiedosta $f(3) = 54$ saadaan yhtälö $a \cdot q^3 = 54$.
Koska $a = 2$, yhtälö tulee muotoon $2q^3 = 54$. Ratkaistaan yhtälö.

$$\begin{aligned} 2q^3 &= 54 & \| :2 \\ q^3 &= 27 \\ q &= \sqrt[3]{27} \\ q &= 3 \end{aligned}$$

Funktio on siis $f(x) = 2 \cdot 3^x$.

Vastaus: $f(x) = 2 \cdot 3^x$

b) Funktio on muotoa $f(x) = a \cdot q^x$.

Koska funktion kuvaaja kulkee pisteen $(0, 3)$ kautta, funktiolle pätee $f(0) = 3$. Tästä saadaan yhtälö $a \cdot q^0 = 3$. Koska $q^0 = 1$, niin yhtälön ratkaisu on $a = 3$.

Koska funktion kuvaaja kulkee pisteen $(5, 96)$ kautta, funktiolle pätee $f(5) = 96$. Tästä saadaan yhtälö $a \cdot q^5 = 96$.
Sijoittamalla $a = 3$ yhtälö saadaan muotoon $3q^5 = 96$. Ratkaistaan q .

$$\begin{aligned} 3q^5 &= 96 & \| :3 \\ q^5 &= 32 \\ q &= \sqrt[5]{32} \\ q &= 2 \end{aligned}$$

Funktio on siis $f(x) = 3 \cdot 2^x$.

Vastaus: $f(x) = 3 \cdot 2^x$

- 107B. a)** Koska $f(0) = 5 + 10 \cdot 0 = 5$, niin sademittarissa oli keskiyöllä 5 mm vettä.

Vastaus: 5 mm

- b)** Koska $f(7) = 5 + 10 \cdot 7 = 75$, niin mittarissa oli 75 mm vettä kello 7. Veden syvyys kasvoi siis seitsemässä tunnissa
 $75 \text{ mm} - 5 \text{ mm} = 70 \text{ mm}$.

Vastaus: 70 mm

- c)** Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä hetki, jona veden syvyys oli 40 mm.

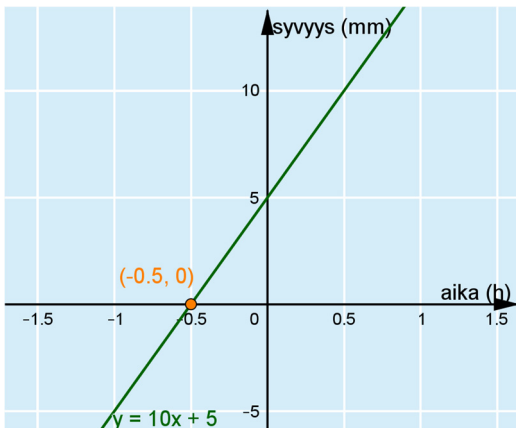
$$\begin{aligned} 5 + 10x &= 40 \\ 10x &= 35 & \parallel :10 \\ x &= 3,5 \end{aligned}$$

Veden syvyys oli 40 mm, kun aikaa oli kulunut keskiyöstä 3 ja puoli tuntia. Kello oli tällöin 3.30.

Vastaus: kello 3.30

- d)** Vastaus: Luku 5 ilmoittaa veden syvyyden alkuhetkellä millimetreinä, ja luku 10 ilmoittaa, kuinka monta millimetriä veden syvyys kasvoi tunnissa.

- e) Piirretään funktion kuvaaja ja määritetään kuvaajan ja x -akselin leikkauspiste.



Kuvaajan ja x -akselin leikkauspiste on $(-0,5; 0)$, joten funktion f nollakohta on $x = -0,5$. Tämä tarkoittaa, että puoli tuntia ennen keskiyötä, veden syvyys oli 0 mm, eli sade alkoi klo 23.30 edellisen vuorokauden puolella.

Vastaus: $x = -0,5$. Sade alkoi klo 23.30 edellisen vuorokauden puolella.

- 108A. A:** Jos suureen y arvo 20-kertaistuu aina, kun muuttujan arvo kasvaa yhdellä, kasvu on eksponentiaalista. Tätä vastaava yhtälö on $y = a \cdot 20^x$. Vaihtoehto IV on siis oikein.
- B:** Jos suureen y arvo kasvaa 20 %, se tulee 1,2-kertaiseksi alkuperäiseen nähden. Koska tämä tapahtuu aina, kun muuttujan x arvo kasvaa yhdellä, kasvu on eksponentiaalista. Kasvua vastaava yhtälö on $y = a \cdot 1,20^x$, joten vaihtoehto II on oikein.
- C:** Jos suureen y arvo kasvaa 20:llä, kun muuttujan arvo kasvaa yhdellä, kasvu on lineaarista. Kasvua vastaava yhtälö on $y = a + 20x$, joten vaihtoehto III on oikein.
- D:** Jos suureen y arvo kasvaa 1,20:llä, kun muuttujan arvo kasvaa yhdellä, kasvu on lineaarista. Kasvua vastaava yhtälö on $y = a + 1,20x$, joten vaihtoehto I on oikein.

Vastaus: A: IV, B: II, C: III ja D: I

109B. Koska $100\% + 2,5\% = 102,5\%$, niin jokaisessa hinnan korotuksessa hinta tulee 1,025-kertaiseksi. Hinnan muutos on siis eksponentiaalista. Tällöin funktio $f(x) = 59 \cdot 1,025^x$ ilmoittaa hiusten leikkauksen hinnan x vuoden kuluttua nykyhetkestä.

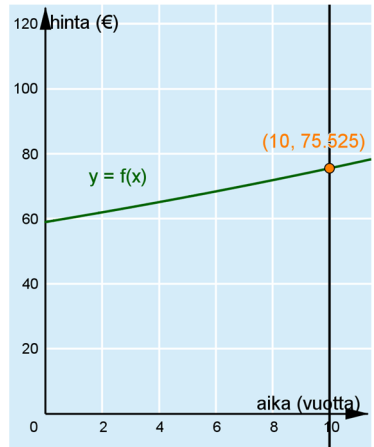
Lasketaan $f(10)$.

$$f(10) = 59 \cdot 1,025^{10} = 75,524... \approx 75.$$

Tarkistetaan tulos määrittämällä funktion f kuvaajan ja suoran $x = 10$ leikkauspiste.

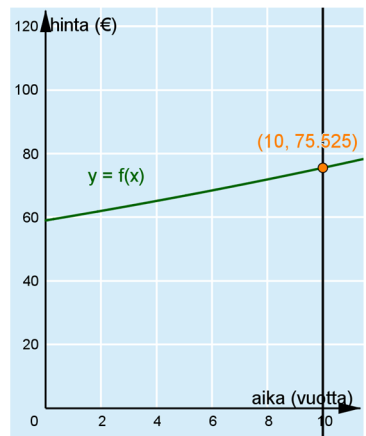
Leikkauspiste on $(10; 75,525)$, joten $f(10) \approx 75$.

Tulos tarkoittaa, että naisten hiusten leikkaus maksaa 10 vuoden kuluttua noin 75 euroa.



Vastaus: $f(x) = 59 \cdot 1,025^x$, $f(10) \approx 75$. Tulos tarkoittaa, että naisten hiusten leikkaus maksaa 10 vuoden kuluttua noin 75 euroa.

Tulos tarkoittaa, että naisten hiusten leikkaus maksaa 10 vuoden kuluttua noin 75 euroa.



110A. Vaiheessa 1 Eppu laski suoran kulmakertoimen $k = \frac{7}{3}$ oikein.

Vaiheessa 2 Eppu sijoitti kulmakertoimen ja suoran pisteen $(1, 4)$ koordinaatit $x = 1$ ja $y = 4$ suoran yhtälöön $y = kx + b$. Koordinaatit menivät kuitenkin väärin päin. Oikea yhtälö on tässä:

$$4 = \frac{7}{3} \cdot 1 + b$$

Vaiheessa 3 Eppu ratkaisi äsken muodostamastaan yhtälöstä vakiotermin b . Koska yhtälö oli väärä, hän sai tulokseksi väärän vakiotermin. Ratkaistaan oikea vakiotermi oikeasta yhtälöstä.

$$4 = \frac{7}{3} + b$$

$$b = 4 - \frac{7}{3}$$

$$b = \frac{12}{3} - \frac{7}{3}$$

$$b = \frac{5}{3}$$

Vaiheessa 4 Eppu muodosti suoran yhtälön sijoittamalla kulmakertoimen ja vakiotermin yhtälöön $y = kx + b$. Hän sijoitti kuitenkin luvut väärinpäin, joten kulmakertoimeksi k tuli vakiotermin b arvo ja vakiotermiksi b kulmakertoimen k arvo.

Oikea suoran yhtälö on $y = \frac{7}{3}x + \frac{5}{3}$.

Vastaus: –

111A. Vaiheessa 1 Kim muodosti pisteiden koordinaattien avulla kaksi yhtälöä.

Ensimmäisen yhtälön Kim sai, kun hän sijoitti pisteen (1, 3) koordinaatit $x = 1$ ja $y = 3$ yhtälöön $y = a \cdot q^x$:

$$3 = a \cdot q^1$$

$$a \cdot q = 3.$$

Toisen yhtälön Kim sai pisteen (3; 6,75) koordinaattien avulla.

$$6,75 = a \cdot q^3 \text{ eli } a \cdot q^3 = 6,75.$$

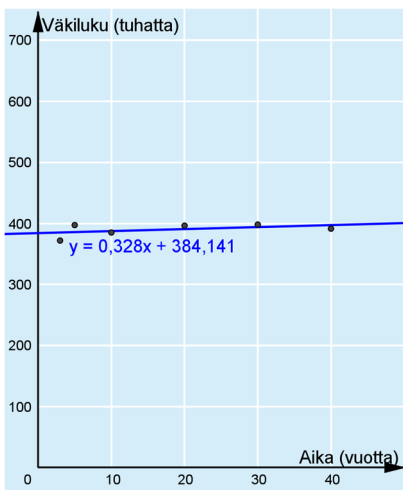
Vaiheessa 2 Kim ratkaisi yhtälöryhmän $\begin{cases} a \cdot q = 3 \\ a \cdot q^3 = 6,75 \end{cases}$ ohjelmalla yhtälöparin ratkaisutoiminnolla.

Hän sai yhtälöparin ratkaisuksi $a = 2$ ja $q = 1,5$.

Funktion lauseke on siis $f(x) = 2 \cdot 1,5^x$.

Vastaus: –

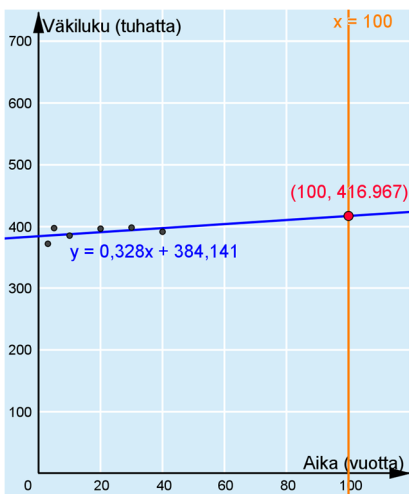
112B. Merkitään kulunutta aikaa vuosina vuodesta 2000 alkaen kirjaimella x . Sovitetaan aineistoon lineaarinen malli sopivalla ohjelmalla.



Lineaarinen malli on $y = 0,328x + 384,141$.

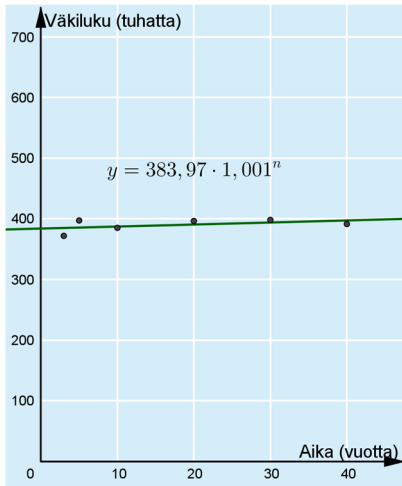
Vuonna 2100 on kulunut 100 vuotta vuodesta 2000.

Määritetään väkiluku vuonna 2100 suorien $y = 0,328x + 384,141$ ja $x = 100$ leikkauspisteen avulla.



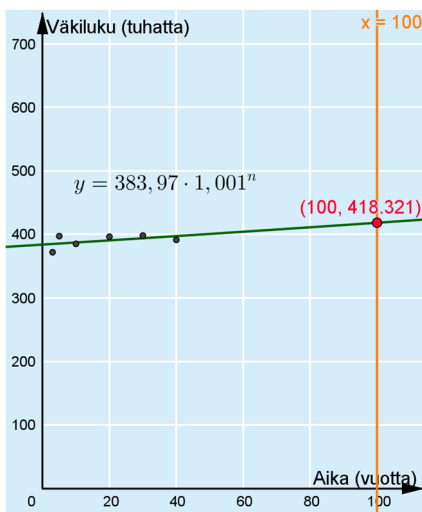
Suorien leikkauspiste on $(100; 416,967)$, joten lineaarisen mallin mukaan väkiluku vuonna 2100 on $416\,967 \approx 417\,000$.

Sovitetaan aineistoon eksponentiaalinen malli sopivalla ohjelmalla.



Eksponentiaalinen malli on $y = 383,97 \cdot 1,001^n$.

Määritetään väkiluku vuonna 2100 funktion $f(x) = 383,97 \cdot 1,001^n$ ja suoran $x = 100$ leikkauspisteen avulla.



Leikkauspiste on (100; 418,321), joten eksponentiaalisen mallin mukaan väkiluku on $418\,321 \approx 418\,000$ vuonna 2100.

Eksponentiaalisen mallin antama ennuste on suurempi kuin lineaarisen mallin antama ennuste. Lasketaan ero prosentteina.

$$\frac{418\,321}{416\,967} = 1,00324\dots$$

Eksponentiaalisen mallin antama ennuste on $100,324\dots\% - 100\% = 0,324\dots\% \approx 0,32\%$ suurempi kuin eksponentiaalisen mallin antama ennuste.

Vastaus: lineaarinen malli $y = 0,328x + 384,141$; eksponentiaalinen malli $y = 383,97 \cdot 1,001^n$; 417 000 asukasta ja 418 000 asukasta; 0,32 %

113B. a) Lasketaan funktion N arvo, kun $x = 0$.

$$N(0) = 200 \cdot 1,14^0 = 200$$

Latauksia on tehty julkaisuhetkeen mennessä 200.

Vastaus: 200 latausta

b) Funktion muutoskerroin on $q = 1,14$, joten latauksien määrä tulee joka viikko 1,14-kertaiseksi. Latauksien määrä siis kasvaa joka viikko $114 \% - 100 \% = 14 \%$.

Vastaus: 14 %

c) Ratkaistaan yhtälö $200 \cdot 1,14^x = 2000$ ohjelmalla.

$$200 \cdot 1.14^x = 2000, x = 1$$

Ratkaise Numeerisesti: $\{x = 17.57319413923\}$

Ratkaisuksi saadaan $x = 17,573\dots$, joten sovellus on ladattu 2000 kertaa, kun aikaa on kulunut 17,573... viikkoa. Tämä on 17 viikkoa ja $7 \cdot 0,573\dots$ päivää ≈ 7 viikkoa ja 4 päivää.

Vastaus: 7 viikkoa ja 4 vuorokautta julkaisuhetkestä

d) Viidestoista viikko alkaa ajanhetkellä $x = 14$ ja päättyy ajanhetkellä $x = 15$. Lasketaan funktion arvot kohdissa $x = 14$ ja $x = 15$.

$$N(14) = 200 \cdot 1,14^{14} = 1252,269\dots$$

$$N(15) = 200 \cdot 1,14^{15} = 1427,587\dots$$

Sovelluksen latauksien määrä 15. viikolla on $1427,587\dots - 1252,269\dots = 175,317\dots \approx 180$.

Sovellus ladataan 15. viikolla noin 180 kertaa.

Vastaus: 180 kertaa

VAHVISTA OSAAMISTA

114A. Pisteiden $(2, 5)$ ja $(-3, 8)$ kautta kulkevan suoran kulmakerroin on

$$k = \frac{8-5}{-3-2} = -\frac{3}{5}.$$

TAPA 1:

Pisteiden $(2, 5)$ ja $(-4; 8,5)$ kautta kulkevan suoran kulmakerroin on

$$k = \frac{8,5-5}{-4-2} = \frac{3,5}{-6} = \frac{7}{2} : (-6) = \frac{7}{2} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{7}{12}$$

Kulmakertoimet eivät ole samat, joten kyseessä ei ole sama suora.
Pisteiden $(2, 5)$ ja $(-3, 8)$ kautta kulkeva suora ei siis kulje
pisteen $(-4; 8,5)$ kautta.

TAPA 2:

Muodostetaan pisteiden $(2, 5)$ ja $(-3, 8)$ kautta kulkevan suoran yhtälö.

Sijoitetaan suoran yhtälöön $y = kx + b$ kulmakerroin $k = -\frac{3}{5}$ ja

pisteen $(2, 5)$ koordinaatit $x = 2$ ja $y = 5$. Ratkaistaan saadusta yhtälöstä vakiotermi b .

$$5 = -\frac{3}{5} \cdot 2 + b$$

$$5 = -\frac{6}{5} + b$$

$$b = 5 + \frac{6}{5}$$

$$b = 6\frac{1}{5}$$

Pisteiden $(2, 5)$ ja $(-3, 8)$ kautta kulkevan suoran yhtälö on siis

$$y = -\frac{3}{5}x + 6\frac{1}{5}.$$

Tutkitaan, onko piste $(-4; 8,5) = \left(-4, \frac{17}{2}\right)$ tällä suoralla sijoittamalla sen x -koordinaatti suoran yhtälöön ja laskemalla y -koordinaatti.

$$y = -\frac{3}{5} \cdot (-4) + 6\frac{1}{5} = \frac{12}{5} + 6\frac{1}{5} = 2\frac{2}{5} + 6\frac{1}{5} = 8\frac{3}{5} = 8,6$$

Koska $8,6 \neq 8,5$, piste $(-4; 8,5)$ ei ole suoralla.

Vastaus: ei kulje

- 115A. a)** Suoralla ei ole kulmakerrointa, joten se on y -akselin suuntainen, ja sen yhtälö on muotoa $x = a$.

Suora kulkee pisteen $(3, -1)$ kautta, joten sen jokaisen pisteen x -koordinaatti on 3. Tällöin suoran yhtälö on $x = 3$.

Vastaus: $x = 3$

- b)** Yhdensuuntaisten suorien kulmakertoimet ovat yhtä suuret. Ratkaistaan suoran $2x + 3y = 5$ kulmakerroin.

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 5 \\ 3y &= -2x + 5 \quad \| :3 \\ y &= -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3} \end{aligned}$$

Suoran kulmakerroin on $k = -\frac{2}{3}$.

Suoran yhtälö on muotoa $y = -\frac{2}{3}x + b$. Sijoitetaan suoran yhtälöön pisteen $(3, -1)$ koordinaatit ja ratkaistaan vakiotermi b .

$$\begin{aligned} -1 &= -\frac{2}{3} \cdot 3 + b \\ -1 &= -2 + b \\ b &= 1 \end{aligned}$$

Suoran yhtälö on $y = -\frac{2}{3}x + 1$.

Vastaus: $y = -\frac{2}{3}x + 1$

- 116B. a)** Lasketaan populaation koko 24 tunnin kuluttua sijoittamalla $t = 24$ funktion $N(t) = 1000 \cdot 1,25^t$ lausekkeeseen.

$$N(24) = 1000 \cdot 1,25^{24} = 211\,758,236... \approx 212\,000$$

Populaation koko 24 tunnin kuluttua on noin 212 000 bakteeria.

Vastaus: 212 000 bakteeria

- b)** Funktion lausekkeen muutoskerroin on 1,25. Tämä tarkoittaa, että populaation koko kasvaa jokaisen tunnin aikana $125\% - 100\% = 25\%$.

Vastaus: 25 %

- c)** Ratkaistaan yhtälö $N(t) = 1\,000\,000$. Sopivalla ohjelmalla yhtälön ratkaisuksi saadaan $t = 30,956... \approx 31$.

Kestää noin 31 tuntia siihen, että populaation koko ylittää miljoona bakteeria.

Vastaus: 31 tuntia

117A. Ratkaistaan yhtälö $f(x) = g(x)$, kun $f(x) = 4x^2 + 2x$ ja $g(x) = 6x + 8$.

$$\begin{aligned} 4x^2 + 2x &= 6x + 8 \\ 4x^2 - 4x - 8 &= 0 & \| :4 \\ x^2 - x - 2 &= 0 \end{aligned}$$

Yhtälö on toisen asteen yhtälö, jonka kertoimet ovat $a = 1$, $b = -1$ ja $c = -2$. Sijoitetaan kertoimet toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan ja sievennetään lauseke.

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x &= \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} \\ x &= \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} \\ x &= \frac{1 \pm 3}{2} \\ x &= \frac{1+3}{2} \quad \text{tai} \quad x = \frac{1-3}{2} \\ x &= 2 \quad \quad \quad x = -1 \end{aligned}$$

Yhtälön ratkaisu tarkoittaa, että funktioiden f ja g kuvaajat leikkaavat toisensa kohdissa, joiden x -koordinaatit ovat $x = 2$ ja $x = -1$.

Vastaus: $x = 2$ tai $x = -1$, Funktioiden f ja g kuvaajat leikkaavat toisensa kohdissa, joiden x -koordinaatit ovat $x = 2$ ja $x = -1$.

118B. TAPA 1:

Ratkaistaan suorien $y = 2x - 3$ ja $y = 3x - 2$ leikkauspiste yhtälöparista

$$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = 3x - 2 \end{cases}.$$

Sijoitetaan $y = 2x - 3$ yhtälöön $y = 3x - 2$.

$$\begin{aligned} 2x - 3 &= 3x - 2 \\ -x &= 1 && \| :(-1) \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Sijoitetaan leikkauspisteen x -koordinaatti yhtälöön $y = 3x - 2$.

$$y = 3 \cdot (-1) - 2 = -5$$

Yhtälöparin ratkaisu on $x = -1$, $y = -5$, joten suorien leikkauspiste on $P = (-1, -5)$.

Suora s kulkee siis pisteiden $(7, 7)$ ja $(-1, -5)$ kautta.

$$\text{Suoran kulmakerroin on } k = \frac{-5 - 7}{-1 - 7} = \frac{-12}{-8} = \frac{3}{2}.$$

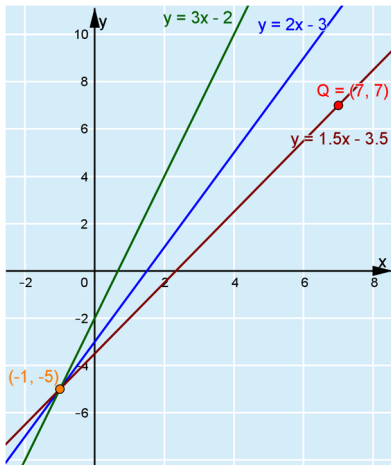
Suoran yhtälö on muotoa $y = \frac{3}{2}x + b$.

Sijoitetaan suoran yhtälöön pisteen $(7, 7)$ koordinaatit ja ratkaistaan vakiotermi b .

$$\begin{aligned} 7 &= \frac{3}{2} \cdot 7 + b \\ 7 &= \frac{21}{2} + b \\ b &= -\frac{7}{2} \end{aligned}$$

Suoran yhtälö on $y = \frac{3}{2}x - \frac{7}{2}$.

Piirretään kuvio.



TAPA 2:

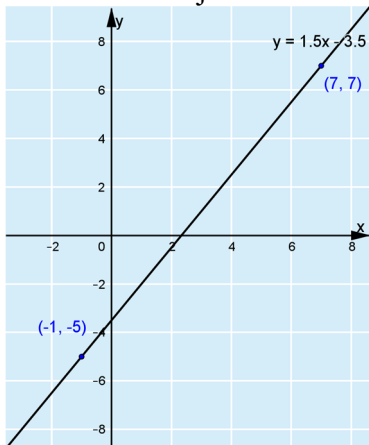
Ratkaistaan suorien $y = 2x - 3$ ja $y = 3x - 2$ leikkauspiste yhtälöparista

$$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = 3x - 2 \end{cases}$$

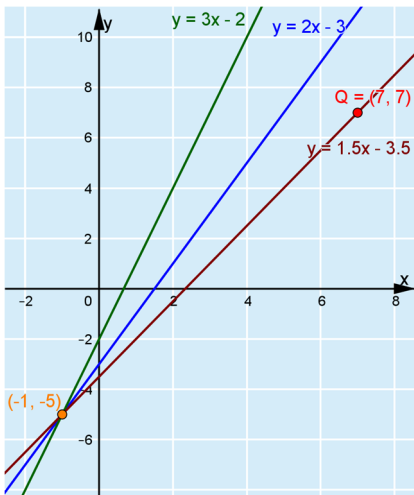
Sopivan ohjelman avulla ratkaisuksi saadaan $x = -1$, $y = -5$, joten suorien leikkauspiste on $P = (-1, -5)$.

Suora s kulkee siis pisteiden $(7, 7)$ ja $(-1, -5)$ kautta.

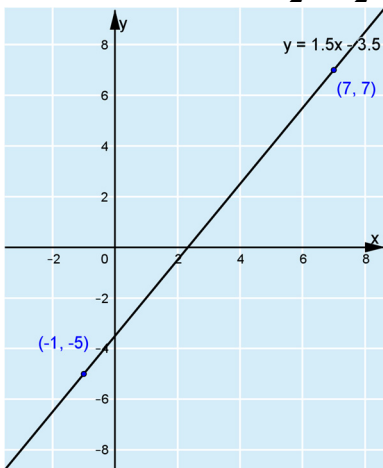
Piirretään suora ja määritetään sen yhtälö ohjelman avulla.



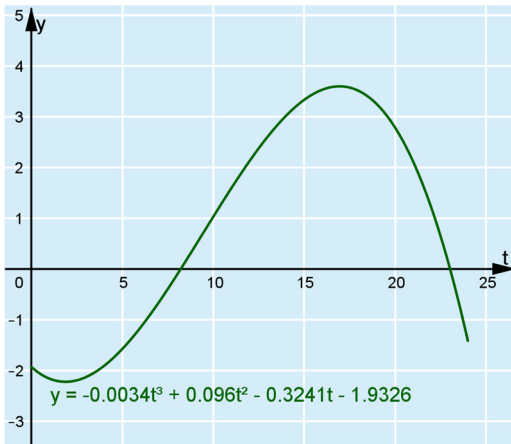
Suoran yhtälö on $y = 1,5x - 3,5$ eli $y = \frac{3}{2}x - \frac{7}{2}$.



Vastaus: $P = (-1, -5)$, $y = \frac{3}{2}x - \frac{7}{2}$,



119B. Piirretään funktion kuvaaja sopivalla ohjelmalla.



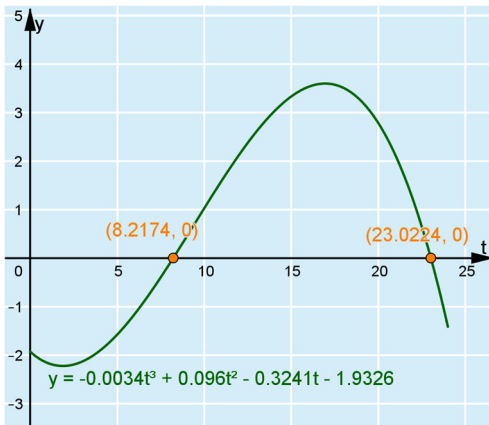
- a) Kun kello on 3 iltapäivällä, niin keskiyöstä on kulunut 15 tuntia. Lasketaan funktion $f(t) = -0,0034t^3 + 0,096t^2 - 0,3242t - 1,9326$ arvot sopivalla ohjelmalla.

$$f(15) = 3,329... \approx 3$$

$$f(3) = -2,133 \approx -2$$

Vastaus: n. $3\text{ }^{\circ}\text{C}$ ja n. $-2\text{ }^{\circ}\text{C}$

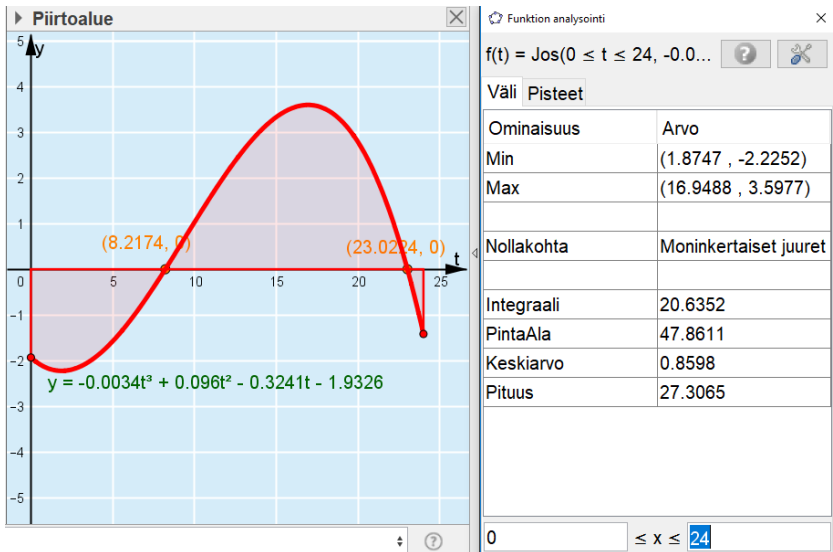
- b) Lämpötila on $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ kohdissa, joissa kuvaaja leikkaa t -akselin. Määritetään leikkauspisteet ohjelman avulla.



Kuvaaja leikkaa t -akselin kohdissa $t = 8,217\dots$ ja $t = 23,022\dots$, joten lämpötila on 0 astetta noin kello 8 ja noin kello 23.

Vastaus: n. klo 8 ja n. klo 23

- c) Lämpötila on korkeimmillaan kohdassa, jossa funktion arvo on suurin, ja matalimmillaan kohdassa, jossa funktion arvo on pienin. Etsitään funktion suurin ja pienin arvo välillä $[0, 24]$ funktion analysointi-toiminnolla.



Funktio saa välillä $[0, 24]$ suurimman arvonsa kohdassa $t = 16,948\dots$ ja pienimmän arvonsa kohdassa $t = 1,874\dots$, joten lämpötila on korkeimmillaan noin klo 17 ja matalimmillaan noin klo 02.

Vastaus: n. klo 17 ja n. klo 2

- 120B. a)** Muodostetaan lausekkeet sähkön kokonaishinnalle, kun sähköä kuluu x kWh.

Koska kuukausittainen perusmaksu on maksettava, vaikka sähköä ei kuluisi ollenkaan, perusmaksu määrää lausekkeen vakiotermin.

Koska jokainen kilowattitunnin lisäys kasvattaa sähkölaskua yksikköhinnan verran, kokonaishinta on sähkönkulutuksen lineaarinen funktio ja yksikköhinta on sen kokonaishinnan lausekkeessa muuttujan x kerroin.

Kun hinnat muutetaan senteistä euroiksi, saadaan seuraavat lausekkeet.

$$a(x) = 4,02 + 0,0662x$$

$$b(x) = 3,75 + 0,0799x$$

$$\text{Vastaus: } a(x) = 4,02 + 0,0662x, b(x) = 3,75 + 0,0799x$$

- b)** Ratkaistaan yhtälö $a(x) = b(x)$ sopivalla ohjelmalla.

$$4.02+0.0662x=3.75+0.0799x$$

$$\text{RatkaiseNumeerisesti: } \{x = 19.70802919708\}$$

Kuukausittaisen sähkönkulutuksen täytyisi olla
19,708... kWh $\approx$ 19,7 kWh.

$$\text{Vastaus: } 19,7 \text{ kWh}$$

- c)** Lasketaan sähkön kokonaishinnat vuodessa molemmissa yhtiöissä. Vuodessa perusmaksuja on 12 kpl.

Yhtiö A:

$$12 \cdot 4,02 + 0,0662 \cdot 2000 = 180,64$$

Yhtiö B:

$$12 \cdot 3,75 + 0,0799 \cdot 2000 = 204,80$$

$$\text{Hintojen ero on } 204,80 \text{ €} - 180,64 \text{ €} = 24,16 \text{ €}.$$

$$\text{Vastaus: } 24,16 \text{ €}$$

- 121A. a)** Ratkaistaan paraabelin ja x -akselin leikkauskohdat yhtälöstä $x^2 - 12x + 35 = 0$.

Sijoitetaan toisen asteen yhtälön kertoimet $a = 1$, $b = -12$ ja $c = 35$ toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan ja sievennetään lauseke.

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x &= \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 35}}{2 \cdot 1} \\ x &= \frac{12 \pm \sqrt{144 - 140}}{2} \\ x &= \frac{12 \pm \sqrt{4}}{2} \\ x &= \frac{12 \pm 2}{2} \\ x &= 7 \text{ tai } x = 5 \end{aligned}$$

x -akselilla y -koordinaatti on 0, joten paraabeli leikkaa x -akselin pisteissä (7, 0) ja (5, 0).

Vastaus: (7, 0) ja (5, 0)

- b)** Paraabelin huipun x -koordinaatti on paraabelin ja x -akselin leikkauspisteiden x -koordinaattien keskiarvo. Leikkauspisteiden x -koordinaatit ovat $x = 5$ ja $x = 7$, joten huipun x -koordinaatti on $\frac{5+7}{2} = 6$.

Huipun y -koordinaatti on $y = 6^2 - 12 \cdot 6 + 35 = 36 - 72 + 35 = -1$.

Huippu on pisteessä (6, -1).

Vastaus: (6, -1)

122A. Lämpötila muuttuu tasaisesti, joten lämpötilan muutosta voidaan kuvata suoralla. Lasketaan suoran kulmakerroin, kun suoran kulkee pisteiden $(0; 17,1)$ ja $(165; 22,3)$ kautta.

$$k = \frac{22,3 - 17,1}{165 - 0} = \frac{5,2}{165} = 0,0315\dots$$

Suora kulkee pisteen $(0; 17,1)$ kautta, joten suoran vakiotermi on $b = 17,1$.

Suoran yhtälö on $y = 0,0315\dots x + 17,1$.

Salon etäisyys Helsingistä on $165 \text{ km} - 55 \text{ km} = 110 \text{ km}$.

Lasketaan lämpötila Salossa sijoittamalla suoran yhtälöön $x = 110$.

$$y = 0,0315\dots \cdot 110 + 17,1 = 20,566\dots \approx 20,6$$

Lämpötila Salossa on noin $20,6 \text{ }^\circ\text{C}$.

Vastaus: $20,6 \text{ }^\circ\text{C}$

123A. a) Eksponentiaalinen malli soveltuu esimerkiksi kuvaamaan bakteerien määrän kasvua. Bakteerien määrä voi esimerkiksi kaksinkertaistua aina kolmessa tunnissa.

Vastaus: esim. bakteerien lisääntyminen

b) Eksponentiaalinen malli ei sovellu esimerkiksi kuvaamaan lineaarisesti muuttuvia ilmiöitä. Lineaarisesti muuttuva ilmiö on esimerkiksi auton kulkema matka, jos nopeus on vakio.

Vastaus: esim. auton kulkema matka, jos nopeus on vakio

124B. a) Väkiluvun kasvu on eksponentiaalista, joten se noudattaa funktiota $f(x) = a \cdot q^x$.

Merkitään muuttujalla x aikaa vuosina alkaen vuodesta 2010.

Tiedetään, että funktion kuvaaja kulkee pisteiden $(0; 6,9)$ ja $(8; 7,6)$ kautta, kun muuttujan arvo on maapallon väkiluku miljardeina.

Ratkaistaan luvut a ja q yhtälöparista
$$\begin{cases} 6,9 = a \cdot q^0 \\ 7,6 = a \cdot q^8 \end{cases}$$

Sopivalla ohjelmalla yhtälöparin ratkaisuksi saadaan $a = 6,9$ ja $q = 1,0121\dots$

Maapallon väkiluku noudattaa siis funktiota $f(x) = 6,9 \cdot 1,0121\dots^x$.

Ratkaistaan yhtälö $f(x) = 10$.

Sopivalla ohjelmalla yhtälön ratkaisuksi saadaan $x = 30,721\dots \approx 31$.

Muuttuja x on aika vuodesta 2010 lähtien, joten maapallon väkiluku ylittää 10 miljardia vuonna 2041.

Vastaus: vuonna 2041

b) Merkitään muuttujalla x aikaa vuosina alkaen vuodesta 1960.

Tiedetään, että funktion kuvaaja kulkee pisteiden $(0; 3,0)$ ja $(30; 5,3)$ kautta, kun funktion arvo on maapallon väkiluku miljardeina.

Ratkaistaan luvut a ja q yhtälöparista
$$\begin{cases} 3,0 = a \cdot q^0 \\ 5,3 = a \cdot q^{30} \end{cases}$$

Sopivalla ohjelmalla yhtälöparin ratkaisuksi saadaan $a = 3,0$ ja $q = 1,0191\dots$

Maapallon väkiluku noudattaa funktiota $f(x) = 3,0 \cdot 1,0191\dots^x$.

Ratkaistaan yhtälö $f(x) = 10$.

Sopivalla ohjelmalla yhtälön ratkaisuksi saadaan $x = 63,467\dots$, joten aikaa kuluu tämän ennusteen mukaan $63,467\dots$ vuotta vuodesta 1960 alkaen, eli $13,467\dots$ vuotta vuodesta 2010 alkaen.

Kohdan a mallin mukaan aikaa kuluu $30,721\dots$ vuotta vuodesta 2010 alkaen.

Ennusteilla on eroa $30,721\dots - 13,467\dots = 17,253\dots \approx 17$ a.

Vastaus: 17 vuotta aiemmin

125A. Kun muuttujat x ja y ovat suoraan verrannollisia, kuvaaja on origon kautta kulkeva suora. Väittämä A sopii siis kuvioon II.

Kun muuttujat x ja y ovat kääntäen verrannollisia, muuttujan x arvon kaksinkertaistuessaa muuttujan y arvo pienenee puoleen. Pisteet $(0,5; 2)$, $(1,1)$ ja $(2, 1)$ ovat kuvion 3 käyrällä, joten kuvio III näyttäisi kuvaavan kääntäen verrannollisuutta. Väittämä B näyttäisi siis sopivan kuvioon III.

Väittämän C mukaan y kaksinkertaistuu aina, kun muuttuja x kasvaa yhdellä. Pisteet $(0,1)$, $(1, 2)$ ja $(2, 4)$ ovat kuvion V käyrällä, joten väittämä C näyttäisi sopivan kuvioon V.

Väittämän D mukaan y puolittuu aina, kun x kasvaa yhdellä. Pisteet $(1, 4)$, $(2, 2)$ ja $(3, 1)$ ovat käyrällä IV, joten väittämä D näyttäisi sopivan käyrään IV. Pisteet $(0, 5)$, $(1; 2,5)$ ja $(2; 1,25)$ näyttäisivät olevan kuvion I käyrällä, joten väittämä D näyttäisi sopivan myös käyrään I.

Väittämän E mukaan y on suoraan verrannollinen muuttujan x neliöön. Muuttujan arvojen $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ ja $x = 3$ neliöt ovat 0, 1, 4 ja 9. Käyrällä VI on pisteet $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 2)$ ja $(3; 4,5)$, joiden y -koordinaatit ovat edellä mainittujen muuttujan x neliöiden puolikkaita, joten käyrällä VI y näyttäisi olevan suoraan verrannollinen muuttujan x neliöön. Väittämä E näyttäisi siis sopivan käyrään 6.

Vastaus: A: II; B: III; C: V; D: I ja IV; E: VI

126B. a) Myynti kasvaa lineaarisesti, joten myyntiä kuvaa suora.

TAPA 1:

Määritetään suoran kulmakerroin, kun tiedetään, että suora kulkee pisteiden $(0, 15\ 500)$ ja $(2, 56\ 500)$ kautta.

$$k = \frac{56\ 500 - 15\ 500}{2 - 0} = 20\ 500$$

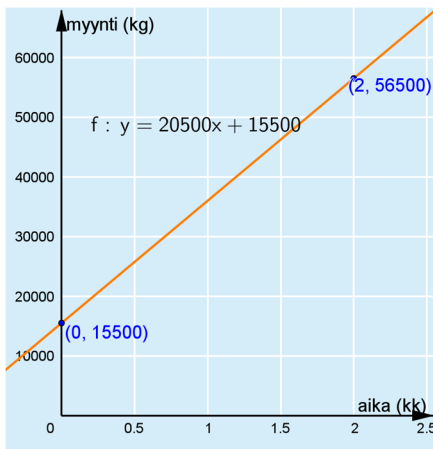
Suoran yhtälö on muotoa $y = 20\ 500x + b$.

Koska helmikuun alussa eli hetkellä 0 leipää oli myyty $15\ 500$ kg, suoran vakiotermi on $b = 15\ 500$.

Suoran yhtälö on siis $y = 20\ 500x + 15\ 500$.

TAPA 2:

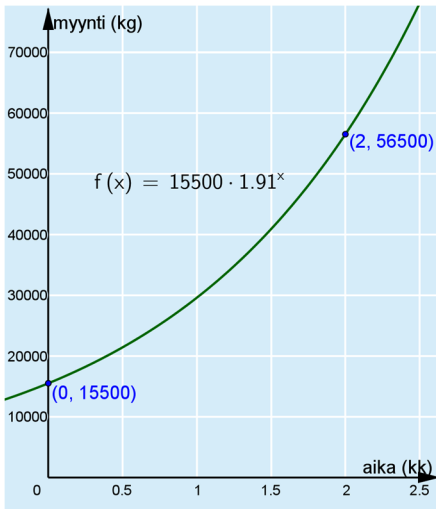
Piirretään ohjelmalla suora pisteiden $(1, 15\ 500)$ ja $(3, 56\ 500)$ kautta ja määritetään suoran yhtälö.



Kysyntä funktio on $f(x) = 20\ 500x + 15\ 500$.

Vastaus: $f(x) = 20\ 500x + 15\ 500$

- b) Funktio f kuvaa eksponentiaalista kasvua. Piirretään ohjelmalla eksponenttifunktion kuvaaja, joka kulkee pisteiden $(1, 15\,500)$ ja $(3, 56\,500)$ kautta ja määritetään funktion lauseke.



Funktion lauseke on $f(x) = 15\,500 \cdot 1,91^x$.

Vastaus: $f(x) = 15\,500 \cdot 1,91^x$

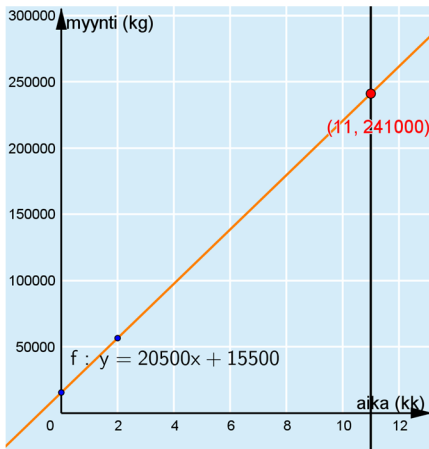
- c) Määritetään a- ja b-kohtien mallien mukaiset ennusteet leivän myynnille kalenterivuoden eli 11 ensimmäisen kuukauden aikana.

TAPA 1:

Lineaarisen mallin mukaan myyty määrä kilogrammoina on $f(11) = 20\,500 \cdot 11 + 15\,500 = 225\,500 = 241\,000$.

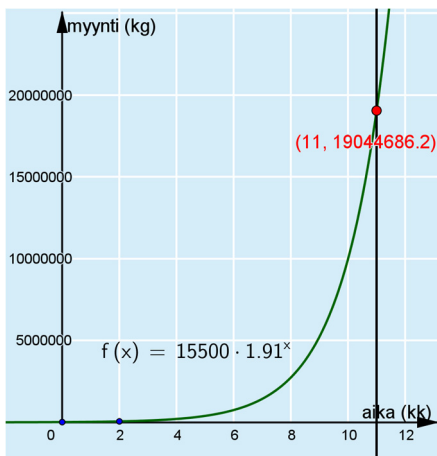
TAPA 2:

Määritetään suorien $y = 20500x + 15\,500$ ja $x = 11$ leikkauspiste ohjelman avulla.



Leikkauspiste on $(11, 241\,000)$, joten leipää myytiin kalenterivuoden aikana lineaarisen mallin mukaan 241 000 kg.

Määritetään eksponenttifunktion $f(x) = 15\,500 \cdot 1,91^x$ kuvaajan ja suoran $x = 11$ leikkauspiste ohjelman avulla.



Leikkauspiste on (11, 19 044 686,2), joten eksponentiaalisen mallin mukaan leipää myytiin kalenterivuoden aikana 19 044 686,2 kg.

Koska $\frac{19\,044\,686,2}{241\,000} = 79,02359\dots$, niin leipää myydään b-kohdan mallin mukaan $7902,359\dots\% - 100\% = 7802,359\dots\% \approx 7800\%$ enemmän kuin a-kohdan mallin mukaan.

Vastaus: 7800 % enemmän

- 127B. a)** Lineaarisen mallin kuvaaja on suora. Merkitään vuosilukua kirjaimella x ja neliövuokraa kirjaimella y , jolloin suora kulkee pisteiden $(1985; 3,20)$ ja $(2000, 10)$ kautta.

TAPA 1:

Määritetään suoran kulmakerroin.

$$k = \frac{10 - 3,2}{2000 - 1985} = \frac{6,8}{15} = 0,453\dots$$

Suoran yhtälö on muotoa $y = 0,453\dots x + b$. Sijoitetaan yhtälöön pisteen $(1985; 3,20)$ koordinaatit ja ratkaistaan vakiotermi b .

$$\begin{aligned} 3,20 &= 0,453\dots \cdot 1985 + b \\ b &= -896,666\dots \end{aligned}$$

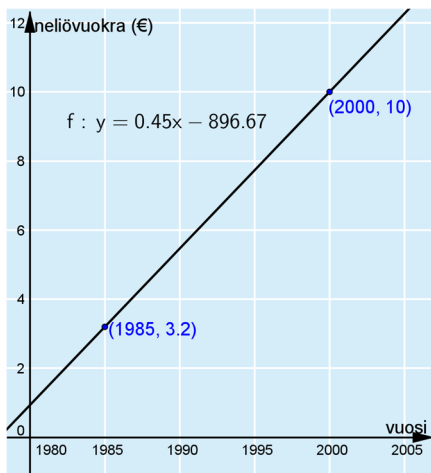
Suoran yhtälö on $y = 0,453\dots x - 896,666\dots$.

Lasketaan vuokra vuonna 2025 sijoittamalla $x = 2025$ suoran yhtälöön.
 $y = 0,453\dots \cdot 2025 - 896,666\dots = 21,333\dots \approx 21$

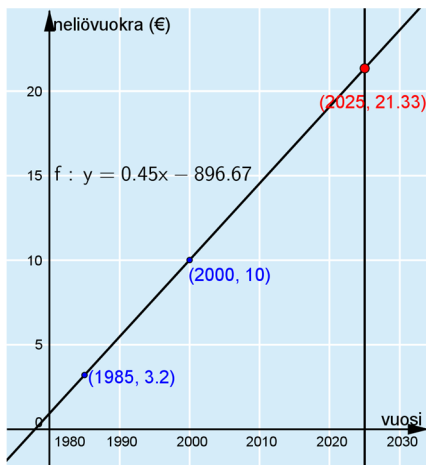
Vuokra vuonna 2025 on noin 21 €/m^2 .

TAPA 2:

Piirretään ohjelmalla suora pisteiden (1985; 3,20) ja (2000, 10) kautta.



Määritetään neliövuokraa kuvaavan suoran ja suoran $x = 2025$ leikkauspiste ohjelman avulla.



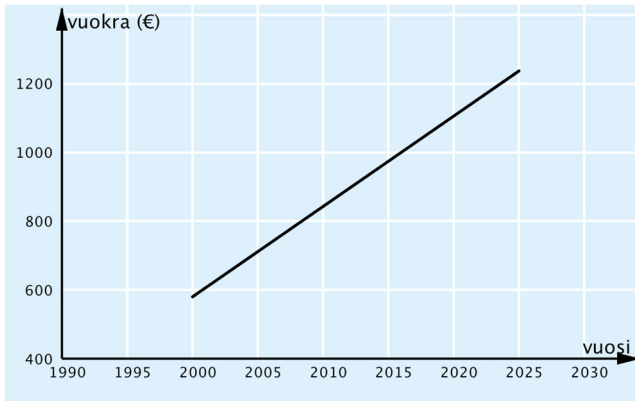
Leikkauspiste on (2025; 21,33), joten neliövuokra on vuonna 2025 noin 21 €.

Vastaus: 21 €/m²

- b) Määritetään 58 m^2 :n kokoisen asunnon vuokran määrän lauseke. Se saadaan kertomalla neliöhinta y luvulla 58.

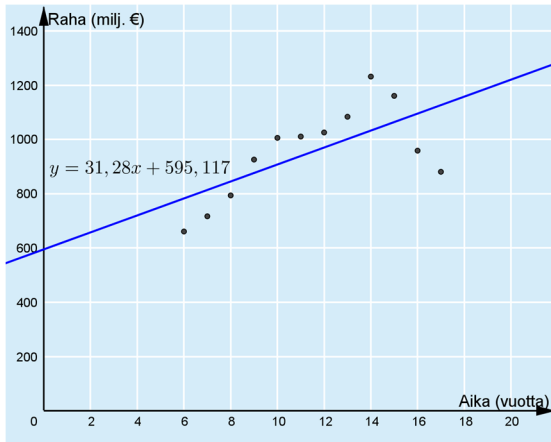
Vuokra on $58 \cdot (0,453\dots x - 896,666\dots)$. Piirretään kuvaaja sopivalla ohjelmalla.

Vastaus:



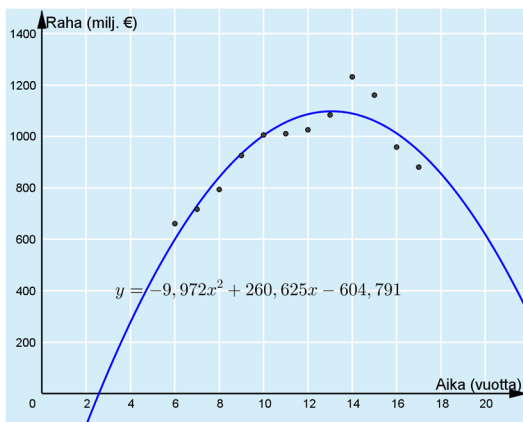
128B. a) Valitaan muuttujaksi x vuosien määrä alkaen vuodesta 2000 ja muuttujaksi y kehitysyhteistyörahnan määrä miljardeina euroina

Sovitetaan aineistoon lineaarinen malli sopivalla ohjelmalla.



Malliksi saadaan $y = 31,28x + 595,117$.

Sovitetaan aineistoon toisen asteen polynominen malli sopivalla ohjelmalla.

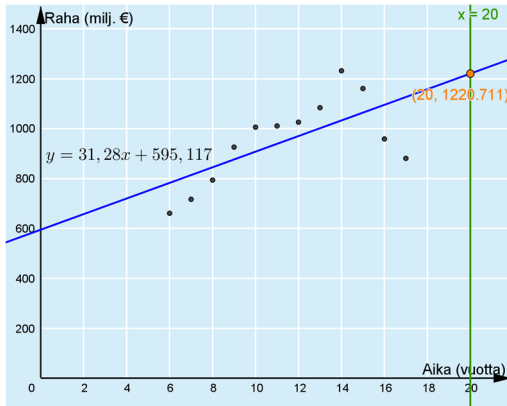


Malliksi saadaan $y = -9,972x^2 + 260,625x - 604,791$.

Vastaus: $y = 31,28x + 595,117$ ja $y = -9,972x^2 + 260,625x - 604,791$

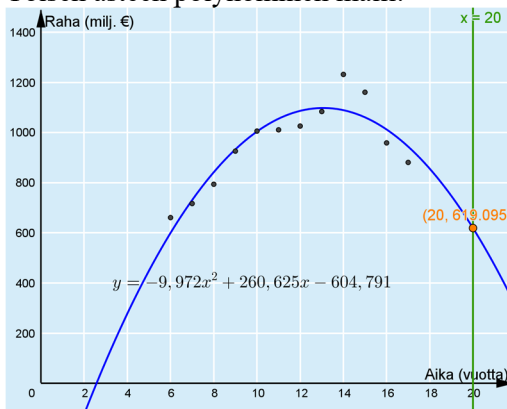
- b) Koska malleissa muuttuja on vuosien määrä alkaen vuodesta 2000, ennuste vuoden 2020 kehitysyhteistyörahalle saadaan mallien ja suoran $x = 20$ avulla.

Lineaarinen malli:



Kohdan a mallin mukaisen suoran ja suoran $x = 20$ leikkauspiste on $(20; 1220,711)$, joten a-kohdan malli ennustaa vuoden 2020 kehitysyhteistyörahaksi noin 1220 miljoonaa euroa.

Toisen asteen polynominen malli:



Kohdan b mallin mukaisen paraabelin ja suoran $x = 20$ leikkauspiste on $(20; 619,095)$, joten a-kohdan malli ennustaa vuoden 2020 kehitysyhteistyörahaksi noin 620 miljoonaa euroa.

Vastaus: 1220 miljoonaa euroa ja 620 miljoonaa euroa

- 129A. a)** Puumassan tilavuus kyseisinä ajanhetkinä saadaan laskemalla funktion f arvot kohdissa $t = 10, 20, 30$ ja 40 sopivalla ohjelmalla.

$$f(10) = 0,0513 \cdot e^{0,068 \cdot 10} = 0,10125... \approx 0,101$$

$$f(20) = 0,0513 \cdot e^{0,068 \cdot 20} = 0,19987... \approx 0,200$$

$$f(30) = 0,0513 \cdot e^{0,068 \cdot 30} = 0,39452... \approx 0,395$$

$$f(40) = 0,0513 \cdot e^{0,068 \cdot 40} = 0,77875... \approx 0,779$$

Vastaus: $0,101 \text{ m}^3$; $0,200 \text{ m}^3$; $0,395 \text{ m}^3$ ja $0,779 \text{ m}^3$

- b)** Koska malli on eksponentiaalinen, puumassa kasvaa aina yhtä monta prosenttia vuodessa. Tällöin se kasvaa myös kymmenessä vuodessa aina yhtä monta prosenttia.

Lasketaan, kuinka monta prosenttia $f(10)$ on arvosta $f(0) = 0,0513$.

$$\frac{f(10)}{f(0)} = \frac{0,10125...}{0,0513} = 1,97387...$$

Puumassan tilavuus kasvaa 10 vuoden aikana
 $197,387... \% - 100 \% = 97,387... \% \approx 97,4 \%$.

Lasketaan, kuinka monta prosenttia $f(1)$ on arvosta $f(0) = 0,0513$.

$$\frac{f(1)}{f(0)} = \frac{0,0513 \cdot e^{0,068 \cdot 1}}{0,0513} = 1,07036...$$

Puumassan tilavuus kasvaa vuodessa
 $107,036... \% - 100 \% = 7,036... \% \approx 7,0 \%$.

Vastaus: $97,4 \%$ ja $7,0 \%$

- 130B. a)** Maankuoren lämpötila kasvaa lineaarisesti. Merkitään syvyyttä kilometreinä kirjaimella h . Selvitetään lämpötilaa Celsiusasteina kuvaavan suoran kulmakerroin, kun tiedetään, että suora kulkee pisteiden $(0, 10)$ ja $(10, 170)$ kautta.

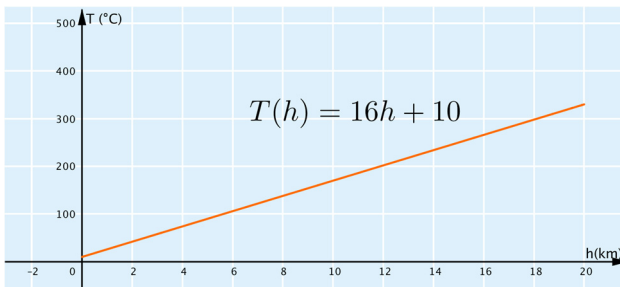
$$k = \frac{170 - 10}{10 - 0} = \frac{160}{10} = 16$$

Lämpötila kasvaa kilometrin matkalla $16\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Vastaus: $16\text{ }^{\circ}\text{C}$

- b)** Koska lämpötila kasvaa lineaarisesti, lämpötilan lauseke on muotoa $T(h) = kh + b$.
Kohdan a mukaan kulmakerroin $k = 16$.
Koska lämpötila 0 kilometrin syvyydellä on $10\text{ }^{\circ}\text{C}$, vakiotermi on $b = 10$.

Lämpötilaa kuvaa funktio $T(h) = 16h + 10$.



Vastaus: $T(h) = 16h + 10$

- c)** Ratkaistaan yhtälö $T(h) = 100$ ohjelmalla.

$$16h + 10 = 100$$

Ohjelmalla ratkaisuksi saadaan $h = 5,625$.
Lämpötila on siis $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ noin $5,6$ kilometrin syvyydessä.

Vastaus: $5,6$ kilometrin syvyydellä

- 131B. a)** Ennusteen mukaan vuonna 2014 asukasluku on 607 417 ja vuonna 2018 se on 628 894.

Sijoitetaan yhtälöön $y = a(x - 2014) + b$ vuoden 2014 tiedot $x = 2014$ ja $y = 607\,417$. Ratkaistaan yhtälöstä vakio b .

$$607\,417 = a(2014 - 2014) + b$$

$$607\,417 = a \cdot 0 + b$$

$$b = 607\,417$$

Sijoitetaan yhtälöön $y = a(x - 2014) + b$ vuoden 2018 tiedot $x = 2018$ ja $y = 628\,894$ sekä vakio $b = 607\,417$. Ratkaistaan yhtälöstä vakio a .

$$628\,894 = a(2018 - 2014) + 607\,417$$

Ratkaisuksi saadaan ohjelmalla $a = 5619,25$.

Vastaus: $a = 5619,25$, $b = 607\,417$

- b)** Sijoitetaan a-kohdassa saadut vakioiden a ja b arvot sekä ajankohta $x = 2030$ yhtälöön $y = a(x - 2014) + b$ ja lasketaan asukasluku vuonna 2030.

$$y = 5619,25(2030 - 2014) + 607\,417 = 697\,325$$

Lasketaan vuoden 2014 ja 2030 väkilukujen erotus.

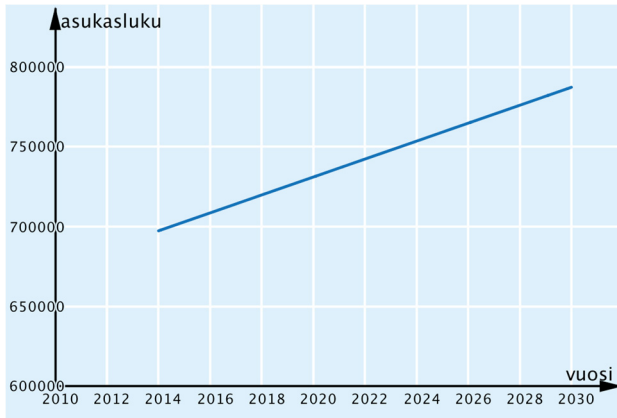
$$697\,325 - 607\,417 = 89\,908 \approx 90\,000.$$

Asukasluku kasvaa aikavälillä 2014–2030 ennusteen mukaan noin 90 000 asukkaalla.

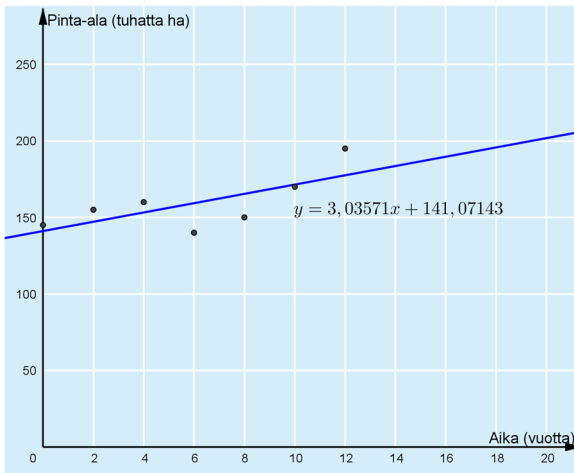
Vastaus: 90 000 asukkaalla

- c) Asukasluku vuonna x on $y = 5619,25(x - 2014) + 607\,417$.
Piirretään asukasluvun kuvaaja välillä $2014 \leq x \leq 2030$ sopivalla ohjelmalla.

Vastaus:

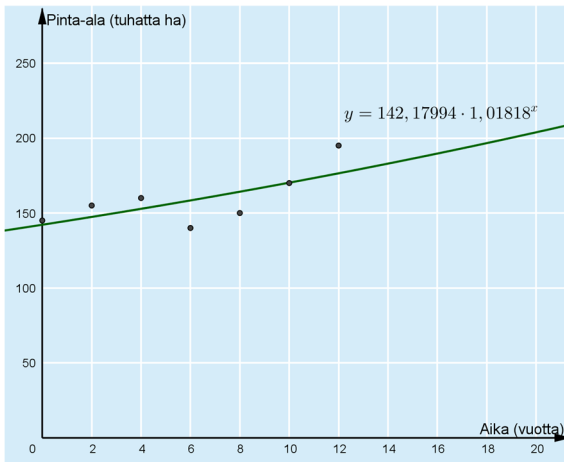


- 132B. a)** Valitaan muuttujaksi x vuosien määrä alkaen vuodesta 2000. Sovitetaan aineistoon lineaarinen malli.



Malliksi saadaan $y = 3,03571x + 141,07143$.

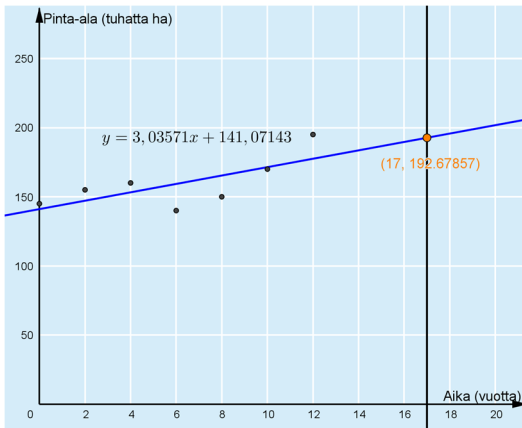
Sovitetaan aineistoon eksponentiaalinen malli.



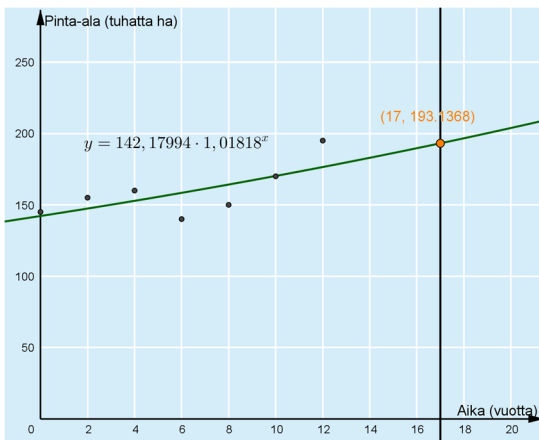
Malliksi saadaan $y = 142,17994 \cdot 1,01818^x$.

Vastaus: $y = 3,03571x + 141,07143$ ja $y = 142,17994 \cdot 1,01818^x$

- b) Vuonna 2017 on kulunut 17 vuotta vuodesta 2000. Selvitetään a-kohdan mallien mukaiset arviot vuoden 2017 luomuviljelypinta-alasta mallien ja suoran $x = 17$ avulla.



Kohdan a lineaarisen mallin ja suoran $x = 17$ leikkauspiste on $(17; 192,678\dots)$, joten lineaarisen mallin mukaan luomuviljelypinta-ala oli noin 193 000 hehtaaria vuonna 2017.



Kohdan b eksponentiaalisen mallin ja suoran $x = 17$ leikkauspiste on $(17; 193,136\dots)$, joten eksponentiaalisen mallin mukaan luomuviljelypinta-ala oli noin 193 000 hehtaaria vuonna 2017.

Vastaus: 193 000 ha ja 193 000 ha

- c) Lasketaan, kuinka monta prosenttia b-kohdan tulokset ovat toteutuneesta peltopinta-alasta.

Lineaarinen malli:

$$\frac{192,678...}{263} = 0,73261...$$

Lineaarisen mallin mukaan vuoden 2017 tulos poikkeaa
 $100\% - 73,261... \% = 26,738... \% \approx 27\%$ alaspäin vuoden 2017
 toteutuneesta peltopinta-alasta.

Ekspontiaalinen malli:

$$\frac{193,136...}{263} = 0,73436...$$

Ekspontiaalisen mallin mukaan vuoden 2017 tulos poikkeaa
 $100\% - 73,436... \% = 26,563... \% \approx 27\%$ alaspäin vuoden 2017
 toteutuneesta peltopinta-alasta.

Vastaus: 27 % alaspäin ja 27 % alaspäin

- 133B. a)** Lasketaan, kuinka monta prosenttia luku 1 460 500 on luvusta 422 500.

$$\frac{1\,460\,500}{422\,500} = 3,45680\dots$$

Maksuhäiriöiden lukumäärä kasvoi
 $345,680\dots\% - 100\% = 245,680\dots\% \approx 246\%$.

Vastaus: 246 %

- b)** Koska vuotuisen vähenemisprosentin oletetaan olevan sama, maksuhäiriöiden oletetaan vähenevän eksponentiaalisesti. Tällöin maksuhäiriöiden määrä noudattaa funktiota $1\,460\,500 \cdot q^x$, jossa x on vuodesta 2011 kulunut aika.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä muutoskerroin q .
 $1\,460\,500q^4 = 422\,500$

Ohjelmalla saadaan ratkaisuksi $q = \pm 0,73338\dots$

Koska muutoskerroin q ei voi olla negatiivinen, se on $q = 0,73338\dots$, ja maksuhäiriöt vähenevät tavoitteen mukaan vuosittain

$$100\% - 73,338\dots\% = 26,661\dots\% \approx 26,7\%$$

Vastaus: 26,7 %

- 134B. a)** Jättikynttilän korkeutta kuvataan suoran avulla. Tiedetään, että suora kulkee pisteiden $(0, 100)$ ja $(450, 0)$ kautta. Lasketaan suoran kulmakertoimen.

$$k = \frac{0 - 100}{450 - 0} = -\frac{2}{9}$$

Kynttilän pituus on 100 cm, kun sitä ei ole poltettu vielä laisinkaan. Suoran vakiotermi on siis $b = 100$.

Suoran yhtälö on $y = -\frac{2}{9}t + 100$

Vastaus: $k = -\frac{2}{9}$, $b = 100$

- b)** Ratkaistaan yhtälöpari
$$\begin{cases} y = -\frac{2}{9}t + 100 \\ y = 120 - 0,005t^2 \end{cases}.$$

Sopivalla ohjelmaa yhtälöparin ratkaisuksi saadaan $t = -44,813\dots$ ja $y = 109,958\dots$ tai $t = 89,258\dots$ ja $y = 80,164\dots$

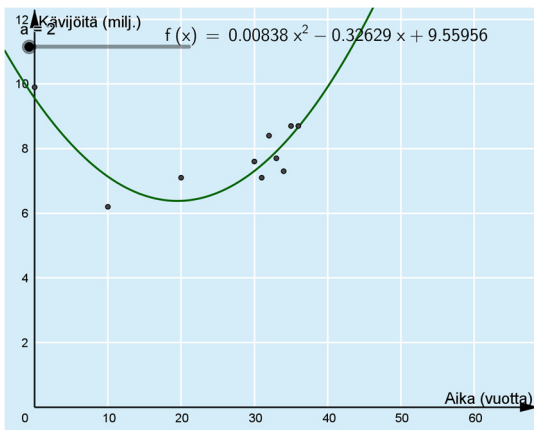
Negatiivinen aika ei käy, koska malli ei sovellu ajanhetkiin, joina kynttilöitä ei vielä oltu sytytetty.

Kynttilät ovat yhtä pitkiä, kun ne ovat palaneet $89,258\dots$ h ≈ 90 h.

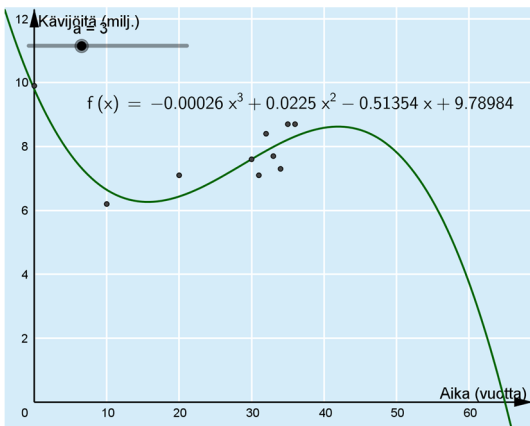
Vastaus: 90 tunnin palamisen jälkeen

135B. Valitaan muuttujaksi x vuosien määrä vuodesta 1980 lähtien. Sovitetaan aineistoon polynomi, jonka asteluku on valittavissa.

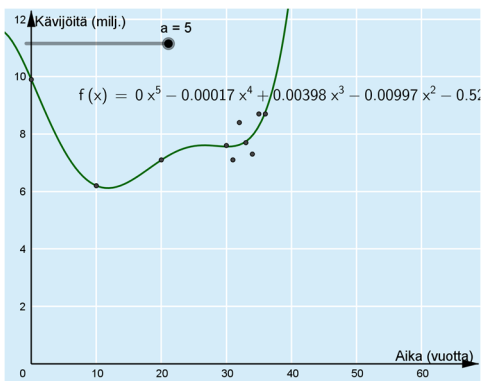
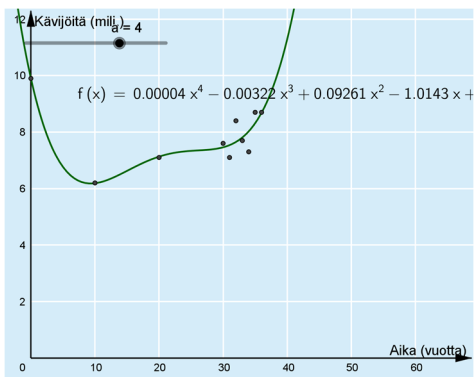
Kun valitaan asteluvuksi kaksi, saadaan toisen asteen polynominen malli.



Valitsemalla asteluvuksi 3 saadaan kolmannen asteen polynominen malli.



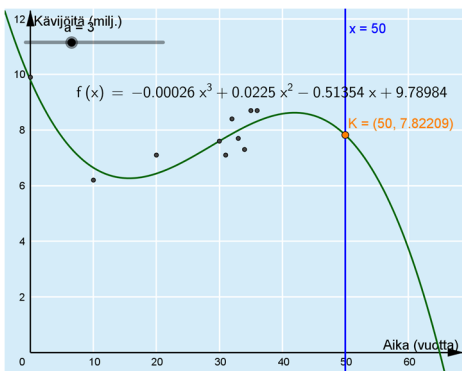
Vastaavasti voidaan valita neljännen tai viidennen asteen polynominen malli.



Vuodesta 1980 on kulunut 50 vuotta vuoteen 2030. Malleista parhaiten aineistoon näyttäisi sopivan kolmannen asteen malli.

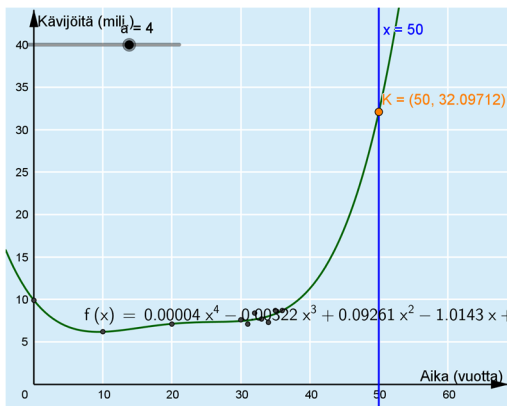
Vuonna 2030 on kulunut 50 vuotta vuodesta 1980.

Määritetään kolmannen asteen mallin mukainen ennuste elokuvissa kävijöiden määrälle vuonna 2030 mallin ja suoran $x = 50$ avulla.



Kolmannen asteen mallin käyrän ja suoran $x = 50$ leikkauspiste on $(50; 7,82209)$, joten kolmannen asteen mallin mukaan vuonna 2030 suomalaiset käyvät elokuvissa noin 7,8 miljoonaa kertaa.

Toiseksi parhaiten aineistoon näyttäisi sopivan 4. tai 5. asteen polynominen malli. Valitaan näistä yksinkertaisempi.



Neljännän asteen mallin käyrän ja suoran $x = 50$ leikkauspiste on $(50; 32,09712)$, joten neljännän asteen mallin mukaan vuonna 2030 suomalaiset käyvät elokuvissa noin 32,1 miljoonaa kertaa.

Lasketaan kuinka monta prosenttia ennusteet poikkeavat toisistaan:

$$\frac{7,822...}{32,097...} = 0,243...$$

Pienempi ennuste on $100\% - 24,3... \% = 75,6... \% \approx 76\%$ pienempi kuin suurempi ennuste.

Vastaus: 7,8 miljoonaa kertaa, 32,1 miljoonaa kertaa, 76 %

136A. Tulkitaan kuvaajissa positiivisen nopeuden suunnan olevan ylöspäin tai sivuttaisen liikkeen tapauksessa liikkeen alkuperäisen suunnan mukainen.

- a) Pallo on levossa, kun se on koko ajan samassa paikassa, eli paikka on vakio ja nopeus on nolla. Tähän sopivat paikan kuvaaja 3 ja nopeuden kuvaaja L.

Vastaus: 3, L

- b) Kun pallo vierii vaakasuoralla tasolla, sen nopeus on suunnilleen vakio ja paikka kasvaa tasaisesti. Tähän sopivat paikan kuvaaja 5 ja nopeuden kuvaaja M.

Vastaus: 5, M

- c) Kun pallo vierii vaakasuoralla tasolla ja palloa lyödään mailalla liikkeen suuntaan, pallon nopeus on ensin vakio, kunnes lyöntihetkellä nopeus kasvaa äkillisesti suuremmaksi vakioksi. Tällöin paikka kasvaa tasaisesti ensin pienemmällä ja lyönnin jälkeen suuremmalla nopeudella. Tähän sopivat paikan kuvaaja 1 ja nopeuden kuvaaja P.

Vastaus: 1, P

- d) Kun pallo vierii vaakasuoralla tasolla, törmää esteeseen ja kimpoaa takaisin tulosuuntaansa, pallon nopeus on ensin positiivinen vakio ja törmäyksen jälkeen negatiivinen vakio. Tällöin paikka ensin kasvaa tasaisesti ja sitten vähenee tasaisesti. Tähän sopivat paikan kuvaaja 2 ja nopeuden kuvaaja K.

Vastaus: 2, K

- e) Kun pallo heitetään pystysuoraan ylöspäin, pallolla on positiivinen alkunopeus. Sitten nopeus pienenee tasaisesti ja muuttuu negatiiviseksi pallon alkaessa pudota. Tällöin pallon paikan kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli. Tähän sopivat paikan kuvaaja 4 ja nopeuden kuvaaja O.

Vastaus: 4, O

- f) Kun pallo pudotetaan kädestä, sen nopeus on aluksi nolla ja sitten negatiivinen, koska pallo putoaa alaspäin. Pallon pompatessa lattiasta nopeus muuttuu äkillisesti positiiviseksi, ja koska pallo alkaa uudestaan pudota, nopeus vähenee tämän jälkeen. Tällöin paikan kuvaaja muodostuu kahdesta alaspäin aukeavan paraabelin osasta. Tähän sopivat paikan kuvaaja 6 ja nopeuden kuvaaja N.

Vastaus: 6, N

SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

- 137B.** Koska radioaktiivisuus vähenee eksponentiaalisesti, sitä voidaan mallintaa funktiolla $f(x) = 25 \cdot q^x$, jossa q on muutoskerroin ja x aika vuorokausina.

Tiedetään, että $f(5) = 16,2$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä muutoskerroin q .

$$25 \cdot q^5 = 16,2$$

Sopivalla ohjelmalla saadaan $q = 0,916\dots$, joten $f(x) = 25 \cdot 0,916\dots^x$. Kun näytteen aktiivisuus on puolittunut ensimmäisestä mittauksesta, se on 12,5 kBq. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä puoliintumisaika x .

$$25 \cdot 0,916\dots^x = 12,5$$

Sopivalla ohjelmalla saadaan $x = 7,988\dots \approx 8$, joten radioaktiivisuuden puoliintumisaika on noin 8 vuorokautta.

Lasketaan näytteen aktiivisuus 10 vuorokautta ennen ensimmäistä mittausta.

$$f(-10) = 25 \cdot 0,916\dots^{-10} = 59,537\dots \approx 59,5$$

Näytteen aktiivisuus 10 vuorokautta ennen ensimmäistä mittausta oli noin 59,5 kBq.

Vastaus: 8 vrk, 59,5 kBq

138B. Ratkaistaan suoran kulmakerroin.

$$\begin{aligned}
 3x + 4y - 5 &= 0 \\
 4y &= -3x + 5 & \| :4 \\
 y &= -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}
 \end{aligned}$$

Kulmakerroin on $k = -\frac{3}{4}$, joten suora on laskeva.

Ratkaistaan suuntakulman α suuruus.

$$\begin{aligned}
 \tan \alpha &= -\frac{3}{4} \\
 \alpha &= 36,869\dots^\circ \\
 \alpha &\approx 36,9^\circ
 \end{aligned}$$

Vastaus: laskeva, $-36,9^\circ$

139A. a) Tiedetään, että $f(2) = 0$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä vakio b .

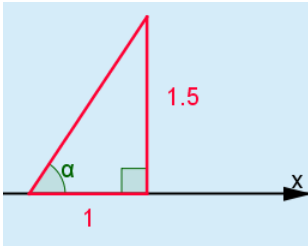
$$\begin{aligned}
 \frac{3}{2} \cdot 2 + b &= 0 \\
 3 + b &= 0 \\
 b &= -3
 \end{aligned}$$

Vastaus: $b = -3$

b) Kohdan a perusteella $f(x) = \frac{3}{2}x - 3$. Koska $f(0) = -3$, funktion f kuvaaja leikkaa y -akselin pisteessä $(0, -3)$.

Vastaus: $(0, -3)$

- c) Funktion f kuvaaja on suora, jonka kulmakerroin on $k = \frac{3}{2}$. Piirretään mallikuva.



Ratkaistaan kysytty terävä kulma α tangentin avulla.

$$\tan \alpha = \frac{3}{2}$$
$$\alpha = 56,309\dots^\circ$$

Funktion kuvaajan ja x -akselin välinen terävä kulma on $56,309\dots^\circ \approx 56,3^\circ$.

Vastaus: $56,3^\circ$

- 140B.** Merkitään hiilidioksidipäästöjen määrää vuonna 1990 kirjaimella a . Tiedetään, että $a > 0$.
Tällöin hiilidioksidipäästöjen määrä vuonna 2008 oli $1,39a$.

Koska vuotuinen kasvuprosentti oletetaan vakioksi, päästöjen määrää voidaan mallintaa eksponenttifunktiolla $f(x) = a \cdot q^x$, jossa x on vuodesta 1990 kulunut aika vuosina.

Vuonna 2008 oli kulunut 18 vuotta vuodesta 1990. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä muutoskerroin q .

$$a \cdot q^{18} = 1,39a$$

Sopivalla ohjelmalla ratkaisuksi saadaan $q = \pm 1,01846\dots$

Koska muutoskerroin ei voi olla negatiivinen, on $q = 1,01846\dots$ ja $f(x) = a \cdot 1,01846\dots^x$.

Vuonna 2015 oli kulunut 25 vuotta vuodesta 1990. Lasketaan eksponentiaalisen mallin mukainen päästöjen määrä vuonna 2015.

$$f(25) = a \cdot 1,01846\dots^{25} = 1,579\dots$$

Eksponentiaalisen mallin mukaan päästöt kasvoivat vuosina 1990–2015 yhteensä $157,9\dots \% - 100 \% = 57,9\dots \% \approx 58 \%$.

Vastaus: 58 %

141A. Määritetään suoran $y = -3x + 2$ ja x -akselin leikkauspiste. x -akselilla $y = 0$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä leikkauspisteen x -koordinaatti.

$$\begin{aligned} -3x + 2 &= 0 \\ -3x &= -2 \\ x &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Suora $y = -3x + 2$ leikkaa x -akselin pisteessä $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$.

Määritetään vastaavalla tavalla suoran $y = ax + 6$ ja x -akselin leikkauspiste. Jos $a = 0$, suoran yhtälö on $y = 6$, eikä suora leikkaa x -akselia. Oletetaan, että $a \neq 0$ ja ratkaistaan leikkauspisteen x -koordinaatti yhtälön avulla.

$$\begin{aligned} ax + 6 &= 0 \\ ax &= -6 \quad \| : a (\neq 0) \\ x &= -\frac{6}{a} \end{aligned}$$

Suora $y = ax + 6$ leikkaa y -akselin pisteessä $\left(-\frac{6}{a}, 0\right)$.

Jotta suorat erottaisivat x -akselista janan, jonka pituus on 3, on oltava $-\frac{6}{a} = \frac{2}{3} + 3$ tai $-\frac{6}{a} = \frac{2}{3} - 3$.

Ratkaistaan a näistä yhtälöistä.

$$\begin{aligned} -\frac{6}{a} &= \frac{2}{3} + 3 \\ -\frac{6}{a} &= \frac{2}{3} + \frac{9}{3} \\ -\frac{6}{a} &= \frac{11}{3} & \text{tai} & \quad -\frac{6}{a} = \frac{2}{3} - 3 \\ -11a &= 18 & \| : (-11) & \quad 7a = 18 & \| : 7 \\ a &= -\frac{18}{11} & & \quad a = \frac{18}{7} \end{aligned}$$

Vastaus: $a = -\frac{18}{11}$ tai $a = \frac{18}{7}$

142B. a) CRP:n pitoisuus voi nopeimmillaan kaksinkertaistua kahdeksan tunnin välein. Koska CRP tällöin kaksinkertaistuu aina samassa ajassa, kasvu on eksponentiaalista.

Merkitään aikaa keskipäivästä alkaen tunteina kirjaimella t .

TAPA 1:

CRP voi nopeimmillaan kasvaa funktion $f(t) = a \cdot 2^{\frac{t}{8}}$ mukaisesti, jossa a on pitoisuuden alkuarvo.

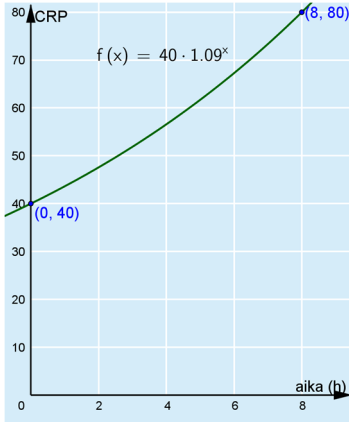
Kello 18:00 on kulunut 6 tuntia keskipäivästä.

Jos CRP-pitoisuus on keskipäivällä 40, se voi olla kello 18

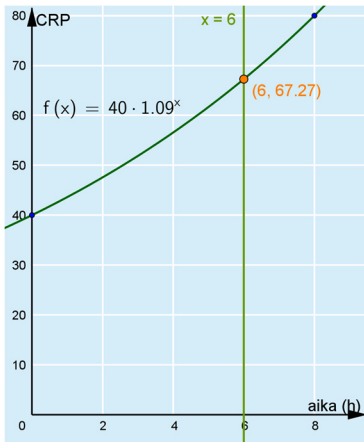
enimmillään $f(6) = 40 \cdot 2^{\frac{6}{8}} = 67,271\dots \approx 67,3$.

TAPA 2:

Jos CRP kaksinkertaistuu kahdeksassa tunnissa, se on 80 kahdeksan tunnin kuluttua. Piirretään ohjelmalla sellaisen eksponenttifunktion kuvaaja, joka kulkee pisteiden $(0, 40)$ ja $(8, 80)$ kautta.



Kello 18 on kulunut 6 tuntia keskipäivästä. Määritetään eksponenttifunktion kuvaajan ja suoran $x = 6$ leikkauspiste ohjelmalla.



Leikkauspiste on $(6; 67,27)$, joten CRP voi kello 18 olla korkeintaan $67,27 \approx 67,3$.

Vastaus: 67,3

- b)** Jos tulehdus on kadonnut, CRP-pitoisuus puolittuu 19 tunnin välein. Tämä on suurin mahdollinen CRP-pitoisuuden alenemisnopeus.

TAPA 1:

Pitoisuus noudattaa funktiota $f(t) = a \cdot 0,5^{\frac{t}{19}}$, jossa a on alkuarvo.

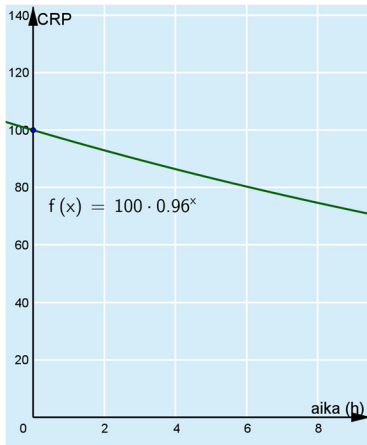
Jos alkuarvo on 100, pitoisuus noudattaa funktiota $f(t) = 100 \cdot 0,5^{\frac{t}{19}}$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä, kuinka pitkä aika kuluu, ennen kuin pitoisuus on laskenut arvoon 10.

$$100 \cdot 0,5^{\frac{t}{19}} = 10$$

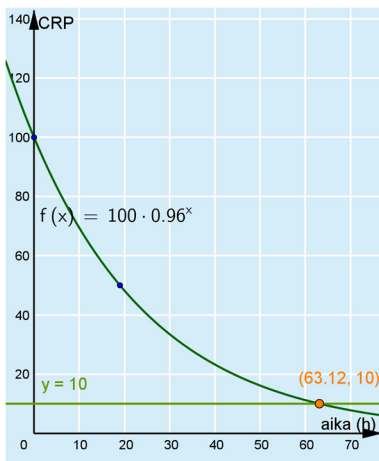
Yhtälön ratkaisuksi saadaan sopivalla ohjelmalla $t = 63,116\dots$, joten aikaa kuluu vähintään 63 tuntia eli 2 vuorokautta ja 15 tuntia. Tällöin on torstai ja kello on 3 yöllä.

TAPA 2:

Kun CRP-pitoisuus on 19 tunnin kuluttua puolittunut, sen arvo on 50. Piirretään ohjelmalla sellaisen eksponenttifunktion kuvaaja, joka kulkee pisteiden (0, 100) ja (19, 50) kautta.



Määritetään ohjelman avulla eksponenttifunktion ja suoran $y = 10$ leikkauspiste.



Leikkauspiste on (63,12; 10), joten aikaa kuluu vähintään 63 tuntia eli 2 vuorokautta ja 15 tuntia. Tällöin on torstai ja kello on 3 yöllä.

Vastaus: torstaina klo 3

- 143B. a)** Suodatin poistaa yhdellä suodatuksella 96 % bakteereista, joten bakteereista jää jäljelle $100 \% - 96 \% = 4 \%$.

Bakteerien määrä kahden suodatuksen jälkeen on $a \cdot 0,04^2 = 0,0016a$, jossa $a > 0$ on alkuperäinen bakteerien määrä. Bakteereista on siis kahden suodatuksen jälkeen jäljellä 0,16 %, joten niistä on suodatettu $100 \% - 0,16 \% = 99,84 \% \approx 99,8 \%$.

Vastaus: 99,8 %

- b)** Kun bakteereista on poistettu 99,9995 %, niistä on jäljellä 0,0005 %. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä tarvittava suodatusten määrä x .

$$a \cdot 0,04^x = 0,000005a$$

Yhtälön ratkaisuksi saadaan sopivalla ohjelmalla $x = 3,792\dots$, joten vesi on suodatettava vähintään neljä kertaa.

Vastaus: vähintään 4 kertaa

- c)** Kun bakteereista on poistettu 99,9995 %, niistä on jäljellä 0,0005 %. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä tarvittava muutoskerroin q , kun kaksi suodatusta riittää.

$$a \cdot q^2 = 0,000005a$$

Yhtälön ratkaisuksi saadaan sopivalla ohjelmalla $q = \pm 0,00223\dots$

Koska muutoskerroin ei voi olla negatiivinen, on $q = 0,00223\dots$

Bakteereista poistuu tällöin yhdellä suodatuskerralla $100 \% - 0,223\dots \% = 99,776\dots \% \approx 99,78 \%$.

Vastaus: 99,78 %

144B. Kun radioaktiivisen aineen määrä on vähentynyt 0,043 %, ainetta on jäljellä $100 \% - 0,043 \% = 99,957 \%$ alkuperäisestä.

Merkitään aineen alkuperäistä määrää kirjaimella a . Tiedetään, että $a > 0$.

Aineen määrä vuoden kuluttua on $0,99957a$.

Koska aineen määrällä on puoliintumisaika, aineen määrä vähenee eksponentiaalisesti noudattaen funktiota $f(x) = a \cdot q^x$, jossa q on muutoskerroin ja x aika vuosina.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä muutoskerroin q .

$$a \cdot q^1 = 0,99957a$$

Yhtälön ratkaisu on $q = 0,99957$.

Aineen määrä on puolittunut, kun $f(x) = 0,5a$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä puoliintumisaika a vuorokausina.

$$a \cdot 0,99957^x = 0,5a$$

Yhtälön ratkaisuksi saadaan sopivalla ohjelmalla $1611,623\dots$, joten puoliintumisaika on $1611,623 \text{ a} \approx 1600 \text{ a}$.

Vastaus: 1600 vuotta

4 LUKUJONOT JA SUMMAT

ALOITA PERUSTEISTA

145A. Määritetään lukujonon (a_n) kolme ensimmäistä jäsentä ja sadas jäsen a_{100} sijoittamalla jäsenten järjestysluvut yleisen jäsenen a_n lausekkeeseen.

a) Yleisen jäsenen lauseke on $a_n = 4n + 3$.

$$a_1 = 4 \cdot 1 + 3 = 7$$

$$a_2 = 4 \cdot 2 + 3 = 11$$

$$a_3 = 4 \cdot 3 + 3 = 15$$

$$a_{100} = 4 \cdot 100 + 3 = 403$$

Vastaus: $a_1 = 7$, $a_2 = 11$, $a_3 = 15$ ja $a_{100} = 403$

b) Yleisen jäsenen lauseke on $a_n = 4 \cdot 3^n$.

$$a_1 = 4 \cdot 3^1 = 12$$

$$a_2 = 4 \cdot 3^2 = 36$$

$$a_3 = 4 \cdot 3^3 = 108$$

$$a_{100} = 4 \cdot 3^{100} = 2,061 \dots \cdot 10^{48} \approx 2,06 \cdot 10^{48}$$

Vastaus: $a_1 = 12$, $a_2 = 36$, $a_3 = 108$ ja $a_{100} = 2,06 \cdot 10^{48}$

146A. a) Aritmeettisen lukujonon erotusluku d on peräkkäisten jäsen erotus, joten $d = 8 - 1 = 7$.

Vastaus: $d = 7$

b) Geometrisen lukujonon suhdeluku q on peräkkäisten jäsenten osamäärä, joten $q = \frac{12}{2} = 6$.

Vastaus: $q = 6$

147A. Merkintä $a_3 = 2$ tarkoittaa, että lukujonon kolmas jäsen on 2, joten merkintä A ja kuvaus IV kuuluvat yhteen.

Merkintä $a_2 = 3$ tarkoittaa, että lukujonon toinen jäsen on 3, joten merkintä B ja kuvaus I kuuluvat yhteen

Merkintä $a_n = 2$ tarkoittaa, että lukujonon jokainen jäsen on 2, joten merkintä C ja kuvaus V kuuluvat yhteen

Merkintä $d = 3$ tarkoittaa, että lukujonon erotusluku on 3, joten merkintä D ja kuvaus II kuuluvat yhteen.

Merkintä $a_n = n$ tarkoittaa, että lukujonon jäsen on sama kuin jäsenen järjestysluku, joten lukujono on 1, 2, 3, ... eli positiivisten kokonaislukujen jono. Merkintä E ja kuvaus III kuuluvat siis yhteen.

Vastaus: A: IV, B: I, C: V, D: II ja E: III

148A. Määritetään jäsenet a_2 , a_3 ja a_4 .

$$a_2 = 1,5 \cdot a_{2-1} = 1,5 \cdot a_1 = 1,5 \cdot 6 = 9$$

$$a_3 = 1,5 \cdot a_{3-1} = 1,5 \cdot a_2 = 1,5 \cdot 9 = 13,5$$

$$a_4 = 1,5 \cdot a_{4-1} = 1,5 \cdot a_3 = 1,5 \cdot 13,5 = 20,25$$

Vastaus: $a_2 = 9$, $a_3 = 13,5$ ja $a_4 = 20,25$

149A. a) Aritmeettisen lukujonon 1, 4, ... erotusluku on $d = 4 - 1 = 3$, joten sen yleinen termi on

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d = 1 + (n - 1) \cdot 3 = 1 + 3n - 3 = 3n - 2.$$

Lasketaan kymmenes termi sijoittamalla yleisen termin lausekkeeseen järjestysluku $n = 10$.

$$a_{10} = 3 \cdot 10 - 2 = 28$$

Kymmenes termi on siis $a_{10} = 28$.

Vastaus: $a_{10} = 28$

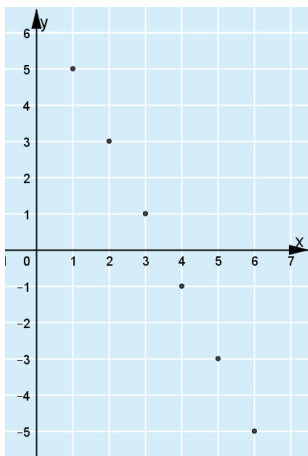
b) Geometrisen lukujonon $\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \dots$ suhdeluku on $q = \frac{4}{9} : \frac{2}{3} = \frac{\overset{2}{\cancel{4}}}{\underset{3}{\cancel{9}}} \cdot \frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{1}{\cancel{2}}} = \frac{2}{3}$,

joten kolmas termi on $a_3 = a_2 \cdot q = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$.

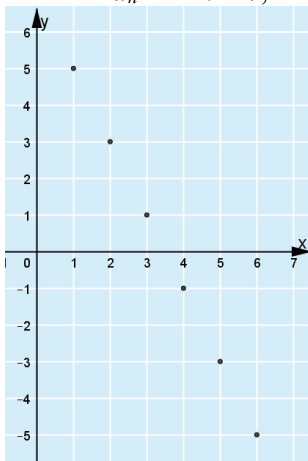
Vastaus: $a_3 = \frac{8}{27}$

- 150A. a)** Aritmeettisen lukujonon yleinen jäsen on
$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d = 5 + (n - 1) \cdot (-2) = 5 - 2n + 2 = -2n + 7.$$

Havainnollistetaan lukujonoa koordinaatistossa.



Vastaus: $a_n = -2n + 7$,



- b)** Muodostetaan yleisen jäsenen lausekkeen avulla yhtälö ja tutkitaan sen avulla, onko luku -18 lukujonon jäsen.

$$\begin{aligned} -18 &= -2n + 7 \\ 2n &= 25 & \| :2 \\ n &= 12,5 \end{aligned}$$

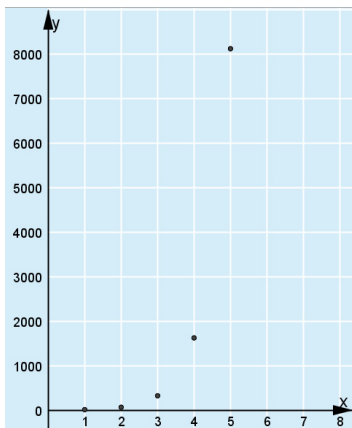
Koska $n = 12,5$ ei ole positiivinen kokonaisluku, luku -18 ei ole lukujonon jäsen.

Vastaus: ei ole

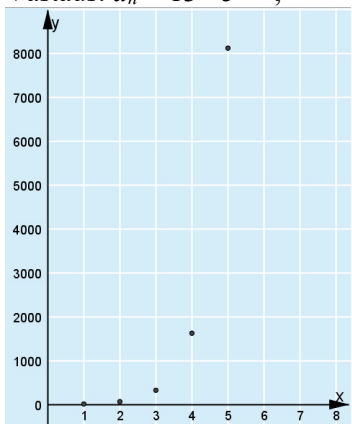
151B. a) Geometrisen lukujonon yleinen jäsen on

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 13 \cdot 5^{n-1}.$$

Havainnollistetaan lukujonoa koordinaatistossa.



Vastaus: $a_n = 13 \cdot 5^{n-1},$



- b)** Muodostetaan yleisen jäsenen lausekkeen avulla yhtälö ja tutkitaan sen avulla, kuinka mones lukujonon jäsen luku 8125 on.

$$8125 = 13 \cdot 5^{n-1} \quad || :13$$

$$5^{n-1} = 625$$

$$5^{n-1} = 5^4$$

Koska yhtälön vasemman ja oikean puolen potenssien kantaluvut ovat samat, on eksponenttienkin oltava samat.

$$n - 1 = 4$$

$$n = 5$$

Luku 8125 on lukujonon viides jäsen.

Vastaus: viides

- 152B. a)** Geometrisen lukujonon 3, 6, 12, 24, ... ensimmäinen jäsen on $a_1 = 3$ ja suhdeluku $q = \frac{6}{3} = 2$, joten sen analyttinen sääntö on
- $$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 3 \cdot 2^{n-1}.$$

Vastaus: $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

- b)** Geometrisen lukujonon 3, 6, 12, 24, ... ensimmäinen jäsen on $a_1 = 3$ ja a-kohdan perusteella suhdeluku $q = 2$. Lukujonon jäsen saadaan siis kertomalla edellinen jäsen luvulla 2, ja lukujonon rekursiivinen sääntö on $a_1 = 3$, $a_n = 2a_{n-1}$, $n = 2, 3, 4, \dots$

Vastaus: $a_1 = 3$, $a_n = 2a_{n-1}$, $n = 2, 3, 4, \dots$

- c) Määritetään lukujonon 20. jäsen taulukkolaskentaohjelmalla käyttäen b-kohdan sääntöä. Lasketaan ensin soluviittauksen avulla toinen jäsen.

	A
1	3
2	$=2 \cdot A_1$

Kopioidaan kaava alemmille riveille.

	A
1	3
2	6
3	12
4	24
5	48
⋮	⋮
⋮	⋮
18	393216
19	786432
20	1572864

Lukujonon 20. jäsen on $a_{20} = 1\,572\,864$.

Vastaus: $a_{20} = 1\,572\,864$

- 153B. a)** Aritmeettisen lukujonon 4, 12, ... erotusluku on $d = 12 - 4 = 8$. Lasketaan lukujonon kolmas jäsen soluviittausta käyttäen.

	A
1	4
2	12
3	=A2+8

Kopioidaan kaava riveille 1–10.

	A
1	4
2	12
3	20
4	28
5	36
6	44
7	52
8	60
9	68
10	76

Määritetään lukujonon kymmenen ensimmäisen jäsenen summa.

	A
1	4
2	12
3	20
4	28
5	36
6	44
7	52
8	60
9	68
10	76
11	=SUMMA(A1:A10)

	A
1	4
2	12
3	20
4	28
5	36
6	44
7	52
8	60
9	68
10	76
11	400

Lukujonon kymmenen ensimmäisen jäsenen summa on 400.

Vastaus: $S_{10} = 400$

- b) Geometrisen lukujonon 4, 12, ... suhdeluku on $q = \frac{12}{4} = 3$. Lasketaan lukujonon kolmas jäsen soluviittausta käyttäen.

	A
1	4
2	12
3	=A2*3

Kopioidaan kaava riveille 1–10.

	A
1	4
2	12
3	36
4	108
5	324
6	972
7	2916
8	8748
9	26244
10	78732

Määritetään lukujonon kymmenen ensimmäisen jäsenen summa.

	A
1	4
2	12
3	36
4	108
5	324
6	972
7	2916
8	8748
9	26244
10	78732
11	=SUMMA(A1:A10)

	A
1	4
2	12
3	36
4	108
5	324
6	972
7	2916
8	8748
9	26244
10	78732
11	118096

Lukujonon kymmenen ensimmäisen jäsenen summa on 118 096.

Vastaus: $S_{10} = 118\,096$

154A. a) Aritmeettisen summan kaavan $S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$ perusteella lausekkeessa

$12 \cdot \frac{2+24}{2}$ ensimmäinen yhteenlaskettava on 2, viimeinen yhteenlaskettava 24 ja yhteenlaskettavien määrä on 12. Summan arvo on $12 \cdot \frac{2+24}{2} = 12 \cdot \frac{26}{2} = 12 \cdot 13 = 156$.

Vastaus: 2, 24, 12, 156

b) Geometrisen summan kaavan $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ perusteella lausekkeessa

$\frac{5(1-2^8)}{1-2}$ ensimmäinen yhteenlaskettava on 5, suhdeluku 2 ja yhteenlaskettavien lukumäärä 8. Summan arvo on $\frac{5(1-2^8)}{1-2} = \frac{5(1-256)}{-1} = \frac{5(-255)}{-1} = 1275$.

Vastaus: 5, 2, 8, 1275

155A. a) Geometrisessa summassa

$2 + 6 + 18 + 54 + 162 + 486 + 1458 + 4374 + 13\,122$ ensimmäinen yhteenlaskettava on $a_1 = 2$ ja yhteenlaskettavien lukumäärä $n = 9$.

Vastaus: $a_1 = 2$, $n = 9$

b) Suhdeluku on $q = \frac{6}{2} = 3$.

Vastaus: $q = 3$

c) Lasketaan summa geometrisen summan kaavalla $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$, kun ensimmäinen yhteenlaskettava on $a_1 = 2$, suhdeluku $q = 3$ ja yhteenlaskettavien määrä $n = 9$.

$$S_9 = \frac{2(1-3^9)}{1-3} = 19\,682$$

Vastaus: $S = 19\,682$

- 156A. a)** Aritmeettisessa summassa $4 + 7 + \dots + 31$ ensimmäinen yhteenlaskettava on $a_1 = 4$ ja viimeinen $a_n = 31$.

Vastaus: $a_1 = 4$, $a_n = 31$

- b)** Yhteenlaskettavien lukumäärä on viimeisen yhteenlaskettavan $a_n = 31$ järjestysluku.

Sijoitetaan aritmeettisen lukujonon yleisen jäsenen kaavaan jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 4$, erotusluku $d = 7 - 4 = 3$ ja n :s jäsen $a_n = 31$.

Ratkaistaan yhtälöstä viimeisen yhteenlaskettavan järjestysluku n .

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n - 1) \cdot d \\ 31 &= 4 + (n - 1) \cdot 3 \\ 31 &= 4 + 3n - 3 \\ 3n &= 30 && \parallel : 3 \\ n &= 10 \end{aligned}$$

Vastaus: 10

- c)** Lasketaan summa aritmeettisen summan kaavalla $S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$, kun yhteenlaskettavien määrä on $n = 10$, ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = 4$ ja viimeinen yhteenlaskettava $a_{10} = 31$.

$$S_{10} = 10 \cdot \frac{4 + 31}{2} = 175$$

Vastaus: $S_{10} = 175$

VAHVISTA OSAAMISTA

157A. Aritmeettisessa lukujonossa peräkkäisten jäsenten erotus on vakio.

- a)** Lasketaan peräkkäisten jäsenten erotukset.

$$a_2 - a_1 = 9 - 1 = 8$$

$$a_3 - a_2 = 17 - 9 = 8$$

Koska peräkkäisten jäsenten erotukset ovat yhtä suuria, lukujono voi olla aritmeettinen.

Vastaus: voi

- b)** Lasketaan peräkkäisten jäsenten erotukset.

$$a_2 - a_1 = 14 - 9 = 5$$

$$a_3 - a_2 = 9 - 5 = 4 \neq 5$$

Koska peräkkäisten jäsenten erotukset eivät ole yhtä suuria, lukujono ei voi olla aritmeettinen.

Vastaus: ei voi

- c)** Lasketaan peräkkäisten jäsenten erotukset.

$$a_2 - a_1 = 4 - 4 = 0$$

$$a_3 - a_2 = 4 - 4 = 0$$

Koska peräkkäisten jäsenten erotukset ovat yhtä suuret, lukujono voi olla aritmeettinen.

Vastaus: voi

158A. Geometrisessä lukujonossa peräkkäisten jäsenten suhde on vakio.

a) Lasketaan peräkkäisten jäsenten suhteet.

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{-4}{1} = -4$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{16}{-4} = -4$$

Koska peräkkäisten jäsenten suhteet ovat yhtä suuria, lukujono voi olla geometrinen.

Vastaus: voi

b) Lasketaan peräkkäisten jäsenten suhteet.

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{1}{5} \neq \frac{1}{3}$$

Koska peräkkäisten jäsenten suhteet eivät ole yhtä suuria, lukujono ei voi olla geometrinen.

Vastaus: ei voi

c) Lasketaan peräkkäisten jäsenten suhteet.

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{\frac{3}{2}}{3} = \frac{3}{2} : 3 = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

Koska peräkkäisten jäsenten suhteet ovat yhtä suuria, lukujono voi olla geometrinen.

Vastaus: voi

159A. TAPA 1:

Lukujonon 8, 16, 32, 64, ... ensimmäinen jäsen on $a_1 = 8$ ja suhdeluku

$$q = \frac{16}{8} = 2, \text{ joten sen yleinen jäsen on}$$

$$a_n = 8 \cdot 2^{n-1} = 2^3 \cdot 2^{n-1} = 2^2 \cdot 2^1 \cdot 2^{n-1} = 4 \cdot 2^{1+n-1} = 4 \cdot 2^n.$$

Lukujono A ja sääntö II kuuluvat siis yhteen.

Lukujonon 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$, ... ensimmäinen jäsen on $a_1 = 4$ ja suhdeluku

$$q = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \text{ joten sen yleinen jäsen on } a_n = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Lukujono B ja sääntö VI kuuluvat siis yhteen.

Lukujonon 2, 4, 8, 16, ... ensimmäinen jäsen on $a_1 = 2$ ja suhdeluku

$$q = \frac{4}{2} = 2, \text{ joten sen yleinen jäsen on } a_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^{1+n-1} = 2^n.$$

Lukujono C ja sääntö I kuuluvat siis yhteen.

Lukujonon $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$ ensimmäinen jäsen on $a_1 = \frac{1}{2}$ ja suhdeluku

$$q = \frac{1}{4} : \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{1} = \frac{1}{2}, \text{ joten sen yleinen jäsen on}$$

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1+n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Lukujono D ja sääntö IV kuuluvat siis yhteen.

Lukujonon 4, 8, 16, 32, ... ensimmäinen jäsen on $a_1 = 4$ ja suhdeluku

$$q = \frac{8}{4} = 2, \text{ joten sen yleinen jäsen on}$$

$$a_n = 4 \cdot 2^{n-1}.$$

Lukujono E ja sääntö III kuuluvat siis yhteen.

Lukujonon $2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$ ensimmäinen jäsen on $a_1 = 2$ ja suhdeluku

$q = \frac{1}{2}$, joten sen yleinen jäsen on

$$a_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2 \cdot \frac{2}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Lukujono F ja sääntö V kuuluvat siis yhteen.

Vastaus: A: II, B: VI, C: I, D: IV, E: III ja F: V

TAPA 2:

Lasketaan lukujonojen I–VI ensimmäisiä jäseniä sääntöjen avulla ja yhdistetään säännöt jonoihin A–F.

Sääntö I

$$a_n = 2^n$$

$$a_1 = 2^1 = 2$$

$$a_2 = 2^2 = 4$$

$$a_3 = 2^3 = 8$$

$$a_4 = 2^4 = 16$$

Joten lukujono C ja sääntö I kuuluvat yhteen.

Sääntö II

$$a_n = 4 \cdot 2^n$$

$$a_1 = 4 \cdot 2^1 = 8$$

$$a_2 = 4 \cdot 2^2 = 16$$

$$a_3 = 4 \cdot 2^3 = 32$$

$$a_4 = 4 \cdot 2^4 = 64$$

Joten lukujono A ja sääntö II kuuluvat yhteen.

Sääntö III

$$a_n = 4 \cdot 2^{n-1}$$

$$a_1 = 4 \cdot 2^{1-1} = 4 \cdot 2^0 = 4$$

$$a_2 = 4 \cdot 2^{2-1} = 4 \cdot 2^1 = 8$$

$$a_3 = 4 \cdot 2^{3-1} = 4 \cdot 2^2 = 16$$

$$a_4 = 4 \cdot 2^{4-1} = 4 \cdot 2^3 = 32$$

Joten lukujono E ja sääntö III kuuluvat yhteen.

Sääntö IV

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$a_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$a_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

$$a_4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

Joten lukujono D ja sääntö IV kuuluvat yhteen.

Sääntö V

$$a_n = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$a_1 = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

$$a_2 = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4 \cdot \frac{1}{4} = 1$$

$$a_3 = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

$$a_4 = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 4 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$$

Joten lukujono F ja sääntö V kuuluvat yhteen.

Sääntö VI

$$a_n = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$a_1 = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{1-1} = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 4$$

$$a_2 = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2-1} = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 = 2$$

$$a_3 = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3-1} = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1$$

$$a_4 = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{4-1} = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2}$$

Joten lukujono B ja sääntö VI kuuluvat yhteen.

Vastaus: A: II, B: VI, C: I, D: IV, E: III ja F: V

160A. a) Sievennetään lukujonon lauseke

$$a_n = 8 + (n - 1) \cdot 5 = 8 + 5n - 5 = 3 + 5n.$$

Huomataan, että lukujonon jäsenen arvo kasvaa aina 5:llä, kun järjestysluku kasvaa 1:llä. Lukujonon ensimmäinen jäsen on

$$a_1 = 8 + (1 - 1) \cdot 5 = 8, \text{ joten lukujonon rekursiivinen sääntö on } a_1 = 8,$$

$$a_n = a_{n-1} + 5.$$

$$\text{Vastaus: } a_1 = 8, a_n = a_{n-1} + 5$$

- b)** Huomataan, että lukujonon $a_n = 9 \cdot 7^{n-1}$ jäsenen arvo tulee aina 7-kertaiseksi, kun järjestysluku kasvaa 1:llä. Ensimmäinen jäsen on $a_1 = 9 \cdot 7^{1-1} = 9 \cdot 1 = 9$, joten lukujonon rekursiivinen sääntö on siis $a_1 = 9, a_n = 7a_{n-1}.$

$$\text{Vastaus: } a_1 = 9, a_n = 7a_{n-1}$$

- 161A. a)** Aritmeettisen lukujonon yleinen jäsen on $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$, joten neljäs jäsen on $a_4 = a_1 + (4 - 1) \cdot d = a_1 + 3 \cdot (-4) = a_1 - 12$.

Toisaalta tehtävänannon tietojen mukaan neljäs jäsen on $a_4 = 13$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä ensimmäinen jäsen a_1 .

$$a_1 - 12 = 13$$

$$a_1 = 25$$

Lukujonon ensimmäinen jäsen on siis $a_1 = 25$.

Koska ensimmäinen jäsen on $a_1 = 25$ ja erotusluku $d = -4$, yleinen jäsen on $a_n = 25 + (n - 1) \cdot (-4) = 25 - 4n + 4 = -4n + 29$.

Vastaus: $a_1 = 25$, $a_n = -4n + 29$

- b)** Lasketaan lukujonon 80. jäsen sijoittamalla yleisen jäsenen lausekkeeseen järjestysluku $n = 80$.

$$a_{80} = -4 \cdot 80 + 29 = -291$$

Vastaus: $a_{80} = -291$

- c)** Muodostetaan yleisen jäsenen avulla yhtälö ja tutkitaan sen avulla, kuinka mones lukujonon jäsen luku -163 on.

$$-4n + 29 = -163$$

$$-4n = -192 \quad \| :(-4)$$

$$n = 48$$

Luku -163 on lukujonon 48. jäsen.

Vastaus: 48. jäsen

162B. TAPA 1:

Geometrisen lukujonon yleinen jäsen on $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ ja sen peräkkäisten jäsenten suhde on $q = 4$, joten sen kolmas jäsen on

$$a_3 = a_1 \cdot q^{3-1} = a_1 \cdot q^2 = a_1 \cdot 4^2 = 16a_1.$$

Toisaalta tehtävänannon mukaan kolmas jäsen on $a_3 = 96$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä lukujonon ensimmäinen jäsen a_1 .

$$\begin{aligned} 16a_1 &= 96 & \parallel :16 \\ a_1 &= 6 \end{aligned}$$

Lukujonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = 6$ ja sen peräkkäisten jäsenten suhde on $q = 4$, joten sen yleinen jäsen on $a_n = 6 \cdot 4^{n-1}$.

Muodostetaan yleisen jäsenen avulla yhtälö ja tutkitaan sen avulla, onko luku 98 304 lukujonon jäsen.

$$\begin{aligned} 6 \cdot 4^{n-1} &= 98\,304 & \parallel :6 \\ 4^{n-1} &= 16\,384 \\ n-1 &= \log_4 16\,384 \\ n-1 &= 7 \\ n &= 8 \end{aligned}$$

Luku 98 304 on lukujonon 8. jäsen.

Vastaus: on

TAPA 2:

Lasketaan taulukkolaskentaohjelmalla lukujonon jäseniä kolmannesta jäsenestä 96 eteenpäin kertomalla edellinen jäsen luvulla 4. Huomataan, että luku 98 304 lukujonon jäsen.

A6					
	A	B	C	D	
1	96				
2	384				
3	1536				
4	6144				
5	24576				
6	98304				
7					

Vastaus: on

163A. a) Kun aritmeettisen lukujonon viidenteen termiin $a_5 = -9$ lisätään erotusluku $13 - 5 = 8$ kertaa, saadaan 13. termi $a_{13} = -41$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä erotusluku d .

$$\begin{aligned} -9 + 8d &= -41 \\ 8d &= -32 & \parallel :8 \\ d &= -4 \end{aligned}$$

Lukujonon erotusluku on $d = -4$.

Kun erotusluku $d = -4$ lisätään ensimmäiseen termiin a_1 neljä kertaa, saadaan 5. termi $a_5 = -9$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä ensimmäinen termi a_1 .

$$\begin{aligned} a_1 + 4 \cdot (-4) &= -9 \\ a_1 - 16 &= -9 \\ a_1 &= 7 \end{aligned}$$

Lukujonon ensimmäinen termi on $a_1 = 7$.

Vastaus: $d = -4$, $a_1 = 7$

- b) Kun geometrisen lukujonon neljäs jäsen $a_4 = 48$ kerrotaan neljästi suhdeluvulla q , saadaan kahdeksas jäsen $a_8 = 768$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä suhdeluku q .

$$48q^4 = 768 \quad || : 48$$

$$q^4 = 16$$

$$q = \pm \sqrt[4]{16}$$

$$q = \pm 2$$

Suhdeluku on $q = 2$ tai $q = -2$.

Kun lukujonon ensimmäinen jäsen a_1 kerrotaan suhdeluvulla $q = \pm 2$ kolmesti, saadaan neljäs jäsen $a_4 = 48$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä ensimmäinen jäsen a_1 . Tutkitaan ensin tapaus $q = 2$.

$$a_1 \cdot 2^3 = 48$$

$$8a_1 = 48 \quad || : 8$$

$$a_1 = 6$$

Jos $q = 2$, niin ensimmäinen jäsen on $a_1 = 6$. Tällöin yleinen jäsen on $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 6 \cdot 2^{n-1}$.

Tutkitaan sitten tapaus $q = -2$.

$$a_1 \cdot (-2)^3 = 48$$

$$-8a_1 = 48 \quad || : (-8)$$

$$a_1 = -6$$

Jos $q = -2$, niin ensimmäinen jäsen on $a_1 = -6$. Tällöin yleinen jäsen on $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = -6 \cdot (-2)^{n-1}$.

Vastaus: $q = 2$ ja $a_n = 6 \cdot 2^{n-1}$ tai $q = -2$ ja $a_n = -6 \cdot (-2)^{n-1}$.

- 164A. a)** Lasketaan yrityksen liikevaihto syyskuussa, joka on vuoden 9. kuukausi.

$$L(9) = 25\,000 + 4000 \cdot 9 = 61\,000$$

Liikevaihto oli 61 000 €.

Vastaus: 61 000 euroa

- b)** Liikevaihdon lausekkeessa kuukauden järjestysluku kerrotaan luvulla 4000, joten liikevaihto kasvoi kuukaudessa 4000 €.

Vastaus: 4000 euroa

- c)** Tutkitaan yhtälön avulla, missä kuussa liikevaihto ylitti 50 000 €.

$$\begin{aligned} 25\,000 + 4000n &= 50\,000 \\ 4000n &= 25\,000 & \| : 4000 \\ n &= 6,25 \end{aligned}$$

Kuudentena kuukautena eli kesäkuussa liikevaihto oli vielä alle 50 000 €. Liikevaihto ylitti 50 000 € seitsemäntenä kuukautena eli heinäkuussa.

Vastaus: heinäkuussa

- 165A. a)** Lasketaan summa geometrisen summan kaavalla, kun ensimmäinen jäsen on $a_1 = 1$, suhdeluku $q = 4$ ja yhteenlaskettavien määrä $n = 15$.

$$S_{15} = \frac{1(1 - 4^{15})}{1 - 4} = 357\,913\,941$$

Vastaus: $S_{15} = 357\,913\,941$

- b)** Lukujonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = 4 \cdot (-3)^1 = -12$ ja toinen jäsen $a_2 = 4 \cdot (-3)^2 = 36$, joten suhdeluku on $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{36}{-12} = -3$.

Lasketaan summa geometrisen summan kaavalla, kun ensimmäinen jäsen on $a_1 = -12$, suhdeluku $q = -3$ ja yhteenlaskettavien määrä $n = 15$.

$$S_{15} = \frac{-12[1 - (-3)^{15}]}{1 - (-3)} = -43\,046\,724$$

Vastaus: $S_{15} = -43\,046\,724$

- c)** Kun geometrisen lukujonon ensimmäinen jäsen a_1 kerrotaan suhdeluvulla $q = 3$, saadaan toinen jäsen $a_2 = 27$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä ensimmäinen jäsen a_1 .

$$\begin{aligned} a_1 \cdot 3 &= 27 & \| :3 \\ a_1 &= 9 \end{aligned}$$

Lasketaan summa geometrisen summan kaavalla, kun ensimmäinen jäsen on $a_1 = 9$, suhdeluku $q = 3$ ja yhteenlaskettavien määrä $n = 15$.

$$S_{15} = \frac{9(1 - 3^{15})}{1 - 3} = 64\,570\,077$$

Vastaus: $S_{15} = 64\,570\,077$

- d) Kun geometrisen lukujonon neljäs jäsen $a_4 = 24$ kerrotaan suhdeluvulla q kolmesti, saadaan seitsemäs jäsen $a_7 = 192$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä suhdeluku q .

$$\begin{aligned} 24q^3 &= 192 & \| : 24 \\ q^3 &= 8 \\ q &= \sqrt[3]{8} \\ q &= 2 \end{aligned}$$

Suhdeluku on siis $q = 2$.

Kun lukujonon ensimmäinen jäsen a_1 kerrotaan kolmesti suhdeluvulla $q = 2$, saadaan neljäs jäsen $a_4 = 24$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä ensimmäinen jäsen a_1 .

$$\begin{aligned} a_1 \cdot 2^3 &= 24 \\ 8a_1 &= 24 & \| : 8 \\ a_1 &= 3 \end{aligned}$$

Ensimmäinen jäsen on siis $a_1 = 3$.

Lasketaan summa geometrisen summan kaavalla, kun ensimmäinen jäsen on $a_1 = 3$, suhdeluku $q = 2$ ja yhteenlaskettavien määrä $n = 15$.

$$S_{15} = \frac{3(1 - 2^{15})}{1 - 2} = 98\,301$$

Vastaus: $S_{15} = 98\,301$

- 166A. a)** Lukujonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = 5$ ja erotusluku $d = 6$, joten 30. jäsen on $a_{30} = 5 + (30 - 1) \cdot 6 = 179$.

Lasketaan 30 ensimmäisen jäsenen summa sijoittamalla aritmeettisen summan kaavaan yhteenlaskettavien lukumäärä $n = 30$, ensimmäinen jäsen $a_1 = 5$ ja 30. jäsen $a_{30} = 179$.

$$S_{30} = 30 \cdot \frac{5 + 179}{2} = 2760$$

Vastaus: $S_{30} = 2760$

- b)** Lukujonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = 3200$ ja erotusluku on $d = 3100 - 3200 = -100$, joten 30. jäsen on $a_{30} = 3200 + (30 - 1) \cdot (-100) = 300$.

Lasketaan 30 ensimmäisen jäsenen summa sijoittamalla aritmeettisen summan kaavaan yhteenlaskettavien lukumäärä $n = 30$, ensimmäinen jäsen $a_1 = 3200$ ja 30. jäsen $a_{30} = 300$.

$$S_{30} = 30 \cdot \frac{3200 + 300}{2} = 52\,500$$

Vastaus: $S_{30} = 52\,500$

- c)** Lukujonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = -2$ ja erotusluku on $d = 3$. Lukujonon 30. jäsen on $a_{30} = -2 + (30 - 1) \cdot 3 = 85$.

Lasketaan 30 ensimmäisen jäsenen summa sijoittamalla aritmeettisen summan kaavaan yhteenlaskettavien lukumäärä $n = 30$, ensimmäinen jäsen $a_1 = -2$ ja 30. jäsen $a_{30} = 85$.

$$S_{30} = 30 \cdot \frac{-2 + 85}{2} = 1245$$

Vastaus: $S_{30} = 1245$

167A. a) Aritmeettisen jonon erotusluku on $d = a_2 - a_1 = 7 - \frac{3}{2} = \frac{11}{2}$. Lukujonon

$$\text{yleinen jäsen on siis } a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = \frac{3}{2} + (n-1) \cdot \frac{11}{2}.$$

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä, kuinka monta jäsentä lukujonossa on.

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} + (n-1) \cdot \frac{11}{2} &= 117 & \parallel \cdot 2 \\ 3 + 11(n-1) &= 234 \\ 3 + 11n - 11 &= 234 \\ 11n - 8 &= 234 \\ 11n &= 242 & \parallel : 11 \\ n &= 22 \end{aligned}$$

Yhteenlaskettavien määrä on siis $n = 22$.

Lasketaan summa sijoittamalla aritmeettisen summan kaavaan

yhteenlaskettavien määrä $n = 22$, ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = \frac{3}{2}$ ja viimeinen yhteenlaskettava $a_{22} = 117$.

$$S_{22} = 22 \cdot \frac{\frac{3}{2} + 117}{2} = \frac{2607}{2}$$

Kysytty summa on $\frac{2607}{2}$.

Vastaus: $S = \frac{2607}{2}$

- b) Sijoitetaan aritmeettisen summan kaavaan $S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$ termien summa $S_n = 961$, jonon ensimmäinen termi $a_1 = 1$ ja n :s termi $a_n = 61$. Ratkaistaan saadusta yhtälöstä yhteenlaskettavien määrä n .

$$961 = n \cdot \frac{1 + 61}{2}$$

$$961 = n \cdot \frac{62}{2}$$

$$31n = 961 \quad \parallel : 31$$

$$n = 31$$

Luku 61 on siis jonon 31. termi.

Sijoitetaan aritmeettisen jonon yleisen termin kaavaan

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$ termin järjestysluku $n = 31$, ensimmäinen termi

$a_1 = 1$ ja 31. termi $a_{31} = 61$. Ratkaistaan saadusta yhtälöstä erotusluku d .

$$61 = 1 + (31 - 1)d$$

$$61 = 1 + 30d$$

$$30d = 60 \quad \parallel : 30$$

$$d = 2$$

Jonon yleinen termi on siis $a_2 = a_1 + d = 1 + 2 = 3$, joten jonon toinen termi on $a_2 = 3$.

Vastaus: $a_2 = 3$

168B. Koska ponnahduksen korkeus on 0,8-kertainen edelliseen ponnahdukseen verrattuna, ponnahdusten korkeudet muodostavat geometrisen lukujonon, jonka suhdeluku on $q = 0,8$.

Kun pallo osuu kymmenennen kerran lattiaan, se on pudonnut alaspäin 10 kertaa ja pompannut lattiasta 9 kertaa.

Pallo kulkee alaspäin pudotessaan metreinä yhteensä matkan $1 + 0,8 + 0,8^2 + \dots 0,8^9$.

Lasketaan summa sijoittamalla geometrisen summan kaavaan ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = 1$, yhteenlaskettavien määrä $n = 10$ ja suhdeluku $q = 0,8$.

$$S_{10} = \frac{1(1 - 0,8^{10})}{1 - 0,8} = 4,463\dots$$

Pallo kulkee ylöspäin noustessaan metreinä yhteensä matkan $0,8 + 0,8^2 + \dots 0,8^9$.

Lasketaan summa sijoittamalla geometrisen summan kaavaan ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = 0,8$, yhteenlaskettavien määrä $n = 9$ ja suhdeluku $q = 0,8$.

$$S_9 = \frac{0,8(1 - 0,8^9)}{1 - 0,8} = 3,463\dots$$

Pallo kulkee yhteensä $4,463\dots \text{ m} + 3,463\dots \text{ m} = 7,926\dots \text{ m} \approx 8 \text{ m}$.

Vastaus: 8 metriä

169A. Lukujen 1000 ja 2000 välissä olevien 13:lla jaolliset luvut muodostavat aritmeettisen lukujonon, koska peräkkäisten jäsenten erotus on luku 13. Pienin luvulla 13 jaollinen, lukujen 1000 ja 2000 välissä oleva luku on $1001 = 77 \cdot 13$ ja suurin $1989 = 153 \cdot 13$. Yhteenlaskettavien lukumäärä on viimeisen yhteenlaskettavan $a_n = 1989$ järjestysluku.

Sijoitetaan aritmeettisen lukujonon yleisen jäsenen kaavaan jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 1001$, erotusluku $d = 13$ ja n :s jäsen $a_n = 1989$. Ratkaistaan yhtälöstä viimeisen yhteenlaskettavan järjestysluku n .

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n - 1) \cdot d \\ 1989 &= 1001 + (n - 1) \cdot 13 \\ 1989 &= 1001 + 13n - 13 \\ 13n &= 1001 && ||: 13 \\ n &= 77 \end{aligned}$$

Lasketaan summa sijoittamalla aritmeettisen summan kaavaan yhteenlaskettavien määrä $n = 77$, ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = 1001$ ja viimeinen $a_{77} = 1989$.

$$S_{77} = 77 \cdot \frac{1001 + 1989}{2} = 115\,115$$

Kysytty summa on 115 115.

Vastaus: 115 115

170B. Rahaa siirtyy tilille euroina $100 + 100 \cdot 3 + 100 \cdot 3^2 + \dots$

Joka vaiheessa tilille siirtyvien rahojen määrä kolminkertaistuu, joten siirretyt rahamäärät muodostavat geometrisen lukujonon, jonka suhdeluku on $q = 3$.

TAPA 1:

Muodostetaan n :ssä ensimmäisessä vaiheessa siirrettyjen rahamäärien summa sijoittamalla geometrisen summan kaavaan ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = 100$ ja suhdeluku $q = 3$.

$$S_n = \frac{100(1-3^n)}{1-3} = \frac{100(1-3^n)}{-2} = -50(1-3^n).$$

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan sen avulla, kuinka monen vaiheen jälkeen tilillä oleva rahasumma ylittää 54 100 000 000 euroa.

$$\begin{aligned} -50(1-3^n) &= 54\,100\,000\,000 && \parallel :(-50) \\ 1-3^n &= -1\,082\,000\,000 \\ -3^n &= -1\,082\,000\,001 && \parallel \cdot (-1) \\ 3^n &= 1\,082\,000\,001 \\ n &= \log_3 1\,082\,000\,001 \\ n &= 18,934\dots \end{aligned}$$

Tilillä oleva rahasumma ylittää 54 100 000 000 euroa 19. vaiheen jälkeen.

Vastaus: 19 vaiheen jälkeen

171B. a) TAPA 1:

Lukujonon erotusluku on $d = a_2 - a_1 = \frac{12}{5} - 2 = 2\frac{2}{5} - 2 = \frac{2}{5}$, joten

lukujonon yleinen termi on $a_n = 2 + (n-1) \cdot \frac{2}{5} = \frac{10}{5} + \frac{2}{5}n - \frac{2}{5} = \frac{2}{5}n + \frac{8}{5}$.

Tällöin jonon sadas termi on $a_{100} = \frac{2}{5} \cdot 100 + \frac{8}{5} = 40 + 1\frac{3}{5} = 41\frac{3}{5} = \frac{208}{5}$.

Lasketaan sadan ensimmäisen termin summa sijoittamalla aritmeettisen summan kaavaan yhteenlaskettavien määrä $n = 100$, ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = 2$ ja viimeinen yhteenlaskettava

$$a_{100} = \frac{208}{5}.$$

$$S_{100} = 100 \cdot \frac{2 + \frac{208}{5}}{2} = 2180$$

Jonon sadan ensimmäisen termin summa on 2180.

Vastaus: $S_{100} = 2180$

TAPA 2:

Lasketaan taulukkolaskentaohjelmalla lukujonon 100 ensimmäistä jäsentä ja niiden summa.

Havaitaan, että summa on 2180.

A2		:			f_x	=A1+2/5
	A	B	C	D	E	
1	2					
2	2,4					
3	2,8					
4	3,2					

A101	:		☒	☐	f_x	=SUMMA(A1:A100)
	A	B	C	D	E	F
99	41,2					
100	41,6					
101	2180					
102						

Vastaus: $S_{100} = 2180$

b) TAPA 1:

Lukujonon suhdeluku on $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{12}{5} : 2 = \frac{6}{5}$.

Lasketaan sadan ensimmäisen termin summa sijoittamalla geometrisen summan kaavaan ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = 2$, suhdeluku

$q = \frac{6}{5}$ ja yhteenlaskettavien määrä $n = 100$.

$$S_{100} = \frac{2 \left[1 - \left(\frac{6}{5} \right)^{100} \right]}{1 - \frac{6}{5}} = 828\,179\,735,220\dots$$

Jonon sadan ensimmäisen termin summa on
 $828\,179\,735,220\dots \approx 828\,000\,000$.

Vastaus: $S_{100} = 828\,000\,000$

TAPA 2:

Lasketaan taulukkolaskentaohjelmalla lukujonon 100 ensimmäistä jäsentä ja niiden summa.

Havaitaan, että summa on $828\,179\,735,2\dots \approx 828\,000\,000$.

A2					
	A	B	C	D	E
1	2				
2	2,4				
3	2,88				
4	3,456				

A101					
	A	B	C	D	E
97	79878447,65				
98	95854137,18				
99	115024964,6				
100	138029957,5				
101	828179735,2				

Vastaus: $S_{100} = 828\,000\,000$

- 172A. a)** Muodostetaan lukujonon (a_n) analyyttinen sääntö, kun $a_1 = 4$ ja $a_{n+1} = a_n - 2,5$. Vähentämällä lukujonon jäsenestä $2,5$ saadaan lukujonon seuraava jäsen, joten lukujono on aritmeettinen ja sen erotusluku on $d = -2,5$.

Koska lisäksi lukujonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = 4$, niin lukujonon analyyttinen sääntö on

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1) \cdot d \\ &= 4 + (n-1) \cdot (-2,5) \\ &= 4 - 2,5n + 2,5 \\ &= -2,5n + 6,5. \end{aligned}$$

Vastaus: $a_n = -2,5n + 6,5$

- b)** Muodostetaan lukujonon (a_n) analyyttinen sääntö, kun $a_2 = 10$ ja $a_{n+1} = 2a_n$. Kertomalla lukujonon jäsen luvulla 2 saadaan lukujonon seuraava jäsen, joten lukujono on geometrinen ja sen suhdeluku on $q = 2$. $10 = a_2 = a_{1+1} = 2a_1$, joten muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä lukujonon ensimmäinen jäsen a_1 .

$$\begin{aligned} 2a_1 &= 10 & \| :2 \\ a_1 &= 5 \end{aligned}$$

Koska lukujonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = 5$, niin lukujonon analyyttinen sääntö on

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 5 \cdot 2^{n-1}.$$

Vastaus: $a_n = 5 \cdot 2^{n-1}$

- c)** Muodostetaan lukujonon (a_n) analyyttinen sääntö, kun $a_1 = -2$ ja $a_{n+1} = a_n$. Koska lukujonon jäsen on yhtä suuri kuin seuraava jäsen, lukujono on vakiojono $-2, -2, -2, \dots$. Lukujonon analyyttinen sääntö on siis $a_n = -2$.

Vastaus: $a_n = -2$

173B. Koska lukujonon seuraava termi on 5 % edellistä termiä suurempi, lukujono on geometrinen ja sen suhdeluku on $q = 1,05$. Koska lisäksi ensimmäinen termi on 2, n :s termi on $a_n = a_1 q^{n-1} = 2 \cdot 1,05^{n-1}$.

TAPA 1:

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan sen avulla, kuinka moni jonon termi on pienempi kuin 1000 miljoonaa.

$$2 \cdot 1,05^{n-1} = 1\,000\,000\,000 \quad \| : 2$$

$$1,05^{n-1} = 500\,000\,000$$

$$n-1 = \log_{1,05} 500\,000\,000$$

$$n-1 = 410,535\dots$$

$$n = 411,535\dots$$

Jonon 411 ensimmäistä termiä ovat pienempiä kuin 1000 miljoonaa. Lasketaan näiden termien summa geometrisen summan kaavalla sijoittamalla siihen ensimmäinen termi $a_1 = 2$, suhdeluku $q = 1,05$ ja yhteenlaskettavien määrä $n = 411$.

$$S_{411} = \frac{2(1 - 1,05^{411})}{1 - 1,05} = 20\,457\,940\,361,2\dots \approx 20\,500\,000\,000$$

Kysytty summa on kolmen numeron tarkkuudella 20 500 000 000.

Vastaus: 411 termiä, $S_{411} = 20\,500\,000\,000$

TAPA 2:

Lasketaan taulukkolaskentaohjelmalla lukujonon termejä kertomalla aina edellinen termi luvulla 1,05, kunnes löydetään termi, joka ylittää luvun 1000 miljoonaa.

Havaitaan, että ensimmäinen termi, joka ylittää luvun 1000 miljoonaa, on 412.termi. Siis 411 termiä ovat pienempiä kuin 1000 miljoonaa.

A412				
	A	B	C	D
409	883616905,4			
410	927797750,6			
411	974187638,2			
412	1022897020			

Lasketaan näiden summa.

Havaitaan, että summa on 20 457 940 361,2... $\approx$ 20 500 000 000.

A412				
	A	B	C	D
409	883616905,4			
410	927797750,6			
411	974187638,2			
412	20457940361			

Kysytty summa on kolmen numeron tarkkuudella 20 500 000 000.

Vastaus: 411 termiä, 20 500 000 000

174B. Tutkitaan puun määrän kehitystä taulukkolaskentaohjelmalla.

Lasketaan ensin soluviittauksen avulla puun määrä vuoden kuluttua. Puun määrä alkuperäiseen verrattuna on $100\% + 17\% = 117\%$. Kasvun jälkeen puun määrä vähenee 16 m^3 .

A11						=A10*1,17-16
	A	B	C			
1	100					
2	101					
3	102,17					
4	103,5389					
5	105,140513					
6	107,0144002					
7	109,2068482					
8	111,7720124					
9	114,7732546					
10	118,2847078					
11	122,3931082					
12						

Kymmenen vuoden kuluttua puuta on $122,393\dots \approx 122$.

Vastaus: 122 m^3

- 175B. a)** Alkuperäisen janan pituus $l_1 = 1$. Seuraavassa kuviossa janan keskimäinen kolmannes korvataan kahdella janalla, joista kummankin pituus on kolmasosa alkuperäisen janan pituudesta.

Tällöin käyrän kokonaispituus kasvaa yhdellä kolmasosalla ja on $\frac{4}{3}$

alkuperäisestä. Toisessa kuviossa käyrän pituus on $l_2 = \frac{4}{3}$.

Kolmannessa kuviossa jokaisen janan keskimäinen kolmannes korvataan kahdella janalla, joista kummankin pituus on kolmasosa edellisen kuvionjanan pituudesta. Kolmannen kuvionkokonaispituus on $\frac{4}{3}$ -kertainen edelliseen kuvioon verrattuna.

Näin jatkamalla käyrien pituudet muodostavat geometrisen lukujonon

$$l_n = 1 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}, \text{ missä } n \text{ on kuvion järjestysnumero.}$$

Vastaus: $\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$

- b)** Kirjoitetaan soluun A1 luku 1. Soluun A2 kirjoitetaan ”=4/3·A1” ja kopioidaan solua A2 alaspäin.

	A
1	1
2	1.33
3	1.78
4	2.37
5	3.16
6	4.21
7	5.62
8	7.49
9	9.99
10	13.32
11	17.76
12	23.68
13	31.57
14	42.09
15	56.12
16	74.83
17	99.77
18	133.03

Pituus on yli 100-kertainen alkuperäiseen nähden 18. kuviossa.

Vastaus: 18. kuviossa

SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

176A. a) Summamerkintä $\sum_{n=0}^{22} (3 + 4n)$ tarkoittaa summaa, jossa lasketaan yhteen lukujonon $a_n = 3 + 4n$ jäseniä.

Ensimmäinen yhteenlaskettava on $a_0 = 3 + 4 \cdot 0 = 3$.

Toinen yhteenlaskettava on $a_1 = 3 + 4 \cdot 1 = 7$.

Kolmas yhteenlaskettava on $a_2 = 3 + 4 \cdot 2 = 11$.

...

Viimeinen yhteenlaskettava $a_{22} = 3 + 4 \cdot 22 = 91$.

Huomataan, että seuraava yhteenlaskettava saadaan, kun edelliseen lisätään luku 4, joten kyseessä on aritmeettinen summa.

Koska summan laskeminen alkaa indeksistä $n = 0$ ja päättyy indeksiin 22, yhteenlaskettavien lukumäärä on $22 + 1 = 23$.

Lasketaan summa sijoittamalla aritmeettisen summan kaavaan yhteenlaskettavien määrä $n = 23$, ensimmäinen yhteenlaskettava $a_0 = 3$ ja viimeinen yhteenlaskettava $a_{22} = 91$.

$$S_{23} = 23 \cdot \frac{3+91}{2} = 1081$$

Kysytty summa on 1081.

Vastaus: 1081

b) Summassa $\sum_{n=2}^{15} (-3)^n$ lasketaan yhteen lukujonon $a_n = (-3)^n$ jäseniä.

Ensimmäinen yhteenlaskettava on $a_2 = (-3)^2 = 9$.

Toinen yhteenlaskettava on $a_3 = (-3)^3 = -27$.

Kolmas yhteenlaskettava on $a_4 = (-3)^4 = 81$.

...

Viimeinen yhteenlaskettava $a_{15} = (-3)^{15} = -14348907$.

Huomataan, että seuraava yhteenlaskettava saadaan, kun edellinen kerrotaan luvulla -3 , joten kyseessä on geometrinen summa ja suhdeluku on $q = -3$.

Koska summan laskeminen alkaa indeksistä $n = 2$ ja päättyy indeksiin 15, yhteenlaskettavien lukumäärä on $n = 15 - 1 = 14$.

Lasketaan summa sijoittamalla geometrisen summan kaavaan ensimmäinen yhteenlaskettava $a_2 = 9$, suhdeluku $q = -3$ ja yhteenlaskettavien määrä $n = 14$.

$$S_{14} = \frac{9[1 - (-3)^{14}]}{1 - (-3)} = -10\,761\,678$$

Kysytty summa on $-10\,761\,678$.

Vastaus: $-10\,761\,678$

- 177B. a)** Laskemalla taulukossa auton arvo edelliseen vuoden arvoon verrattuna huomataan, että auton arvo näyttää alenevan 20 % vuodessa.

C3    =B3/B2

	A	B	C	
1	aika	arvo		
2	0	40000		
3	1	32000	0,8	
4	2	25600	0,8	
5	3	20480	0,8	
6	4	16384	0,8	
7	5	13107,2	0,8	
8	6	10485,8	0,800003052	
9	7	8388,61	0,799997139	
10				

Vastaus: Auton arvo näyttää alenevan 20 % vuodessa.

- b)** Koska auton arvo alenee joka vuosi 20 %:lla, on auton arvo $100\% - 20\% = 80\%$ edellisen vuoden arvosta eli 0,80-kertainen edellisen vuoden arvoon nähden. Auton arvon vuonna n noudattaa siis geometrista lukujonoa. Lukujonon ensimmäinen jäsen on $a_0 = 40\,000$ ja suhdeluku on $q = 0,8$. Auton arvon vuonna n on $a_n = 40\,000 \cdot 0,8^{n-1}$.

Vastaus: $a_n = 40\,000 \cdot 0,8^{n-1}$

c) TAPA 1

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan sen avulla, kuinka monen vuoden jälkeen auton ostamisesta sen arvo on kaavan mukaan laskenut alle 2000 euron.

$$\begin{aligned}
 40000 \cdot 0,8^{n-1} &= 2000 & || :40000 \\
 0,8^{n-1} &= 0,05 \\
 n-1 &= \log_{0,8} 0,05 \\
 n &= 13,425...
 \end{aligned}$$

Auton arvo on kaavan mukaan laskenut alle 2000 euron 14 vuoden jälkeen auton ostamisesta.

Vastaus: 14 vuoden jälkeen

TAPA 2:

Käyttämällä b-kohdan kaavaa ja taulukkolaskenta ohjelmaa havaitaan, että auton arvo on kaavan mukaan laskenut alle 2000 euron 14 vuoden jälkeen auton ostamisesta.

A15				=	=A14*0,8
	A	B	C		
1	40000				
2	32000				
3	25600				
4	20480				
5	16384				
6	13107,2				
7	10485,76				
8	8388,608				
9	6710,8864				
10	5368,70912				
11	4294,967296				
12	3435,973837				
13	2748,779069				
14	2199,023256				
15	1759,218604				
16					

Vastaus: 14 vuoden jälkeen

178A. Geometrisen lukujonon peräkkäisten jäsenten suhde on vakio.

- a) Lukujonon ensimmäiset jäsenet ovat 3, x ja 12. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä x .

$$\frac{x}{3} = \frac{12}{x}$$

$$x^2 = 3 \cdot 12$$

$$x^2 = 36$$

$$x = \pm\sqrt{36}$$

$$x = \pm 6$$

Kun $x = 6$, niin jonon suhdeluku on $q = \frac{6}{3} = 2$.

Kun $x = -6$, niin jonon suhdeluku on $q = \frac{-6}{3} = -2$.

Vastaus: $x = 6$ ja $q = 2$, tai $x = -6$ ja $q = -2$

- b) Lukujonon ensimmäiset jäsenet ovat 4, $x + 2$ ja 36. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä x .

$$\begin{aligned}\frac{x+2}{4} &= \frac{36}{x+2} \\ (x+2)(x+2) &= 4 \cdot 36 \\ x^2 + 2x + 2x + 4 &= 144 \\ x^2 + 4x - 140 &= 0 \\ x &= \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-140)}}{2 \cdot 1} \\ x &= \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 560}}{2} \\ x &= \frac{-4 \pm \sqrt{576}}{2} \\ x &= \frac{-4 \pm 24}{2} \\ x &= \frac{-4 + 24}{2} \quad \text{tai} \quad x = \frac{-4 - 24}{2} \\ x &= 10 \quad \quad \quad x = -14\end{aligned}$$

Kun $x = 10$, lukujonon toinen jäsen on $x + 2 = 10 + 2 = 12$, joten $q = \frac{12}{4} = 3$.

Kun $x = -14$, lukujonon toinen jäsen on $x + 2 = -14 + 2 = -12$, joten $q = \frac{-12}{4} = -3$.

Vastaus: $x = 10$ ja $q = 3$, tai $x = -14$ ja $q = -3$

- c) Lukujonon ensimmäiset jäsenet ovat 8, x ja $x - 2$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä x .

$$\frac{x}{8} = \frac{x-2}{x}$$

$$x^2 = 8(x-2)$$

$$x^2 = 8x - 16$$

$$x^2 - 8x + 16 = 0$$

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{0}}{2}$$

$$x = \frac{8 \pm 0}{2}$$

$$x = 4$$

Koska $x = 4$, niin $q = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

Vastaus: $x = 4$ ja $q = \frac{1}{2}$

179B. a) Kun aritmeettisen lukujonon ensimmäiseen termiin $a_1 = 4$ lisätään erotusluku d neljästi, saadaan viides termi $a_5 = 1$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä erotusluku d .

$$\begin{aligned} 4 + 4d &= 1 \\ 4d &= -3 \quad \parallel :4 \\ d &= -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

Lukujonon yleinen termi on

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)d \\ &= 4 + (n-1) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \\ &= 4 - \frac{3}{4}n + \frac{3}{4} \\ &= -\frac{3}{4}n + \frac{19}{4}. \end{aligned}$$

Lasketaan lukujonon toinen, kolmas, neljäs ja kymmenes termi ohjelman avulla.

$$a_2 = \frac{13}{4}$$

$$a_3 = \frac{5}{2}$$

$$a_4 = \frac{7}{4}$$

$$a_{10} = -\frac{11}{4}$$

$$\text{Vastaus: } a_2 = \frac{13}{4}, a_3 = \frac{5}{2}, a_4 = \frac{7}{4} \text{ ja } a_{10} = -\frac{11}{4}$$

- b) Kun geometrisen lukujonon ensimmäinen termi $a_1 = 4$ kerrotaan suhdeluvulla q neljästi, saadaan viides termi $a_5 = 1$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä suhdeluku q ohjelman avulla.

1 ○	Ratkaise($4 \cdot q^4 = 1, q$) $\rightarrow \left\{ q = -\frac{\sqrt{2}}{2}, q = \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$
---	--

Suhdeluku on siis $q = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ tai $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Jos $q = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ niin lukujonon yleinen termi on

$$a_n = a_1 q^{n-1} = 4 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{n-1}.$$

Lasketaan ohjelman avulla lukujonon toinen, kolmas, neljäs ja kymmenes termi tässä tapauksessa.

$$a_2 = 4 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{2-1} = -2\sqrt{2}$$

$$a_3 = 4 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{3-1} = 2$$

$$a_4 = 4 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{4-1} = -\sqrt{2}$$

$$a_{10} = 4 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{10-1} = -\sqrt{2} \cdot \frac{1}{8}$$

Jos $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$, niin lukujonon yleinen termi on

$$a_n = a_1 q^{n-1} = 4 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{n-1}.$$

Lasketaan lukujonon toinen, kolmas, neljäs ja kymmenes termi tässä tapauksessa.

$$a_2 = 4 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{2-1} = 2\sqrt{2}$$

$$a_3 = 4 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{3-1} = 2$$

$$a_4 = 4 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{4-1} = \sqrt{2}$$

$$a_{10} = 4 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{10-1} = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{8}$$

$$\text{Vastaus: } q = -\frac{\sqrt{2}}{2}, a_2 = -2\sqrt{2}, a_3 = 2, a_4 = -\sqrt{2}, a_{10} = -\sqrt{2} \cdot \frac{1}{8}$$

$$\text{tai } q = \frac{\sqrt{2}}{2}, a_2 = 2\sqrt{2}, a_3 = 2, a_4 = \sqrt{2}, a_{10} = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{8}$$

- 180A. a)** Lukujonon jäsen, jonka järjestysluku on $n - 1$, on $a_{n-1} = k(n - 1) + b = kn - k + b$.

$$\text{Vastaus: } a_{n-1} = kn - k + b$$

- b)** Lasketaan lukujonon (a_n) peräkkäisten jäsenten erotus.

$$a_n - a_{n-1} = (kn + b) - (kn - k + b) = kn + b - kn + k - b = k$$

Koska peräkkäisten jäsenten erotus on vakio, lukujono (a_n) on aritmeettinen.

Vastaus: –

181B. a) Geometrisen lukujonon suhdeluku on $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{2x}{x} = 2$. Lasketaan

lukujonon kahdenkymmenen ensimmäisen jäsenen summa sijoittamalla geometrisen summan kaavaan ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = x$, suhdeluku $q = 2$ ja yhteenlaskettavien määrä $n = 20$.

$$S_{20} = \frac{x(1-2^{20})}{1-2} = 1\,048\,575x$$

Vastaus: $S_{20} = 1\,048\,575x$

b) Geometrisen lukujonon suhdeluku on $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{x}{1} = x$. Lasketaan

lukujonon kahdenkymmenen ensimmäisen jäsenen summa sijoittamalla geometrisen summan kaavaan ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = 1$, suhdeluku $q = x$ ja yhteenlaskettavien määrä $n = 20$.

$$S_{20} = \frac{1(1-x^{20})}{1-x} = \frac{1-x^{20}}{1-x}$$

Vastaus: $S_{20} = \frac{1-x^{20}}{1-x}$

182A. a) Lasketaan ensin lukujonojen (a_n) ja (b_n) toinen ja kolmas jäsen.

$$a_2 = 5a_1 = 5 \cdot 4 = 20$$

$$a_3 = 5a_2 = 5 \cdot 20 = 100$$

$$b_2 = 2b_1 = 2 \cdot 3 = 6$$

$$b_3 = 2b_2 = 2 \cdot 6 = 12$$

Lasketaan lukujonon (c_n) kolme ensimmäistä jäsentä.

$$c_1 = a_1b_1 = 4 \cdot 3 = 12$$

$$c_2 = a_2b_2 = 20 \cdot 6 = 120$$

$$c_3 = a_3b_3 = 100 \cdot 12 = 1200$$

Vastaus: $c_1 = 12$, $c_2 = 120$ ja $c_3 = 1200$

- b)** Kertomalla lukujonon (a_n) jäsen luvulla 5 saadaan lukujonon (a_n) seuraava jäsen, joten lukujono (a_n) on geometrinen ja sen suhdeluku $q = 5$. Lukujonon (a_n) analyyttinen sääntö on siis
- $$a_n = a_1q^{n-1} = 4 \cdot 5^{n-1}.$$

Kertomalla lukujonon (b_n) jäsen luvulla 2 saadaan lukujonon (b_n) seuraava jäsen, joten lukujono (b_n) on geometrinen ja sen suhdeluku $q = 2$. Lukujonon (b_n) analyyttinen sääntö on siis

$$b_n = b_1q^{n-1} = 3 \cdot 2^{n-1}.$$

Vastaus: $a_n = 4 \cdot 5^{n-1}$ ja $b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

- c)** Lukujonon (c_n) analyyttinen sääntö on
- $$c_n = a_nb_n = 4 \cdot 5^{n-1} \cdot 3 \cdot 2^{n-1} = 4 \cdot 3 \cdot (5 \cdot 2)^{n-1} = 12 \cdot 10^{n-1}.$$

Vastaus: $c_n = 12 \cdot 10^{n-1}$.

183B. Aritmeettisen lukujonon yleinen jäsen on $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$.
Muodostetaan lausekkeet lukujonon ensimmäisille jäsenille.

$$a_2 = a_1 + (2 - 1) \cdot d = a_1 + d$$

$$a_3 = a_1 + (3 - 1) \cdot d = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_1 + (4 - 1) \cdot d = a_1 + 3d$$

$$a_5 = a_1 + (5 - 1) \cdot d = a_1 + 4d$$

$$a_6 = a_1 + (6 - 1) \cdot d = a_1 + 5d$$

Kolmen ensimmäisen jäsenen summa on -9 , joten
 $a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) = -9$.

Kolmen seuraavan jäsenen summa on 9 , joten
 $(a_1 + 3d) + (a_1 + 4d) + (a_1 + 5d) = 9$.

Muodostetaan yhtälöpari ja ratkaistaan siitä erotusluku d .

$$\begin{array}{l} \begin{cases} a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) = -9 \\ (a_1 + 3d) + (a_1 + 4d) + (a_1 + 5d) = 9 \end{cases} \\ \begin{cases} 3a_1 + 3d = -9 \\ 3a_1 + 12d = 9 \end{cases} \quad \parallel \cdot (-1) \\ + \begin{cases} -3a_1 - 3d = 9 \\ 3a_1 + 12d = 9 \end{cases} \\ \hline 9d = 18 \quad \parallel : 9 \\ d = 2 \end{array}$$

Sijoitetaan $d = 2$ yhtälöön $3a_1 + 12d = 9$.

$$\begin{array}{l} 3a_1 + 12 \cdot 2 = 9 \\ 3a_1 + 24 = 9 \\ 3a_1 = -15 \quad \parallel : 3 \\ a_1 = -5 \end{array}$$

Yhtälöpari voidaan ratkaista myös ohjelman avulla.

Merkitään ohjelmaan $a_1 = a$.

1	$a+(a+d)+(a+2d)=-9$ $\rightarrow 3a + 3d = -9$
2	$(a+3d)+(a+4d)+(a+5d)=9$ $\rightarrow 3a + 12d = 9$
3	$\{ \$1, \$2 \}$
☐	Ratkaise: $\{ \{ a = -5, d = 2 \} \}$

Aritmeettisen lukujonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = -5$ ja erotusluku $d = 2$, joten sen yleinen jäsen on

$$a_n = -5 + (n - 1) \cdot 2 = -5 + 2n - 2 = 2n - 7.$$

Vastaus: $a_n = 2n - 7$

184A. Luvut $1, 2, 3, \dots, m$ muodostavat aritmeettisen lukujonon, jonka erotusluku on $2 - 1 = 1$. Muodostetaan lauseke summalle $1 + 2 + 3 + \dots + m$ sijoittamalla aritmeettisen summan kaavaan yhteenlaskettavien määrä m , ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = 1$ ja viimeinen yhteenlaskettava m .

$$S_m = m \cdot \frac{1+m}{2}$$

Muodostetaan edellisen lausekkeen avulla epäyhtälö ja ratkaistaan sen avulla suurin luonnollinen luku m , jolle $1 + 2 + 3 + \dots + m \leq 462\,241$.

$$m \cdot \frac{1+m}{2} \leq 462\,241 \quad \| \cdot 2$$

$$m(1+m) \leq 924\,482$$

$$m + m^2 \leq 924\,482$$

$$m^2 + m - 924\,482 \leq 0$$

Ratkaistaan vastaava yhtälö.

$$m^2 + m - 924\,482 = 0$$

$$m = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-924\,482)}}{2 \cdot 1}$$

$$m = \frac{-1 \pm \sqrt{3\,697\,929}}{2}$$

$$m = \frac{-1 \pm 1923}{2}$$

$$m = \frac{-1 - 1923}{2} = -962 \quad \text{tai} \quad m = \frac{-1 + 1923}{2} = 961$$

Negatiivinen luku ei tule kysymykseen, koska m on luonnollinen luku. Kun $m = 961$, summa on $462\,241$. Summa kasvaa, kun siihen lisätään positiivisia yhteenlaskettavia, joten 961 on suurin sellainen luonnollinen luku m , että $1 + 2 + 3 + \dots + m \leq 462\,241$.

Vastaus: $m = 961$

- 185B. a)** Ensimmäisen kuution särmän pituus on 1 m.
 Toisen kuution särmän pituus on $0,5 \cdot 1 \text{ m} = 0,5 \text{ m}$.
 Kolmannen kuution särmän pituus on $0,5 \cdot 0,5 \cdot 1 \text{ m} = 0,25 \text{ m}$.
 n :nnen kuution särmän pituus on $0,5^{n-1} \cdot 1 \text{ m}$.

Vastaus: 1 m, 0,5 m, 0,25 m ja $0,5^{n-1} \cdot 1 \text{ m}$

- b)** Kuutioiden pituudet muodostavat geometrisen jonon, jonka suhdeluku on $q = 0,5$.

TAPA 1:

Lasketaan 10 ensimmäisen kuution muodostaman pinon korkeus sijoittamalla geometrisen summan kaavaan ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = 1$, suhdeluku $q = 0,5$ ja yhteenlaskettavien määrä $n = 10$.

$$S_{10} = \frac{1(1 - 0,5^{10})}{1 - 0,5} = 1,9980\dots$$

Pinon korkeus on $1,9980\dots \text{ m} \approx 1,998 \text{ m}$.

Vastaus: 1,998 m

TAPA 2:

Lasketaan 10 ensimmäisen kuution muodostaman pinon korkeus taulukkolaskentaohjelman avulla.

Havaitaan, että pinon korkeus on $1,9980\dots \text{ m} \approx 1,998 \text{ m}$.

A10				=	A9*0,5
	A	B	C		
1	1				
2	0,5				
3	0,25				
4	0,125				
5	0,0625				
6	0,03125				
7	0,015625				
8	0,0078125				
9	0,00390625				
10	0,001953125				
11	1,998046875	summa			
12					

Vastaus: 1,998 m

c) TAPA 1:

Lasketaan vastaavalla tavalla niiden pinojen korkeudet, joissa on 11, 12, 13 ja 14 kuutiota.

$$S_{11} = \frac{1(1 - 0,5^{11})}{1 - 0,5} = 1,99902... \approx 1,9990$$

$$S_{12} = \frac{1(1 - 0,5^{12})}{1 - 0,5} = 1,99951... \approx 1,9995$$

$$S_{13} = \frac{1(1 - 0,5^{13})}{1 - 0,5} = 1,99975... \approx 1,9998$$

$$S_{14} = \frac{1(1 - 0,5^{14})}{1 - 0,5} = 1,99987... \approx 1,9999$$

Pinon korkeuden arvot ovat 1,9990 m; 1,9995 m; 1,9998 m ja 1,9999 m.

Kun kuutioiden lukumäärä kasvaa rajatta, pinon korkeus näyttää lähestyvän lukua 2 m.

Vastaus: 1,9990 m; 1,9995 m; 1,9998 m ja 1,9999 m; lukua 2 m

TAPA 2:

Lasketaan taulukkolaskentaohjelman niiden pinojen korkeudet, joissa on 11, 12, 13 ja 14 kuutiota.

B14						=B13+A14
	A	B	C			
1	1	1				
2	0,5	1,5				
3	0,25	1,75				
4	0,125	1,875				
5	0,0625	1,9375				
6	0,03125	1,96875				
7	0,015625	1,984375				
8	0,0078125	1,9921875				
9	0,00390625	1,99609375				
10	0,001953125	1,998046875				
11	0,000976563	1,999023438				
12	0,000488281	1,999511719				
13	0,000244141	1,999755859				
14	0,00012207	1,99987793				
15						

Pinon korkeuden arvot ovat 1,9990 m; 1,9995 m; 1,9998 m ja 1,9999 m.

Kun kuutioiden lukumäärä kasvaa rajatta, pinon korkeus näyttää lähestyvän lukua 2 m.

Vastaus: 1,9990 m; 1,9995 m; 1,9998 m ja 1,9999 m; lukua 2 m

186B. Lasketaan luvun $\sqrt[3]{9}$ likiarvoja taulukkolaskentaohjelmalla eli jonon $x_{n+1} = \frac{1}{3} \left(2x_n + \frac{9}{(x_n)^2} \right)$ jäseniä.

Jonon ensimmäinen jäsen on tehtävänannon mukaan $x_1 = 1$.
Lasketaan toinen jäsen soluviittauksia käyttäen.

	A
1	1
2	=1 / 3 (2A1 + 9 / (A1)^2)

Kopioidaan kaava alemmille riveille.

	A
1	1
2	3.6666666666666666
3	2.667584940312213
4	2.199974562694804
5	2.086498753023521
6	2.080103525509573
7	2.080083823238522
8	2.080083823051904

Indeksin arvolla $n = 7$ pitää ensimmäisen kerran paikkansa, että lukujen $x_n = x_7$ ja $x_{n+1} = x_8$ seitsemän ensimmäistä desimaalia ovat samat.

Vastaus: $n = 7$

- 187B. a)** Kun lääkkeestä häviää 35 %, jäljelle jää $100 \% - 35 \% = 65 \%$.
Tutkitaan taulukkolaskentaohjelmalla, kuinka paljon lääkettä on elimistössä toisen annoksen ottamisen jälkeen.

	A
1	60
2	$=0.65*A1+60$

Kopioidaan kaava alemmille riveille.

	A
1	60
2	99
3	124.35
4	140.8275
5	151.53788

Toisen lääkkeenottokerran lääkettä on elimistössä 99 mg ja viidennen kerran jälkeen 151,537... mg ≈ 150 mg.

Vastaus: 99 mg ja 150 mg

b) Taulukoidaan lääkkeen määriä välittömästi lääkkeen oton jälkeen.

Lääkkeenottokerta	Lääkkeen määrä (mg)
1	60
2	$0,65 \cdot 60 + 60$
3	$0,65(0,65 \cdot 60 + 60) + 60$ $= 0,65^2 \cdot 60 + 0,65 \cdot 60 + 60$
4	$0,65 \cdot (0,65^2 \cdot 60 + 0,65 \cdot 60 + 60) + 60$ $= 0,65^3 \cdot 60 + 0,65^2 \cdot 60 + 0,65 \cdot 60 + 60$
...	...
n	$0,65^{n-1} \cdot 60 + 0,65^{n-2} \cdot 60 + \dots + 0,65 \cdot 60 + 60$

Taulukon viimeisellä rivillä on välittömästi n :nnen lääkkeenottokerran jälkeen elimistössä olevan lääkkeen määrä ja se saadaan laskettua geometrisena summana, jossa $a_1 = 60$ ja $q = 0,65$.

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{60 \cdot (1 - 0,65^n)}{1 - 0,65} \text{ mg} = \frac{60 \cdot (1 - 0,65^n)}{0,35} \text{ mg}$$

Vastaus: $\frac{60 \cdot (1 - 0,65^n)}{0,35} \text{ mg}$

c) Lasketaan taulukkolaskentaohjelmalla lisää lukujonon jäseniä.

6	158.49962
7	163.02475
8	165.96609
9	167.87796
10	169.12067
⋮	⋮
39	171.42856
40	171.42857
41	171.42857
42	171.42857
43	171.42857

Lääkkeen määrä näyttää lähestyvän arvoa 171,428... mg $\approx$ 171 mg.

Vastaus: 171 mg

188A. Yhtälöissä $2^2 = 1 + 3$ ja $3^2 = 1 + 3 + 5$ oikealla puolella on vasemman puolen kantaluvun verran peräkkäisiä parittomia luonnollisia lukuja, joten vastaava yhtälö luvulle 4 on $4^2 = 1 + 3 + 5 + 7$.

Parittomat luvut ovat muotoa $a_n = 2n - 1$, jossa $n = 1, 2, 3, \dots$

Todistetaan, että $n^2 = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$.

Summassa $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$ on peräkkäisiä parittomia luonnollisia lukuja, joten summa on aritmeettinen ja sen erotusluku on $d = 2$. Lasketaan summa sijoittamalla aritmeettisen summan kaavaan yhteenlaskettavien määrä n , ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = 1$ ja viimeinen yhteenlaskettava $a_n = 2n - 1$.

$$S_n = n \frac{1 + (2n - 1)}{2} = n \frac{1 + 2n - 1}{2} = n \frac{2n}{2} = n \cdot n = n^2, \text{ mikä oli osoitettava.}$$

Vastaus: $4^2 = 1 + 3 + 5 + 7$

- 189B. a)** Esitetään lukujonon rekursiivinen sääntö $f_1 = f_2 = 1, f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$, $n = 1, 2, \dots$ sanallisesti: Lukujonon kaksi ensimmäistä jäsentä ovat molemmat 1, ja lukujonon jäsen on kahden edellisen jäsenen summa.

Lasketaan taulukkolaskentaohjelmalla soluviittausten avulla lukujonon kolmas jäsen.

	A
1	1
2	1
3	=A1+A2

Kopioidaan kaava alemmille riveille.

	A
1	1
2	1
3	2
4	3
5	5
6	8
7	13
8	21
9	34
10	55

Kysytyt jäsenet ovat $f_3 = 2, f_4 = 3, f_5 = 5, f_6 = 8, f_7 = 13, f_8 = 21, f_9 = 34$ ja $f_{10} = 55$.

Vastaus: $f_3 = 2, f_4 = 3, f_5 = 5, f_6 = 8, f_7 = 13, f_8 = 21, f_9 = 34$ ja $f_{10} = 55$

b) TAPA 1:

Kun $n = 1$, niin kaava saa muodon

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^1 - (-\varphi)^{-1}) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi - \frac{1}{-\varphi}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi + \frac{1}{\varphi}\right).$$

Sijoitetaan tähän kaavaan $\varphi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ ja sievennetään.

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) + \frac{1}{\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} + \frac{2}{1 + \sqrt{5}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{(1 + \sqrt{5})(1 + \sqrt{5})}{2(1 + \sqrt{5})} + \frac{4}{2(1 + \sqrt{5})} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{1 + \sqrt{5} + \sqrt{5} + 5}{2(1 + \sqrt{5})} + \frac{4}{2(1 + \sqrt{5})} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{6 + 2\sqrt{5}}{2(1 + \sqrt{5})} + \frac{4}{2(1 + \sqrt{5})} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{10 + 2\sqrt{5}}{2(1 + \sqrt{5})} \\ &= \frac{10 + 2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}(1 + \sqrt{5})} \\ &= \frac{10 + 2\sqrt{5}}{2\sqrt{5} + 2\sqrt{5}^2} \\ &= \frac{2\sqrt{5} + 10}{2\sqrt{5} + 2 \cdot 5} \\ &= \frac{2\sqrt{5} + 10}{2\sqrt{5} + 10} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Koska $f_1 = 1$, kaava pitää paikkansa.

Kun $n = 2$, kaava saa muodon $f_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^2 - (-\varphi)^{-2})$.

Sijoitetaan tähän kaavaan $\varphi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ ja sievennetään.

$$\begin{aligned}
 f_2 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left[\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \right]^2 - \left[-\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \right]^{-2} \right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1}{2} \right)^2 (1 + \sqrt{5})^2 - \frac{1}{\left[-\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \right]^2} \right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{1}{4}(1 + \sqrt{5})(1 + \sqrt{5}) - \frac{1}{\left(-\frac{1}{2} \right)^2 (1 + \sqrt{5})^2} \right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{1}{4}(1 + \sqrt{5} + \sqrt{5} + 5) - \frac{1}{\frac{1}{4}(1 + \sqrt{5} + \sqrt{5} + 5)} \right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{6 + 2\sqrt{5}}{4} - \frac{1}{\frac{1}{4}(6 + 2\sqrt{5})} \right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{36 + 12\sqrt{5} + 12\sqrt{5} + 20}{4(6 + 2\sqrt{5})} - \frac{16}{4(6 + 2\sqrt{5})} \right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{36 + 24\sqrt{5} + 20 - 16}{4(6 + 2\sqrt{5})} \\
 &= \frac{40 + 24\sqrt{5}}{4\sqrt{5}(6 + 2\sqrt{5})} \\
 &= \frac{40 + 24\sqrt{5}}{24\sqrt{5} + 8\sqrt{5}^2} \\
 &= \frac{24\sqrt{5} + 40}{24\sqrt{5} + 40} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Koska $f_2 = 1$, kaava pitää paikkansa.

TAPA 2:

Kun $n = 1$, niin kaava saa muodon

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^1 - (-\varphi)^{-1}) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi - \frac{1}{-\varphi}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi + \frac{1}{\varphi}\right).$$

Sijoitetaan tähän kaavaan $\varphi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ ja sievennetään.

Sievennetään lauseke sopivalla ohjelmalla muotoon 1.

Koska $f_1 = 1$, kaava pitää paikkansa.

Kun $n = 2$, kaava saa muodon $f_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^2 - (-\varphi)^{-2})$.

Sijoitetaan tähän kaavaan $\varphi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ ja sievennetään.

Sievennetään lauseke $\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left[\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})\right]^2 - \left[-\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})\right]^{-2}\right]$ sopivalla ohjelmalla muotoon 1.

Koska $f_2 = 1$, kaava pitää paikkansa.

Vastaus: –

c) TAPA 1:

Ratkaistaan yhtälö $x^2 - x - 1 = 0$ toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla.

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$$

Yhtälön ratkaisut ovat siis $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) = \varphi$ ja $\frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$.

Sievennetään lauseke $-\frac{1}{\varphi}$.

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\varphi} &= -\frac{2}{1-\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2} \\ &= -\frac{2}{1-\sqrt{5}} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \\ &= -\frac{2(1+\sqrt{5})}{(1-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})} \\ &= -\frac{2+2\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}-\sqrt{5}-5} \\ &= -\frac{2+2\sqrt{5}}{-4} \\ &= \frac{2+2\sqrt{5}}{4} \\ &= \frac{2}{4} + \frac{2\sqrt{5}}{4} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1\sqrt{5}}{2} \\ &= \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}), \end{aligned}$$

jonka jo todettiin olevan yhtälön $x^2 - x - 1 = 0$ toinen ratkaisu.

TAPA 2:

Ratkaistaan yhtälö $x^2 - x - 1 = 0$ toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla.

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$$

Yhtälön ratkaisut ovat siis $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) = \varphi$ ja $\frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$.

Sievennetään lauseke $-\frac{1}{\varphi}$.

Sievennetään lauseke $-\frac{1}{\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})}$ sopivalla ohjelmalla muotoon

$\frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$, jonka jo todettiin olevan yhtälön $x^2 - x - 1 = 0$ toinen ratkaisu.

Vastaus: –

5 TASOGEOMETRIA

ALOITA PERUSTEISTA

190A. Muunnetaan 23,5 m eri yksiköihin.

$$23,5 \text{ m} = 235 \text{ dm} = 2350 \text{ cm} = 23\,500 \text{ mm ja}$$

$$23,5 \text{ m} = 0,0235 \text{ km}$$

Vaihtoehtoista oikeita ovat I ja IV.

Vastaus: I ja IV

191A. a) $12 \text{ mm} = 1,2 \text{ cm}$

b) $1,4 \text{ km} = 1400 \text{ m}$

c) $56 \text{ m} = 0,056 \text{ km}$

d) $28 \text{ m}^2 = 280\,000 \text{ cm}^2$

e) $345 \text{ ha} = 3,45 \text{ km}^2$

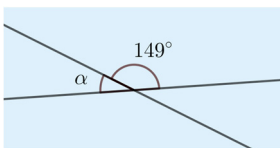
f) $2,0 \text{ a} = 200 \text{ m}^2$

g) $180 \text{ g} = 0,180 \text{ kg}$

h) $3,1 \text{ mg} = 0,0031 \text{ g}$

i) $72,6 \text{ kg} = 72\,600 \text{ g}$

192A. a) Kulma α ja 149° :n kulma ovat vieruskulmia.



Vieruskulmien summa on 180° , joten

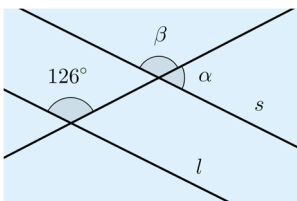
$$\alpha + 149^\circ = 180$$

$$\alpha = 180^\circ - 149^\circ$$

$$\alpha = 31^\circ.$$

Vastaus: $\alpha = 31^\circ$

b) Merkitään kulman α vieruskulmaa kirjaimella β .



Kulma β on samankohtainen 126° :n kulman kanssa. Koska suorat s ja l ovat yhdensuuntaiset, niin $\beta = 126^\circ$.

Kulmat α ja β ovat vieruskulmia. Vieruskulmien summa on 180° , joten

$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

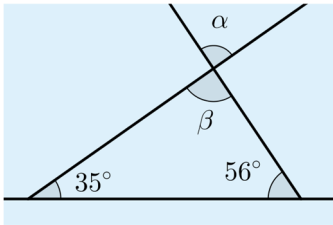
$$\alpha + 126^\circ = 180^\circ$$

$$\alpha = 180^\circ - 126^\circ$$

$$\alpha = 54^\circ.$$

Vastaus: $\alpha = 54^\circ$

- c) Kolmiossa on 35° :n ja 56° :n kulmat. Merkitään kolmion kolmatta kulmaa kirjaimella β .



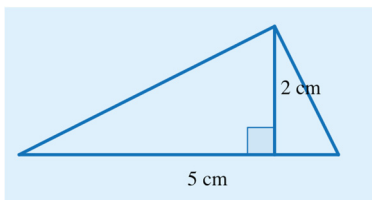
Kolmion kulmien summa on 180° , joten

$$\begin{aligned} 35^\circ + 56^\circ + \beta &= 180^\circ \\ \beta &= 180^\circ - 35^\circ - 56^\circ \\ \beta &= 89^\circ. \end{aligned}$$

Kulma β on kulman α ristikulma. Koska ristikulmat ovat yhtä suuret, kulma $\alpha = \beta = 89^\circ$.

Vastaus: $\alpha = 89^\circ$

- 193A. a)** Kuvio on kolmio, jonka kanta on $a = 5 \text{ cm}$ ja korkeus $h = 2 \text{ cm}$.

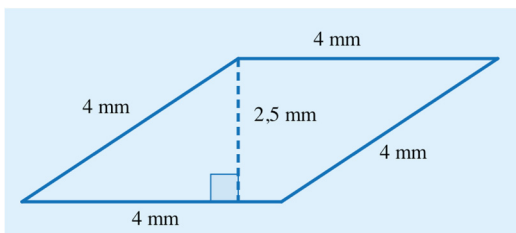


Kolmion pinta-ala on

$$A = \frac{ah}{2} = \frac{5 \text{ cm} \cdot 2 \text{ cm}}{2} = 5 \text{ cm}^2.$$

Vastaus: 5 cm^2

- b)** Kuvio on neljäkäs, jonka sivun pituus on $a = 4 \text{ mm}$ ja korkeus $h = 2,5 \text{ mm}$.

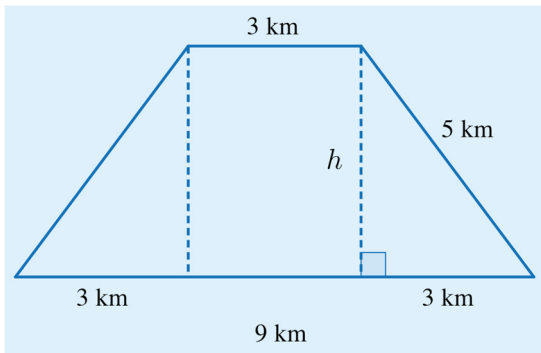


Neljäkkään pinta-ala on

$$A = a \cdot h = 4 \text{ mm} \cdot 2,5 \text{ mm} = 10 \text{ mm}^2.$$

Vastaus: 10 mm^2

- c) Kuvio on puolisuunnikas, jonka yhdensuuntaisten sivujen pituudet ovat $a = 3 \text{ km}$ ja $b = 9 \text{ km}$. Piirretään kuvioon korkeusjana ja merkitään sitä kirjaimella h .



Korkeusjana muodostaa päätyyn suorakulmaisen kolmion. Määritetään korkeus h Pythagoraan lauseen avulla.

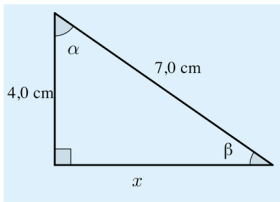
$$\begin{aligned} h^2 + 3^2 &= 5^2 \\ h^2 &= 25 - 9 \\ h^2 &= 16 \\ h &= (\pm) 4 \end{aligned}$$

Puolisuunnikkaan pinta-ala on

$$A = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{3 \text{ km} + 9 \text{ km}}{2} \cdot 4 \text{ km} = 24 \text{ km}^2.$$

Vastaus: 24 km^2

194A. a) Määritetään kateetin pituus x Pythagoraan lauseen avulla.



$$4^2 + x^2 = 7^2$$

$$x^2 = 49 - 16$$

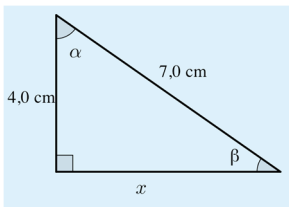
$$x^2 = 33$$

$$x = (\pm) 5,744\dots$$

$$x \approx 5,7$$

Vastaus: $x \approx 5,7$ cm

b) Määritetään kulman α suuruus kosinin avulla.



$$\cos \alpha = \frac{4}{7}$$

$$\alpha = 55,150\dots^\circ$$

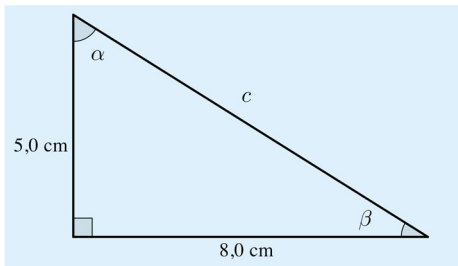
$$\alpha \approx 55^\circ$$

Kolmion kulmien summa on 180° , joten

$$\beta = 180^\circ - 90^\circ - 55,150\dots^\circ = 34,849\dots^\circ \approx 35^\circ.$$

Vastaus: $\alpha \approx 55^\circ$ ja $\beta \approx 35^\circ$

195A. Merkitään hypotenuusan pituutta kirjaimella c .



Määritetään hypotenuusan pituus Pythagoraan lauseen avulla.

$$\begin{aligned} 5,0^2 + 8,0^2 &= c^2 \\ c^2 &= 25 + 64 \\ c^2 &= 89 \\ c &= (\pm) 9,433... \\ c &\approx 9,4 \end{aligned}$$

Hypotenuusan pituus on noin 9,4 cm.

Määritetään kulman α suuruus tangentin avulla.

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{8,0}{5,0} \\ \alpha &= 57,994...^\circ \\ \alpha &\approx 58^\circ \end{aligned}$$

Kolmion kulmien summa on 180° , joten

$$\beta = 180^\circ - 90^\circ - 57,994...^\circ = 32,005...^\circ \approx 32^\circ.$$

Vastaus: 9,4 cm, 32° ja 58°

196A. a) Ympyrän säde on $r = 3,0$ cm.

Kehän pituus on

$$p = 2\pi r = 2\pi \cdot 3,0 \text{ cm} = 18,849\dots \text{ cm} \approx 19 \text{ cm}.$$

Pinta-ala on

$$A = \pi r^2 = \pi \cdot (3,0 \text{ cm})^2 = 28,274\dots \text{ cm}^2 \approx 28 \text{ cm}^2.$$

Vastaus: 19 cm ja 28 cm²

b) Kehän pituus on

$$p = \pi d = \pi \cdot 4,6 \text{ cm} = 14,451\dots \text{ cm} \approx 14 \text{ cm}.$$

Ympyrän halkaisija on $d = 4,6$ cm, joten ympyrän säde on

$$r = \frac{4,6 \text{ cm}}{2} = 2,3 \text{ cm}.$$

Pinta-ala on

$$A = \pi r^2 = \pi \cdot (2,3 \text{ cm})^2 = 16,619\dots \text{ cm}^2 \approx 17 \text{ cm}^2.$$

Vastaus: 14 cm ja 17 cm²

197A. a) Sijoitetaan keskuskulman suuruus $\alpha = 72^\circ$ ja ympyrän säde 3,0 cm kaaren pituuden laskukaavaan.

$$b = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot r = \frac{72^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 3,0 = 3,769\dots \approx 3,8$$

Sektorin kaaren pituus on noin 3,8 cm.

Vastaus: $b \approx 3,8$ cm

- b) Sijoitetaan keskuskulman suuruus $\alpha = 72^\circ$ ja ympyrän säde 3,0 cm sektorin pinta-alan laskukaavaan.

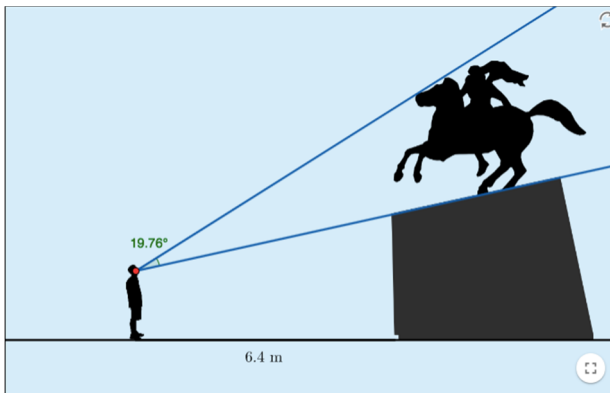
$$A = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2 = \frac{72^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 3,0^2 = 5,654... \approx 5,7$$

Sektorin pinta-ala on noin 5,7 cm².

Vastaus: $A \approx 5,7 \text{ cm}^2$

- 198B.** Katselukulma on paras mahdollinen, kun henkilö näkee koko patsaan, eikä mitään muuta.

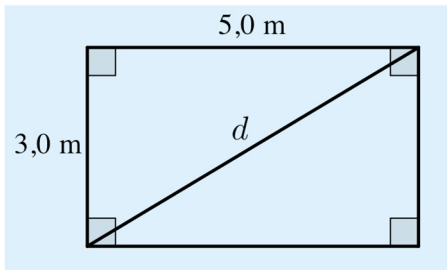
Määritetään katseluetaisyys appletin avulla.



Kohta, jossa patsasta katsovan kannattaa seistä, on 6,4 m patsaan edessä.

Vastaus: 6,4 m patsaan etupuolella

199A. Lasketaan suorakulmion lävistäjän d pituus Pythagoraan lauseen avulla.



$$\begin{aligned} 3,0^2 + 5,0^2 &= d^2 \\ d^2 &= 9 + 25 \\ d^2 &= 34 \\ d &= (\pm) 5,830... \\ d &\approx 5,8 \end{aligned}$$

Lävistäjän pituus on noin 5,8 m.

Vastaus: 5,8 m

200A. a) Merkitään janan päätepisteitä $(x_1, y_1) = (-2, 1)$ ja $(x_2, y_2) = (4, -1)$.

Lasketaan janan pituus.

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{(4 - (-2))^2 + (-1 - 1)^2} \\ &= \sqrt{(4 + 2)^2 + (-2)^2} \\ &= \sqrt{6^2 + (-2)^2} \\ &= \sqrt{36 + 4} \\ &= \sqrt{40} \\ &= 6,324... \\ &\approx 6,32 \end{aligned}$$

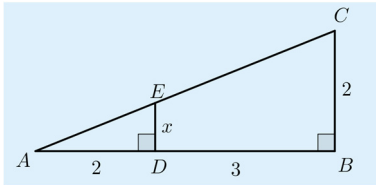
Vastaus: $\sqrt{40} \approx 6,32$

- b)** Lasketaan janan keskipiste M sijoittamalla $(x_1, y_1) = (-2, 1)$ ja $(x_2, y_2) = (4, -1)$ janan keskipisteen kaavaan.

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) = \left(\frac{-2 + 4}{2}, \frac{1 - 1}{2} \right) = \left(\frac{2}{2}, \frac{0}{2} \right) = (1, 0)$$

Vastaus: $(1, 0)$

201A. a)



Kolmioissa ABC ja ADE on 90° :n kulmat ja kulma C on yhteinen, joten kk-lauseen perusteella kolmiot ovat yhdenmuotoiset. Yhdenmuotoisten kuvioiden vastinpituuksien suhde on vakio.

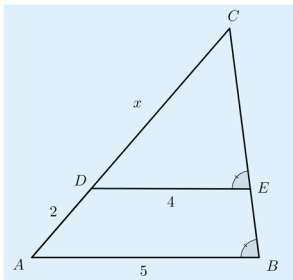
Kolmion ADE korkeutta x vastaa kolmion ABC korkeus 2 ja kantaa 2 vastaa kanta $2 + 3 = 5$.

Muodostetaan vastinosien pituuksien avulla verranto ja ratkaistaan siitä pituus x .

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} &= \frac{2}{5} \\ 5x &= 4 \quad \| :5 \\ x &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

Vastaus: $x = \frac{4}{5}$

b)



Kolmioissa ABC ja DEC on yhtä suuret kulmat B ja E ja lisäksi kulma C on yhteinen kulma. Kolmiot ABC ja DEC ovat kk-lauseen mukaan yhdenmuotoiset. Yhdenmuotoisten kuvioiden vastinpituuksien suhde on vakio.

Kolmion DEC sivun pituutta x vastaa kolmion ABC sivun pituus $x + 2$ ja sivun pituutta 4 vastaa sivun pituus 5 .

Muodostetaan vastinosien pituuksien avulla verranto ja ratkaistaan siitä pituus x .

$$\begin{aligned}\frac{x}{x+2} &= \frac{4}{5} \\ 5x &= 4(x+2) \\ 5x &= 4x+8 \\ x &= 8\end{aligned}$$

Vastaus: $x = 8$

202A. Kartan mittakaava on 1:2000, eli 1 mm kartalla vastaa 2000 mm luonnossa.

Täten

$$92 \text{ mm} = 92 \cdot 2000 \text{ mm} = 184\,000 \text{ mm} = 184 \text{ m} \approx 180 \text{ m ja}$$

$$73 \text{ mm} = 73 \cdot 2000 \text{ mm} = 146\,000 \text{ mm} = 146 \text{ m} \approx 150 \text{ m}.$$

Kolmion kahden pisimmän sivun pituudet ovat 92 mm ja 73 mm, joten kolmion hypotenuusan pituus on 92 mm ja tuntematon sivu x on kolmion toinen kateetti. Ratkaistaan sen pituus Pythagoraan lauseella.

$$x^2 + 73^2 = 92^2$$

$$x^2 = 92^2 - 73^2$$

$$x^2 = 3135$$

$$x = 55,991\dots$$

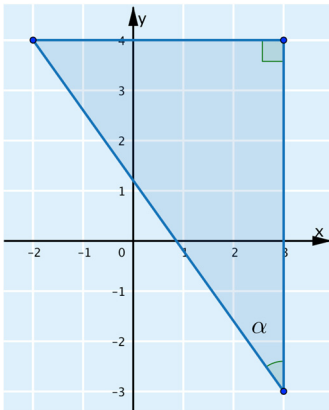
Kolmannen sivun pituus luonnossa on

$$55,991\dots \cdot 2000 \text{ mm} = 111\,982,141\dots \text{ mm} = 111,982\dots \text{ m} \approx 110 \text{ m}.$$

Tontin pinta-ala on

$$A = \frac{146 \text{ m} \cdot 111,982\dots \text{ m}}{2} = 8174,696\dots \text{ m}^2 \approx 8200 \text{ m}^2.$$

Vastaus: 150 m, 110 m, 180 m ja 8200 m²

203B. a) Piirretään kuva tilanteesta.

Kolmio on suorakulmainen kolmio, jonka kateettien pituudet voidaan laskea kärkipisteiden koordinaattien avulla.

Pisteiden $(-2, 4)$ ja $(3, 4)$ välillä olevan vakaasuuntaisen kateetin pituus on $3 - (-2) = 5$.

Pisteiden $(3, 4)$ ja $(3, -3)$ välillä olevan pystysuuntaisen kateetin pituus on $4 - (-3) = 7$.

Määritetään kulman α suuruus tangentin avulla.

$$\begin{aligned}\tan \alpha &= \frac{5}{7} \\ \alpha &= 35,537\dots^\circ \\ \alpha &\approx 36^\circ\end{aligned}$$

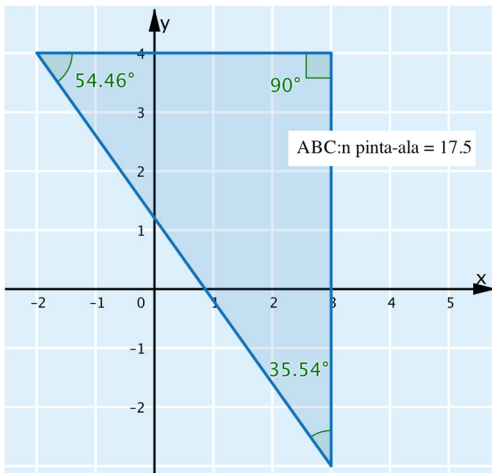
Toinen terävä kulma on
 $180^\circ - 90^\circ - 35,537\dots^\circ = 54,462\dots^\circ \approx 54^\circ$

Kolmion pinta-ala on

$$A = \frac{5 \cdot 7}{2} = 17,5.$$

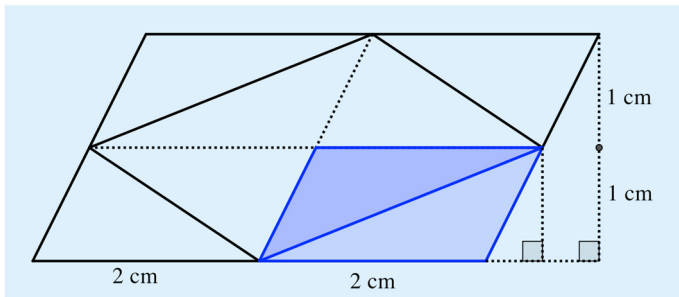
Vastaus: 36° ja 54° ; 17,5

- b) Piirretään kolmio sopivalla ohjelmalla ja määritetään kolmion kulmien suuruudet ja pinta-ala ohjelman avulla.



Videossa <https://vimeo.com/280318825/9d7dbe9b7f> näytetään, miten ratkaisu voidaan tehdä ohjelman avulla.

Vastaus: 36° ja 54° ; 17,5

204A. Piirretään kuvaan apuviivoja.

Apuviivat jakavat suunnikkaan neljään yhtenevään pienempään suunnikkaaseen, joissa lävistäjä jakaa suunnikkaan puoliksi kolmioihin. Kunkin kolmion kannan pituus on puolet ison suunnikkaan sivun pituudesta eli 2 cm ja korkeus puolet ison suunnikkaan korkeudesta eli 1 cm.

Sisään piirretty suunnikas koostuu neljästä tällaisesta kolmiosta, joten sen pinta-ala saadaan kolmioiden pinta-alan avulla.

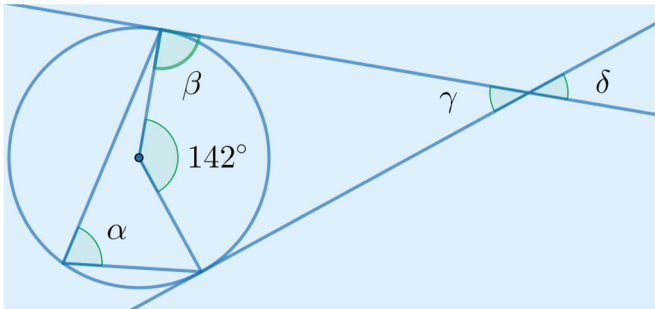
$$A = 4 \cdot \frac{2 \text{ cm} \cdot 1 \text{ cm}}{2} = 4 \text{ cm}^2$$

Pienen suunnikkaan pinta-ala on 4 cm^2 .

Vastaus: 4 cm^2

VAHVISTA OSAAMISTA

205A.



142° :een kulma on keskuskulma, jonka kanssa samaa kaarta vastaava kehäkulma on kulma α .

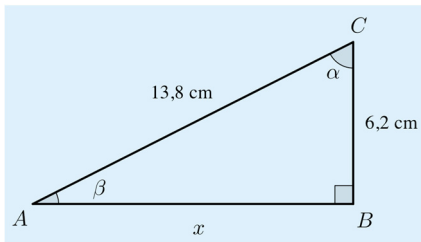
Kehäkulman suuruus on puolet sitä vastaavan keskuskulman suuruudesta, joten $\alpha = \frac{142^\circ}{2} = 71^\circ$.

Koska suora s on ympyrän tangentti, se on kohtisuorassa sivuamispisteeseen piirrettyä sädettä vastaan. Siis kulma $\beta = 90^\circ$.

Keskuskulman 142° ja tangenttikulman γ summa on 180° , joten $\gamma = 180^\circ - 142^\circ = 38^\circ$.

Kulma δ on ristikulma kulman γ kanssa. Ristikulmat ovat yhtä suuret, joten $\delta = \gamma = 38^\circ$.

Vastaus: $\alpha = 71^\circ$, $\beta = 90^\circ$, $\gamma = 38^\circ$ ja $\delta = 38^\circ$

206B. Piirretään kuva.

- a) Merkitään kateetin AB pituutta kirjaimella x . Määritetään kateetin AB pituus Pythagoraan lauseen avulla. Ratkaistaan yhtälö ohjelman avulla.

$$x^2 + 6,2^2 = 13,8^2$$

...

$$x = (\pm)12,328\dots$$

$$x \approx 12,3$$

Kateetin BC pituus on noin 12,3 cm.

Vastaus: 12,3 cm

- b) Määritetään kulman α suuruus kosinin avulla.

$$\cos \alpha = \frac{6,2}{13,8}$$

$$\alpha = 63,302\dots^\circ$$

$$\alpha \approx 63^\circ$$

Kolmion kulmien summa on 180° , joten kulman β suuruus on $\beta = 180^\circ - 90^\circ - 63,302\dots^\circ = 26,697\dots^\circ \approx 27^\circ$.

Vastaus: 63° ja 27°

- c) Valitaan kannaksi kateetti AB , jolloin korkeus on kateetin BC pituus.

Kolmion kanta on $a = 12,328\dots$ cm ja korkeus $h = 6,2$ cm, joten pinta-ala on

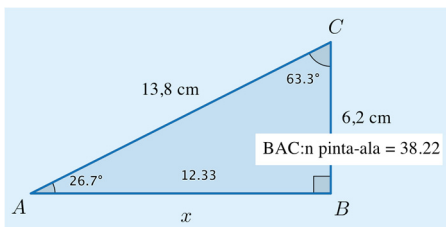
$$A = \frac{12,328\dots \text{ cm} \cdot 6,2 \text{ cm}}{2} = 38,219\dots \text{ cm}^2 \approx 38 \text{ cm}^2$$

Kolmion pinta-ala on noin 38 cm^2 .

Vastaus: 38 cm^2

- d) Piirretään kolmio sopivalla ohjelmalla, ja määritetään kateetin BC pituus, terävien kulmien suuruudet ja kolmion pinta-ala.

Videossa <https://vimeo.com/280318598/c3612278c7> näytetään, miten kolmio voidaan piirtää sopivalla ohjelmalla.



Ohjelman avulla piirretystä kolmiosta huomataan, että a-c-kohdissa lasketut tulokset ovat oikeita.

Vastaus: –

- 207A. a)** Kolmion sivut ovat 5,0 cm, 5,0 cm ja 8,9 cm. Tarkistetaan toteuttavatko sivujen pituudet Pythagoraan lauseen. Kaksi lyhintä sivua olisivat suorakulmaisen kolmion kateetit ja pisin hypotenuusa.

$$\text{kateettien neliöiden summa: } 5^2 + 5^2 = 50$$

$$\text{hypotenuusan neliö: } 8,9^2 = 79,21$$

Pythagoraan lause ei toteudu, joten kolmio ei ole suorakulmainen. Kolmiossa on kuitenkin kaksi yhtä pitkää sivua, joten kolmio on tasakylkinen.

Vastaus: epätosi, tasakylkinen

- b)** Tasasivuisen kolmion kaikki kulmat ovat 60° , joten tasasivuinen kolmio ei voi olla suorakulmainen.

Vastaus: epätosi, ei voi olla

- c)** Tasakylkisessä kolmiossa on kaksi yhtä pitkää sivua. Jos lisäksi kolmaskin sivu on yhtä pitkä, niin sanotaan, että kolmio on tasasivuinen. Väite on tosi.

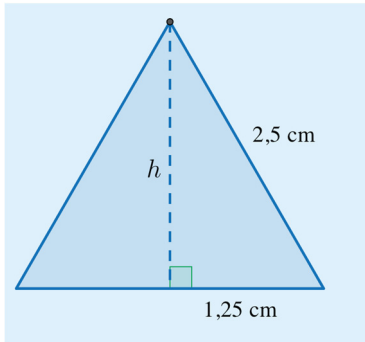
Vastaus: tosi

- d)** Säännöllisessä monikulmiossa kaikki sivut ovat yhtä pitkiä ja kaikki kulmat yhtä suuria. Tasasivuisen kolmion kaikki sivut ovat yhtä pitkiä ja kaikki kulmat ovat 60° .

Vastaus: tosi

208A. Merkitään tasasivuisen kolmion korkeusjanaa kirjaimella h . Korkeusjana jakaa kannan kahteen yhtä pitkään osaan. Kannan puolikas on

$$\frac{2,5 \text{ cm}}{2} = 1,25 \text{ cm}.$$



Ratkaistaan kolmion korkeus Pythagoraan lauseen avulla.

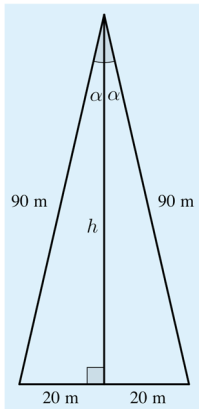
$$\begin{aligned} h^2 + 1,25^2 &= 2,5^2 \\ h^2 &= 2,5^2 - 1,25^2 \\ h^2 &= 4,6875 \\ h &= 2,165... \end{aligned}$$

Kolmion pinta-ala on

$$A = \frac{ah}{2} = \frac{2,5 \text{ cm} \cdot 2,165... \text{ cm}}{2} = 2,706... \text{ cm}^2 \approx 2,7 \text{ cm}^2.$$

Vastaus: $2,7 \text{ cm}^2$

209A. Merkitään tasakylkisen kolmion korkeusjanaa kirjaimella h . Korkeusjana puolittaa huippukulman ja kannan.



- a) Määritetään huippukulman puolikas α suorakulmaisen kolmion trigonometrian avulla.

$$\sin \alpha = \frac{20}{90}$$

$$\alpha = 12,839\dots^\circ$$

Huippukulman suuruus on $2\alpha = 2 \cdot 12,839\dots^\circ = 25,679\dots^\circ \approx 26^\circ$

Vastaus: 26°

- b) Määritetään kolmion korkeus h Pythagoraan lauseen avulla.

$$h^2 + 20^2 = 90^2$$

$$h^2 = 7700$$

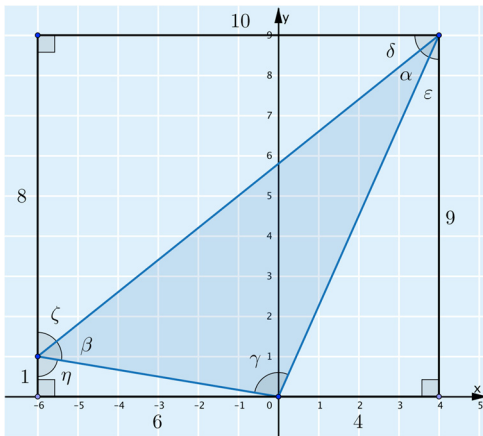
$$h = (\pm)87,749\dots(\text{m})$$

Kolmion pinta-ala on

$$A = \frac{40 \text{ m} \cdot 87,749\dots \text{ m}}{2} = 1754,992\dots \text{ m}^2 \approx 1755 \text{ m}^2.$$

Vastaus: 1755 m^2

210B. Piirretään kolmio koordinaatistoon ja täydennetään kuvioon suorakulmio, joka kulkee kolmion kärkien kautta ja jonka sivut ovat koordinaattiakselien suuntaiset.



a) Lasketaan kulman α suuruus kulmien δ ja ε avulla.

$$\begin{aligned}\tan \delta &= \frac{8}{10} \\ \delta &= 36,659\dots^\circ \\ \tan \varepsilon &= \frac{4}{9} \\ \varepsilon &= 23,962\dots^\circ \\ \alpha &= 90^\circ - 36,659\dots^\circ - 23,962\dots^\circ = 27,377\dots^\circ \approx 27,4^\circ\end{aligned}$$

Lasketaan kulman β suuruus kulmien ζ ja η avulla.

$$\begin{aligned}\tan \zeta &= \frac{10}{8} \\ \zeta &= 51,340\dots^\circ \\ \tan \eta &= \frac{6}{1} \\ \eta &= 80,537\dots^\circ \\ \beta &= 180^\circ - 51,340\dots^\circ - 80,537\dots^\circ = 48,122\dots^\circ \approx 48,1^\circ\end{aligned}$$

Kulman γ suuruus on

$$180^\circ - 27,377\dots^\circ - 48,122\dots^\circ = 104,500^\circ \approx 104,5^\circ.$$

Vastaus: $27,4^\circ$, $48,1^\circ$ ja $104,5^\circ$

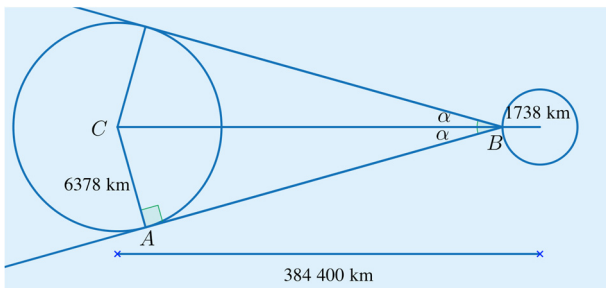
- b) Kolmion pinta-ala saadaan vähentämällä suorakulmion pinta-alasta kulmiin jäävien suorakulmaisten kolmioiden pinta-alat.

$$A = 10 \cdot 9 - \frac{10 \cdot 8}{2} - \frac{4 \cdot 9}{2} - \frac{6 \cdot 1}{2} = 29$$

Kolmion pinta-ala on 29,0.

Vastaus: 29,0

211B. Piirretään hahmotelma tilanteesta.



Maata katsellaan kuun pinnalta pisteessä B . Näkökulma on kuvion merkinnöillä 2α .

Kuvioon muodostuu suorakulmainen kolmio, kateetin pituus on maapallon säde 6378 km ja hypotenuusan $384\,400\text{ km} - 1738\text{ km} = 382\,662\text{ km}$.

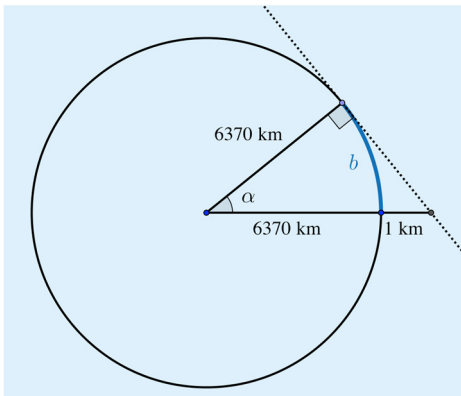
Ratkaistaan kulman α suuruus sinin avulla.

$$\sin \alpha = \frac{6378}{382\,662}$$

$$\alpha = 0,990\dots^\circ$$

Maapallon näkyy kulmassa, jonka suuruus on $2\alpha = 2 \cdot 0,990\dots^\circ = 1,910\dots^\circ \approx 1,9^\circ$.

Vastaus: $1,9^\circ$

212B. Piirretään hahmotelma tilanteesta.

Etäisyys, joka tornista voidaan nähdä, on sektorin kaaren pituus b . Kuvioon muodostuu suorakulmainen kolmio, jonka kateetin pituus on 6370 km ja hypotenuusan pituus on $6370 \text{ km} + 1 \text{ km} = 6371 \text{ km}$.

Sektorin keskuskulma α on suorakulmaisen kolmion terävä kulma. Lasketaan kulman α suuruus kosinin avulla.

$$\cos \alpha = \frac{6370 \text{ km}}{6371 \text{ km}}$$

$$\alpha = 1,0151\dots^\circ$$

Lasketaan sektorin kaaren pituus b .

$$b = \frac{1,0151\dots^\circ}{360^\circ} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 6370 \text{ km} = 112,864\dots \text{ km} \approx 113 \text{ km}$$

Pilvenpiirtäjän huipulta voi enimmillään nähdä noin 113 km:n päähän merelle.

Vastaus: 113 km:n päähän

213A. Sijoitetaan sektorin kaaren pituus $b = 15$ cm ja keskuskulman suuruus $\alpha = 90^\circ$ sektorin kaaren pituuden kaavaan ja ratkaistaan siitä ympyrän säde r .

$$b = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$$

$$15 = \frac{90^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi r$$

$$15 = 0,5\pi r \quad ||: 0,5\pi$$

$$r = 9,549\dots$$

$$r \approx 9,5$$

Ympyrän säteen pituus on noin 9,5 cm.

Vastaus: $r \approx 9,5$ cm

214B. Merkitään keittiön todellista pinta-alaa kirjaimella x ja taulukoidaan tehtävänannon tietoja.

Pinta-ala	Mittakaava
3	1
x	200

Pohjapiirustus on yhdenmuotoinen todellisen keittiön kanssa.

Yhdenmuotoisten kuvioiden pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä keittiön todellinen pinta-ala x .

$$\frac{3}{x} = \left(\frac{1}{200} \right)^2$$

$$\frac{3}{x} = \frac{1}{40\,000}$$

$$x = 3 \cdot 40\,000$$

$$x = 120\,000$$

Keittiön todellinen pinta-ala on $120\,000 \text{ cm}^2 = 12 \text{ m}^2$.

Vastaus: 12 m^2

215B. Merkitään hypotenuusan pituutta kirjaimella x ja ratkaistaan se Pythagoraan lauseen avulla.

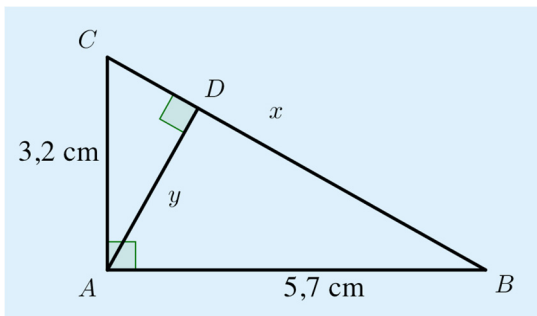
$$x^2 = 3,2^2 + 5,7^2$$

$$x^2 = 42,73$$

$$x = \sqrt{42,73}$$

$$x = 6,536\dots$$

$$x \approx 6,5$$

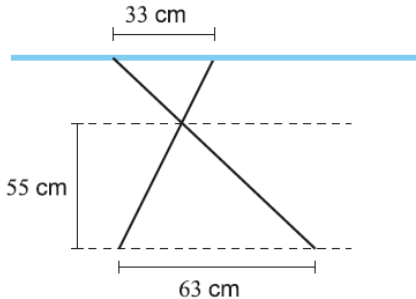


Kolmioissa ABC ja ADC on molemmissa 90° :een kulma ja kulma C on yhteinen. Kolmiot ovat siis yhdenmuotoisia kk-lauseen nojalla. Yhdenmuotoisten kuvioiden vastinpituuksien suhde on vakio. Muodostetaan verranto ja ratkaistaan siitä suoran kulman kärjen etäisyys hypotenuusasta y .

$$\begin{aligned} \frac{y}{3,2} &= \frac{5,7}{6,536\dots} \\ 6,536\dots y &= 3,2 \cdot 5,7 & \parallel : 6,536\dots \\ y &= 2,790\dots \\ y &\approx 2,8 \end{aligned}$$

Hypotenuusan pituus on noin 6,5 cm ja suoran kulman kärjen etäisyys origosta on noin 2,8 cm.

Vastaus: 6,5 cm ja 2,8 cm

216A.

Koska silityslauta on yhdensuuntainen lattian kanssa, lattian ja pidemmän jalan välinen kulma on yhtä suuri kuin laudan ja pidemmän jalan välinen kulma. Myös alemman kolmion yläosassa oleva kulma on yhtä suuri kuin ylemmän kolmion alaosan kulma, koska kulmat ovat ristikulmia. Siis jalkojen muodostamat kolmiot ovat yhdenmuotoisia kk-lauseen nojalla.

Merkitään ylemmän kolmion korkeutta kirjaimella x ja muodostetaan verranto yhdenmuotoisuuden avulla.

$$\begin{aligned}\frac{x}{33} &= \frac{55}{63} \\ 63x &= 55 \cdot 33 \quad \| :63 \\ x &= 28,809\dots\end{aligned}$$

Silityslaudan korkeus lattiasta on
 $55 \text{ cm} + 28,809\dots \text{ cm} = 83,809\dots \text{ cm} \approx 84 \text{ cm}.$

Vastaus: 84 cm

217A. a) Mittakaava on vastinpituuksien suhde. Määritetään mittakaava annettujen pituuksien avulla.

$$k = \frac{h_{\text{kuva}}}{h_{\text{Osmo}}} = \frac{75 \text{ cm}}{165 \text{ cm}} = \frac{5}{11}$$

Muotokuvan mittakaava on 5:11.

Vastaus: 5:11

b) Lasketaan Osmon pituus pienennöksessä.

$$\frac{h_{\text{pieni}}}{h_{\text{iso}}} = \frac{1}{6}$$

$$6h_{\text{pieni}} = h_{\text{iso}} \quad || : 6$$

$$h_{\text{pieni}} = \frac{h_{\text{iso}}}{6}$$

$$h_{\text{pieni}} = \frac{75 \text{ cm}}{6}$$

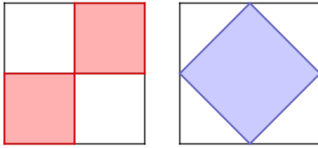
$$h_{\text{pieni}} = 12,5 \text{ cm}$$

Määritetään pienennöksen mittakaava Osmon pituuden pienessä kuvassa ja todellisuudessa avulla.

$$\frac{h_{\text{pieni}}}{h_{\text{Osmo}}} = \frac{12,5 \text{ cm}}{165 \text{ cm}} = \frac{5}{66}$$

Pienennös on suhteessa 5:66.

Vastaus: 5:66

218B.

Punaisen neliön sivun pituus on puolet ison neliön sivun pituudesta, joten
 $A_{\text{punaiset neliöt}} = 2 \cdot 2,5 \cdot 2,5 = 12,5$.

Sinisen neliön sivun pituus on kulmaan jäävän suorakulmaisen kolmion hypotenuusan pituus. Merkitään sinisen neliön sivun pituutta kirjaimella s . Muodostetaan yhtälö Pythagoraan lauseen avulla ja ratkaistaan siitä sivun pituus s .

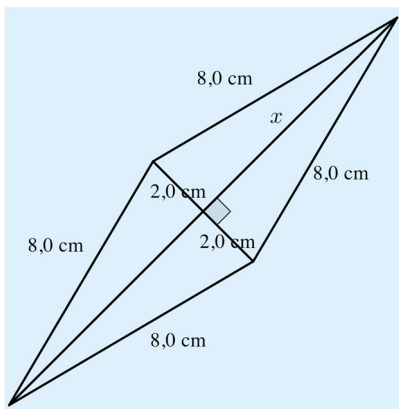
$$\begin{aligned} 2,5^2 + 2,5^2 &= s^2 \\ s^2 &= 12,5 \\ s &= \sqrt{12,5} \end{aligned}$$

Sinisen neliön pinta-ala on

$$A_{\text{sininen neliö}} = \sqrt{12,5} \cdot \sqrt{12,5} = 12,5$$

Pinta-alat ovat yhtä suuret.

Vastaus: –

219B. Piirretään kuva tilanteesta.

Neljäkkään lävistäjät leikkaavat toisensa kohtisuorasti, joten lävistäjä jakaa neljäkkään kahteen tasakylkiseen kolmioon.

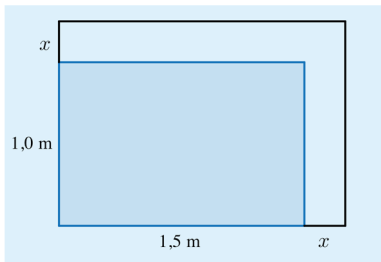
Merkitään lävistäjän puolikkaan pituutta kirjaimella x . Lasketaan lävistäjän puolikkaan pituus x Pythagoraan lauseen avulla.

$$\begin{aligned} 2,0^2 + x^2 &= 8,0^2 \\ x^2 &= 60,0 \\ x &= (\pm) 7,745\dots \end{aligned}$$

Lävistäjän pituus on $2x = 2 \cdot 7,745\dots \text{ cm} = 15,491\dots \text{ cm} \approx 15 \text{ cm}$.

Vastaus: 15 cm

220B. Merkitään sivun pituuden lisäystä kirjaimella x .



Alkuperäisen ikkunan pinta-ala on $1,0 \text{ m} \cdot 1,5 \text{ m} = 1,5 \text{ m}^2$.

Uuden ikkunan pinta-ala on tällöin $2 \cdot 1,5 \text{ m}^2 = 3,0 \text{ m}^2$.

Uuden ikkunan sivut ovat $1 + x$ ja $1,5 + x$.

Uuden ikkunan pinta-ala sivujen avulla lausuttuna on $(1 + x)(1,5 + x)$.

Muodostetaan yhtälö ikkunan pinta-alan avulla ja ratkaistaan siitä sivun pituuden lisäys x .

$$(1 + x)(1,5 + x) = 3$$

Ratkaistaan yhtälö symbolisen laskennan ohjelmalla.

1	Ratkaise((1+x)(1.5+x)=3, x)
○	$\approx \{x = -3, x = 0.5\}$

Hylätään negatiivinen ratkaisu.

Sivua on kasvatettava $0,5 \text{ m} = 50 \text{ cm}$.

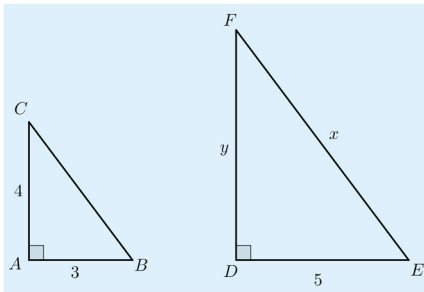
Uuden ikkunan sivujen pituudet ovat

$$1 \text{ m} + 0,5 \text{ m} = 1,5 \text{ m} = 150 \text{ cm ja}$$

$$1,5 \text{ m} + 0,5 \text{ m} = 2,0 \text{ m} = 200 \text{ cm.}$$

Vastaus: 150 cm ja 200 cm

221B. Piirretään kuva tilanteesta. Merkitään kolmion DEF hypotenuusan pituutta kirjaimella x ja kateetin DF pituutta kirjaimella y .



Ratkaistaan ensin kolmion DEF kateetin DF pituus. Kolmiot ABC ja DEF ovat yhdenmuotoisia, joten vastinsivujen pituuksista saadaan

$$\text{verranto } \frac{4}{y} = \frac{3}{5}.$$

Ratkaistaan verrannosta kateetin y pituus.

$$\begin{aligned} \frac{4}{y} &= \frac{3}{5} \\ 3y &= 20 \quad \| :3 \\ y &= \frac{20}{3} \\ y &\approx 6,666... \end{aligned}$$

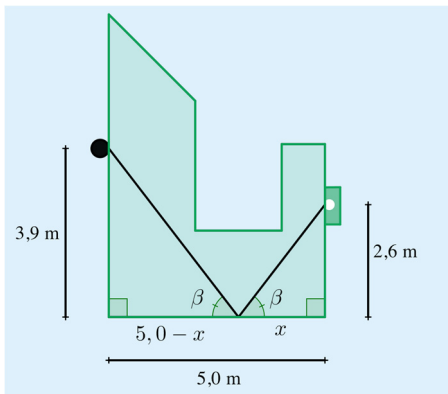
Lasketaan kolmion DEF hypotenuusan pituus Pythagoraan lauseen avulla.

$$\begin{aligned} 5^2 + 6,666...^2 &= x^2 \\ x^2 &= 69,444... \\ x &= (\pm) 8,333... \\ x &\approx 8,3 \end{aligned}$$

Kolmion DEF hypotenuusan pituus on noin 8,3.

Vastaus: 8,3

222B. Merkitään kimpoamiskohdan etäisyyttä aloituspaikasta kirjaimella x .



Kuvassa on kaksi suorakulmaista kolmioita, joissa on yhtä suuret terävät kulmat β . kk-lauseen perusteella kolmiot ovat yhdenmuotoiset.

Vasemmanpuoleisen kolmion 3,9 metrin pituista kateettia vastaa oikeanpuoleisessa kolmiossa 2,6 metrin pituinen kateetti. Vastaavasti $5,0 - x$ ja x ovat vastinpituuksia.

Muodostetaan vastinsivujen pituuksista verranto ja ratkaistaan siitä etäisyys x ohjelmalla.

$$\frac{5,0 - x}{x} = \frac{3,9}{2,6}$$

$$\vdots$$

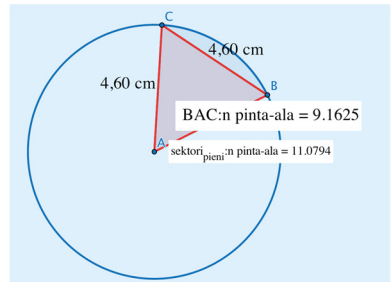
$$x = 2$$

Tähtäyskohta on 2,0 metrin päässä aloituspaikan reunasta.

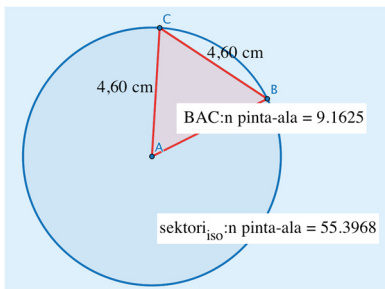
Vastaus: 2,0 metrin päähän aloituspaikan reunasta

- 223B. a)** Piirretään ympyrä, jonka säde on 4,60 cm ja ympyrälle jänne, jonka säde on 4,60 cm. Piirretään sitten sektori, jonka kaaren pituus on jängteen rajoittama lyhempi osuus ympyrän kehästä. Piirretään lopuksi kolmio, jonka kärjet ovat ympyrän keskipisteessä ja jängteen päätepisteissä. Määritetään sektorin ja kolmion pinta-alat pinta-alatyökalulla. Jängteen erottaman pienemmän segmentin pinta-ala on sektorin ja kolmion pinta-alojen erotus.

Pienemmän segmentin pinta-ala on
 $11,0794 \text{ cm}^2 - 9,1625 \text{ cm}^2$
 $= 1,9169 \text{ cm}^2 \approx 1,92 \text{ cm}^2$.



Piirretään suuremman segmentin pinta-alan määrittämistä varten sektori, jonka kaaren pituus on jängteen rajoittama pidempi osuus ympyrän kehästä. Jängteen erottaman suuremman segmentin pinta-ala on sektorin ja kolmion pinta-alojen summa.

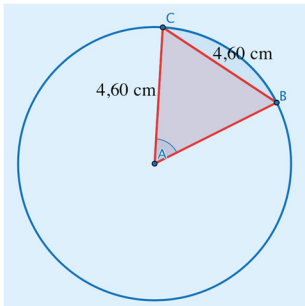


Suuremman segmentin pinta-ala on
 $55,3968 \text{ cm}^2 + 9,1625 \text{ cm}^2 = 64,5593 \text{ cm}^2 \approx 64,6 \text{ cm}^2$.

Videossa <https://vimeo.com/280318654/f6db896bf8> näytetään, miten tehtävä voidaan ratkaista ohjelman avulla.

Vastaus: $1,92 \text{ cm}^2$ ja $64,6 \text{ cm}^2$

- b) Kolmion sivut ovat yhtä pitkiä, joten kolmio on tasasivuinen. Tasasivuisen kolmion kaikki kulmat ovat 60° .

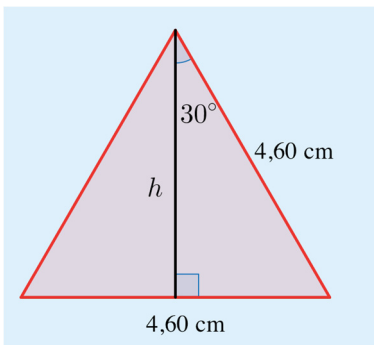


Pienemmän segmentin pinta-ala:

Lasketaan sektorin pinta-ala.

$$A_{\text{sektori}} = \frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot (4,60 \text{ cm})^2 = 11,079... \text{ cm}^2$$

Kolmion korkeusjana puolittaa keskuskulman, joten sen suuruus on 30° . Lasketaan kolmion korkeus h kosinin avulla.



$$\cos 30^\circ = \frac{h}{4,60}$$

$$h = 3,983...$$

Kolmion pinta-ala on

$$A = \frac{ah}{2} = \frac{4,60 \text{ cm} \cdot 3,983... \text{ cm}}{2} = 9,162... \text{ cm}^2.$$

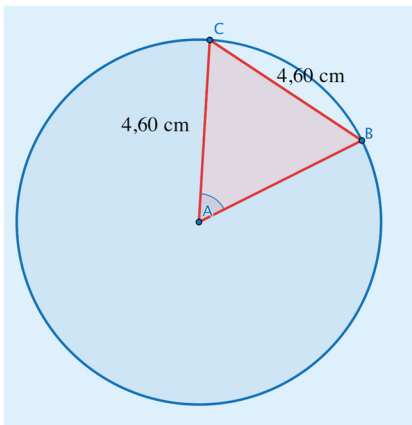
Pienemmän segmentin pinta-ala on

$$\begin{aligned} A_{\text{segmentti}} &= A_{\text{sektori}} - A_{\text{kolmio}} \\ &= 11,079... \text{ cm}^2 - 9,162... \text{ cm}^2 \\ &= 1,916... \text{ cm}^2 \\ &\approx 1,92 \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

Suuremman segmentin pinta-ala:

Lasketaan sektorin pinta-ala. Sektorin keskuskulman suuruus on $360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$.

$$A_{\text{sektori}} = \frac{300^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot (4,60 \text{ cm})^2 = 55,396... \text{ cm}^2$$

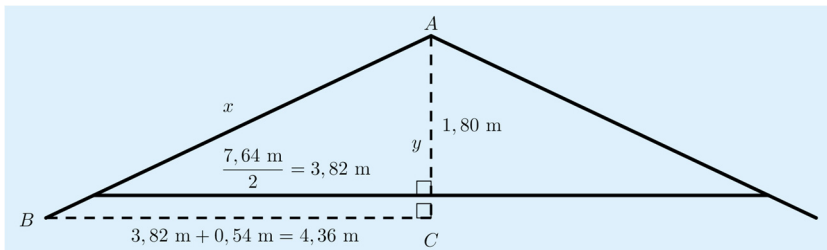


Suuremman segmentin pinta-ala on

$$\begin{aligned} A_{\text{segmentti}} &= A_{\text{sektori}} + A_{\text{kolmio}} \\ &= 55,396... \text{ cm}^2 + 9,162... \text{ cm}^2 \\ &= 64,559... \text{ cm}^2 \\ &\approx 64,6 \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

Vastaus: $1,92 \text{ cm}^2$ ja $64,6 \text{ cm}^2$

224B. Merkitään kuvaan räystään reunan korkeudelle suoraan pisteen A alapuolelle piste C . Merkitään pisteiden A ja C välistä etäisyyttä kirjaimella y ja janan AB pituutta kirjaimella x .



Kuvaan piirretty katon rajan ja katon lappeen osan rajaama kolmio on yhdenmuotoinen kolmion ABC kanssa.

Muodostetaan verranto ja ratkaistaan siitä katon lappeen korkeus y .

$$\frac{y}{1,80} = \frac{4,36}{3,82}$$

$$3,82y = 1,80 \cdot 4,36 \quad || : 3,82$$

$$y = 2,0544\dots$$

Kolmio ABC on suorakulmainen ja x on sen hypotenuusa. Ratkaistaan lappeen pituus x Pythagoraan lauseen avulla.

$$4,36^2 + 2,0544\dots^2 = x^2$$

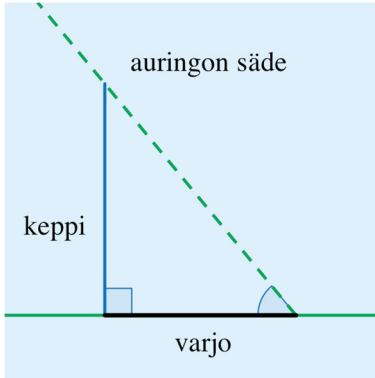
$$x^2 = 23,230\dots$$

$$x = (\pm) 4,819\dots$$

Lappeen pituus on $4,819\dots \text{ m} \approx 4,82 \text{ m}$.

Vastaus: $4,82 \text{ m}$

225B.



- a) Otto voi asettaa puukepin pystysuoraan maahan ja mitata puukepin maan päälle jäävän osan pituuden. Lisäksi Oton tulee mitata puukepistä syntyvän varjon pituus. Tämän jälkeen Otto voi laskea syntyvästä suorakulmaisesta kolmiosta tangentin avulla Auringon säteiden ja maan välisen kulman suuruuden.

Vastaus: –

- b) Oton tulee ensin selvittää a-kohdan tavalla Auringon säteiden ja maanpinnan välisen kulman suuruus. Tämän jälkeen Otto voi hyödyntää puun varjoa ja juuri määrittämänsä kulmaa. Hänen tulee mitata puun varjon pituus ja muodostaa tangentin avulla yhtälö puun korkeuden laskemiseksi.

Toisaalta, puun korkeuden ja puun varjon pituuden muodostama kolmio on yhdenmuotoinen puukepin pituuden ja puukepin varjon pituuden muodostaman kolmion kanssa, joten Otto voi laskea puun korkeuden myös yhdenmuotoisten kolmioiden avulla.

Vastaus: –

SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

226A. Merkitään neliön sivun pituutta kirjaimella a . Neliön piirin on tällöin $p_{\text{neliö}} = 4a$.

Merkitään ympyrän sädettä kirjaimella r . Ympyrän kehän pituus on $p_{\text{ympyrä}} = 2\pi r$.

Neliön piiri on yhtä pitkä kuin ympyrän kehän pituus, joten saadaan yhtälö $4a = 2\pi r$. Ratkaistaan yhtälöstä ympyrän säteen lauseke.

$$\begin{aligned} 4a &= 2\pi r & \parallel : 2\pi \\ r &= \frac{4a}{2\pi} \\ r &= \frac{2a}{\pi} \end{aligned}$$

Neliön pinta-ala on $A_{\text{neliö}} = a^2$ ja ympyrän pinta-ala on

$$A_{\text{ympyrä}} = \pi \left(\frac{2a}{\pi} \right)^2 = \pi \cdot \frac{4a^2}{\pi^2} = \frac{4a^2}{\pi}.$$

a) Lasketaan suhde.

$$\frac{a^2}{\frac{4a^2}{\pi}} = \frac{1}{\frac{4}{\pi}} = 0,78539\dots$$

Neliön pinta-ala on $100 \% - 78,539\dots \% = 21,460\dots \% \approx 21,5 \%$ pienempi kuin ympyrän pinta-ala.

Vastaus: 21,5 %

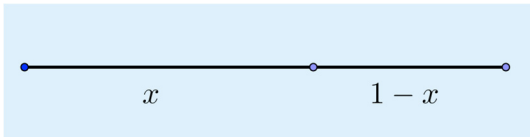
b) Lasketaan suhde.

$$\frac{\frac{4a^2}{\pi}}{a^2} = \frac{4}{\pi} = 1,27323\dots$$

Ympyrän pinta-ala on $127,323\dots \% - 100 \% = 27,323\dots \% \approx 27,3 \%$ suurempi kuin neliön pinta-ala.

Vastaus: 27,3 %

227B. Piirretään jana, jonka pituus on 1. Rajataan janasta pituus x ($> 0,5$), jolloin janan toisen osan pituus on $1 - x$.



Muodostetaan yhtälö suhteiden avulla. Ratkaistaan yhtälö ohjelman avulla.

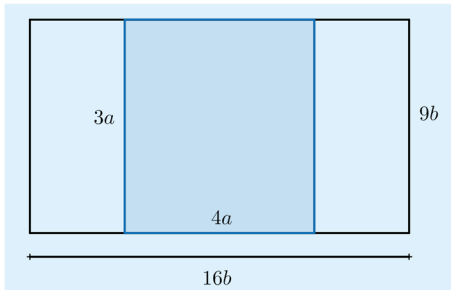
$$\begin{aligned}\frac{1}{x} &= \frac{x}{1-x} \\ x^2 + x - 1 &= 0 \\ x &= \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \\ x &= 0,618... \quad \text{tai} \quad x = -1,618...\end{aligned}$$

Negatiivinen vastaus ei kelpaa, joten $x = 0,618...$ ja kysytty suhde

$$\varphi = \frac{1}{x} = \frac{1}{0,618...}.$$

Vastaus: 1:0,618

228B. Piirretään kuva tilanteesta. Merkitään kuvan korkeutta $3a$ ja leveyttä $4a$ ja television korkeutta $9b$ ja leveyttä $16b$.



Asetetaan kuva televisioruutuun niin, että kuva peittää ruudun pystysuunnassa. Tällöin vaakasuuntaan jää tyhjää tilaa.

Koska kuvan korkeus ja ruudun korkeus ovat yhtä pitkät, niin $3a = 9b$. Tästä ratkaisuna saadaan $a = 3b$.

Lausutaan kuvan pinta-ala kirjaimen b avulla:

$$A_{\text{kuva}} = 3a \cdot 4a = 12a^2 = 12 \cdot (3b)^2 = 108b^2$$

Lausutaan ruudun pinta-ala kirjaimen b avulla:

$$A_{\text{ruutu}} = 9b \cdot 16b = 144b^2$$

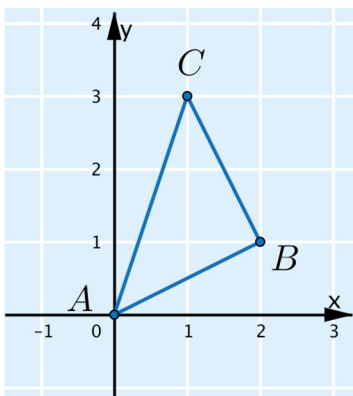
Lasketaan kuinka monta prosenttia kuva vie ruudusta.

$$\frac{A_{\text{kuva}}}{A_{\text{ruutu}}} = \frac{108b^2}{144b^2} = \frac{3}{4} = 0,75 = 75 \%$$

Koska kuva peittää ruudusta 75 %, tyhjää tilaa jää $100 \% - 75 \% = 25 \%$.

Vastaus: 25 %

229B. Piirretään kuva.



a) Lasketaan janojen AB ja AC pituudet.

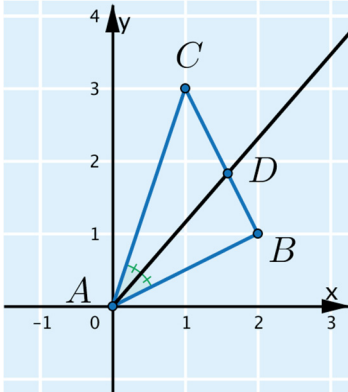
$$|AB| = \sqrt{(2-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{5}$$

$$|AC| = \sqrt{(1-0)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{10}$$

$$\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{10}{5}} = \sqrt{2}$$

Vastaus: $\sqrt{2}$

b)



Kulman puolittaja jakaa vastaisen sivun viereisten sivujen suhteessa.

Näin ollen $\frac{|CD|}{|DC|} = \frac{\sqrt{2}}{1}$.

Janan jakopisteen koordinaatit saadaan oheisella kaavalla.

janapiste	$P = \left(\frac{px_1 + qx_2}{p+q}, \frac{py_1 + qy_2}{p+q} \right)$	
-----------	---	--

Pisteen D koordinaatit ovat

$$\left(\frac{1 \cdot 1 + \sqrt{2} \cdot 2}{1 + \sqrt{2}}, \frac{1 \cdot 3 + \sqrt{2} \cdot 1}{1 + \sqrt{2}} \right) = (1,585\dots; 1,828\dots) \approx (1,59; 1,83).$$

Vastaus: (1,59; 1,83)

230B. Merkitään ympyrän keskipistettä kirjaimella D ja hypotenuusan ja ympyrän sivuamispistettä kirjaimella E .

Kulmat CBA ja DEC ovat suoria kulmia.

Kulma BAE on kulmaa BDE vastaava tangenttikulma.

Näin ollen $\sphericalangle BAE = 180^\circ - \sphericalangle BDE$.

Kulmat BDE ja CDE ovat vieruskulmia, joten $\sphericalangle CDE = 180^\circ - \sphericalangle BDE$. Siis $\sphericalangle BAE = \sphericalangle CDE$.

Kolmioilla CED ja CBA on kaksi yhtä suurta vastinkulmaa, joten CED ja CBA ovat yhdenmuotoisia.

Pythagoraan lauseen nojalla:

$$|BC|^2 + |AB|^2 = |CA|^2$$

$$4^2 + 3^2 = |CA|^2$$

$$|CA|^2 = 25$$

$$|CA| = (\pm) 5.$$

$$|AB| = |AE|$$

$$\text{Siis } |EC| = |CA| - |AE| = 5 - 3 = 2.$$

Merkitään sädettä kirjaimella r ja muodostetaan verranto kolmioiden yhdenmuotoisuuden perusteella. Sivun EC vastinsivu on sivu BC ja sivun DE vastinsivu on AB . Ratkaistaan verrannosta säteen pituus r .

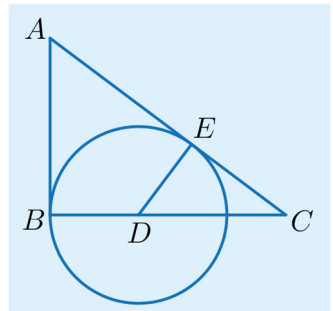
$$\frac{r}{3} = \frac{2}{4}$$

$$4r = 6 \quad \parallel : 4$$

$$r = \frac{6}{4}$$

$$r = \frac{3}{2}$$

$$\text{Vastaus: } \frac{3}{2}$$



231B. Yhdenmuotoisten kuvioiden pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö. Merkitään luonnon pinta-alaa A_1 ja A3-kokoisen kartan pinta-alaa A_2 .

$$\text{Tällöin pätee } \frac{A_2}{A_1} = \left(\frac{1}{25\,000} \right)^2.$$

Ratkaistaan verrannosta pinta-ala A_1 .

$$\begin{aligned} \frac{A_2}{A_1} &= \left(\frac{1}{25\,000} \right)^2 \\ \frac{A_2}{A_1} &= \frac{1}{25\,000^2} \\ A_1 &= 25\,000^2 \cdot A_2 \end{aligned}$$

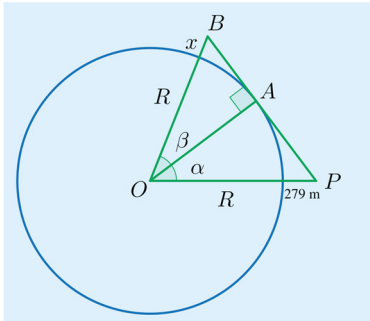
Merkitään A2-kokoisen kartan pinta-alaa A_3 . Kopioinnissa kartan pinta-ala kaksinkertaistuu, eli $A_3 = 2A_2$.

Muodostetaan suurennetun kartan pinta-alan ja luonnon pinta-alan välinen suhde ja ratkaistaan siitä mittakaava k .

$$\begin{aligned} \frac{A_3}{A_1} &= k^2 \\ \frac{2 \cdot A_2}{A_1} &= k^2 \\ \frac{2 \cdot A_2}{25\,000^2 \cdot A_2} &= k^2 \\ k^2 &= \frac{2}{625\,000\,000} \\ k^2 &= \frac{1}{312\,500\,000} \\ k &= \sqrt{\frac{1}{312\,500\,000}} \\ k &= \frac{1}{17\,677,669...} \end{aligned}$$

Suurennoksen mittakaava on likimain 1:17 678.

Vastaus: 1:17 678

232B. Piirretään kuva tilanteesta.

Piste B on kohta, joka juuri ja juuri nähdään Eiffel-tornin näköalatasanteelta 264 km:n päässä. Merkitään pisteen B etäisyyttä maanpinnasta kirjaimella x . Mikäli pituus x on korkeintaan 190 m, Etelätornin huippu voidaan nähdä. Katseen suuntaa kuvaava tangentti ja maapallo sivuavat toisiaan yhdessä pisteessä. Tangentti on kohtisuorassa maapallon sädettä vasten.

Merkitään $\gamma = \alpha + \beta$.

Koska Pariisin ja Brysselin välinen etäisyys on 264 km. Määritetään kulma γ sektorin kaaren pituuden avulla.

$$264 = \frac{\gamma}{360^\circ} \cdot 40\,000 \quad || : 40\,000 \cdot 360^\circ$$

$$\gamma = 2,376^\circ$$

Määritetään kulman α suuruus suorakulmaisen kolmion OPA avulla.

$$\text{Maapallon säde on } R = \frac{40\,000 \text{ km}}{2\pi} = 6366,197\dots \text{ km.}$$

$$\cos \alpha = \frac{6366,197\dots}{6366,197\dots + 0,279}$$

$$\cos \alpha = 0,999956\dots$$

$$\alpha = 0,536\dots^\circ$$

$$\text{Näin ollen } \beta = \gamma - \alpha = 2,376^\circ - 0,536\dots^\circ = 1,839\dots^\circ$$

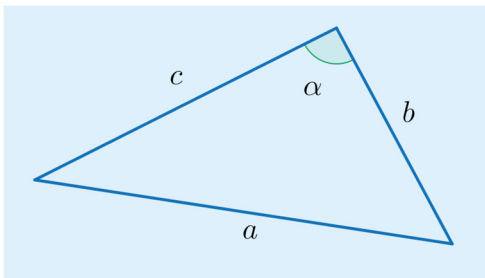
Muodostetaan suorakulmaisen kolmion OAB avulla yhtälö korkeuden x määrittämiseksi.

$$\begin{aligned}\cos 1,839\dots^\circ &= \frac{6366,197\dots}{6366,197\dots + x} && \parallel \cdot (6366,197\dots + x) \\ (6366,197\dots + x) \cdot \cos 1,839\dots^\circ &= 6366,197\dots && \parallel : \cos 1,839\dots^\circ \\ 6366,197\dots + x &= \frac{6366,197\dots}{\cos 1,839\dots^\circ} \\ x &= \frac{6366,197\dots}{\cos 1,839\dots^\circ} - 6366,197\dots \\ x &= 3,282\dots\end{aligned}$$

Koska $x = 3,282\dots \text{ km} > 190 \text{ m}$, niin Eiffel-tornin näköalatasanteelta ei voida nähdä Etelätornin huippua.

Vastaus: Ei voida.

233B. Kosinilause on $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$.



- a) Sijoitetaan $b = 5,8$, $c = 7,0$ ja $\alpha = 31^\circ$ kosinilauseeseen ja määritetään kolmannen sivun pituus a .

$$a^2 = 5,8^2 + 7,0^2 - 2 \cdot 5,8 \cdot 7,0 \cdot \cos 31^\circ$$

$$a^2 = 13,038...$$

$$a = (\pm) 3,610...$$

$$a \approx 3,6$$

Kolmannen sivun pituus on noin 3,6 m.

Vastaus: 3,6 m

- b) Sijoitetaan $a = 4,3$ $b = 2,0$ ja $c = 3,5$ kosinilauseeseen ja määritetään sivun a vastakkaisen kulman suuruus.

$$\begin{aligned}
 4,3^2 &= 2,0^2 + 3,5^2 - 2 \cdot 2,0 \cdot 3,5 \cdot \cos \alpha \\
 -14 \cdot \cos \alpha &= 18,49 - 4,0 - 12,25 \\
 -14 \cos \alpha &= 2,24 && \parallel : (-14) \\
 \cos \alpha &= -0,16 \\
 \alpha &= 99,206\dots^\circ \\
 \alpha &\approx 99,2^\circ
 \end{aligned}$$

Sijoitetaan $a = 2,0$ $b = 4,3$ ja $c = 3,5$ kosinilauseeseen ja määritetään sivun a vastakkaisen kulman suuruus.

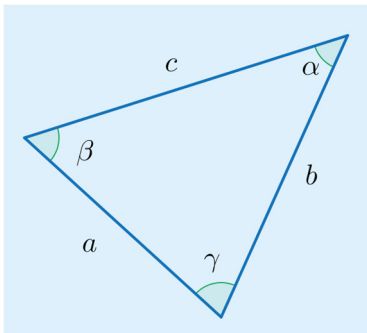
$$\begin{aligned}
 2,0^2 &= 4,3^2 + 3,5^2 - 2 \cdot 4,3 \cdot 3,5 \cdot \cos \beta \\
 -30,1 \cdot \cos \beta &= 4,0 - 18,49 - 12,25 \\
 -30,1 \cos \beta &= -26,74 && \parallel : (-30,1) \\
 \cos \beta &= 0,888\dots \\
 \beta &= 27,330\dots^\circ \\
 \beta &\approx 27,3^\circ
 \end{aligned}$$

Viimeisen kulman suuruus on
 $180^\circ - 99,206\dots^\circ - 27,330\dots^\circ = 53,462\dots^\circ \approx 53,5^\circ$.

Kulmien suuruudet ovat $99,2^\circ$; $27,3^\circ$ ja $53,5^\circ$.

Vastaus: $99,2^\circ$, $27,3^\circ$ ja $53,5^\circ$

234B. Sinilause on $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$.



Valitaan $a = 4,7$ cm, joten $\alpha = 54^\circ$. Olkoon $\beta = 49^\circ$, joten sivun pituus b on kulmaa β vastapäätä olevan sivun pituus. Muodostetaan sinilauseen avulla yhtälö sivun pituuden b ratkaisemiseksi.

$$\begin{aligned}\frac{a}{\sin \alpha} &= \frac{b}{\sin \beta} \\ \frac{4,7}{\sin 54^\circ} &= \frac{b}{\sin 49^\circ} \\ \sin 54^\circ \cdot b &= 4,7 \cdot \sin 49^\circ & \| : \sin 54^\circ \\ b &= 4,384\dots \\ b &\approx 4,4\end{aligned}$$

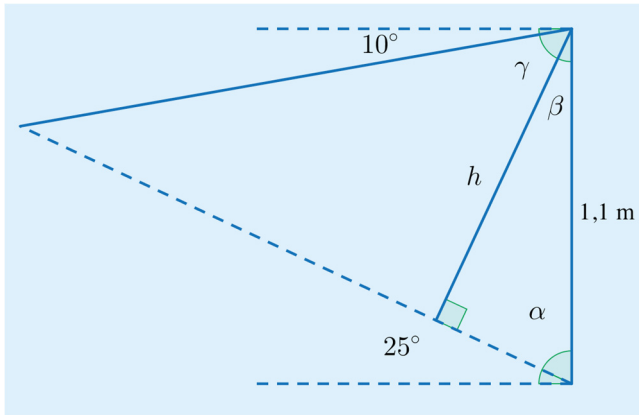
Olkoon $\gamma = 77^\circ$, joten sivun pituus c on kulmaa γ vastapäätä olevan sivun pituus. Muodostetaan sinilauseen avulla yhtälö sivun pituuden c ratkaisemiseksi.

$$\begin{aligned}\frac{a}{\sin \alpha} &= \frac{c}{\sin \gamma} \\ \frac{4,7}{\sin 54^\circ} &= \frac{c}{\sin 77^\circ} \\ \sin 54^\circ c &= 4,7 \cdot \sin 77^\circ & \| : \sin 54^\circ \\ c &= 5,660\dots \\ c &\approx 5,7\end{aligned}$$

Sivujen pituudet ovat 4,4 cm, 4,7 cm ja 5,7 cm.

Vastaus: 4,4 cm, 4,7 cm ja 5,7 cm

235B. Piirretään tehtävänannon kuvassa olevalle kolmiolle korkeusjana ja määritetään kulmien α , β ja γ suuruudet.



$$\alpha = 90^\circ - 25^\circ = 65^\circ$$

$$\beta = 180^\circ - 90^\circ - 65^\circ = 25^\circ$$

$$\gamma = 90^\circ - 10^\circ - 25^\circ = 55^\circ$$

Lasketaan korkeusjanan pituus h suorakulmaisen kolmion trigonometrian avulla.

$$\sin 65^\circ = \frac{h}{1,1}$$

$$h = 1,1 \cdot \sin 65^\circ$$

$$h = 0,9969\dots$$

Merkitään markiisin pituutta kirjaimella x ja ratkaistaan se suorakulmaisen kolmion trigonometrian avulla.

$$\cos 55^\circ = \frac{0,9969\dots}{x} \quad \parallel \cdot x$$

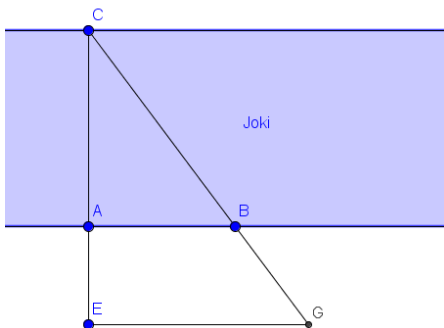
$$x \cdot \cos 55^\circ = 0,9969\dots \quad \parallel : \cos 55^\circ$$

$$x = 1,738\dots$$

$$x \approx 1,7$$

Markiisin pituuden tulee olla noin 1,7 m.

Vastaus: 1,7 m

236B. Piirretään kuva tilanteesta.

Jos kuvanmukaisessa tilanteessa tunnetaan janojen AB , AE ja EG pituudet, voidaan yhdenmuotoisten kolmioiden avulla muodostaa verranto janan CA pituuden ratkaisemiseksi.

$$\frac{CA}{CA + AE} = \frac{AB}{EG}$$

Näin ollen tulee pystyä mittaamaan likimain vastaavan kaltaiset mitat siten, että joen toisella puolella on käytettävänä kiintopiste C , johon kohdistetaan pisteiden B ja G kautta kulkeva jana BC ja pisteiden A ja E kautta kulkeva jana CE . Kolmion ECG ei tarvitse olla suorakulmainen.

Vastaus: —

6 AVARUUSGEOMETRIA

ALOITA PERUSTEISTA

238A. a) Kappale II on likimain särmiö.

Vastaus: II

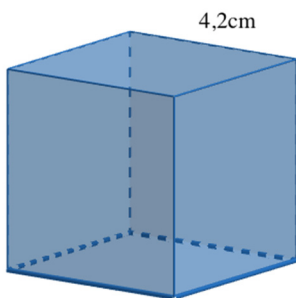
b) Kappaleet II ja III ovat likimain lieriöitä.

Vastaus: II ja III

c) Kappaleet I, V ja VI ovat likimain kartioita.

Vastaus: I, V ja VI

239A. a) Kappale on kuutio, joka särmän pituus on 4,2 cm.

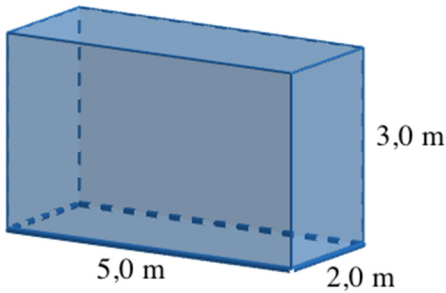


Tilavuus on $V = s^3 = (4,2 \text{ cm})^3 = 74,088 \text{ cm}^3 \approx 74 \text{ cm}^3$.

Pinta-ala on $A = 6 \cdot s^2 = 6 \cdot (4,2 \text{ cm})^2 = 105,84 \text{ cm}^2 \approx 110 \text{ cm}^2$.

Vastaus: 74 cm^3 ja 110 cm^2

- b) Kappale on suorakulmainen särmiö, jonka särmien pituudet ovat 5,0 m, 2,0 m ja 3,0 m.



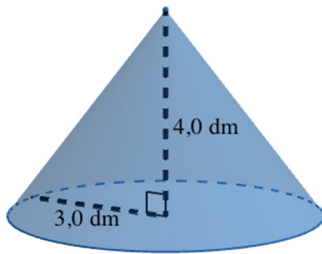
Tilavuus on $V = A_{\text{pohja}} \cdot h = 5,0 \text{ m} \cdot 2,0 \text{ m} \cdot 3,0 \text{ m} = 30 \text{ m}^3$.

Kokonaispinta-ala saadaan laskemalla yhteen kaikkien tahkojen pinta-alat.

$$A = 2 \cdot 5,0 \text{ m} \cdot 2,0 \text{ m} + 2 \cdot 5,0 \text{ m} \cdot 3,0 \text{ m} + 2 \cdot 2,0 \text{ m} \cdot 3,0 \text{ m} = 62 \text{ m}^2$$

Vastaus: 30 m^3 ja 62 m^2

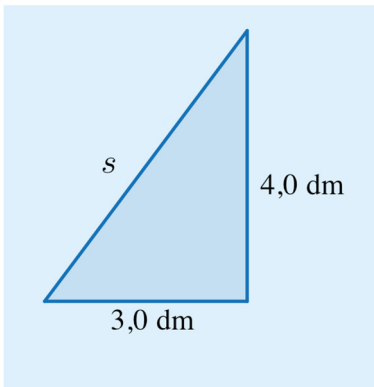
240A. a) Kappale on suora ympyräkartio, jonka pohjaympyrän säde on $r = 3,0$ dm ja korkeus $h = 4,0$ dm.



Tilavuus on

$$V = \frac{1}{3} A_{\text{pohja}} \cdot h = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (3,0 \text{ dm})^2 \cdot 4,0 \text{ dm} \\ = 37,699 \dots \text{ dm}^3 \approx 38 \text{ dm}^3.$$

Määritetään sivujanan s pituus Pythagoraan lauseen avulla.

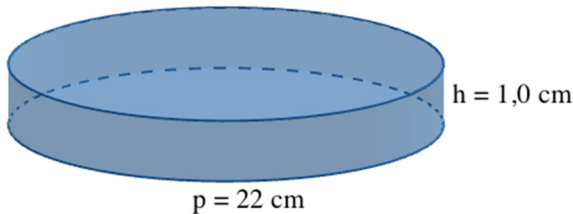


$$3,0^2 + 4,0^2 = s^2 \\ s^2 = 25 \\ s = (\pm) 5$$

$$A_{\text{vaippa}} = \pi r s = \pi \cdot 3,0 \text{ dm} \cdot 5,0 \text{ dm} = 47,123 \dots \text{ dm}^2 \approx 47 \text{ dm}^2$$

Vastaus: 38 dm^3 ja 47 dm^2

- b) Kappale on ympyräpohjainen lieriö, joka pohjaympyrän kehän pituus on 22 cm ja korkeus 1,0 cm.



Määritetään pohjaympyrän säde r ympyrän kehän pituuden p avulla.

$$\begin{aligned} p &= 2\pi r \\ 22 &= 2\pi r & \parallel : 2\pi \\ r &= 3,501\dots \end{aligned}$$

Tilavuus on

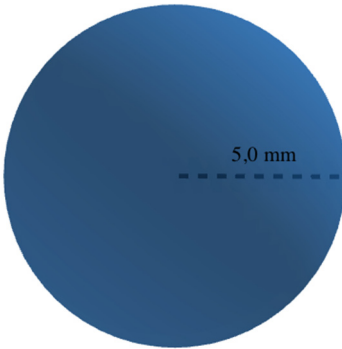
$$\begin{aligned} V &= A_{\text{pohja}} \cdot h = \pi r^2 h \pi \cdot (3,501\dots \text{ cm})^2 \cdot 1,0 \text{ cm} \\ &= 38,515\dots \text{ cm}^3 \approx 39 \text{ cm}^3. \end{aligned}$$

Vaippa on suorakulmio, jonka toinen sivu on lieriön korkeus ja toinen sivu pohjaympyrän kehän pituus.

$$A_{\text{vaippa}} = 22 \text{ cm} \cdot 1,0 \text{ cm} = 22 \text{ cm}^2$$

Vastaus: 39 cm^3 ja 22 cm^2

241A. a) Kappale on pallo, jonka säde on 5,0 mm.



Tilavuus on

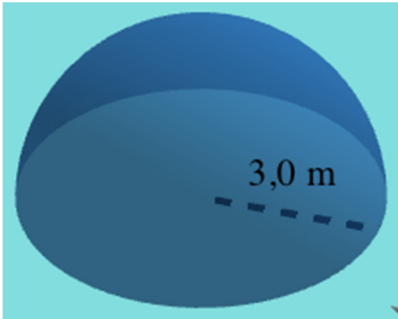
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot (5,0 \text{ mm})^3 = 523,598\dots \text{ mm}^3 \approx 520 \text{ mm}^3.$$

Pinta-ala on

$$A = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot (5,0 \text{ mm})^2 = 314,159\dots \text{ mm}^2 \approx 310 \text{ mm}^2.$$

Vastaus: 520 mm^3 ja 310 mm^2

b) Kappale on puolipallo, jonka säde on 3,0 m.



Tilavuus on

$$V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot (3,0 \text{ m})^3 = 56,548... \text{ m}^3 \approx 57 \text{ m}^3.$$

Puolipallon pinta-ala koostuu pallopinnan puolikkaasta ja ympyrästä.

$$\begin{aligned} A_{\text{kok}} &= A_{\text{puolipallo}} + A_{\text{ympyrä}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 4\pi r^2 + \pi r^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot 4\pi \cdot (3,0 \text{ m})^2 + \pi \cdot (3,0 \text{ m})^2 \\ &= 84,823... \text{ m}^2 \\ &\approx 85 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

Vastaus: 57 m^3 ja 85 m^2

242A. a) Varaston sivujen pituudet ovat $a = 2,0$ m, $b = 2,0$ m ja $c = 2,5$ m.

Lasketaan varaston avaruuslävistäjän pituus

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{2,0^2 + 2,0^2 + 2,5^2} = 3,7749... \approx 3,8.$$

Varaston avaruuslävistäjän pituus on noin 3,8 m.

Vastaus: 3,8 m

b) Oksasahan varsi mahtuu varastoon, jos varaston avaruuslävistäjä on pidempi kuin varsi. Avaruuslävistäjä 3,7749... m on suurempi kuin oksasahan varren pituus 3,4 m, joten oksasahan varsi mahtuu varastoon.

Vastaus: mahtuu

243A. a) Putken ulkohalkaisija on 53 mm ja putken paksuus on 4 mm. Putken sisähalkaisija on $53 \text{ mm} - 2 \cdot 4 \text{ mm} = 45 \text{ mm}$.

Vastaus: 45 mm

b) Putken tilavuus saadaan kertomalla pohjan pinta-ala putken korkeudella. Pohja on ympyrä, jonka säde on $\frac{45 \text{ mm}}{2} = 22,5 \text{ mm}$.

Muutetaan pituudet desimetreiksi.

$$22,5 \text{ mm} = 0,225 \text{ dm}$$

$$190 \text{ cm} = 19 \text{ dm}$$

Putken tilavuus on

$$V = A_{\text{pohja}} \cdot h = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot (0,225 \text{ dm})^2 \cdot 19 \text{ dm} = 3,021... \text{ dm}^3.$$

Putkeen mahtuu vettä noin 3,0 litraa.

Vastaus: 3,0 litraa

- 244A. a)** Sijoitetaan kappaleen tilavuus $V = 905 \text{ m}^3$ ja korkeus $h = 8,00 \text{ m}$ lieriön tilavuuden lausekkeeseen ja ratkaistaan siitä pohjan pinta-ala A_{pohja} .

$$\begin{aligned} V &= A_{\text{pohja}} \cdot h \\ 905 &= A_{\text{pohja}} \cdot 8,00 \quad || : 8,00 \\ A_{\text{pohja}} &= \frac{905}{8} \\ A_{\text{pohja}} &= 113,125 \\ A_{\text{pohja}} &\approx 113 \end{aligned}$$

Kappaleen pohjan pinta-ala on noin 113 m^2 .

Vastaus: $A_{\text{pohja}} \approx 113 \text{ m}^2$

- b)** Sijoitetaan kappaleen tilavuus $V = 905 \text{ m}^3$ ja korkeus $h = 8,00 \text{ m}$ kartion tilavuuden lausekkeeseen ja ratkaistaan siitä pohjan pinta-ala A_{pohja} .

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} A_{\text{pohja}} \cdot h \\ 905 &= \frac{1}{3} A_{\text{pohja}} \cdot 8,00 \\ 905 &= 2,666... \cdot A_{\text{pohja}} \quad || : 2,666... \\ A_{\text{pohja}} &= 339,375 \\ A_{\text{pohja}} &\approx 339 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

Kappaleen pohjan pinta-ala on noin 339 m^2 .

Vastaus: $A_{\text{pohja}} \approx 339 \text{ m}^2$

245A. a) $1,5 \text{ l} = 1,5 \text{ dm}^3 = 1500 \text{ cm}^3$

Vastaus: 1500 cm^3

- b)** Merkitään kuution muotoisen pakkauksen särmän pituutta kirjaimella a . Pakkauksen tilavuus on $V = a^3$.

Koska tilavuus on toisaalta $V = 1500 \text{ cm}^3$, saadaan yhtälö $1500 = a^3$.

Ratkaistaan yhtälöstä särmän pituus a .

$$\begin{aligned} 1500 &= a^3 \\ a &= \sqrt[3]{1500} \\ a &= 11,447\dots \end{aligned}$$

Pakkauksen särmän pituus on noin 11 cm.

Vastaus: 11 cm

- c)** Pakkaus muodostuu kuudesta samanlaisesta neliöstä. Yhden neliön sivun pituus on b-kohdan mukaan 11,447... cm, joten yhden neliön pinta-ala on $A = 11,447\dots \text{ cm} \cdot 11,447\dots \text{ cm} = 131,037\dots \text{ cm}^2$.

Pakkaukseen tarvitaan pahvia
 $6 \cdot 131,037\dots \text{ cm}^2 = 786,222\dots \text{ cm}^2 \approx 790 \text{ cm}^2$.

Pahvia tarvitaan noin 790 cm^2 .

Vastaus: 790 cm^2

- 246A. a)** Katto muodostuu suoran ympyrälieriön vaipan puolikkaasta. Vaippa on suorakulmio, jonka toinen sivu on 40 m ja toinen sivu päädyssä olevan puoliympyrän kehän pituus. Lasketaan kehän pituus, kun piin likiarvona käytetään lukua 3.

$$p_{\text{puoliympyrä}} = \frac{2\pi r}{2}$$

$$p_{\text{puoliympyrä}} = \pi r$$

$$p_{\text{puoliympyrä}} = 3 \cdot 5 \text{ m} = 15 \text{ m}$$

Lassen arvio katon pinta-alalle on
 $15 \text{ m} \cdot 40 \text{ m} = 600 \text{ m}^2$.

Vastaus: 600 m^2

- b)** Lasketaan kuinka monta prosenttia 630 m^2 on suurempi kuin 600 m^2 .

$$\frac{630 \text{ m}^2}{600 \text{ m}^2} = 1,05 = 105 \%$$

Todellinen tulos on 105 % arvion tuloksesta, joten todellinen tulos on
 $105 \% - 100 \% = 5 \%$ suurempi.

Vastaus: 5 % suurempi

- 247A. a)** Suurennoksen mittakaava on 2:1, joten särmän pituus kaksinkertaistuu. Alkuperäinen särmän pituus on 5 cm, joten suurennoksessa se on $2 \cdot 5 \text{ cm} = 10 \text{ cm}$. Väite on oikein.

Vastaus: oikein

- b)** Alkuperäisen kuution särmän pituus on 5 cm, joten sen tilavuus on $(5 \text{ cm})^3 = 125 \text{ cm}^3$. Väite on oikein.

Vastaus: oikein

- c)** Suurennoksen särmän pituus on 10 cm, joten sen tilavuus on $(10 \text{ cm})^3 = 1000 \text{ cm}^3$.

Koska $\frac{1000 \text{ cm}^3}{125 \text{ cm}^3} = 8$, niin suurennoksen tilavuus on 8-kertainen

alkuperäisen kuution tilavuuteen nähden. Väite on väärin.

Vastaus: väärin, 8-kertainen

- d)** Alkuperäisen kuution särmän pituus on 5 cm, ja kuution pinta-ala koostuu kuudesta samanlaisesta neliöstä. Yhden neliön pinta-ala on $(5 \text{ cm})^2 = 25 \text{ cm}^2$, joten koko kuution pinta-ala on $6 \cdot 25 \text{ cm}^2 = 150 \text{ cm}^2$.

Suurennoksen särmän pituus on 10 cm, joten yhden neliön pinta-ala on $(10 \text{ cm})^2 = 100 \text{ cm}^2$. Koko kuution pinta-ala on $6 \cdot 100 \text{ cm}^2 = 600 \text{ cm}^2$.

Koska $\frac{150}{600} = \frac{1}{4}$, niin alkuperäisen kuution pinta-ala on neljäsosa

suurennoksen pinta-alasta. Väite on oikein.

Vastaus: oikein

248B. a) Tennispallon säde on $r = \frac{6,7 \text{ cm}}{2} = 3,35 \text{ cm}$. Tennispallon tilavuus on

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi \cdot (3,35 \text{ cm})^3 = 157,479... \text{ cm}^3 \approx 160 \text{ cm}^3.$$

Vastaus: 160 cm^3

- b)** Pakkaus on suoran ympyrälieriön muotoinen, sen korkeus on $3 \cdot 6,7 \text{ cm} = 20,1 \text{ cm}$ ja pohjaympyrän säde $3,35 \text{ cm}$.

Pakkauksen tilavuus on

$$V = \pi r^2 h = \pi \cdot (3,35 \text{ cm})^2 \cdot 20,1 \text{ cm} = 708,656... \text{ cm}^3 \approx 710 \text{ cm}^3.$$

Vastaus: 710 cm^3

- c)** Pakkauksen sisälle jäävät tyhjän tilan tilavuus saadaan, kun pakkauksen tilavuudesta vähennetään kolmen pallon tilavuus.

Tyhjän tilan tilavuus on

$$V = 708,656... \text{ cm}^3 - 3 \cdot 157,479... \text{ cm}^3 = 236,218... \text{ cm}^3 \approx 240 \text{ cm}^3.$$

Vastaus: 240 cm^3

- 249B. a)** Paperista kääritään suora ympyrälieriö. Määritetään lieriön pohjaympyrän säde, kun pohjan piiri on paperin pidempi sivu.

$$\begin{aligned} p &= 2\pi r \\ 29,7 \text{ cm} &= 2\pi r \quad || :2\pi \\ r &= 4,726... \text{ cm} \end{aligned}$$

Lieriön tilavuus on

$$\begin{aligned} V &= \pi r^2 h \\ &= \pi \cdot (4,726... \text{ cm})^2 \cdot 21,0 \text{ cm} \\ &= 1474,084... \text{ cm}^3 \\ &\approx 1470 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Vastaus: 1470 cm^3

- b)** Paperista kääritään suora ympyrälieriö. Määritetään lieriön pohjaympyrän säde, kun pohjan piiri on paperin lyhempi sivu.

$$\begin{aligned} p &= 2\pi r \\ 21,0 \text{ cm} &= 2\pi r \quad || :2\pi \\ r &= 3,342... \text{ cm} \end{aligned}$$

Lieriön tilavuus on

$$\begin{aligned} V &= \pi r^2 h \\ &= \pi \cdot (3,342... \text{ cm})^2 \cdot 29,7 \text{ cm} \\ &= 1042,281... \text{ cm}^3 \\ &\approx 1040 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Vastaus: 1040 cm^3

VAHVISTA OSAAMISTA

250B. Pallon sisällä ei ole tyhjää tilaa, jos pallon mitatuista tiedoista laskettu tiheys on sama kuin kuparin annettu tiheys.

Merkitään kuparipallon sädettä kirjaimella r . Muodostetaan yhtälö pallon ympärysmitan avulla ja ratkaistaan siitä säde r .

$$\begin{aligned} 64,2 \text{ cm} &= 2\pi r & || : 2\pi \\ r &= 10,217... \end{aligned}$$

Tiheys saadaan jakamalla massa tilavuudella. Määritetään kuparipallon tilavuus.

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot (10,217... \text{ cm})^3 = 4468,421... \text{ cm}^3$$

Lasketaan tiheys jakamalla pallon massa $37,9 \text{ kg} = 37\,900 \text{ g}$ pallon tilavuudella.

$$\frac{37\,900 \text{ g}}{4468,421... \text{ cm}^3} = 8,481... \text{ g/cm}^3$$

Koska kuparipallon tiheys on pienempi kuin puhtaan kuparin tiheys, pallon sisällä on tyhjää tilaa.

Vastaus: on

251A. Särmien pituuksien suhde on 1:2:3. Merkitään lyhimmän särmän pituutta kirjaimella a , jolloin särmät ovat a , $2a$ ja $3a$.

Särmiön tilavuus on $V = a \cdot 2a \cdot 3a$. Toisaalta särmiön tilavuus on 48 cm^3 . Saadaan yhtälö $a \cdot 2a \cdot 3a = 48$. Ratkaistaan siitä pituusyksikkö a .

$$\begin{aligned} a \cdot 2a \cdot 3a &= 48 \\ 6a^3 &= 48 & \parallel :6 \\ a^3 &= 8 \\ a &= \sqrt[3]{8} \\ a &= 2 \end{aligned}$$

Särmiön mitat ovat $a = 2 \text{ cm}$, $2a = 4 \text{ cm}$ ja $3a = 6 \text{ cm}$.

Vastaus: 2 cm, 4 cm ja 6 cm

252B. a) Tiheys 550 kg/m^3 tarkoittaa, että yksi kuutiometri lautaa painaa 550 kilogrammaa. Linnun pöntön massa saadaan laskemalla osien yhteistilavuus ja kertomalla se tiheydellä.

Linnunpönttö koostuu kuudesta suorakulmaisesta särmiöstä, joiden kaikkien korkeus on 2 cm. Lasketaan särmiöiden pohjan yhteispinta-ala ja kerrotaan se korkeudella.

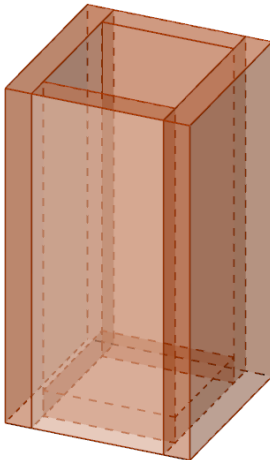
$$\begin{aligned} V &= (26 \text{ cm} \cdot 14 \text{ cm} \cdot 2 + 14 \text{ cm} \cdot 18 \text{ cm} + 10 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm} \\ &+ 26 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm} \cdot 2) \cdot 2 \text{ cm} \\ &= 3200 \text{ cm}^3 \\ &= 0,0032 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

Lasketaan linnunpöntön massa kertomalla tiheys tilavuudella.

$$550 \text{ kg/m}^3 \cdot 0,0032 \text{ m}^3 = 1,76 \text{ kg} \approx 1,8 \text{ kg}$$

Vastaus: 1,8 kg

- b) Piirretään kuva tilanteesta. Linnunpöntössä pystyssä on vastakkain kokoa $10\text{ cm} \cdot 26\text{ cm}$ olevat osat ja vastakkain kokoa $14\text{ cm} \cdot 26\text{ cm}$ olevat osat. Koska pohja on 2 cm paksu, sisäpuolen korkeudeksi tulee $26\text{ cm} - 2\text{ cm} = 24\text{ cm}$.



$$h_{\text{sisä}} = 26\text{ cm} - 2\text{ cm} = 24\text{ cm}$$

Viimeinen osa asettuu katoksi kuvan päälle, jolloin sisätilavuus loppuu kuvan seinäautojen yläreunaan. Sisätilavuus on suorakulmainen särmiö, jonka pohjana on $10\text{ cm} \cdot 10\text{ cm}$ pala ja jonka korkeus on 24 cm . Lasketaan sisätilavuus.

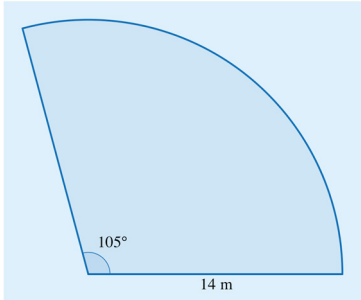
$$V = 10\text{ cm} \cdot 10\text{ cm} \cdot 24\text{ cm} = 2400\text{ cm}^3$$

Linnunpöntön sisätilavuus on 2400 cm^3 .

Vastaus: 2400 cm^3

253B. Vesi muodostaa lieriön, jonka pohja on sektori.
Lieriön korkeus on $4 \text{ mm} = 0,04 \text{ dm}$, pohjasektorin keskuskulma 105° ja pohjasektorin säde $14 \text{ m} = 140 \text{ dm}$.

Piirretään kuva tilanteesta.



Lasketaan muodostuvan lieriön pohjan pinta-ala.

$$A_{\text{pohjasektori}} = \frac{105^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot (140 \text{ dm})^2 = 17\,959,433\dots \text{ dm}^3$$

Muodostuvan lieriön tilavuus on

$$V = 17\,959,439\dots \text{ dm}^3 \cdot 0,04 \text{ dm} = 718,377\dots \text{ dm}^3.$$

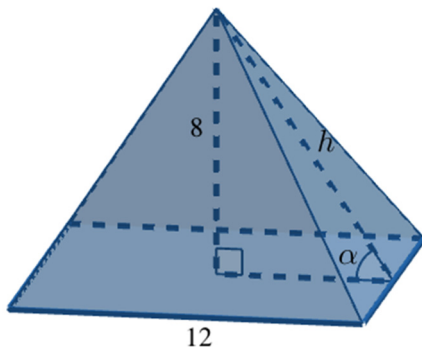
Vettä tarvitaan $718,377\dots \text{ dm}^3 = 718,377\dots \text{ l}$. Lasketaan, kuinka monta minuuttia sadetinta on pidettävä päällä, kun se suihkuttaa 32 litraa minuutissa.

$$\frac{718,377\dots \text{ l}}{32 \text{ l/min}} = 22,449\dots \text{ min} \approx 22 \text{ min } 27 \text{ s}$$

22 minuuttia ei vielä riitä, joten sadetinta on pidettävä toiminnassa 23 minuuttia.

Vastaus: 23 minuuttia

254B. Merkitään sivutahkon korkeutta kirjaimella h ja sivutahkon ja pohjan välistä kulmaa kirjaimella α . Piirretään kuva tilanteesta.



Pyramidin sisälle muodostuu suorakulmainen kolmio, jonka toinen kateetti on 8 ja toinen kateetti pohjaneliön sivun puolikas 6. Määritetään sivutahkon korkeus h Pythagoraan lauseen avulla.

$$\begin{aligned} 8^2 + 6^2 &= h^2 \\ h^2 &= 100 \\ h &= (\pm) \sqrt{100} \\ h &= 10 \end{aligned}$$

Sivutahko on kolmio, jonka pinta-ala on

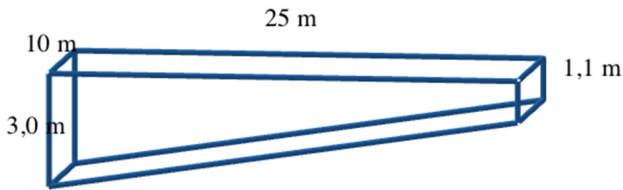
$$A = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 10 = 60.$$

Määritetään kulman α suuruus tangentin avulla.

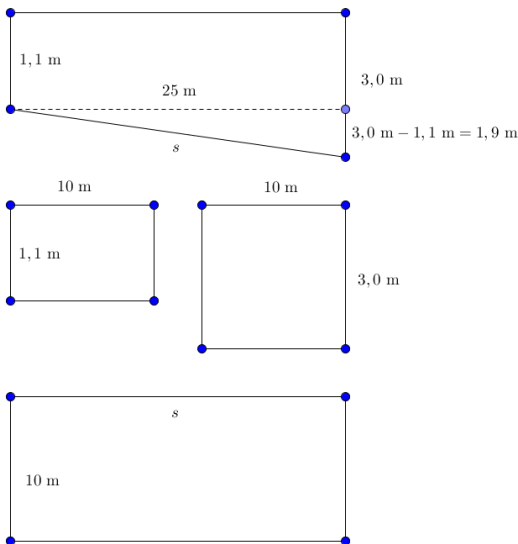
$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{8}{6} \\ \alpha &= 53,130\dots^\circ \\ \alpha &\approx 53,13^\circ \end{aligned}$$

Vastaus: 60 ja $53,13^\circ$

255B. Piirretään kuva tilanteesta.



Uima-altaan sisäpinta koostuu kahdesta samanlaisesta puolisuunnikkaasta sivuilla ja kolmesta erikokoisesta suorakulmiosta päädyissä ja pohjassa.



Lasketaan pohjasuorakulmion sivun pituus s sivuseinään muodostuvan suorakulmaisen kolmion ja Pythagoraan lauseen avulla.

$$\begin{aligned} 25^2 + 1,9^2 &= s^2 \\ s^2 &= 628,61 \\ s &= 25,072\dots \end{aligned}$$

Lasketaan osien pinta-alat yhteen.

$$\begin{aligned} A_{\text{koko}} &= 2 \cdot \frac{1,1 \text{ m} + 3,0 \text{ m}}{2} \cdot 25 \text{ m} + 10 \text{ m} \cdot 1,1 \text{ m} + 10 \text{ m} \cdot 3,0 \text{ m} + 10 \text{ m} \cdot 25,072 \dots \text{ m} \\ &= 394,220 \dots \text{ m}^2 \end{aligned}$$

Yhden laatan pinta-ala on $0,30 \text{ m} \cdot 0,20 \text{ m} = 0,06 \text{ m}^2$. Lasketaan kuinka monta laattaa uima-altaan pintaan tarvitaan.

$$\frac{394,220 \dots \text{ m}^2}{0,06 \text{ m}^2} = 6570,349 \dots$$

Laattoja tarvitaan vähintään 6571 kappaletta. Lasketaan, kuinka monta laatikkoa on ostettava, jotta saadaan tarvittavat laatat.

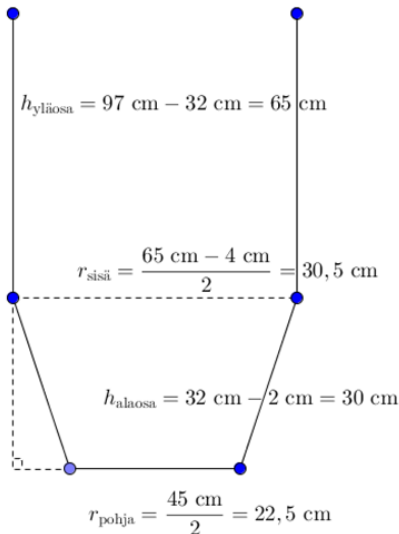
$$\frac{6571}{30} = 219,033 \dots$$

Tarvitaan siis vähintään 220 laatikkoa laattoja.

Vastaus: 220 laattalaatikkoa

256B. Tommin ostaman kompostikäymälän sisäosa koostuu suorasta ympyräpohjaisesta lieriöstä ja suorasta katkaistusta ympyräkartiosta.

Lasketaan osien pituudet kuvan avulla.

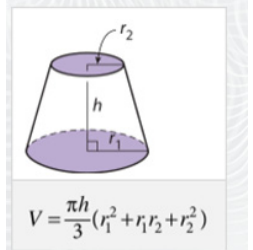


Yläosan lieriön tilavuus on

$$V = \pi \cdot (30,5 \text{ cm})^2 \cdot 65 \text{ cm} = 189\,960,326\dots \text{ cm}^3.$$

Katkaistun kartion tilavuus voidaan laskea oheisella kaavalla.

Katkaistu ympyräkartio



$$\begin{aligned}
 V_{\text{alaosa}} &= \frac{\pi \cdot 30 \text{ cm}}{3} \cdot ((22,5 \text{ cm})^2 + 22,5 \text{ cm} \cdot 30,5 \text{ cm} + (30,5 \text{ cm})^2) \\
 &= 66\,688,158\dots \text{ cm}^3
 \end{aligned}$$

Sisätilavuus on yhteensä

$$\begin{aligned}
 &189\,960,326\dots \text{ cm}^3 + 66\,688,158\dots \text{ cm}^3 \\
 &= 256\,648,484\dots \text{ cm}^3 \approx 260\,000 \text{ cm}^3 = 260 \text{ dm}^3 = 260 \text{ l.}
 \end{aligned}$$

Vastaus: 260 litraa

257B. Sulava jää muuttuu vedeksi. Veden voidaan ajatella muodostavan lieriön, jonka korkeus on vedenpinnan kohoama. Lasketaan veden tilavuus, kun 30 % jäätä sulaa.

$$V_{\text{sulava jää}} = 0,3 \cdot 1\,834\,000 \text{ km}^2 \cdot 2 \text{ km} = 1\,100\,400 \text{ km}^3$$

Sulavan jään massa on yhtä suuri kuin sulamisesta syntyvän veden massa. Lasketaan sulavan jään massa, joka saadaan kertomalla jään tilavuus sen tiheydellä.

$$\begin{aligned} m &= 1\,100\,400 \text{ km}^3 \cdot 0,9 \text{ kg/dm}^3 \\ &= 1\,100\,400\,000\,000\,000\,000 \text{ dm}^3 \cdot 0,9 \text{ kg/dm}^3 \\ &= 9,9036 \cdot 10^{17} \text{ kg} \end{aligned}$$

Lasketaan veden tilavuus tiheyden avulla. Veden tilavuus saadaan jakamalla sen massa tiheydellä.

$$\frac{9,9036 \cdot 10^{17} \text{ kg}}{1 \text{ kg/dm}^3} = 9,9036 \cdot 10^{17} \text{ dm}^3 = 990\,360 \text{ km}^3$$

Lasketaan merien pinta-ala, joka on sulavan veden lieriön pohja.

$$A_{\text{meret}} = 0,71 \cdot 4 \cdot \pi \cdot (6400 \text{ km})^2 = 365\,450\,163,658\dots \text{ km}^2$$

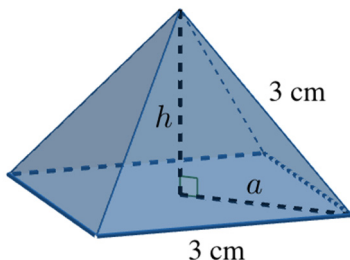
Merkitään vedeksi sulaneen jään muodostaman lieriön korkeutta kirjaimella h . Muodostetaan yhtälö lieriön tilavuuden kaavan avulla ja ratkaistaan siitä veden pinnan kokouma h .

$$\begin{aligned} V &= A_p \cdot h \\ 990\,360 &= 365\,450\,163,658\dots \cdot h \quad || : 365\,450\,163,658\dots \\ h &= 0,002709\dots \end{aligned}$$

Veden pinta nousisi $0,002709\dots \text{ km} = 2,709\dots \text{ m} \approx 2,7 \text{ m}$.

Vastaus: 2,7 m

258B. Lasketaan valmistettavan pelinappulan tilavuus. Merkitään pyramidin muotoisen nappulan korkeutta kirjaimella h ja pohjan lävistäjän puolikasta kirjaimella a . Piirretään kuva tilanteesta.



Koska pohja on neliö, pohjan lävistäjän puolikas a on hypotenuusa suorakulmaisessa kolmiossa, jonka kateetit ovat 1,5 cm pitkiä.

Määritetään pohjan lävistäjän puolikkaan pituus a Pythagoraan lauseen avulla.

$$\begin{aligned} 1,5^2 + 1,5^2 &= a^2 \\ a^2 &= 4,5 \\ a &= (\pm)\sqrt{4,5} \\ a &= 2,121\dots \end{aligned}$$

Korkeusjana h muodostaa suorakulmaisen kolmion sivusärmän ja pohjan halkaisijan puolikkaan a kanssa. Muodostetaan yhtälö Pythagoraan lauseen avulla ja ratkaistaan siitä korkeus h .

$$\begin{aligned} h^2 + 2,121\dots^2 &= 3^2 \\ h^2 &= 4,5 \\ h &= (\pm)\sqrt{4,5} \\ h &= 2,121\dots \end{aligned}$$

Kuuden pyramidin tilavuus on

$$V = 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot (3 \text{ cm})^2 \cdot 2,121\dots \text{ cm} = 38,183\dots \text{ cm}^3.$$

Raakamuovihelman säde on 2 mm = 0,2 cm.

Yhden raakamuovihelman tilavuus on $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (0,2 \text{ cm})^3 = 0,033... \text{ cm}^3$.

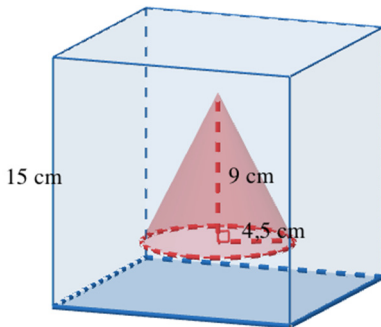
Lasketaan, kuinka monta helmeä peliin tarvitaan.

$$\frac{38,183... \text{ cm}^3}{0,033... \text{ cm}^3} = 1139,462...$$

Helmiä tarvitaan yhteen peliin noin 1140 kappaletta.

Vastaus: 1140 helmeä

259B. Styrox-palloilla täytettävä tila lasketaan vähentämällä kuution tilavuudesta kartion tilavuus. Kartion ja laatikon reunojen väliin on jäätävä 3 cm pehmustetta, joten kartion korkeus voi olla enintään $15 \text{ cm} - 2 \cdot 3 \text{ cm} = 9 \text{ cm}$ ja pohjaympyrän halkaisija $15 \text{ cm} - 2 \cdot 3 \text{ cm} = 9 \text{ cm}$. Piirretään kuva tilanteesta.



Lasketaan kartion tilavuus.

$$V_{\text{kartio}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (4,5 \text{ cm})^2 \cdot 9 \text{ cm} = 190,851... \text{ cm}^3$$

Lasketaan kuution tilavuus.

$$V_{\text{kuutio}} = (15 \text{ cm})^3 = 3375 \text{ cm}^3$$

Styrox-palloilla täytettävä tilavuus on

$$3375 \text{ cm}^3 - 190,851... \text{ cm}^3 = 3184,148... \text{ cm}^3.$$

Pallojen väliin jää 40 % tyhjää tilaa, joten styrox-pallojen yhteistilavuus on oltava $0,60 \cdot 3184,148... \text{ cm}^3 = 1910,488... \text{ cm}^3$.

Lasketaan yhden styrox-pallon tilavuus.

$$V_{\text{helmi}} = \frac{4}{3} \pi \cdot (0,3 \text{ cm})^3 = 0,113... \text{ cm}^3$$

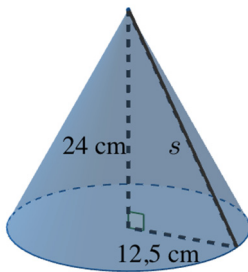
Lasketaan, kuinka monta palloa tarvitaan.

$$\frac{1910,488... \text{ cm}^3}{0,113... \text{ cm}^3} = 16\,892,431... \approx 17\,000$$

Palloja mahtuu laatikkoon noin 17 000 kappaletta.

Vastaus: 17 000 palloa

260B. Leikattavan sektorin säde on kartion sivujana ja sektorin kaaren pituus kartion pohjan kehän pituus. Merkitään sivujanan pituutta kirjaimella s . Piirretään kuva.



Lasketaan sektorin säde s Pythagoraan lauseen avulla.

$$\begin{aligned} 24^2 + 12,5^2 &= s^2 \\ s^2 &= 732,25 \\ s &= (\pm) \sqrt{732,25} \\ s &= 27,060\dots \end{aligned}$$

Sektorin keskuskulma voidaan määrittää sektorin kaaren pituuden kaavan avulla. Lasketaan sektorin kaaren pituus määrittämällä kartion pohjaympyrän kehän pituus.

$$p = 2\pi \cdot 12,5 \text{ cm} = 78,539\dots \text{ cm}$$

Muodostetaan yhtälö sektorin kaaren pituuden avulla ja ratkaistaan siitä sektorin keskuskulma α .

$$\begin{aligned} 78,539\dots &= \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 27,060\dots && \parallel: 2\pi \\ \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 27,060\dots &= 12,5 && \parallel: 27,060\dots \\ \frac{\alpha}{360^\circ} &= 0,461\dots && \parallel \cdot 360^\circ \\ \alpha &= 166,296\dots^\circ \\ \alpha &\approx 166^\circ \end{aligned}$$

Sektorin säde on 27 cm ja keskuskulma 166° .

Vastaus: 27 cm ja 166°

261A. Merkitään suuremman lasimaljakon korkeutta kirjaimella h .
Pienemmän lasimaljakon korkeus on tällöin $0,6h$.

Mittakaava on $k = \frac{0,6h}{h} = 0,6$.

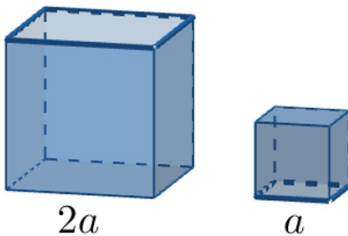
Tilavuuksien suhde on mittakaavan kuutio, joten

$$\frac{V_{\text{pieni}}}{V_{\text{iso}}} = k^3 = 0,6^3 = 0,216.$$

Pienemmän lasimaljakon tilavuus on 21,6 % suuremman lasimaljakon tilavuudesta.

Vastaus: 21,6 %

- 262A.** Merkitään pienemmän kuution särmän pituutta kirjaimella a , jolloin suuremman kuution särmän pituus on $2a$.



- a)** Lasketaan kuutioiden tilavuudet.

$$V_{\text{pieni}} = a^3$$

$$V_{\text{iso}} = (2a)^3 = 8a^3$$

Lasketaan, kuinka monta prosenttia pienen kuution tilavuus on ison kuution tilavuudesta.

$$\frac{a^3}{8a^3} = \frac{1}{8} = 0,125$$

Pienen kuution tilavuus on siis $1 - 0,125 = 0,875 = 87,5 \%$ pienempi kuin iso kuution tilavuus, joten särmän puolittaminen pienentää kuution tilavuutta $87,5 \%$.

Vastaus: $87,5 \%$

- b)** Lasketaan kuutioiden sivutahkojen pinta-alat.

$$A_{\text{pieni}} = 6 \cdot a^2$$

$$A_{\text{iso}} = 6 \cdot (2a)^2 = 24a^2$$

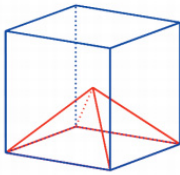
Lasketaan, kuinka monta prosenttia pienen kuution pinta-ala on ison kuution pinta-alasta.

$$\frac{6a^2}{24a^2} = \frac{1}{4} = 0,25$$

Pienen kuution pinta-ala on siis $1 - 0,25 = 0,75 = 75 \%$ pienempi kuin iso kuution pinta-ala, joten särmän puolittaminen pienentää kuution pinta-alaa 75% .

Vastaus: 75%

263B. Merkitään kuution särmän pituutta kirjaimella s .



Kuution tilavuus on $V_{\text{kuutio}} = s^3$.

Pyramidin pohjan pinta-ala on s^2 ja korkeus $\frac{1}{2}s$. Pyramidin tilavuus on

$$V_{\text{pyramidi}} = \frac{1}{3} A_{\text{pohja}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot s^2 \cdot \frac{1}{2}s = \frac{1}{6}s^3 = \frac{1}{6}V_{\text{kuutio}}.$$

Koska pyramidin tilavuus on kuudesosa kuution tilavuudesta, pyramidin tilavuuden suhde kuution tilavuuteen on 1:6.

Vastaus: 1:6

264B. Yhdenmuotoisten kuvioiden pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö, joten

$$k^2 = \frac{A_{\text{pieni}}}{A_{\text{iso}}} = \frac{1}{4}$$

$$k = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

Yhdenmuotoisten kappaleiden tilavuuksien suhde on mittakaavan kuutio, joten

$$\frac{V_{\text{pieni}}}{V_{\text{iso}}} = k^3$$

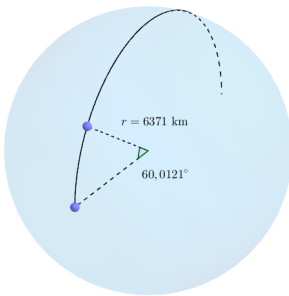
$$\frac{3,0}{V_{\text{iso}}} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \quad || \cdot V_{\text{iso}}$$

$$V_{\text{iso}} \cdot \frac{1}{8} = 3,0 \quad || \cdot 8$$

$$V_{\text{iso}} = 24$$

Isomman laatikon tilavuus on 24 l.

Vastaus: 24 litraa

265B. Piirretään kuva tilanteesta.

Pohjoisen leveyspiirin asteluku ilmaisee kulman, jonka kyseinen leveyspiiri poikkeaa päiväntasaajasta. Tällöin lyhin matka Oulusta päiväntasaajalle Maapallon pintaa pitkin on kuvaan muodostuneen sektorin kaaren pituus. Lasketaan matka Oulusta päiväntasaajalle.

$$b = \frac{60,0121^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 6371 \text{ km} = 6673,041\dots \text{ km} \approx 6673 \text{ km}$$

Lyhin matka Maapallon pintaa pitkin Oulusta päiväntasaajalle on noin 6673 km.

Vastaus: 6673 km

266B. a) Länsirajan pituus on kuvassa kulman α rajaaman sektorin kaaren pituus. Sektorin säde on maapallon säde 6371 km ja keskuskulma α on $41^\circ - 37^\circ = 4^\circ$.

Lasketaan sektorin kaaren pituus.

$$b = \frac{4^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 6371 \text{ km} = 444,779\dots \text{ km} \approx 445 \text{ km}$$

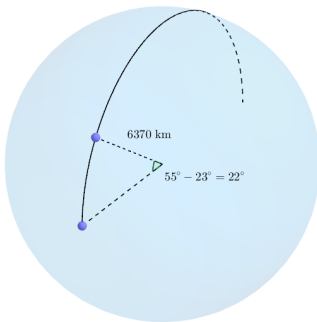
Coloradon osavaltion länsirajan pituus on noin 445 km.

Vastaus: 445 km

- b)** Coloradon osavaltion eteläraja kulkee 37. leveyspiiriä ja pohjoisranta 41. leveyspiiriä pitkin. Molemmat ovat saman asteluvun suuruisia ympyrän kaaria. Leveyspiiri on sitä pidempi, mitä lähempänä päiväntasaajaa se on, joten samaa astelukua vastaavista leveyspiirin osista lähempänä päiväntasaajaa oleva on pidempi. Siis Coloradon osavaltion eteläraja on pohjoisrajaa pidempi.

Vastaus: eteläraja

- 267B.** Lyhin matka, jonka kivihiiliesiintymä on kulkenut, on pituuspiiriä pitkin. Tällain lyhin kuljettu matka on Maapallon pintaa pitkin siten, että matka on $55^\circ - 23^\circ = 22^\circ$ sektorin kaaren pituus. Piirretään kuva tilanteesta.



Lasketaan kivihiiliesiintymän kulkema matka.

$$b = \frac{22^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 6370 \text{ km} = 2445,904... \text{ km}$$

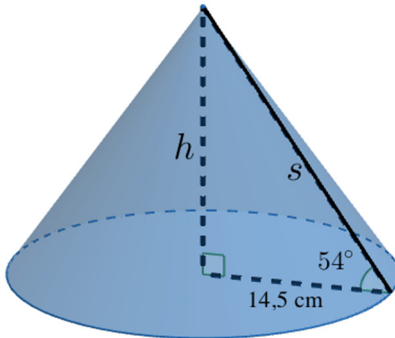
Kivihiiliesiintymä ja samalla myös Britannia on liikkunut vähintään 2446 km matkan. Tähän kului 300 000 000 vuotta. Lasketaan, kuinka pitkän matkan Britannia liikkui keskimäärin vuodessa.

$$\frac{2445,904... \text{ km}}{300\,000\,000 \text{ a}} = 0,000008153... \text{ km/a} = 8,153... \text{ mm/a} \approx 8,15 \text{ mm/a}$$

Britannia liikkui keskimäärin 8,15 mm vuodessa.

Vastaus: 2446 km ja 8,15 mm vuodessa

268B. Koska kolmio on suorakulmainen, terävien kulmien suuruudet ovat 54° ja $90^\circ - 54^\circ = 36^\circ$. Pidempi kateeteista on suurempaa kulmaa vastapäätä. Merkitään pidemmän kateetin sivun pituutta kirjaimella h ja kolmion hypotenuusaa eli muodostuvan kartion sivujanaa kirjaimella s . Piirretään kuva tilanteesta.



Lasketaan kolmion toisen kateetin pituus h ja hypotenuusan pituus s suorakulmaisen kolmion trigonometrian avulla.

$$\tan 54^\circ = \frac{h}{14,5} \quad || \cdot 14,5$$

$$h = 19,957\dots$$

$$\cos 54^\circ = \frac{14,5}{s} \quad || \cdot s$$

$$s \cdot \cos 54^\circ = 14,5 \quad || : \cos 54^\circ$$

$$s = 24,668\dots$$

Lasketaan tietojen avulla kartion tilavuus.

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (14,5 \text{ cm})^2 \cdot 19,957\dots \text{ cm} = 4394,116\dots \text{ cm}^3 \approx 4390 \text{ cm}^3$$

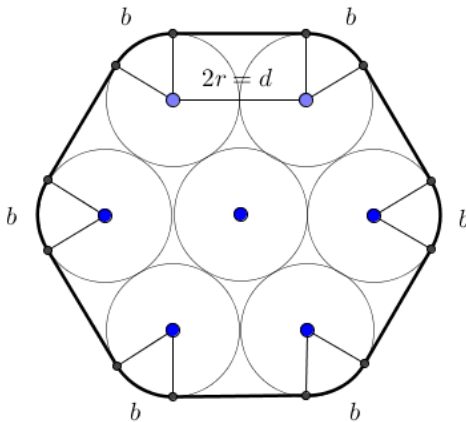
Lasketaan tietojen avulla kartion vaipan pinta-ala.

$$A = \pi \cdot 14,5 \text{ cm} \cdot 24,668\dots \text{ cm} = 1123,743\dots \text{ cm}^2 \approx 1120 \text{ cm}^2$$

Vastaus: 4390 cm^3 ja 1120 cm^2

SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

269B. Piirretään kuvaan apuviivoja. Johtimen halkaisija on $d = 1$ mm, joten säde on $r = 0,5$ mm.



Tasoon levitettyinä kuori muodostaa suorakulmion, jonka toinen sivu koostuu kuudesta johtimen halkaisijan mittaisesta osasta ja kuudesta sektorin kaaren pituudesta b . Asettamalla kuvaan piirretyt sektorit vierekkäin havaitaan sektorien muodostavan yhteensä yhden kokonaisen ympyrän.

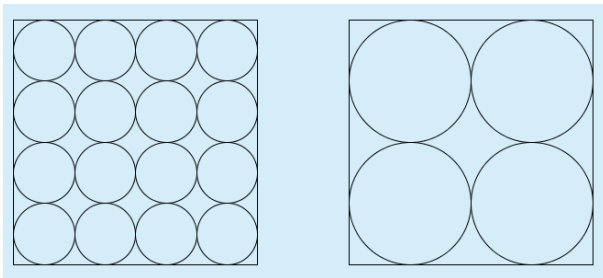
Kuoren sivun pituus on siis $6d + 2\pi r$.

$$6 \cdot 1 \text{ mm} + 2 \cdot \pi \cdot 0,5 \text{ mm} = 9,1415... \text{ mm} = 0,91415... \text{ cm}$$

Kuoren suorakulmion toisen sivun pituus on $2 \text{ m} = 200 \text{ cm}$. Lasketaan kuoren pinta-ala.

$$A = 0,91415... \text{ cm} \cdot 200 \text{ cm} = 182,831... \text{ cm}^2 \approx 183 \text{ cm}^2$$

Vastaus: 183 cm^2

270B. Havainnollistetaan pakkaamista kuvalla.

Olkoon pakkauksen särmän pituus a ja mandariinin säde b , jolloin appelsiinin säde on $2b$. Määritetään mandariinin ja appelsiinin tilavuudet $b:n$ avulla.

$$V_m = \frac{4}{3}\pi b^3 \text{ ja } V_a = \frac{4}{3}\pi(2b)^3 = \frac{32}{3}\pi b^3$$

Laatikon tilavuus on a^3 .

Mandariineja mahtuu yhteen riviin vierekkäin $\frac{a}{2b}$ kappaletta, joten niitä mahtuu laatikkoon $\left(\frac{a}{2b}\right)^3 = \frac{a^3}{8b^3}$ kappaletta.

Appelsiineja mahtuu yhteen riviin vierekkäin $\frac{a}{2 \cdot 2b} = \frac{a}{4b}$ kappaletta, joten niitä mahtuu laatikkoon $\left(\frac{a}{4b}\right)^3 = \frac{a^3}{64b^3}$ kappaletta.

$$\text{Lukumäärien suhde on } \frac{\left(\frac{a^3}{8b^3}\right)}{\left(\frac{a^3}{64b^3}\right)} = \frac{a^3}{8b^3} \cdot \frac{64b^3}{a^3} = \frac{64}{8} = 8.$$

Mandariineja mahtuu 8-kertainen määrä suhteessa appelsiineihin, joten niitä mahtuu $800\% - 100\% = 700\%$ enemmän.

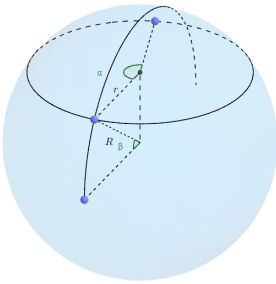
Lasketaan tyhjän tilan määrät, kun appelsiineja pakataan n kappaletta ja mandariineja pakataan $8n$ kappaletta.

$$V_{\text{tyhjä,a}} = a^3 - n \cdot \frac{32}{3} \pi b^3$$

$$V_{\text{tyhjä,m}} = a^3 - 8n \cdot \frac{4}{3} \pi b^3 = a^3 - n \cdot \frac{32}{3} \pi b^3$$

Tyhjän tilan määrä on yhtä suuri.

Vastaus: 700 % enemmän, yhtä paljon tyhjää tilaa

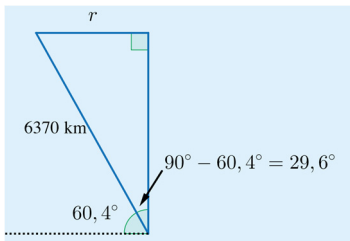
271B. Havainnollistetaan tilannetta kuvan avulla.

Jos Whitehorsesen ja Keravan yhteenlaskettu poikkeama nollapituuspiiristä on alle 180° , on Keravalta lyhempi kulkea nollapituuspiiriin suuntaan eli länteen. Lasketaan poikkeamien summa.

$$25,10^\circ + 135,06^\circ = 160,16^\circ$$

Keravalta on lyhempi matka kulkea pituuspiiriä pitkin suoraan länteen, jotta päästään Whitehorseeseen.

Matka on pallon pinnalle muodostuneen kulman $\alpha = 160,16^\circ$ rajaaman sektorin kaaren pituus. Sektorin säde r voidaan määrittää pallon sisälle muodostuneen suorakulmaisen kolmion avulla.



Muodostetaan yhtälö sinin avulla ja ratkaistaan siitä säde r .

$$\sin 29,6^\circ = \frac{r}{6370} \quad || \cdot 6370$$

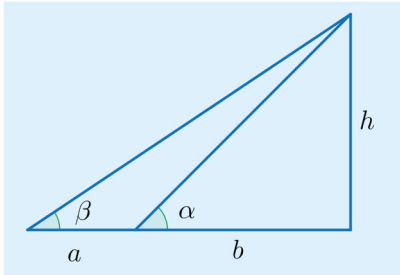
$$r = 3146,409\dots$$

Lasketaan sektorin kaaren pituus.

$$b = \frac{160,16^\circ}{360^\circ} 2\pi \cdot 3146,409\dots \text{ km} = 8795,219\dots \text{ km} \approx 8800 \text{ km}$$

Vastaus: länteen, 8800 km

272B. Sekstantin avulla voidaan mitata kulma, jossa vuoren huippu näkyy. Esimerkiksi mitataan kulma β , jossa vuori näkyy jossakin kohdassa. Tämän jälkeen kuljetaan suoraan kohti vuorta, jokin tietty matka a ja mitataan uudestaan kulma α , jossa vuori näkyy. Näiden tietojen avulla voidaan laskea vuoren korkeus.



Muodostetaan yhtälöpari

$$\begin{cases} \tan \beta = \frac{h}{a+b} \\ \tan \alpha = \frac{h}{b} \end{cases}$$

Yhtälöparista voidaan ratkaista vuoren korkeus h , kun tunnetaan a , α ja β .

Vastaus: –

273B. Merkitään pienen munkin sädettä kirjaimella r ja ison munkin sädettä kirjaimella R , jolloin pienen munkin tilavuus on $\frac{4}{3}\pi r^3$ ja ison munkin tilavuus $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Molempiin vaihtoehtoihin käytettävän taikinan tilavuus on yhtä suuri.

$$\begin{aligned} 3V_{\text{iso}} &= 24V_{\text{pieni}} \\ 3 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 &= 24 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \quad || : \pi \\ 4R^3 &= 32r^3 \quad || : 4 \\ R^3 &= 8r^3 \\ R &= \sqrt[3]{8r^3} \\ R &= 2r \end{aligned}$$

Ison munkin säde on siis kaksi kertaa pienen munkin säde.

Lasketaan molempien pinta-alat.

$$\begin{aligned} A_{\text{isot}} &= 3 \cdot 4\pi \cdot (2r)^2 = 48\pi r^2 \\ A_{\text{pienet}} &= 24 \cdot 4\pi \cdot r^2 = 96\pi r^2 \end{aligned}$$

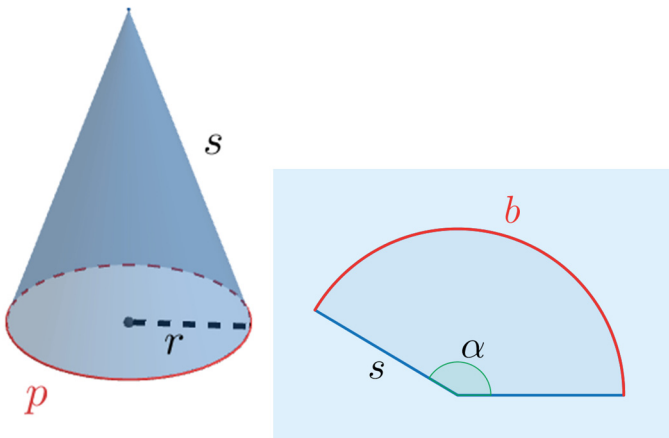
Lasketaan pinta-alojen suhde.

$$\frac{96\pi r^2}{48\pi r^2} = 2$$

Pieniin munkkeihin tarvitaan kaksinkertainen määrä sokeria suhteessa isoihin munkkeihin. Suhde on tällöin 1:2.

Vastaus: 1:2

274B. Piirretään kuva tilanteesta.



Suoran ympyräkartion vaippa on sektori, jonka pinta-ala voidaan laskea kaavalla $A = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi s^2$, jossa s on sektorin säde.

Toisaalta sektorin kaari ja kartion pohjaympyrän kehä ovat yhtä pitkät.

$$\begin{aligned} p &= b \\ 2\pi r &= \frac{\alpha}{360^\circ} 2\pi s \quad || : 2\pi s \\ \frac{\alpha}{360^\circ} &= \frac{r}{s} \quad || \cdot 360^\circ \\ \alpha &= 360^\circ \frac{r}{s} \end{aligned}$$

Sijoitetaan keskuskulman lauseke sektorin pinta-alan kaavaan.

$$A = \frac{360^\circ \frac{r}{s}}{360^\circ} \cdot \pi s^2 = \frac{r}{s} \cdot \pi \cdot s^2 = \pi r s$$

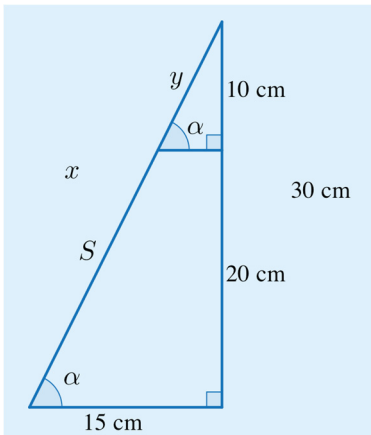
Vastaus: –

275B. a) Ympyräkartion korkeus on $h = 30$ cm ja pohjan halkaisija on $d = 30$ cm. Pohjan säde on $r = 15$ cm.

Poisleikatun osan korkeus $k = 10$ cm, joten varjostimen korkeus on $l = 30$ cm $-$ 10 cm $= 20$ cm.

Piirretään poikkileikkauskuva tilanteesta. Merkitään kuvaan varjostimen sivujana S , alkuperäisen ympyräkartion sivujana x ja poisleikatun ympyräkartion sivujan y .

Kuvioon muodostuu kaksi suorakulmaista kolmiota, joilla on yksi yhteinen kulma. Kolmiot ovat yhdenmuotoisia.



Ratkaistaan sivujan x pituus Pythagoraan lauseen avulla.

$$x^2 = 30^2 + 15^2$$

$$x = 33,541\dots(\text{cm})$$

Ratkaistaan kulman α suuruus tangentin avulla.

$$\tan \alpha = \frac{30}{15}$$

$$\alpha = 63,434\dots^\circ$$

Ratkaistaan sivujan y pituus sinin avulla.

$$\begin{aligned}\sin 63,434\dots^\circ &= \frac{10}{y} & \parallel \cdot y \\ \sin 63,434\dots^\circ y &= 10 & \parallel : \sin 63,434\dots^\circ \\ y &= 11,180\dots \text{ (cm)}\end{aligned}$$

Varjostimen sivujan pituus on

$$S = x - y = 33,541\dots \text{ cm} - 11,180\dots \text{ cm} = 22,360\dots \text{ cm} \approx 22,4 \text{ cm}.$$

Vastaus: $S = 22,4 \text{ cm}$

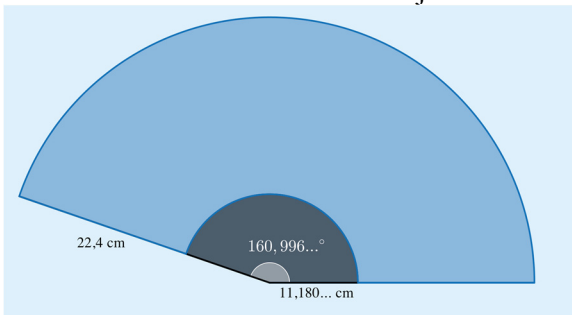
- b)** Kun varjostin levitetään tasoon, se näyttää ympyräsektorilta, jonka keskeltä on leikattu pois pieni sektori.

Ison sektorin säde on $x = 33,541\dots \text{ cm}$ ja pienen sektorin säde $y = 11,180\dots \text{ cm}$.

Keskuskulmien suuruus β saadaan laskettua sopivalla ohjelmalla sektorin pohjajympyrän kehän pituuden p ja sektorin kaaren pituuden b avulla.

$$\begin{aligned}p_{\text{pohjajympyrä}} &= b_{\text{iso sektori}} \\ 2\pi \cdot r &= \frac{\beta}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot x \\ 2\pi \cdot 15 &= \frac{\beta}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 33,541\dots \\ \beta &= 160,996\dots^\circ \\ \beta &\approx 161^\circ\end{aligned}$$

Hahmotellaan kuva tilanteesta. Varjostin on kuvassa oleva sininen osa.



- c) Varjostimen pinta-ala saadaan, ison sektorin pinta-alasta ja vähennetään pienen sektorin pinta-ala.

$$A_{\text{iso sektori}} = \frac{\beta}{360^\circ} \cdot \pi \cdot x^2 = \frac{160,996...^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 33,541...^2 = 1580,583... \text{ (cm}^2\text{)}$$

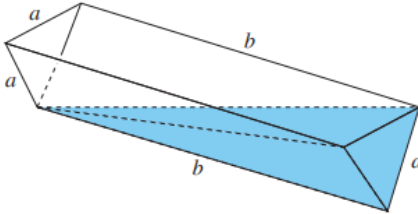
$$A_{\text{pieni sektori}} = \frac{\beta}{360^\circ} \cdot \pi \cdot y^2 = \frac{160,996...^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 11,180...^2 = 175,620... \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$\begin{aligned} A_{\text{varjostin}} &= 1580,583... \text{ cm}^2 - 175,620 \text{ cm}^2 \\ &= 1404,962... \text{ cm}^2 \approx 1405 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Vastaus: 1405 cm^2

276B. a) Poistuneen veden määrä voidaan laskea vähentämällä kaukalon tilavuudesta jäljellä olevan veden määrä.

$$b = 200 \text{ cm ja } a = 30 \text{ cm}$$



Kaukalo on särmiö, jonka pohjana on tasasivuinen kolmio ja jäljellä olevan veden määrä on kartio, jonka pohjana on sama tasasivuinen kolmio.

$$V_{\text{kaukalo}} = A_{\text{kolmio}} \cdot 200 \text{ cm}$$

$$V_{\text{jäljellä oleva vesi}} = \frac{1}{3} A_{\text{kolmio}} \cdot 200 \text{ cm}$$

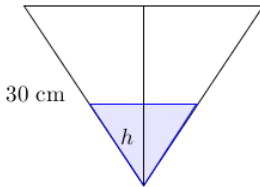
Tyhjää tilaa on tällöin

$$\begin{aligned} V_{\text{tyhjä}} &= V_{\text{kaukalo}} - V_{\text{jäljellä oleva vesi}} \\ &= A_{\text{kolmio}} \cdot 200 \text{ cm} - \frac{1}{3} A_{\text{kolmio}} \cdot 200 \text{ cm} \\ &= \frac{2}{3} A_{\text{kolmio}} \cdot 200 \text{ cm} \end{aligned}$$

Tyhjä tila on siis $\frac{2}{3} = 0,666... \approx 0,67 = 67 \%$ kaukalon tilavuudesta.

Vastaus: 67 %

b) Piirretään kuva päädystä.



Päätykolmio ja veden peittämä kolmio ovat yhdenmuotoiset. Koska veden tilavuus särmiössä on a-kohdan mukaan kolmasosa alkuperäisestä, veden peittämän kolmion pinta-ala on kolmasosa päätykolmion pinta-alasta.

Merkitään päätykolmion korkeutta kirjaimella H ja veden peittämän kolmion korkeutta kirjaimella h . Pinta-alojen suhde 1:3 on mittakaavan $h:H$ neliö. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä korkeuksien h ja H suhde.

$$\left(\frac{h}{H}\right)^2 = \frac{1}{3}$$

$$\frac{h}{H} = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{h}{H} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Määritetään kaukalon päätykolmion korkeus H Pythagoraan lauseen avulla.

$$H^2 + 15^2 = 30^2$$

$$H^2 = 675$$

$$H = (\pm)\sqrt{675}$$

$$H = (\pm)25,980\dots$$

Muodostetaan mittakaavan avulla yhtälö ja ratkaistaan siitä veden syvyys h .

$$\frac{h}{25,980\dots \text{ cm}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad || \cdot 25,980\dots \text{ cm}$$

$$h = 15 \text{ cm}$$

Veden syvyys kaukalossa kallistuksen jälkeen on 15 cm.

Vastaus: 15 cm

7 TODENNÄKÖISYYSLASKENTAA

ALOITA PERUSTEISTA

277A. a) $8! = 40\,320$

Vastaus: 40 320

b) $\binom{15}{6} = 5005$

Vastaus: 5005

c) $\binom{7}{7} = 1$

Vastaus: 1

278A. Tuloperiaatteen mukaan asukokonaisuuksia on $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$.

Vastaus: 16 asukokonaisuutta

279A. a) Koska 303:sta lukiolaisesta 282 asuu vanhempiensa luona, on kysytty todennäköisyys $\frac{282}{303} = 0,930\dots \approx 0,93$.

Vastaus: 0,93

b) Tapahtuma ”ei asu vanhempiensa luona” on a-kohdan tapahtuman vastatapahtuma, joten todennäköisyys on $1 - 0,930\dots = 0,0693\dots \approx 0,069$.

Vastaus: 0,069

280A. a) Tapahtuman ”arpakuution silmäluku” kaikki alkeistapaukset ovat silmäluvut 1, 2, 3, 4, 5 ja 6.

Vastaus: silmäluvut 1, 2, 3, 4, 5 ja 6

b) Tapahtumalle ”arpakuution silmäluku on vähintään 5” suotuisat alkeistapaukset ovat silmäluvut 5 ja 6.

Vastaus: silmäluvut 5 ja 6

c) a-kohdan perusteella nopalla on 6 mahdollista silmälukua ja b-kohdan perusteella suotuisia silmälukuja on 2.

$$P(\text{arpakuution heitossa silmäluku on vähintään 5}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Noppaa heittämällä silmäluku on vähintään 5 todennäköisyydellä $\frac{1}{3}$.

Vastaus: $\frac{1}{3}$

281A. a) Mustikoita on yhteensä $5 + 9 = 14$ ja niistä 9 on kypsiä, joten kysytty todennäköisyys on $\frac{9}{14}$.

Vastaus: $\frac{9}{14}$

b) Jos kulhosta otetaan yksi kypsä mustikka, kulhoon jää 13 mustikkaa. Jäljelle jäävistä mustikoista kypsiä on 8, joten kysytty todennäköisyys on $\frac{8}{13}$.

Vastaus: $\frac{8}{13}$

- c) Kun ensimmäinen mustikka nostetaan, niin todennäköisyys saada kypsä mustikka a-kohdan mukaan on $\frac{9}{14}$. Toista mustikkaa nostettaessa todennäköisyys saada kypsä mustikka b-kohdan mukaan on $\frac{8}{13}$. Todennäköisyys, että kulhosta umpimähkään otetut kaksi mustikkaa ovat molemmat kypsiä, saadaan kertolaskusäännöllä
- $$\frac{9}{14} \cdot \frac{8}{13} = \frac{36}{91}.$$
- Vastaus: $\frac{36}{91}$

282A. a) Kuusi opiskelijaa voivat olla $6! = 720$ eri järjestyksessä.

Vastaus: 720 järjestyksessä

- b) a-kohdan järjestyksistä yksi on sellainen, jossa opiskelijat ovat pituusjärjestyksessä lyhimmästä pisimpään ja yksi järjestyksistä on sellainen, jossa opiskelijat ovat pituusjärjestyksessä pisimmästä lyhimpään.

Kysytty todennäköisyys on $\frac{2}{720} = \frac{1}{360}$.

Vastaus: $\frac{1}{360}$

283A. Merkitään A = ”esitys on tanssiesitys” ja B = ”esitys on lauluesitys”. Näin ollen $P(A) = 0,30$ ja $P(B) = 0,40$.

- a) Oletetaan, että sama esitys on vain tanssiesitys tai vain lauluesitys, joten A ja B oletetaan erillisiksi. Koska tapahtumat A ja B ovat erillisiä, niin $P(A \text{ tai } B) = P(A) + P(B) = 0,30 + 0,40 = 0,70 = 70 \%$.

Vastaus: 70 %

- b) Tapahtuma ”esitys ei ole tanssi- eikä lauluesitys” on tapahtuman ”esitys on tanssi- tai lauluesitys” vastatapahtuma, joten $P(\text{esitys ei ole tanssi- eikä lauluesitys}) = 1 - 0,70 = 0,30 = 30 \%$.

Vastaus: 30 %

284A. a) $A = \text{”Nenna tulee huomenna ajoissa kouluun”}$

Tapahtuman A vastatapahtuma on $\bar{A} = \text{”Nenna ei tule huomenna ajoissa kouluun”}$

Vastaus: ”Nenna ei tule huomenna ajoissa kouluun”

b) $A = \text{”Nenna tulee ainakin joskus ajoissa kouluun”}$

Tapahtuman A vastatapahtuma on $\bar{A} = \text{”Nenna ei koskaan tule ajoissa kouluun”}$

Vastaus: ”Nenna ei koskaan tule ajoissa kouluun”

285A. A Alkeistapaukset ovat satunnaisilmiön mahdollisia tuloksia, joten A ja IV kuuluvat yhteen.

B Riippumattomat tapahtumat eivät vaikuta toistensa todennäköisyyteen, joten B ja II kuuluvat yhteen.

C Erilliset tapahtumat ovat toisensa poissulkevia eli ne eivät voi molemmat tapahtua, joten C ja I kuuluvat yhteen.

D Kombinaatiot ovat joukon osajoukkoja, joten D ja III kuuluvat yhteen.

E Permutaatiot ovat järjestettyjä jonoja, joten E ja V kuuluvat yhteen.

Vastaus: A: IV; B: II, C: I, D: III ja E: V

286A. Käytetään geometrisena mittana alueen pinta-alaa. Koko parkkialueen pinta-ala on $7,0 \text{ m} \cdot 6,0 \text{ m} = 42 \text{ m}^2$ ja suotuisan alueen pinta-ala on $3,0 \text{ m} \cdot 2,0 \text{ m} = 6,0 \text{ m}^2$.

$$P(\text{avain jää auton alle}) = \frac{6 \text{ m}^2}{42 \text{ m}^2} = 0,142\ldots \approx 0,14$$

Avain jää auton alle todennäköisyydellä 0,14.

Vastaus: 0,14

- 287A. a)** Havainnollistetaan heittotuloksia ja niiden summaa taulukon avulla. Merkitään kaikki alkeistapaukset taulukkoon.

2. nopan silmäluku

	1	2	3	4	5	6
1. nopan silmäluku	1	2	3	4	5	6
	2	3	4	5	6	7
	3	4	5	6	7	8
	4	5	6	7	8	9
	5	6	7	8	9	10
	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	12

Havaitaan, että alkeistapauksista 15 on sellaisia, joissa silmälukujen summa on vähintään kahdeksan.

Kysytty todennäköisyys on $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$.

Vastaus: $\frac{5}{12}$

- b)** Havainnollistetaan heittotuloksia ja niiden tuloa taulukon avulla. Merkitään kaikki alkeistapaukset taulukkoon.

2. nopan silmäluku

	1	2	3	4	5	6
1. nopan silmäluku	1	2	3	4	5	6
	2	4	6	8	10	12
	3	6	9	12	15	18
	4	8	12	16	20	24
	5	10	15	20	25	30
	6	12	18	24	30	36

Verrataan taulukkoa a-kohdan taulukkoon ja havaitaan, että alkeistapauksista 11 on sellaisia, joissa silmälukujen summa on suurempi kuin niiden tulo.

Kysytty todennäköisyys on $\frac{11}{36}$.

Vastaus: $\frac{11}{36}$

288A. TAPA 1:

Todennäköisyys, että ensimmäinen kirja on sellainen, jota en ole lukenut, on $\frac{2}{5}$. Todennäköisyys, että toinen kirja on sellainen, jota en ole lukenut, on $\frac{2}{4}$. Kertolaskusäännön mukaan todennäköisyys, että molemmat kirjat ovat sellaisia, joita en ole lukenut on $\frac{3}{5} \cdot \frac{\cancel{2}^1}{\cancel{4}_2} = \frac{3 \cdot 1}{5 \cdot 2} = \frac{3}{10}$.

TAPA 2:

Kolmesta kirjasta, joita en ole lukenut voidaan valita kaksi $\binom{3}{2} = 3$ tavalla.

Viidestä valittavan olevasta kirjasta voidaan valita kaksi $\binom{5}{2} = 10$ tavalla.

Todennäköisyys, että valitsen kaksi kirjaa joita en ole lukenut on $\frac{3}{10}$.

Vastaus: $\frac{3}{10}$

289A. a) Kyseessä on kombinaatioiden määrä, joten 15:sta tummahiuksisesta voidaan valita kolme $\binom{15}{3} = 455$ tavalla.

Vastaus: 455 tavalla

b) Kyseessä on kombinaatioiden määrä, joten 28:sta henkilöstä voidaan valita kolme $\binom{28}{3} = 3276$ tavalla.

Vastaus: 3276 tavalla

c) Kohtien a ja b perusteella kaikki satunnaistarkastukseen joutuvat ovat tummahiuksisia todennäköisyydellä $\frac{455}{3276} = 0,138... \approx 0,14$.

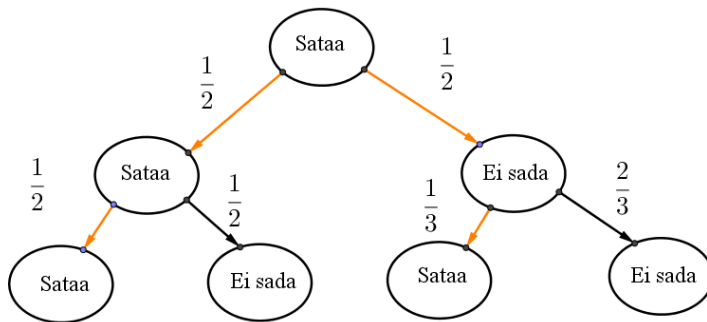
Vastaus: $\frac{455}{3276} \approx 0,14$

290A. Jos tänään sataa, huomenna sataa todennäköisyydellä $\frac{1}{2}$.

Jos tänään sataa, huomenna ei sada todennäköisyydellä $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Jos tänään ei sada, huomenna sataa todennäköisyydellä $\frac{1}{3}$.

Piirretään tilanteesta puukaavio ja merkitään tapahtumalle ”ylihuomenna sataa, jos tänään sataa” suotuisat haarat oranssilla.



Lasketaan kysytty todennäköisyys kertolasku- ja yhteenlaskusääntöjen avulla.

$$\begin{aligned}
 &P(\text{ylihuomenna sataa, jos tänään sataa}) \\
 &= P(\text{huomenna sataa}) \cdot P(\text{ylihuomenna sataa, kun huomenna satoi}) + P(\text{huomenna ei sada}) \cdot P(\text{ylihuomenna sataa, kun huomenna ei satoi}) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \\
 &= \frac{5}{12}
 \end{aligned}$$

Vastaus: $\frac{5}{12}$

- 291A. a)** Havainnollistetaan noppien silmälukujen summia taulukolla. Merkitään suotuisat summat vihreällä ja muut mahdolliset summat harmaalla.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Suotuisia summia on 10 ja mahdollisia summia on 36.

$$P(\text{silmälukujen summa on 6 tai 8}) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18} = 0,277\ldots \approx 0,28.$$

Vastaus: 0,28

- b) Havainnollistetaan mahdollisia kahden nopan heiton tuloksia taulukolla. Merkitään tuloksia, joissa noppien silmäluvut ovat samat vihreällä ja muita tuloksia harmaalla.

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Heittotuloksia, joissa silmäluvut ovat samat, on 6 ja tuloksia on yhteensä 36.

$$P(\text{silmluvut ovat samat yhdellä kahden nopan heitolla}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Pelaaja joutuu vankilaan, jos hän heittää molemmilla nopilla kolmesti peräkkäin saman silmäluvun. Eri heittokerrat ovat riippumattomia toisistaan. Riippumattomien tapahtumien kertolaskusäännön perusteella

$$\begin{aligned} P(\text{silmluvut ovat samat kolmella peräkkäisellä kahden nopan heitolla}) \\ &= P(\text{silmluvut ovat samat yhdellä kahden nopan heitolla})^3 \\ &= \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216} = 0,00462\dots \approx 0,0046. \end{aligned}$$

Vastaus: 0,0046

VAHVISTA OSAAMISTA

292A. a) Opettajia on yhteensä 12, joten heistä voidaan valita viisi opettajaa $\binom{12}{5} = 792$ tavalla.

Vastaus: 792 tavalla

b) Matemaattisten aineiden opettajia on neljä, joista kaksi voidaan valita $\binom{4}{2} = 6$ tavalla.

Vastaus: 6 tavalla

c) Matemaattisten aineiden opettajia on neljä, joista kaksi voidaan valita $\binom{4}{2} = 6$ tavalla. Kieltenopettajia on viisi, joista kolme voidaan valita $\binom{5}{3} = 10$ tavalla. Taito- ja taitoaineiden opettajia on kolme, joista yksi voidaan valita kolmella tavalla.

Kaksi matemaattisten aineiden opettajaa, kolme kieltenopettajaa ja yksi taito- ja taideaineiden opettaja voidaan valita tuloperiaatteen mukaan $6 \cdot 10 \cdot 3 = 180$ tavalla.

Vastaus: 180 tavalla

293A. Jokaisessa kuudessa paikassa on kaksi mahdollisuutta: joko siinä on piste tai ei. Mahdollisuuksia on siis yhteensä $2^6 = 64$. Määrästä on vähennettävä tilanne, jossa missään paikassa ei ole pistettä, jolloin erilaisia merkkejä voidaan esittää $64 - 1 = 63$.

Vastaus: 63 erilaista merkkiä

294A. Perusvärin määrän ilmoittamisessa käytettäviä merkkejä on 16 erilaista. Näistä kahden peräkkäisen merkin jonoja voidaan muodostaa $16 \cdot 16 = 256$ erilaista.

Koska perusvärejä on kolme, voidaan eri värisävyjä ilmaista $256 \cdot 256 \cdot 256 = 16\,777\,216$ erilaista.

Vastaus: 16 777 216 erilaista värisävyä

295B. a) Lyhyen matematiikan pakollisena kirjoittaneilla kouluarvosanaa 9 oli eniten (1048), ylimääräisenä kirjoittaneilla oli eniten arvosanaa 7 (1292) ja koetta kirjoittamattomilla oli eniten arvosanaa 6 (2146). Tyypillisimmät arvosanat ovat siis 9, 7 ja 6.

Vastaus: 9, 7 ja 6

b) Kouluarvosanan 10 saaneita lyhyen matematiikan kokeeseen osallistuneita oli $282 + 184 = 466$.

Heistä sai laudaturin $210 + 70 = 280$.

Kysytty todennäköisyys on $\frac{280}{466} = \frac{140}{233} = 0,600\dots \approx 0,60$.

Vastaus: 0,60

c) Kouluarvosanaksi vähintään 5 saaneita lyhyen matematiikan kokeeseen osallistuneita oli $3665 - 32 = 3633$.

Heistä hylättiin $139 - 3 = 136$, joten hyväksyttyjä oli $3633 - 136 = 3497$.

Kysytty todennäköisyys on $\frac{3497}{3633} = 0,962\dots \approx 0,96$.

Vastaus: 0,96

- 296A. a)** Tilaston mukaan havaintoarvoja on $7 + 56 + 43 + 14 = 120$. Näistä $56 + 43 = 99$ on aikavälillä klo 11–15.

Kysytty todennäköisyys on $\frac{99}{120} = \frac{33}{40} = 0,825 \approx 0,83$.

Vastaus: $\frac{33}{40} \approx 0,83$

- b)** Tilaston mukaan posti tuli klo 13 jälkeen yhteensä $43 + 14 = 57$ kertaa. Oletetaan, että postin saapuminen eriaikoina on toisistaan riippumatonta.

Kysytty todennäköisyys on $\frac{57}{120} \cdot \frac{57}{120} = \frac{361}{1600} = 0,2256... \approx 0,23$.

Vastaus: $\frac{361}{1600} \approx 0,23$

- c)** Tilaston mukaan posti tuli klo 13 jälkeen $43 + 14 = 57$ kertaa, joista 14 kertaa tuli klo 15 jälkeen.

Kysytty todennäköisyys on $\frac{14}{57} = 0,245... \approx 0,25$.

Vastaus: $\frac{14}{57} \approx 0,25$

- 297B. a)** Tilaston mukaan suoritettuja tutkintoja oli yhteensä 31 881 ja näistä oli 748 maa- ja metsätalousalalta.

$$\text{Kysytty todennäköisyys on } \frac{748}{31\,881} = 0,0234\dots \approx 0,023.$$

Vastaus: 0,023

- b)** Tilaston mukaan naisten suorittamia tutkintoja oli yhteensä 18 020 ja näistä oli 502 maa- ja metsätalousalalta.

$$\text{Kysytty todennäköisyys on } \frac{502}{18\,020} = \frac{251}{9010} = 0,0278\dots \approx 0,028.$$

Vastaus: 0,028

- c)** Tilaston mukaan miesten suorittamia tutkintoja oli yhteensä 13 861 ja näistä oli 1290 luonnontieteistä ja 359 palvelualalta.

$$\text{Kysytty todennäköisyys on } \frac{1290 + 359}{13\,861} = 0,118\dots \approx 0,12.$$

Vastaus: 0,12

- 298A. a)** Ensimmäinen voidaan valita kahdella tavalla, toinen yhdellä, seuraava kolmella, sitä seuraava kahdella ja viimeinen yhdellä tavalla.

$$\text{Kysytty todennäköisyys on } \frac{2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5!} = \frac{1}{10}.$$

Vastaus: $\frac{1}{10}$

- b) Ensimmäinen voi olla kuka tahansa neljästä, toinen kolmesta, kolmas kahdesta ja neljäs voi olla vain yksi. Neljä ensimmäistä voivat siis muodostaa $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$ eri järjestystä. Viimeinen voidaan valita yhdellä tavalla.

$$\text{Kysytty todennäköisyys on } \frac{4! \cdot 1}{5!} = \frac{1}{5}.$$

$$\text{Vastaus: } \frac{1}{5}$$

- c) Viimeinen haastateltava voidaan valita yhdellä tavalla, ensimmäinen haastateltava kahdella tavalla, toinen yhdellä tavalla, kolmas kahdella tavalla ja neljäs yhdellä tavalla.

$$\text{Kysytty todennäköisyys on } \frac{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1}{5!} = \frac{1}{30}.$$

$$\text{Vastaus: } \frac{1}{30}$$

- 299A.** Pakassa on 52 korttia + jokeri eli 53 korttia. Niistä voidaan jakaa viisi korttia $\binom{53}{5}$ eri tavalla. Suotuisia alkeistapauksia ovat ne viiden kortin

joukot, joissa on jokeri ja neljä samanarvoista korttia. Jokereita on vain yksi, joten se voidaan valita yhdellä tavalla. Pakassa on 13 eri arvoista korttia, joten jokerin lisäksi mahdollisia 4 saman arvoista korttia -jakoja on 13 erilaista.

Kysytty todennäköisyys on

$$\begin{aligned} &P(\text{viisi samanarvoista korttia}) \\ &= \frac{1 \cdot 13}{\binom{53}{5}} = \frac{13}{2869685} = \frac{1}{220\,745} = 0,00000453... \approx 0,0000045. \end{aligned}$$

Vastaus: 0,000 0045

300A. Lasketaan ensin todennäköisyys, että ensimmäiseksi kortiksi saadaan musta, toiseksi punainen jne. Tällöin kysytty todennäköisyys on

$$\frac{26}{52} \cdot \frac{26}{51} \cdot \frac{25}{50} \cdot \frac{25}{49} \cdot \frac{24}{48} \cdot \frac{24}{47} = \frac{650}{39\,151}.$$

Jos ensimmäinen on punainen, saadaan sama todennäköisyys, joten P (joka toinen kortti on punainen ja joka toinen musta)

$$= 2 \cdot \frac{650}{39\,151} = \frac{1300}{39\,151} = 0,0332... \approx 0,033.$$

Vastaus: 0,033

301A. a) Riippumattomilla tapahtumilla tarkoitetaan tapahtumia, jotka eivät vaikuta toistensa todennäköisyyksiin. Esimerkiksi, jos heitetään ensin kolikkoa ja sitten noppaa, tapahtumat ovat riippumattomia.

Vastaus: Riippumattomilla tapahtumilla tarkoitetaan tapahtumia, jotka eivät vaikuta toistensa todennäköisyyksiin. Esimerkiksi heitetään ensin kolikkoa ja sitten noppaa.

b) Erilliset tapahtumat ovat toisensa poissulkevia eli ne eivät voi tapahtua yhtä aikaa. Esimerkiksi arpakuution heitossa tapahtumat ”saadaan silmäluku 1” ja ”saadaan silmäluku 2” ovat erillisiä tapahtumia.

Vastaus: Erilliset tapahtumat ovat toisensa poissulkevia eli ne eivät voi tapahtua yhtä aikaa. Esimerkiksi arpakuutiota heitettäessä tapahtumat ”saadaan silmäluku 1” ja ”saadaan silmäluku 2”.

302A. Merkitään A = ”henkilöllä on farkut” ja B = ”henkilöllä on villapaita”.

Käytetään yleistä yhteenlaskusääntöä.

$P(A \text{ tai } B \text{ tapahtuu}) = P(A \text{ tapahtuu}) + P(B \text{ tapahtuu}) - P(A \text{ ja } B \text{ tapahtuvat}).$

Sijoitetaan kaavaan $P(A \text{ tai } B \text{ tapahtuu}) = 0,56$,

$P(A \text{ tapahtuu}) = \frac{12}{25} = 0,48$ ja $P(B \text{ tapahtuu}) = \frac{4}{25} = 0,16$ ja ratkaistaan yhtälöstä $P(A \text{ ja } B \text{ tapahtuvat})$.

$$\begin{aligned} 0,56 &= 0,48 + 0,16 - P(A \text{ ja } B) \\ -P(A \text{ ja } B) &= 0,56 - 0,48 - 0,16 \\ -P(A \text{ ja } B) &= -0,08 \\ P(A \text{ ja } B) &= 0,08 \end{aligned}$$

Henkilöitä, joilla on farkut ja villapaita on $0,08 \cdot 25 = 2$.

Vastaus: kahdella henkilöllä

303A. Merkitään A = ”suosikkijalkapallojoukkue voittaa” ja B = ”suosikkijääkiekkjoukkue voittaa”.

Tapahtumat ovat riippumattomat, joten $P(A \text{ ja } B) = P(A) \cdot P(B)$.

Sijoitetaan kaavaan $P(A) = 0,73$ ja $P(A \text{ ja } B) = 0,36$ ja ratkaistaan yhtälöstä $P(B)$.

$$\begin{aligned} P(A \text{ ja } B) &= P(A) \cdot P(B) \\ 0,36 &= 0,73 \cdot P(B) \quad ||: 0,73 \\ P(B) &= 0,493... \\ P(B) &= 49,3... \% \\ P(B) &\approx 49 \% \end{aligned}$$

Vastaus: 49 %

- 304A. a)** Tapahtuman A = ”kaikki opiskelijat tulevat kouluun autolla” vastatapahtuma on $\bar{A}$ = ”on ainakin yksi opiskelija, joka ei tule kouluun autolla”.

$$P(A) = 0,3^5 \text{ ja}$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,3^5 = 0,99757 \approx 0,998$$

Vastaus: $\bar{A}$ = ”on ainakin yksi opiskelija, joka ei tule kouluun autolla”; 0,998

- b)** Tapahtuman A = ”ainakin yksi opiskelija tulee kouluun autolla” vastatapahtuma on $\bar{A}$ = ”kukaan ei tule kouluun autolla”.

Koska $P(\text{opiskelija tulee autolla kouluun}) = 0,3$, on $P(\text{opiskelija ei tule autolla kouluun}) = 1 - 0,3 = 0,7$.

$$\text{Tällöin } P(\bar{A}) = 0,7^5 = 0,1680... \approx 0,168$$

Vastaus: $\bar{A}$ = ”kukaan ei tule kouluun autolla”; 0,168

- c)** Tapahtuman A = ”täsmälleen yksi opiskelija tulee kouluun autolla” vastatapahtuma on $\bar{A}$ = ”0, 2, 3, 4 tai 5 opiskelijaa tulee kouluun autolla”.

Lasketaan ensin $P(A)$.

Todennäköisyys, että ensimmäinen kouluun tuleva tulee autolla ja muut eivät, on $0,3 \cdot 0,7 \cdot 0,7 \cdot 0,7 \cdot 0,7$.

Autolla kouluun tuleva voi olla kuka tahansa viidestä, joten tapahtuma, että ensimmäinen tulee kouluun autolla ja muut eivät voi tapahtua viidellä eri tavalla.

$$P(A) = 5 \cdot 0,3 \cdot 0,7 \cdot 0,7 \cdot 0,7 \cdot 0,7 = 0,36015.$$

$$\text{Tällöin } P(\bar{A}) = 1 - 0,36015 = 0,639... \approx 0,640$$

Vastaus: $\bar{A}$ = ”0, 2, 3, 4 tai 5 opiskelijaa tulee kouluun autolla”; 0,640

305A. TAPA 1:

Viisi pakettia 17:sta voidaan valita $\binom{17}{5} = 6188$ tavalla.

Neljästä Violan lahjapaketista voidaan 2 valita $\binom{4}{2} = 6$ tavalla.

Muiden 13:sta paketista voidaan 3 valita $\binom{13}{3} = 286$ tavalla.

Todennäköisyys, että Viola avaa täsmälleen kolme jonkun muun pakettia

$$\text{on } \frac{\binom{4}{2}\binom{13}{3}}{\binom{17}{5}} = \frac{1716}{6188} = 0,277... \approx 0,28.$$

TAPA 2:

Todennäköisyys, että Violan avaamat kolme ensimmäistä pakettia ovat

jonkun muun, on $\frac{13}{17} \cdot \frac{12}{16} \cdot \frac{11}{15} \cdot \frac{4}{14} \cdot \frac{3}{13}$. Kolme muille kuuluvaa pakettia

voivat olla avaamisjärjestyksessä $\binom{5}{3} = 10$ eri tavalla, joten

$P(\text{Viola avaa täsmälleen kolme jonkun muun pakettia})$

$$= 10 \cdot \frac{13}{17} \cdot \frac{12}{16} \cdot \frac{11}{15} \cdot \frac{4}{14} \cdot \frac{3}{13} = \frac{33}{119} = 0,277... \approx 0,28.$$

Vastaus: 0,28

- 306A. a)** Tapahtumat ”hillo menee väärälle hyllylle” ja ”maito menee väärälle hyllylle” ovat riippumattomia. Esineen todennäköisyys mennä oikealle hyllylle on $\frac{1}{4}$ ja väärälle hyllylle $\frac{3}{4}$.

Lasketaan tapahtuman ”hillo tai maito menee väärälle hyllylle” todennäköisyys vastatapahtuman ” hillo ja maito menevät oikealle hyllylle” avulla.

$$P(\text{hillo ja maito menevät oikealle hyllylle}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

$$P(\text{hillo tai maito menee väärälle hyllylle})$$

$$= 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16} = 0,9375 \approx 0,94$$

$$\text{Vastaus: } \frac{15}{16} \approx 0,94$$

- b)** Vastatapahtumaa ”hillo ja maito menevät oikealle hyllylle” laskettaessa on huomioitava, että maitoa ei laiteta samalle hyllylle kuin hillo, joten alkeistapauksia on silloin enää kolme.

$$P(\text{hillo ja maito menevät oikealle hyllylle}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

$$P(\text{hillo tai maito menevät väärälle hyllylle})$$

$$= 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12} = 0,916... \approx 0,92$$

$$\text{Vastaus: } \frac{11}{12} \approx 0,92$$

- c)** Jos valitsee sattumanvaraisesti hyllyn ja laittaa sekä hillon että maidon sille, jompikumpi tai molemmat menevät väärälle hyllylle. Tällöin $P(\text{hillo tai maito menee väärälle hyllylle}) = 1$.

$$\text{Vastaus: } 1$$

307A. Merkitään yksittäisen arvan voittotodennäköisyyttä kirjaimella p . Todennäköisyys, että viidestä arvasta jokainen voittaa, on p^5 . Ratkaistaan p yhtälöstä

$$p^5 = 0,006$$

$$p = \sqrt[5]{0,006}$$

$$p = 0,359\dots$$

$$p = 35,9\dots \%$$

$$p \approx 36 \%$$

Vastaus: 36 %

308A. Merkitään A = ”saippua on lopussa” ja B = ”pefletit ovat lopussa”.

$$P(A) = 0,10$$

$$P(B) = 0,15$$

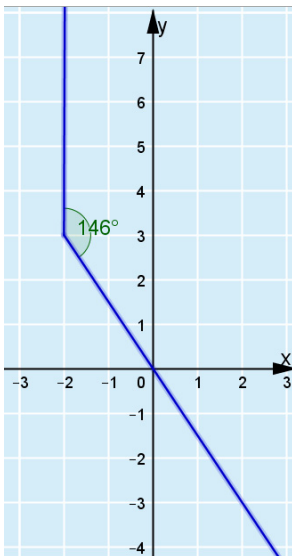
$$P(A) \cdot P(B) = 0,10 \cdot 0,15 = 0,015$$

Koska $P(A \text{ ja } B) = 0,06$ ei ole yhtä suuri kuin $P(A)$:n ja $P(B)$:n tulo, voidaan todeta, että tapahtumat ”saippua on lopussa” ja ”pefletit ovat lopussa” eivät ole riippumattomia.

Vastaus: eivät ole

309B. Hahmotellaan tilanteesta kuva ja käytetään todennäköisyyden mittana kulman suuruutta. Jos puolisuora on y -akselin suuntainen, se ei leikkaa y -akselia. Suotuisat puolisuoran tulee leikata y -akseli pisteessä, joka on origosta ylöspäin. Piirtämällä mallikuva huomataan, että puolisuoran ääriasentojen välinen kulma on 146 astetta.

Kysytty todennäköisyys on $\frac{146^\circ}{360^\circ} = \frac{73}{180} = 0,405\dots \approx 0,41$.



Vastaus: 0,41

310A. a) Vastatapahtuma sisältää kaikki ne alkeistapaukset, jotka eivät ole tapahtumalle suotuisia alkeistapauksia. Tapahtuman ja vastatapahtuman todennäköisyyksien summa on 1.

Vastaus: –

- b)** Pankkivirkailijoita, jotka ovat aktiivisia feministiliikkeessä on vähemmän kuin kaikkia pankkivirkailijoita, joten väitteen A todennäköisyys on suurempi kuin väitteen B.

Merkitään kaikkien alkeistapausten määrää kirjaimella n , feministiliikkeessä aktiivisten pankkivirkailijoiden määrää kirjaimella f ja pankkivirkailijoiden, jotka eivät ole feministiliikkeessä aktiivisia, määrää kirjaimella e .

$$P(A) = \frac{f+e}{n} \text{ ja } P(B) = \frac{f}{n}$$

Siis $P(A) > P(B)$.

Vastaus: –

- 311A. a)** Koska 40:stä numerosta voidaan valita seitsemän $\binom{40}{7} = 18\,643\,560$ eri tavalla ja on vain yksi oikea rivi, on kaikki seitsemän numeroa oikein todennäköisyydellä $\frac{1}{18\,643\,560} = 0,0000000536... \approx 5,4 \cdot 10^{-8}$.

$$\text{Vastaus: } \frac{1}{18\,643\,560} \approx 5,4 \cdot 10^{-8}$$

- b)** Seitsemästä oikeasta numerosta voidaan valita neljä $\binom{7}{4}$ eri tavalla.

Vääriä numeroita on $40 - 7 = 33$ ja niistä voidaan kolme valita $\binom{33}{3}$ eri tavalla.

$$P(\text{täsmälleen 4 oikein}) = \frac{\binom{7}{4} \cdot \binom{33}{3}}{\binom{40}{7}} = \frac{4774}{466089} = 0,0102... \approx 0,01$$

$$\text{Vastaus: } \frac{4774}{466089} \approx 0,01$$

- 312B. a)** Suotuisa mitta on taulun pinta-ala. Taulu on ympyrä, jonka säde r on millimetreinä $\frac{35}{2} + 9 \cdot 17 = 170,5$. Taulun pinta-ala on neliömillimetreinä $\pi r^2 = \pi \cdot 170,5^2$.

Taustalevyn pinta-ala on $1,0 \text{ m}^2 = 1\,000\,000 \text{ mm}^2$. Kysytty todennäköisyys on

$$\frac{\pi \cdot 170,5^2}{1\,000\,000} = 0,0913... \approx 0,09$$

Vastaus: 0,09

- b)** Tikalla saa vähintään 8 pistettä, jos se osuu alueille 8-10. Näitä alueita vastaa ympyrä, jonka säde on millimetreinä $\frac{35}{2} + 2 \cdot 17 = 51,5$.

Ympyrän pinta-ala on neliömillimetreinä $\pi \cdot 51,5^2$. Taulun pinta-ala on neliömillimetreinä $\pi r^2 = \pi \cdot 170,5^2$. Kysytty todennäköisyys on

$$\frac{\pi \cdot 51,5^2}{\pi \cdot 170,5^2} = 0,0912... \approx 0,09.$$

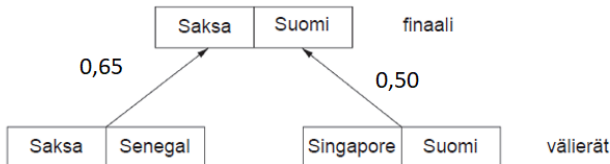
Vastaus: 0,09

- c)** Tikalla saa korkeintaan 5 pistettä, jos se osuu alueille 5-1. Näiden alueiden pinta-ala saadaan vähentämällä taulun pinta-alasta sisemmän ympyrän eli pisteiden 6-10 muodostaman ympyrän pinta-ala, jonka säde on millimetreinä $\frac{35}{2} + 4 \cdot 17 = 85,5$. Kysytty todennäköisyys on

$$\frac{\pi \cdot 170,5^2 - \pi \cdot 85,5^2}{\pi \cdot 170,5^2} = 0,748... \approx 0,75$$

Vastaus: 0,75

- 313A. a)** Saksa voittaa Senegalin todennäköisyydellä 0,65 ja Suomi voittaa Singaporen todennäköisyydellä $1 - 0,50 = 0,50$. Merkitään todennäköisyydet kaavioon.



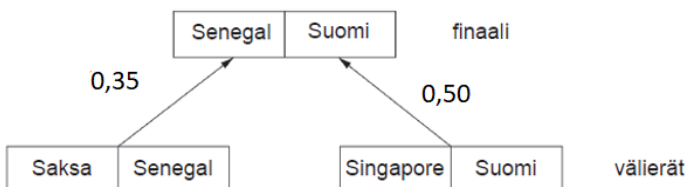
$P(\text{Suomi pelaa finaalissa Saksaa vastaan})$
 $= 0,65 \cdot 0,50 = 0,325 = 32,5 \%$.

Vastaus: 32,5 %

- b)** Tarkastellaan tilanteet, joissa Suomi ei kohtaa Saksaa, koska Saksa voittaisi Suomen 100 %:n todennäköisyydellä.

Senegal ja Suomi voittavat välierissä todennäköisyydellä $0,35 \cdot 0,50 = 0,175$.

Suomi voittaa Senegalin todennäköisyydellä $1 - 0,60 = 0,40$. Tällöin $P(\text{Suomi voittaa koko kilpailun}) = 0,40 \cdot 0,35 \cdot 0,50 = 0,07$.



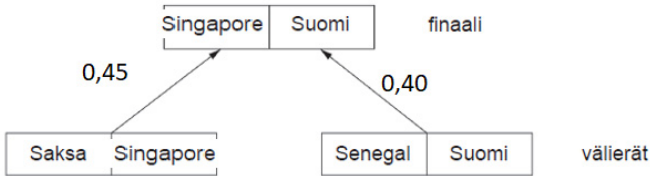
Toinen vaihtoehto, jossa Suomi ei kohtaa Saksaa on, jos pelataan välierät Saksa-Singapore ja Suomi-Senegal.

Singapore ja Suomi voittavat välierissä todennäköisyydellä $0,45 \cdot 0,40 = 0,18$.

Suomi voittaa Singaporen todennäköisyydellä 0,50.

Tällöin

$$P(\text{Suomi voittaa koko kilpailun}) = 0,50 \cdot 0,45 \cdot 0,40 = 0,09.$$



Huomataan, että Suomen todennäköisyys voittaa koko kilpailu on suurin välieräpareilla Saksa–Singapore ja Senegal–Suomi. Todennäköisyys, että Suomi voittaa koko kilpailun on 0,09.

Vastaus: välieräpareilla Saksa–Singapore ja Senegal–Suomi, todennäköisyys 0,09

SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

314A. Jotta numeroiden summa olisi korkeintaan 3, luvussa voi olla vain numeroita 0, 1, 2 ja 3.

Jos luvussa on numero 3, on luku 300 ainoa mahdollinen kolminumeroinen positiivinen kokonaisluku.

Numerolla 2 alkavia ehdon täyttäviä lukuja ovat 200, 201 ja 210.

Numerolla 1 alkavia ehdon täyttäviä lukuja ovat 100, 101, 102, 110, 111 ja 120.

Kolminumeroisia positiivisia kokonaislukuja ovat luvut 100–999. Lukuja on yhteensä $999 - 99 = 900$.

Kysytty todennäköisyys on $\frac{10}{900} = \frac{1}{90} = 0,0111\ldots \approx 0,011$.

Vastaus: 0,011

- 315A. a)** Koko vuoden päivistä voidaan 13 päivää valita $\binom{365}{13}$ tavalla, joista yksi on suotuista. Kysytty todennäköisyys on siis
- $$\frac{1}{\binom{365}{13}} \approx 3,8 \cdot 10^{-24}.$$

Vastaus: $3,8 \cdot 10^{-24}$

- b)** Vanhoista pyhäpäivistä 2 voidaan valita $\binom{13}{2}$ tavalla. Muut 11 pyhäpäivää, jotka eivät ole samoja kuin vanhat, voidaan valita $\binom{365-13}{11} = \binom{352}{11}$ tavalla.

$$\text{Kysytty todennäköisyys on } \frac{\binom{13}{2} \binom{352}{11}}{\binom{365}{13}} = 0,0649... \approx 0,06.$$

Vastaus: 0,06

- c)** Jos vuoden ensimmäinen päivä on maanantai, 52 täyteen viikkoon kuluu $52 \cdot 7 = 364$ päivää. 364. päivä on siis sunnuntai ja 365. päivä maanantai. Vuodessa on tällöin 53 maanantaita ja 52 kutakin muuta viikonpäivää.

Pyhäpäivät voidaan siis valita $6 \cdot \binom{52}{13} + \binom{53}{13}$ tavalla.

Kysytty todennäköisyys on

$$\frac{6 \cdot \binom{52}{13} + \binom{53}{13}}{\binom{365}{13}} = 1,761... \cdot 10^{-11} \approx 1,8 \cdot 10^{-11}.$$

Vastaus: $1,8 \cdot 10^{-11}$

316B. Tapahtuma ”ainakin yksi voittoarpa” on tapahtuman ”ei yhtään voittoarpaa” vastatapahtuma.

Todennäköisyys, että arpa ei voita on $1 - \frac{1}{20} = 0,95$. Todennäköisyys, että n :ssä arvassa ei ole yhtään voittoa, on $0,95^n$, joten $P(\text{tulee ainakin yksi voitto}) = 1 - 0,95^n$.

Koska todennäköisyys pitää olla yli 50 %, saadaan epäyhtälö $1 - 0,95^n > 0,50$.

Ohjelman symbolisen laskennan toiminnolla saadaan ratkaisuksi $n > 13,513\dots$

On ostettava vähintään 14 arpaa.

Vastaus: vähintään 14 arpaa

317A. 40:stä numerosta voidaan valita seitsemän $\binom{40}{7} = 18\,643\,560$ eri tavalla ja

33:sta jäljellä olevasta numerosta voidaan valita yksi lisänúmero 33:lla tavalla.

Seitsemästä oikeasta numerosta voidaan valita kolme $\binom{7}{3}$ eri tavalla.

Varsinaisessa rivissä tulee olla 33:sta väärästä neljä, jotka voidaan valita $\binom{33}{4}$. Oikean lisänumeron on oltava jokin pelaajan valitsemista neljästä

väärästä numerosta, joten lisänúmero voidaan valita $\binom{4}{1} = 4$ tavalla.

$P(\text{täsmälleen 3 ja lisänúmero oikein})$

$$= \frac{\binom{7}{3} \cdot \binom{33}{4} \cdot 4}{\binom{40}{7} \cdot 33} = 0,009311\dots \approx 0,0093$$

Vastaus: 0,0093

- 318A. a)** Käytetään alkeistapauksina viiden kortin joukkoja. Kaikkien alkeistapausten lukumäärä on $\binom{52}{5}$. Jokaista arvoa vastaa neljä korttia, joista kolme voidaan valita $\binom{4}{3}$ tavalla. Eri arvoja ovat 1-13, siis 13 kpl. Loput kaksi korttia on oltava muun arvoisia ja niitä on $52 - 4 = 48$. Kaksi 48:sta voidaan valita $\binom{48}{2}$ tavalla.

P (täsmälleen kolme on samanarvoisia)

$$= \frac{13 \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{48}{2}}{\binom{52}{5}} = \frac{58656}{2598960} = \frac{94}{4165} = 0,0225... \approx 0,023$$

Vastaus: 0,023

- b)** Jokaista arvoa vastaa neljä korttia, joista neljä voidaan valita $\binom{4}{4}$ tavalla. Eri arvoja on 13 kappaletta. 48:sta muun arvoisesta kortista voidaan valita yksi kortti $\binom{48}{1}$ tavalla.

P (täsmälleen neljä on samanarvoisia)

$$= \frac{13 \cdot \binom{4}{4} \cdot \binom{48}{1}}{\binom{52}{5}} = \frac{624}{2598960} = \frac{1}{4165} = 0,000240... \approx 0,00024$$

Vastaus: 0,00024

- c) On otettava huomioon, että kolmen muun arvoisen kortin joukossa ei saa olla kahta keskenään samanarvoista korttia. Kaksi samanarvoista voidaan valita $13 \cdot \binom{4}{2}$ tavalla.

Ensimmäinen muun arvoinen kortti voidaan valita $52 - 4 = 48$ tavalla.

Seuraava muun arvoinen kortti voidaan valita $52 - 8 = 44$ tavalla ja

kolmas muun arvoinen kortti voidaan valita $52 - 12 = 40$ tavalla.

Kolme muun arvoista korttia voidaan valita $48 \cdot 44 \cdot 40$ tavalla. Koska korttien järjestyksellä ei ole väliä, valintatapoja on $\frac{48 \cdot 44 \cdot 40}{3!} = 14\,080$.

P (täsmälleen kaksi on samanarvoisia)

$$= \frac{13 \cdot \binom{4}{2} \cdot 14\,080}{\binom{52}{5}} = \frac{1098\,240}{2\,598\,960} = \frac{352}{833} = 0,422\dots \approx 0,42$$

Vastaus: 0,42

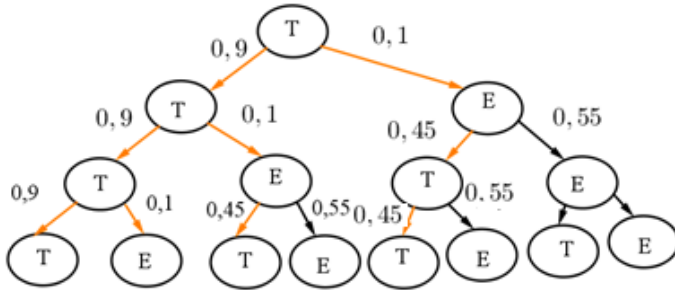
319A. Taulukoidaan jokaiseen kerrokseen liittyvä odotusaika.

Kerros	Odotusaika (s)
Kellari	$10 + 5 = 15$
1	0
2	$10 + 5 = 15$
3	$10 + 2 \cdot 5 = 20$
4	$10 + 3 \cdot 5 = 25$
5	$10 + 3 \cdot 5 = 25$
6	$10 + 2 \cdot 5 = 20$
7	$10 + 5 = 15$
8	0
9	$10 + 5 = 15$
10	$10 + 2 \cdot 5 = 20$
11	$10 + 3 \cdot 5 = 25$
12	$10 + 4 \cdot 5 = 30$
13	$10 + 3 \cdot 5 = 25$
14	$10 + 2 \cdot 5 = 20$
15	$10 + 5 = 15$
16	0
17	$10 + 5 = 15$
18	$10 + 2 \cdot 5 = 20$
19	$10 + 3 \cdot 5 = 25$
20	$10 + 4 \cdot 5 = 30$

Kerrokset, joissa joutuu odottamaan yli 22 sekuntia, ovat 4, 5, 11, 12, 13, 19 ja 20, joten suotuisia kerroksia on 7. Jokaisen kerroksen kohdalla on todennäköisyys 0,025, joten kysytty todennäköisyys on $7 \cdot 0,025 = 0,175$

Vastaus: 0,175

320A. Piirretään tilanteesta puukaavio, jossa T = ”torjunta” ja E = ”ei torjunta”. Merkitään oranssilla ne vaihtoehdot, joissa on vähintään kolme torjuntaa.



Kerto- ja yhteenlaskusääntöjä soveltaen saadaan todennäköisyydeksi

$$\begin{aligned}
 &P(\text{torjuu neljästä laukauksesta vähintään 3}) \\
 &= 0,9 \cdot 0,9 \cdot 0,9 \cdot 0,9 + 0,9 \cdot 0,9 \cdot 0,1 + 0,9 \cdot 0,1 \cdot 0,45 + 0,1 \cdot 0,45 \cdot 0,45 \\
 &= 0,87075 \\
 &\approx 0,87
 \end{aligned}$$

Vastaus: 0,87

321A. a) Kahden täytteen pitsoja on $\binom{14}{2}$ erilaista. Vastaavasti erilaisia kolmen ja neljän täytteen pitsoja on $\binom{14}{3}$ ja $\binom{14}{4}$. Koska tonnikalaa lisäksi on valittavissa 13 muuta täytettä, kahden täytteen pitsoja, joissa on tonnikalaa, on 13 erilaista. Kolmen täytteen pitsassa kaksi muuta täytettä tonnikalaa lisäksi voidaan valita $\binom{13}{2}$ tavalla. Neljän täytteen pitsassa täytteet voidaan valita $\binom{13}{3}$ tavalla.

$$P(\text{pitsassa on tonnikalaa}) = \frac{13 + \binom{13}{2} + \binom{13}{3}}{\binom{14}{2} + \binom{14}{3} + \binom{14}{4}} = \frac{377}{1456} = \frac{29}{112}$$

Todennäköisyys, että toisessa pitsassa on tonnikalaa ja toisessa ei ole, on

$$\frac{29}{112} \cdot \left(1 - \frac{29}{112}\right) = \frac{2407}{12544} = 0,191\dots \approx 0,19$$

Vastaus: 0,19

- b)** Tonnikalatäyte voidaan valita vain yhdellä tavalla ja muut täytteet voidaan valita alla lasketuilla määrillä tapoja.

Todennäköisyys, että kahden täytteen pitsassa on tonnikalaa, on $\frac{1 \cdot 13}{\binom{14}{2}}$.

Todennäköisyys, että kolmen täytteen pitsassa on tonnikalaa, on $\frac{1 \cdot \binom{13}{2}}{\binom{14}{3}}$.

Todennäköisyys, että neljän täytteen pitsassa on tonnikalaa, on $\frac{1 \cdot \binom{13}{3}}{\binom{14}{4}}$.

Koska pitsan täytteiden määrä arvotaan, jokaisen täytteen määrän todennäköisyys on $\frac{1}{3}$.

$P(\text{pitsassa on tonnikalaa})$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1 \cdot 13}{\binom{14}{2}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1 \cdot \binom{13}{2}}{\binom{14}{3}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1 \cdot \binom{13}{3}}{\binom{14}{4}} = \frac{3}{14} = 0,214... \approx 0,21$$

Todennäköisyys, että toisessa pitsassa on tonnikalaa ja toisessa ei ole, on

$$\frac{3}{14} \cdot \left(1 - \frac{3}{14}\right) = \frac{33}{196} = 0,168... \approx 0,17$$

Vastaus: 0,17

322A. Kaksinumeroisia positiivisia kokonaislukuja ovat luvut 10-99. Näitä on $99 - 9 = 90$ kpl. Parillisia niistä on puolet eli 45. Kolmella jaollisia on joka kolmas eli yhteensä 30. Markuksen ja Marikan valitsemia mahdollisia lukupareja on yhteensä $45 \cdot 30 = 1350$.

Kahdella ja kolmella jaollisia on joka kuudes luku eli $\frac{100}{6} \approx 15$ kpl. Näin ollen Markuksen ja Marikan valitsemia mahdollisia lukupareja, joissa kummallakin on sama luku, on 15 kpl.

$$P(\text{valitsevat saman luvun}) = \frac{15}{1350} = \frac{1}{90} = 0,0111 \approx 0,011$$

Vastaus: 0,011

8 TILASTOT

ALOITA PERUSTEISTA

323A. Keskiarvo on pituuksien summan ja lukumäärän osamäärä, joten A ja III kuuluvat yhteen.

Keskihajonta mittaa havaintoarvojen ryhmittymistä keskiarvon ympärille, joten B ja I kuuluvat yhteen.

Mediaani on suuruusjärjestykseen asetetuista havaintoarvoista keskimmäinen tai keskimmäisten keskiarvo, joten C ja II kuuluvat yhteen.

Moodi on havaintoarvoista se, jonka frekvenssi on suurin eli moodi on yleisin havaintoarvo, joten D ja IV kuuluvat yhteen.

Vastaus: A: III, B: I, C: II ja D: IV

324A. a) Polkupyörien määrät suuruusjärjestyksessä ovat: 0, 0, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 5, 5.

Vastaus: 0, 0, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 5, 5

b) Koska lukumäärää kaksi on eniten, moodi on $M_o = 2$.

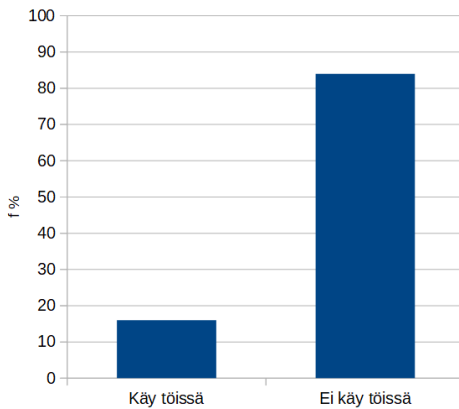
Lukuja on yhteensä 10, joten 5. ja 6. lukumäärä ovat keskimmäiset. 5. lukumäärä on 2 ja 6. lukumäärä on 2. Näiden keskiarvo on 2, joten mediaani on 2.

$$\text{Keskiarvo on } \bar{x} = \frac{0+0+1+2+2+2+3+4+5+5}{10} = 2,4.$$

Vastaus: $M_o = 2$, $M_d = 2$ ja $\bar{x} = 2,4$

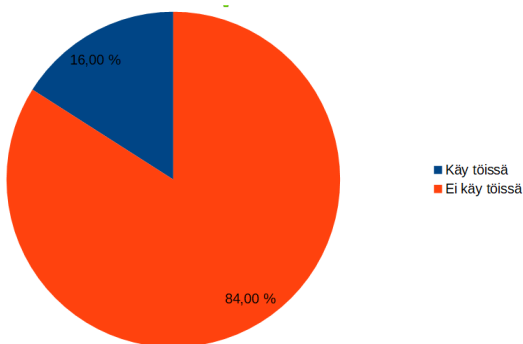
325B. a) Kopioidaan taulukon tiedot taulukkolaskentaohjelmaan ja piirretään pylväskaavio.

Vastaus:



b) Kopioidaan taulukon tiedot taulukkolaskentaohjelmaan ja piirretään ympyräkaavio.

Vastaus:



- 326A. a)** Kuvaajasta nähdään, että kun ikä on 15, suhteellinen summafrekvenssi on noin 40, joten alle 15-vuotiaita on noin 40 %.

Vastaus: n. 40 %

- b)** Kuvaajasta nähdään, että kun suhteellinen summafrekvenssi on 50, ikä on noin 20, joten mediaani-ikä on noin 20 vuotta.

Vastaus: n. 20 vuotta

- c)** Kuvaajasta nähdään, että kun suhteellinen summafrekvenssi on 90, ikä on noin 53 vuotta, joten sitä nuorempia on noin 90 % keski-afrikkalaisista.

Vastaus: n. 53 vuotta

- 327A.** Täydennetään taulukkoon summafrekvenssit sf , suhteelliset frekvenssit $f\%$ ja suhteelliset summafrekvenssit $sf\%$.

Lumitöiden tekemiskertojen määrä	f	sf	$f\%$	$sf\%$
0	19	19	$\frac{19}{31} \approx 61\%$	$\frac{19}{31} \approx 61\%$
1	6	$19 + 6 = 25$	$\frac{6}{31} \approx 19\%$	$\frac{25}{31} \approx 81\%$
2	4	$25 + 4 = 29$	$\frac{4}{31} \approx 13\%$	$\frac{29}{31} \approx 94\%$
3	2	$29 + 2 = 31$	$\frac{2}{31} \approx 6\%$	$\frac{31}{31} = 100\%$

Vastaus:

Lumitöiden tekemiskertojen määrä	f	sf	$f\%$	$sf\%$
0	19	19	61 %	61 %
1	6	25	19 %	81 %
2	4	29	13 %	94 %
3	2	31	6 %	100 %

328A. Jakauman B suurimmat frekvenssit ovat lähellä toisiaan ja pienimmät molemmiin puolin laitimmaisina, joten siinä on pienin keskihajonta.

Jakauman A suurimmat frekvenssit ovat äärilaidoilla, joten sen keskihajonta on suurin.

Jakauman C arvot ovat jakautuneet melko tasaisesti koko vaihteluvälille, joten sen keskihajonta A:n ja C:n keskihajonnan välissä.

Jakaumien A–C keskihajonnan mukainen suuruusjärjestys pienimmästä alkaen on B, C, A.

Vastaus: B, C, A

329A. Kuvan A havaintoarvot asettuvat varsin hyvin nousevan suoran läheisyyteen, joten korrelaatio on selvästi positiivinen. A ja IV kuuluvat yhteen.

Kuvan B havaintoarvot asettuvat varsin hyvin laskevan suoran läheisyyteen, joten korrelaatio on selvästi negatiivinen. B ja I kuuluvat yhteen.

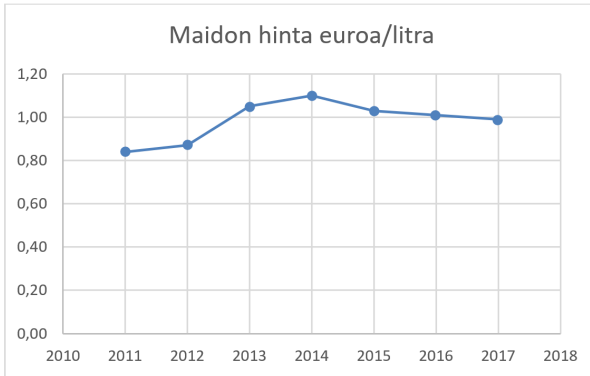
Kuvan C havaintoarvot näyttävät asettuvan paraabelille, joten muuttujien x ja y välillä ei ole lineaarista riippuvuutta. C ja III kuuluvat yhteen.

Kuvan D havaintoarvot asettuvat melko hyvin laskevan suoran läheisyyteen, joten korrelaatio on jonkin verran negatiivinen. D ja II kuuluvat yhteen.

Vastaus: A: IV, B: I, C: III ja D: II

330B. Piirretään aineistosta viivakaavio.

Vastaus:



331A. a) Uintikertojen keskiarvo on $\bar{x} = \frac{7+10+0+2+1+4}{6} = 4$.

Vastaus: $\bar{x} = 4$ kertaa**b)** Keskihajonta on

$$s = \sqrt{\frac{(7-4)^2 + (10-4)^2 + (0-4)^2 + (2-4)^2 + (1-4)^2 + (4-4)^2}{6-1}}$$

$$= 3,847\dots$$

$$\approx 3,8$$

Vastaus: $s = 3,8$ kertaa

332A. Niiden, jotka eivät ole ollenkaan käyttäneet, suhteellinen frekvenssi on suurin, joten moodiluokka on 0.

Kahteen ensimmäiseen luokkaan kuuluu $27\% + 16\% = 43\%$ ja seuraavaan luokkaan 16% . 50% :n raja ylittyy luokan 3–5 kohdalla, joten mediaaniluokka on 3–5.

Vastaus: moodiluokka: 0, mediaaniluokka: 3–5

333A. a) Hammaslääkäriissäkäyntikertojen keskiarvo on

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{13 \cdot 0 + 22 \cdot 1 + 7 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 2 \cdot 4}{50} \\ &= 1,24 \\ &\approx 1,2\end{aligned}$$

Vastaus: $\bar{x} = 1,2$

b) Keskihajonta on

$$\begin{aligned}s &= \sqrt{\frac{13 \cdot (0 - \bar{x})^2 + 22 \cdot (1 - \bar{x})^2 + 7 \cdot (2 - \bar{x})^2 + 6 \cdot (3 - \bar{x})^2 + 2 \cdot (4 - \bar{x})^2}{50 - 1}} \\ &= 1,098... \\ &\approx 1,10\end{aligned}$$

Vastaus: $s = 1,10$

334B. Sopivalla ohjelmalla keskiarvoksi saadaan $\bar{x} = 4,860... \approx 4,86$ ja keskihajonnaksi $s = 1,257... \approx 1,26$.

n	86
Keskiarvo	4.8605
σ	1.2498
s	1.2571
Σx	418
Σx^2	2166
Min	2
Q1	4
Mediaani	5
Q3	6
Max	7

Vastaus: $\bar{x} = 4,86$, $s = 1,26$

335B. Täydennetään taulukkoon todelliset rajat ja luokkakeskukset.

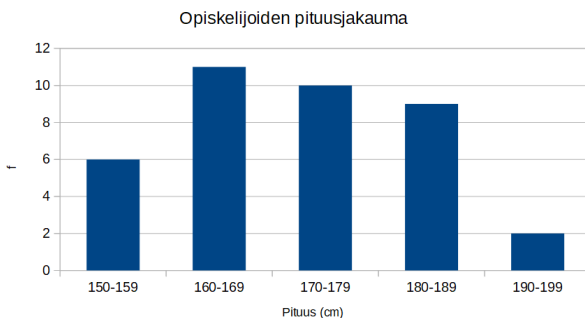
Pituus (cm)	Todellinen alaraja (cm)	Todellinen yläraja (cm)	Luokkakeskus (cm)
150–159	149,5	159,5	$\frac{149,5 + 159,5}{2} = 154,5$
160–169	159,5	169,5	$\frac{169,5 + 179,5}{2} = 164,5$
170–179	169,5	179,5	$\frac{179,5 + 189,5}{2} = 174,5$
180–189	179,5	189,5	$\frac{179,5 + 189,5}{2} = 184,5$
190–199	189,5	199,5	$\frac{189,5 + 199,5}{2} = 194,5$

Lasketaan opiskelijoiden pituuksien keskiarvo luokkakeskusten ja frekvenssien avulla.

Pituus (cm)	Luokkakeskus (cm)	f
150–159	154,5	6
160–169	164,5	11
170–179	174,5	10
180–189	184,5	9
190–199	194,5	2

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{6 \cdot 154,5 + 11 \cdot 164,5 + 10 \cdot 174,5 + 9 \cdot 184,5 + 2 \cdot 194,5}{38} \\ &= 171,868... \\ &\approx 171,9\end{aligned}$$

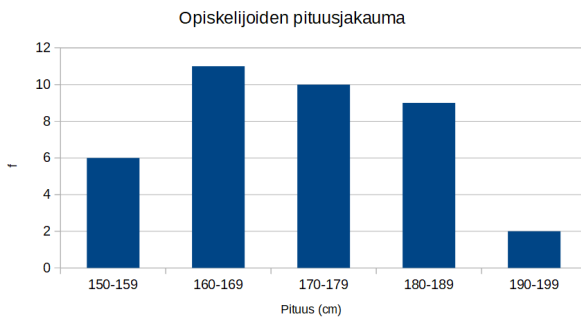
Piirretään pylväskaavio sopivalla ohjelmalla.



Vastaus:

Pituus (cm)	Luokkakeskus (cm)
150–159	154,5
160–169	164,5
170–179	174,5
180–189	184,5
190–199	194,5

$$\bar{x} = 171,9 \text{ cm}$$



336A. Täydennetään taulukkoon todelliset rajat ja luokkakeskukset.

Hinta (€)	Todellinen alaraja (€)	Todellinen yläraja (€)	Luokkakeskus (€)	f
20,00–29,99	19,995	29,995	$\frac{19,995 + 29,995}{2} = 24,995$	4
30,00–39,99	29,995	39,995	$\frac{29,995 + 39,995}{2} = 34,995$	19
40,00–49,99	39,995	49,995	$\frac{39,995 + 49,995}{2} = 44,995$	17
50,00–59,99	49,995	59,995	$\frac{49,995 + 59,995}{2} = 54,995$	6

Lasketaan joulukuusien hintojen keskiarvo.

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{4 \cdot 24,995 + 19 \cdot 34,995 + 17 \cdot 44,995 + 6 \cdot 54,995}{46} \\ &= 40,429... \\ &\approx 40,43\end{aligned}$$

Joulukuusien hintojen keskiarvo on 40,43 €.

Vastaus: 40,43 €

337B. a) Kopioidaan taulukon tiedot sopivaan ohjelmaan.

n	50
Keskiarvo	202.82
σ	9.3759
s	9.4711
Σx	10141
Σx^2	2061193
Min	183
Q1	196
Mediaani	204.5
Q3	211
Max	216

Keskiarvoksi saadaan $\bar{x} = 202,8$ cm ja keskihajonnaksi $s = 9,471... \text{ cm} \approx 9,47 \text{ cm}$.

Vastaus: $\bar{x} = 202,8 \text{ cm}$, $s = 9,47 \text{ cm}$

- b) Koripalloilijoiden pituuden ja sijoituksen välinen korrelaatiokerroin on $r = 0,0682... \approx 0,068$ ja selitysaste $r^2 = 0,00465... \approx 0,005$.

KeskiarvoX	202.82
KeskiarvoY	25.5
Sx	9.4711
Sy	14.5774
r	0.0682
p	0.0806
Sxx	4395.38
VarianssiY	10412.5
Sxy	461.5

Vastaus: $r = 0,068$, $r^2 = 0,005$

- c) Kohdan b perusteella pelaajan pituuden ja sijoituksen välillä ei ole korrelaatiota, joten väite ”Mitä pidempi koripalloilija, sitä paremmin hän pelaa” ei pidä paikkaansa.

Vastaus: ei ole

VAHVISTA OSAAMISTA

- 338A. a)** Vaihteluvälin pituus saadaan laskemalla suurimman ja pienimmän arvon erotus. Lämpötilan vaihteluvälin pituus maailmassa on $57\text{ °C} - (-89\text{ °C}) = 146\text{ °C}$.

Vastaus: 146 °C

- b)** Merkitään alinta Death Valleyssä mitattua lämpötilaa kirjaimella x . Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä lämpötila x .

$$\begin{aligned} 57 - x &= 67 \\ x &= -10 \end{aligned}$$

Alin lämpötila Death Valleyssä on -10 °C .

Vastaus: -10 °C

- c)** Merkitään korkeinta Vostokissa mitattua lämpötilaa kirjaimella x . Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä lämpötila x .

$$\begin{aligned} x - (-89) &= 75 \\ x &= -14 \end{aligned}$$

Ylin lämpötila Vostokissa on -14 °C .

Vastaus: -14 °C

- 339A. a)** Kuvaajalta nähdään, että 60 minuutin kestoaikaa vastaa suhteellisen summafrekvenssiin arvo noin 5 %, joten noin 5 prosenttia akuista kesti korkeintaan tunnin.

Vastaus: n. 5 %

- b)** Kolme tuntia on 180 minuuttia, jota vastaava suhteellisen summafrekvenssiin arvo noin 55 %, joten likimain $100\% - 55\% = 45\%$ akuista kesti yli kolme tuntia.

Vastaus: n. 45 %

- c) Suhteellisen summafrekvenssin arvoa 50 % vastaava kestoikä on noin 170 minuuttia, joten kestoajan mediaani on noin 170 min.

Suhteellisen summafrekvenssin arvoa 25 % vastaava kestoikä on noin 120 minuuttia, joten kestoajan alakvartiili Q_1 on noin 120 min.

Suhteellisen summafrekvenssin arvoa 75 % vastaava kestoikä on noin 215 minuuttia, joten kestoajan yläkvartiili Q_3 on noin 215 min.

Vastaus: $M_d \approx 170$ min, $Q_1 \approx 120$ min, $Q_3 \approx 215$ min

- d) Suhteellisen summafrekvenssin arvoa 90 % vastaava kestoikä on noin 240 minuuttia, joten parhaat 10 % akuista kestivät noin 240 min.

Vastaus: n. 240 min

- 340A. a) Selitysaste on $r^2 = 0,59^2 = 0,3481 \approx 0,35 = 35$ %. Muuttuja A selittää 35 % muuttujan B arvon vaihtelusta.

Vastaus: 35 %

- b) Selitysaste $r^2 = 74,2$ % = 0,742 ratkaistaan korrelaatiokerroin r yhtälöstä

$$r^2 = 0,742$$

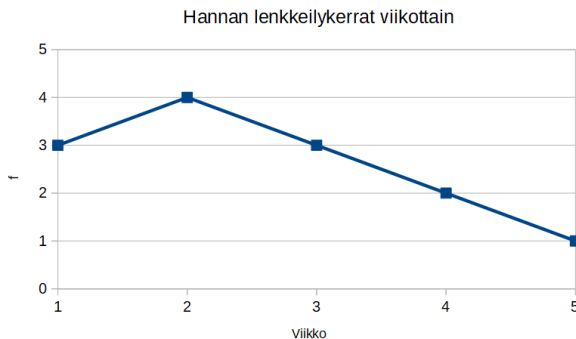
$$r = (\pm) 0,861...$$

$$r \approx 0,86$$

Vastaus: $r = 0,86$

341B a) Piirretään viivakaavio sopivalla ohjelmalla.

Vastaus:



b) Merkitään seuraavan viikon lenkkeilykertojen määrää kirjaimella x . Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä x .

$$\begin{aligned} \frac{3 + 4 + 3 + 2 + 1 + x}{6} &= 3 \\ \frac{13 + x}{6} &= 3 \quad || \cdot 6 \\ 13 + x &= 18 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Hannan on käytävä seuraavalla viikolla lenkillä vähintään 5 kertaa, jotta lenkkeilykertojen keskiarvo olisi vähintään 3.

Vastaus: vähintään 5 kertaa

342A Tarkastellaan ohjelman ilmoittamia tunnuslukuja.

Havaintojen lukumäärä on $n = 50$.
 Keskiarvo on $\bar{x} = 132,0323 \approx 132$
 Keskihajonta on $s = 61,5394 \approx 62$.
 Min on pienin havaintoarvo
 Alakvartiili on $Q1 = 89,7786 \approx 90$.
 Mediaani on $Md = 133,8062 \approx 134$
 Yläkvartiili on $Q3 = 172,3969 \approx 172$.
 $\text{Max} = 290,9595 \approx 291$ on suurin havaintoarvo.

n	50
Keskiarvo	132.0323
σ	60.9209
s	61.5394
Σx	6601.6154
Σx^2	1057194.594
Min	6.1206
Q1	89.7786
Mediaani	133.8062
Q3	172.3969
Max	290.9595

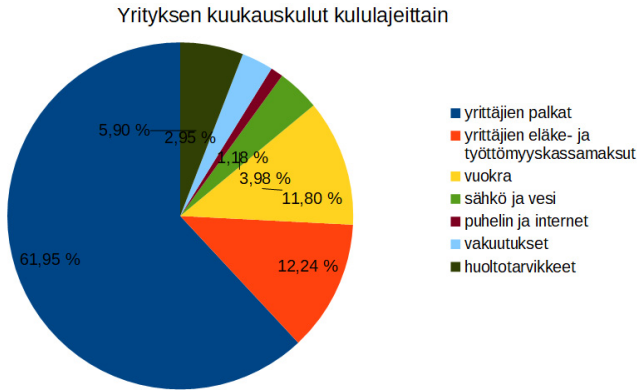
Täydennetään lauseet.

- Aikojen keskiarvo on 132 minuuttia ja mediaani 134 minuuttia.
- Aineiston vaihteluväli on 6 min–291 min ja keskihajonta 62 minuuttia.
- Aineistossa on 50 havaintoarvoa.
- Päivystyksessä kävijöistä 25 % oli terveyskeskuksessa korkeintaan 90 minuuttia.
- Päivystyksessä kävijöistä 25 % oli terveyskeskuksessa kauemmin kuin 172 minuuttia.
- Alakvartiilin ala puolella on 25 % havainnoista ja yläkvartiilin yläpuolella on 25 %, joten väliin jää 50 %. Tällöin aikavälillä [90 min, 172 min] on 50 % havaintoarvoista.

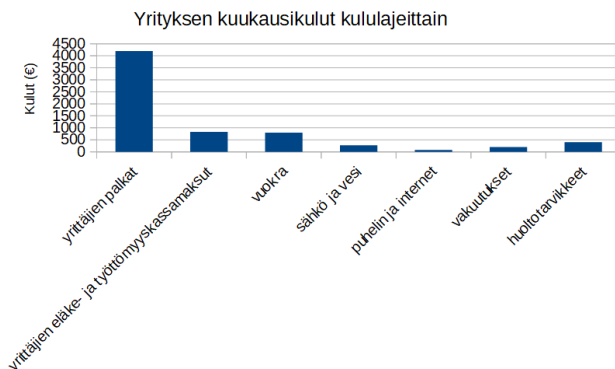
Vastaus:

- 132 min, 134 min
- 6 min–291 min, 62 min
- 50
- 90
- 172
- 50

343B. Jotta aineistoa olisi mielekästä kuvata viivakaaviolla, tulisi vaaka-akselilla olla suuruusjärjestykseen asetettuja lukuarvoja. Kululajit eivät ole sellaisia, joten yrityksen kuukausikuluja ei voi havainnollistaa viivakaaviolla.



Ympyräkaavio sopii hyvin havainnollistamaan esimerkiksi kulujen suhteellisia osuuksia. Pylväskaaviolla voi havainnollistaa euromääräisiä kuluja.



Vastaus: Ympyräkaavio ja pylväskaavio

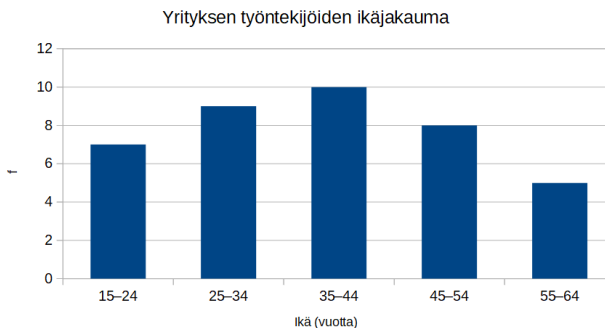
344B. Aineisto on luokiteltava viiteen tasaväliseen luokkaan. Jotta saataisiin selville luokkavälin pituus, lasketaan tilaston pienimmän arvon ja suurimman arvon erotus.

$$62 - 19 = 43$$

Jos aineisto jaettaisiin viiteen luokkaan käyttäen lukua 19 ensimmäisen luokan alarajana ja lukua 62 viimeisen luokan ylärajana, tulisi yhden luokan pituudeksi $\frac{43}{5} = 8,6$, joka ei ole kokonaisluku. Jotta taulukko olisi mahdollisimman selkeä, valitaan ensimmäisen luokan alarajaksi 15 ja luokan pituudeksi 10. Laaditaan luokitellusta aineistosta frekvenssitaulukko.

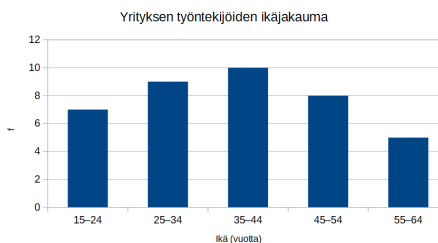
Ikä (vuotta)	f
15–24	7
25–34	9
35–44	10
45–54	8
55–64	5

Piirretään pylväskaavio.



Vastaus:

Ikä (vuotta)	f
15–24	7
25–34	9
35–44	10
45–54	8
55–64	5



345A. a) 100% vastaa täysi ympyrää, joten 15,6 % vastaavan keskuskulman suuruus on $0,156 \cdot 360^\circ = 56,16^\circ \approx 56^\circ$.

Vastaus: 56°

b) 100 % vastaa täysi ympyrää. Tällöin ympyräkaavion sektorin keskuskulmaa $95,6^\circ$ vastaava suhteellinen frekvenssi on $\frac{95,6^\circ}{360^\circ} = 0,2655... \approx 26,6 \%$.

Vastaus: 26,6 %

346B. Täydennetään taulukkoon summafrekvenssit ja suhteelliset summafrekvenssit.

Puhelujen määrä	f	sf	$sf\%$
0–19	2	2	$\frac{2}{74} \approx 3 \%$
20–39	17	$2 + 17 = 19$	$\frac{19}{74} \approx 26 \%$
40–59	42	$19 + 42 = 61$	$\frac{61}{74} \approx 82 \%$
60–79	13	$61 + 13 = 74$	100 %

Luokka 20–39 on alakvartiililuokka, koska suhteellinen summafrekvenssi ylittää sen kohdalla arvon 25 %.

Luokka 40–59 on yläkvartiililuokka, koska suhteellinen summafrekvenssi ylittää sen kohdalla arvon 75 %.

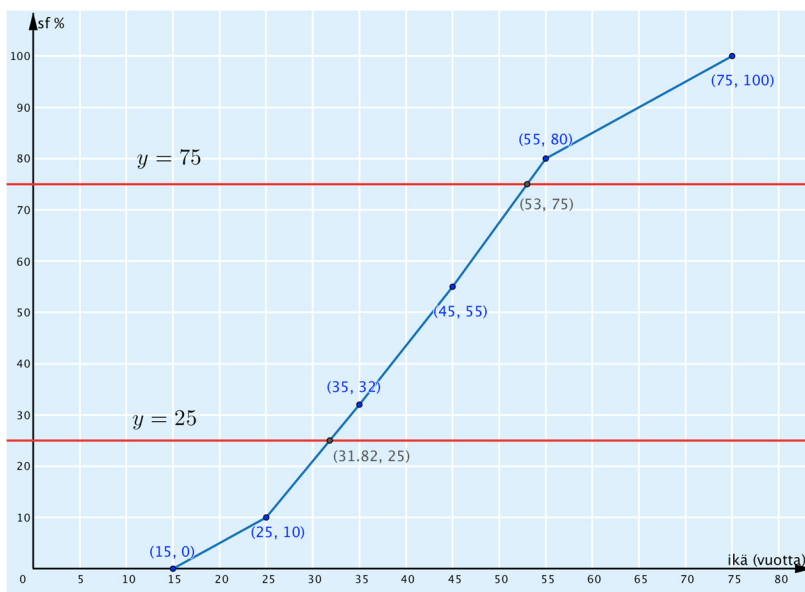
Vastaus: alakvartiililuokka 20–39, yläkvartiililuokka 40–59

347B. a) Täydennetään taulukkoon todelliset rajat ja suhteelliset summafrekvenssit. Ikä ilmoitetaan yleensä kokonaisina vuosina ja pyöristetään alaspäin. Esimerkiksi 24 vuotias lasketaan 24-vuotiaaksi, vaikka hän täyttäisi huomenna 25 vuotta. Luokan 18–24 todellinen alaraja on siis 18 vuotta ja todellinen yläraja 25 vuotta.

Ikä (vuotta)	Todellinen alaraja (vuotta)	Todellinen yläraja (vuotta)	$f\%$	$sf\%$
18–24	18	25	10	10
25–34	25	35	22	$10 + 22 = 32$
35–44	35	45	23	$32 + 23 = 55$
45–54	45	55	25	$55 + 25 = 80$
55–74	55	75	20	$80 + 20 = 100$

Piirretään suhteellisen summafrekvenssin kuvaaja.

Suorien $y = 25$ ja $y = 75$ ja suhteellisen summafrekvenssin kuvaajan leikkauspisteet ovat $(31,82; 25)$ ja $(53, 75)$, joten alakvartiili on noin 32 vuotta ja yläkvartiili 53 vuotta.



Vastaus: Alakvartiili n. 32 vuotta, yläkvartiili 53 vuotta.

- b)** Kopioidaan taulukko taulukkolaskentaohjelmaan ja täydennetään taulukkoon summafrekvenssit ja suhteelliset summafrekvenssit.

Huoneluku	f	sf	sf %
1	274 187	274 187	9 %
2	433 415	707 602	24 %
3	633 471	1 341 073	46 %
4	619 715	1 960 788	68 %
5	517 640	2 478 428	86 %
6	282 129	2 760 557	96 %
Vähintään 7	128 817	2 889 374	100 %

Suhteellisen summafrekvenssisarakkeesta nähdään, että 25 %:n raja ylittyy huoneluvun 3 kohdalla, joten alakvartiili on 3. Yläkvartiili on 5, koska 75 %:n raja ylittyy huoneluvun 5 kohdalla.

Vastaus: alakvartiili 3, yläkvartiili 5

- 348A** Suklaiden kilohintojen keskiarvo on 31,68 €/kg ja keskihajonta 17,23 €/kg.

Suklaiden A ja B kilohinnat poikkesivat keskiarvosta 0,23 ja −0,19 keskihajontaa.

Suklaan A kilohinta on

$$31,68 \text{ €/kg} + 0,23 \cdot 17,23 \text{ €/kg} = 35,6429 \text{ €/kg} \approx 35,64 \text{ €/kg}.$$

Suklaan B kilohinta on

$$31,68 \text{ €/kg} - 0,19 \cdot 17,23 \text{ €/kg} = 28,4063 \text{ €/kg} \approx 28,41 \text{ €/kg}$$

Vastaus: A: 35,64 €/kg, B: 28,41 €/kg

- 349B.** Sopivalla ohjelmalla saadaan elinkustannusindeksin pisteluvun ja syöpätapausten määrän väliseksi korrelaatiokertoimeksi $r = 0,9728 \approx 0,97$ ja selitysasteeksi $r^2 = 0,9464 \approx 0,95$. Korrelaatio kertoo tilastollisesta riippuvuudesta, mutta ei syy-seuraussuhteesta, joten ei voida päätellä, että korkeat hinnat aiheuttavat syöpää.

KeskiarvoX	878.1667
KeskiarvoY	90961.3...
Sx	643.7741
Sy	38070.9...
r	0.9728
ρ	1
Sxx	455889...
VarianssiY	159433...
Sxy	262279...
R ²	0.9464
SSE	854043...

Vastaus: $r = 0,97$, $r^2 = 0,95$, ei voida päätellä

- 350B.** Käytetään prosenttiosuuksia frekvensseinä. Sopivalla ohjelmalla saadaan keskiarvoksi $\bar{x} = 3,103... \approx 3,10$ ja keskihajonnaksi $s = 1,568... \approx 1,57$.

n	100
Keskiarvo	3.1037
σ	1.5609
s	1.5687
Σx	310.37
Σx^2	1206.93
Min	0
Q1	2
Mediaani	3
Q3	4
Max	6

Vastaus: $\bar{x} = 3,10$, $s = 1,57$

351A. Täydennetään taulukkoon todelliset rajat ja luokkakeskukset. Koska viimeisen luokan ylärajaa ei ole ilmoitettu, oletetaan sen olevan 499 (€/kk).

Rahamäärä (€/kk)	Todellinen alaraja (€/kk)	Todellinen ylärajaa (€/kk)	Luokkakeskus (€/kk)	$f\%$
0–49	0	49,5	$\frac{0 + 49,5}{2} = 24,75$	72 %
50–99	49,5	99,5	$\frac{49,5 + 99,5}{2} = 74,75$	11 %
100–149	99,5	149,5	$\frac{99,5 + 149,5}{2} = 124,75$	8 %
150–199	149,5	199,5	$\frac{149,5 + 199,5}{2} = 174,5$	5 %
200–249	199,5	249,5	$\frac{199,5 + 249,5}{2} = 224,5$	3 %
250–499	249,5	499,5	$\frac{249,5 + 499,5}{2} = 374,5$	1 %

Koska vastanneiden kokonaismäärää ei ole kerrottu, merkitään sitä kirjaimella n . Tällöin luokkaan 0–49 kuuluvien määrä on $0,72n$ jne. Lasketaan liikuntaan kuluvan rahamäärän keskiarvo.

$$\begin{aligned}
 \bar{x} &= \frac{0,72n \cdot 24,75 + 0,11n \cdot 74,5 + \dots + 0,01n \cdot 374,5}{n} \\
 &= \frac{55,18n}{n} \\
 &= \frac{55,18n}{n} \\
 &= 55,18 \\
 &\approx 55
 \end{aligned}$$

Lukiolaiselta liikuntaan kuluvan rahamäärän keskiarvo on 55 €/kk.

Vastaus: 55 €/kk

352A. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä a .

$$\frac{a + 3a + (2a - 5) + (a + 6) + (-a)}{5} = 3,44$$

$$\frac{6a + 1}{5} = 3,44 \quad || \cdot 5$$

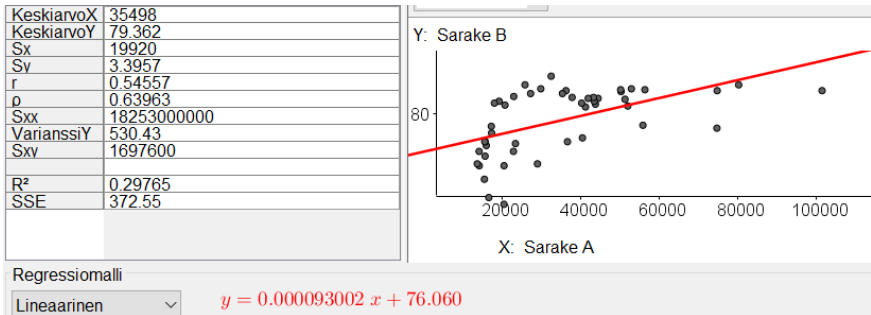
$$6a + 1 = 17,2$$

$$6a = 16,2 \quad || : 6$$

$$a = 2,7$$

Vastaus: $a = 2,7$

353B. a) Sopivalla ohjelmalla saadaan lineaarisesti malliksi
 $y = 0,00009302x + 76,060$, jossa x on bruttokansantuote henkeä kohti
dollareina ja y on eliniänodote vuosina.



Vastaus: $y = 0,00009302x + 76,060$

b) Kohdan a tunnuslukutaulukon perusteella bruttokansantuotteen ja eliniänodotteen välinen korrelaatiokerroin $r = 0,545... \approx 0,55$.
Korrelaatio on voimakkuudeltaan kohtalainen.

Vastaus: $r = 0,55$, kohtalainen

- c) Kohdan a mallin mukaan eliniänodote on 80,710... vuotta ≈ 81 vuotta, jos bruttokansantuote henkeä kohti on 50 000 dollaria.

$$y = 0.000093002 x + 76.060$$

Tarkka arvo: $x = 50000$ $y = 80.710$

Vastaus: 81 vuotta

- d) Sopivalla ohjelmalla yhtälöstä $80,0 = 0,000093002 \dots x + 76,060 \dots$ saadaan $x = 42\,361,751 \dots$ dollaria $\approx 42\,000$ dollaria.

Lista
 lista1 = {(101450, 82.4), (80215, 83), (74735, 82.4), (74667, 78.5), (56328, 82.5), (55837, 78.5)}
 Piste

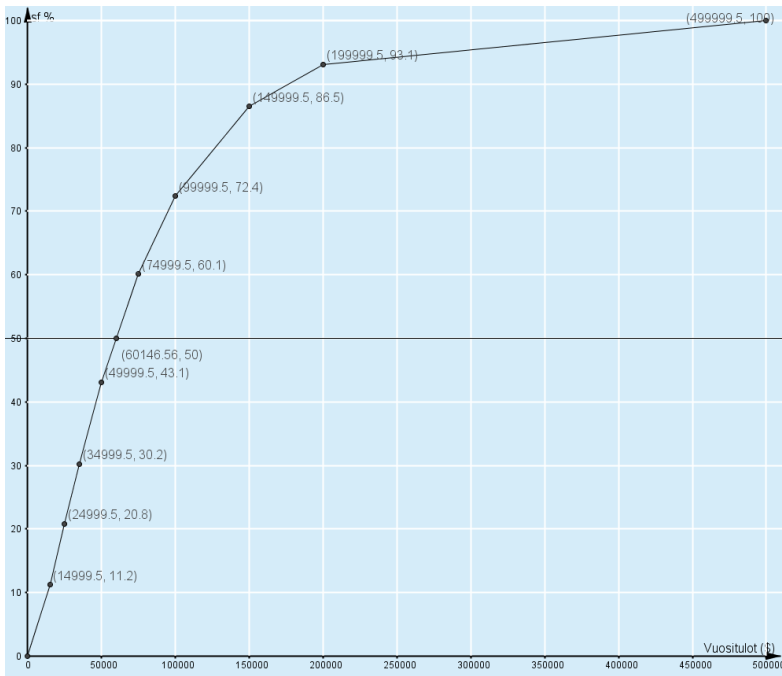
1	$k := \text{SovitaSuora}[\text{lista1}]$
•	$\rightarrow k := y = 0.0000930018x + 76.0602799441$
2	$\text{Ratkaise}[\text{Sijoita}[k, y=80], x]$
○	$\rightarrow \left\{ x = \frac{118187434032487362099635}{2789956255305443049} \right\}$
3	$\{x = 118187434032487362099635 / 2789956255305443049\}$
○	$\approx \{x = 42361.75166107\}$

Vastaus: 42 000 dollaria

354B. Täydennetään taulukkoon todelliset rajat, luokkakeskukset ja suhteelliset summafrekvenssit. Merkitään ylimmän tuloluokan ylärajaksi 500 000 dollaria.

Todellinen alaraja (\$)	Todellinen yläraja (\$)	Luokkakeskus (\$)	f %	sf %
0	14 999,5	$\frac{0 + 14999,5}{2} = 7499,75$	11,2 %	11,2 %
14 999,5	24 999,5	$\frac{14999,5 + 24999,5}{2} = 19999,5$	9,6 %	20,8 %
24 999,5	34 999,5	$\frac{24999,5 + 34999,5}{2} = 29999,5$	9,4 %	30,2 %
34 999,5	49 999,5	$\frac{34999,5 + 49999,5}{2} = 42499,5$	12,9 %	43,1 %
49 999,5	74 999,5	$\frac{49999,5 + 74999,5}{2} = 62499,5$	17 %	60,1 %
74 999,5	99 999,5	$\frac{74999,5 + 99999,5}{2} = 87499,5$	12,3 %	72,4 %
99 999,5	149 999,5	$\frac{99999,5 + 149999,5}{2} = 124999,5$	14,1 %	86,5 %
149 999,5	199 999,5	$\frac{149999,5 + 199999,5}{2} = 174999,5$	6,6 %	93,1 %
199 999,5	499 999,5	$\frac{199999,5 + 499999,5}{2} = 349999,5$	7 %	100,1 %

Piirretään suhteellisen summafrekvenssin kuvaaja. Mediaani määritetään piirtämällä suora $y = 50$. Mediaani on suoran ja suhteellisen summafrekvenssin kuvaajan leikkauspisteen x -koordinaatti $x = 60\,146,56 \approx 60\,147$. Mediaanivuositulo on noin 60 147 \$.



Määritetään vuositulojen keskiarvo ohjelmalla käyttäen frekvensseinä prosenttiosuuksia $f\%$. Vuositulojen keskiarvo on 86 038,486... \$ $\approx$ 86 038 \$.

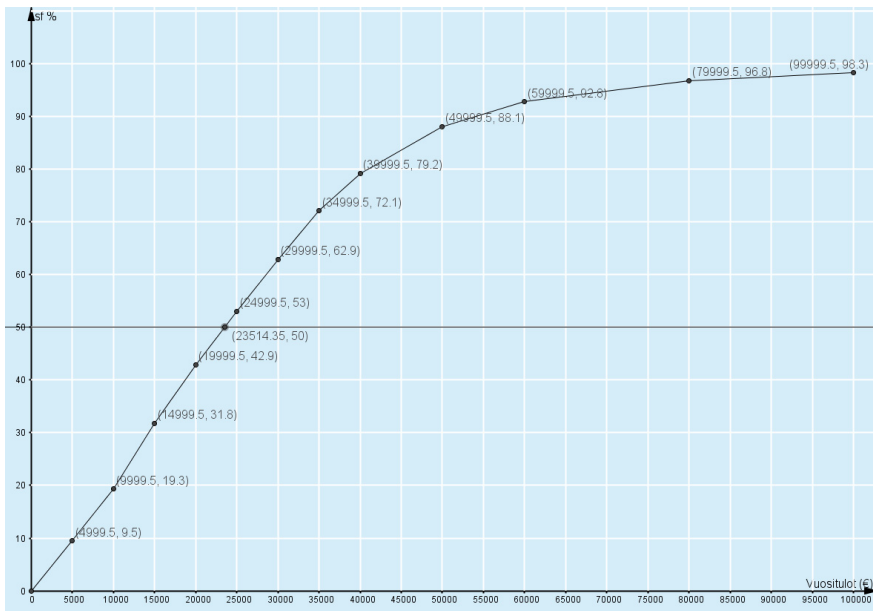
n	100.1
Keskiarvo	86038.489
σ	85732.156
s	86163.6241
Σx	8612452.75
Σx^2	147673767...
Min	7499.75
Q1	29999.5
Mediaani	62499.5
Q3	124999.5
Max	349999.5

Vastaus: Mediaanivuositulo 62 147 \$, keskimääräinen vuositulo 86 038 \$

355B. a) Täydennetään taulukkoon todelliset rajat, luokkakeskukset, summafrekvenssit ja suhteelliset summafrekvenssit. Frekvenssit ovat tuhansia. Viimeisin luokan yläraja ei ole tiedossa, mutta sitä ei tarvita mediaanin määrittämisessä.

Todellinen alaraja (€)	Todellinen yläraja (€)	Luokkakeskus (€)	f	sf	$sf\%$
0	4999,5	$\frac{0 + 4999,5}{2} = 2499,75$	442	442	$\frac{442}{4654} \approx 9,5\%$
4999,5	9999,5	$\frac{4999,5 + 9999,5}{2} = 7499,5$	457	899	$\frac{899}{4654} \approx 19,3\%$
9999,5	14 999,5	$\frac{9999,5 + 14999,5}{2} = 12 499,5$	579	1478	$\frac{1478}{4654} \approx 31,8\%$
14 999,5	19 999,5	$\frac{14999,5 + 19999,5}{2} = 17 499,5$	520	1998	$\frac{1998}{4654} \approx 42,9\%$
19 999,5	24 999,5	$\frac{19999,5 + 24999,5}{2} = 22 499,5$	468	2466	$\frac{2466}{4654} \approx 53,0\%$
24 999,5	29 999,5	$\frac{24999,5 + 29999,5}{2} = 27 499,5$	463	2929	$\frac{2929}{4654} \approx 62,9\%$
29 999,5	34 999,5	$\frac{29999,5 + 34999,5}{2} = 32 499,5$	425	3354	$\frac{3354}{4654} \approx 72,1\%$
34 999,5	39 999,5	$\frac{34999,5 + 39999,5}{2} = 37 499,5$	331	3685	$\frac{3685}{4654} \approx 79,2\%$
39 999,5	49 999,5	$\frac{39999,5 + 49999,5}{2} = 44 999,5$	414	4099	$\frac{4099}{4654} \approx 88,1\%$
49 999,5	59 999,5	$\frac{49999,5 + 59999,5}{2} = 54 999,5$	218	4317	$\frac{4317}{4654} \approx 92,8\%$
59 999,5	79 999,5	$\frac{59999,5 + 79999,5}{2} = 69 999,5$	190	4507	$\frac{4507}{4654} \approx 96,8\%$
79 999,5	99 999,5	$\frac{79999,5 + 99999,5}{2} = 89 999,5$	69	4576	$\frac{4576}{4654} \approx 98,3\%$
99 999,5			78	4654	$\frac{4654}{4654} = 100\%$

Piirretään suhteellisen summafrekvenssin kuvaaja. Mediaani määritetään piirtämällä suora $y = 50$. Mediaani on suoran ja suhteellisen summafrekvenssin kuvaajan leikkauspisteen x -koordinaatti $x = 23\,513,85 \approx 23\,514$. Mediaanivuositulo on 23 514 €.



Vastaus: 23 514 €

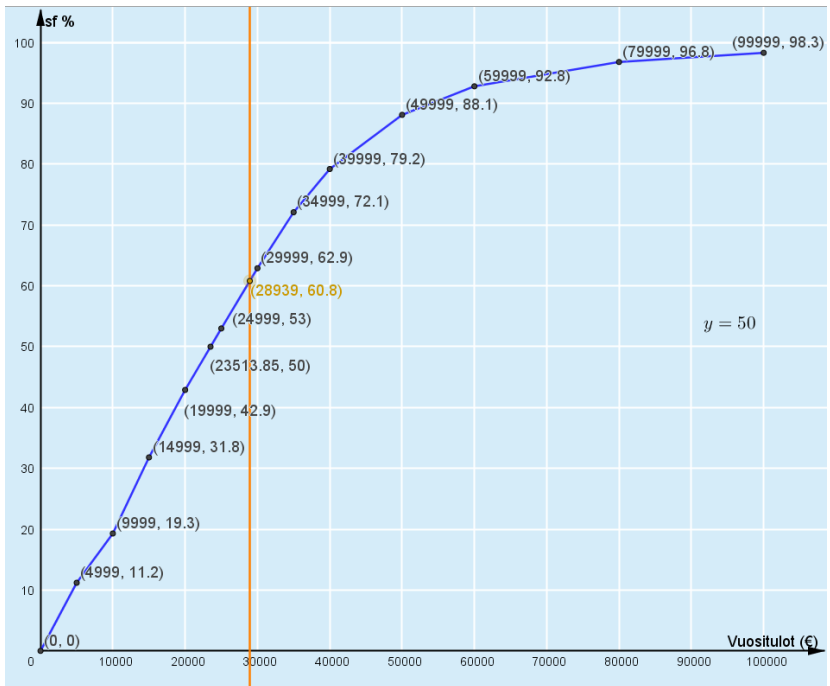
- b) Määritetään vuositulojen keskiarvo ohjelmalla käyttäen luokkakeskuksia. Viimeisen luokan keskimääräinen tulo henkeä kohden on $\frac{14197000000}{78000} = 182012,820\dots$

Käytetään viimeisen luokan edustajana arvoa 182 012,820...
 Vuositulojen keskiarvo on 28 939,046... € $\approx$ 28 939 €.

n	4654
Keskiarvo	28939.0465
σ	27241.2598
s	27244.1869
Σx	134682322.5
Σx^2	735124732...
Min	2499.75
Q1	12499.5
Mediaani	22499.5
Q3	37499.5
Max	182012.8205

Vastaus: 28 939 €

- c) Tulojen keskiarvoa enemmän ansainneiden osuus saadaan piirtämällä suora $x = 28\,939$. Suoran ja suhteellisen summafrekvenssin kuvaajan leikkauspisteen y -koordinaatti on $y = 60,8$. Tällöin keskiarvotuloja vähemmän ansaitsee $60,8\%$ ja enemmän ansaitsevia on $100\% - 60,8\% = 39,2\%$.



Vastaus: $39,2\%$

- 356A. a)** Jos aineiston suurin havaintoarvo pienenee, niin keskiarvo pienenee, koska havaintoarvojen summa pienenee.

Vastaus: pienenee

- b)** Jos aineiston suurin havaintoarvo kasvaa, niin mediaani pysyy samana, koska mediaani on suuruusjärjestykseen asetetun havaintoaineiston keskimäinen arvo ja se ei muutu, vaikka viimeistä arvoa muutetaan.

Vastaus: pysyy samana

- c)** Jos aineiston pienin havaintoarvo pienenee, niin keskihajonta kasvaa, koska pienimmän luvun etäisyys keskiarvosta kasvaa.

Vastaus: kasvaa

- 357A. a)** Esimerkiksi aineiston 1, 2, 2, 4 moodi on $Mo = 2$, $Md = 2$ ja

$$\bar{x} = \frac{9}{4} = 2,25.$$

Vastaus: Esim. 1, 2, 2, 4

- b)** Esimerkiksi aineiston 0, 1, 2, 3, 3, 9 moodi on $Mo = 3$,

$$Md = \frac{2+3}{2} = 2,5 \text{ ja } \bar{x} = \frac{18}{6} = 3.$$

Vastaus: Esim. 0, 1, 2, 3, 3, 9

- c)** Esimerkiksi aineiston 0, 1, 2, 2, 3, 3, 3 moodi on $Mo = 3$, $Md = 2$ ja

$$\bar{x} = \frac{14}{7} = 2.$$

Vastaus: Esim. 0, 1, 2, 2, 3, 3, 3

358A. Uusien arvosanojen summa saadaan kertomalla keskiarvo 7,2 arvosanojen määrällä 25. Summa on $7,2 \cdot 25 = 180$. Koska opiskelijoista 7 korotti arvosanaansa yhdellä, saadaan vanhojen arvosanojen summa vähentämällä 7 uusien arvosanojen summasta. Vanhojen arvosanojen summa on $180 - 7 = 173$. Jakamalla saatu summa opiskelijoiden määrällä saadaan vanha keskiarvo.

$$\bar{x} = \frac{173}{25} = 6,92$$

Vastaus: $\bar{x} = 6,92$

359A. Merkitään arvosanan 10 määrää kirjaimella n . Tällöin arvosanan 9 määrä on $2n$ ja arvosanan 8 määrä on $3n$. Lasketaan keskiarvo.

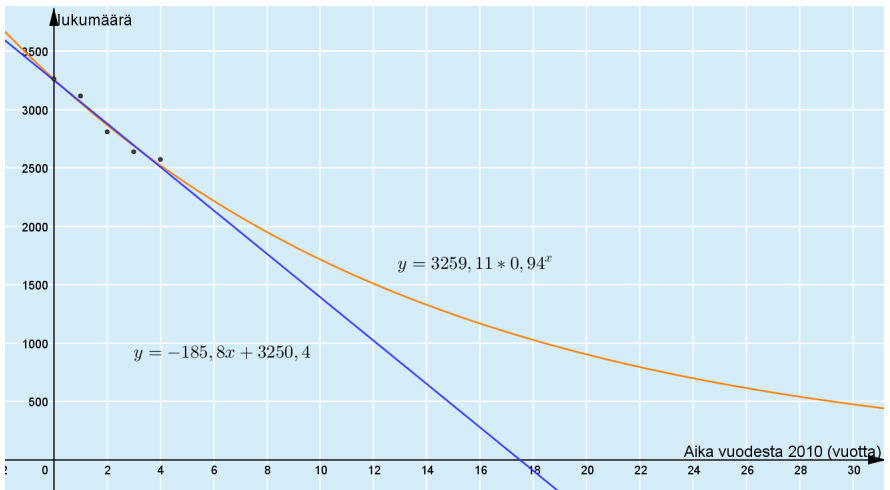
$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{n \cdot 10 + 2n \cdot 9 + 3n \cdot 8}{n + 2n + 3n} \\ &= \frac{52n}{6n} \\ &= 8,666... \\ &\approx 8,7\end{aligned}$$

Vastaus: $\bar{x} = 8,7$

360B. a) Sopivalla ohjelmalla saadaan matkatoimistotyöntekijöiden määrän keskiarvoksi $\bar{x} = 2878,8 \approx 2879$ ja keskihajonnaksi $s = 300,0995 \approx 300$ vuosina 2010–2014.

Vastaus: $\bar{x} = 2879$, $s = 300$

b) Sopivalla ohjelmalla saadaan lineaariseksi malliksi $y = -185,8x + 3250,4$ ja eksponentiaalisesti malliksi $y = 3259,11 \cdot 0,94^x$. Malleissa muuttuja x on aika vuodesta 2010 ja muuttuja y matkatoimistovirkailijoiden määrä.



Symbolisen laskennan toiminnolla saadaan yhtälön $-185,8x + 3250,4 = 0$ ratkaisuksi $x = 17,494\dots$. Lineaarisen mallin mukaan matkatoimistovirkailijoita ei ole enää reilun seitsemäntoista vuoden kuluttua vuodesta 2010 eli vuonna 2028.

Ratkaise($-185,8x + 3250,4 = 0$)

$$\rightarrow \left\{ x = \frac{16252}{929} \right\}$$

\$1

$$\approx \{x = 17.49\}$$

Symbolisen laskennan toiminnolla todetaan, että yhtälöllä $3259,11 \cdot 0,94^x = 0$ ei ole ratkaisua.

Ratkaise($3259,11 \cdot 0,94^x = 0$)

$$\approx \{ \}$$

Eksponentiaalisen mallin mukaan matkatoimistovirkailijoiden määrä ei ole nolla missään vaiheessa.

Vastaus: lineaarinen malli: $y = -185,8x + 3250,4$, eksponentiaalinen malli: $y = 3259,11 \cdot 0,94^x$ Lineaarisen mallin mukaan matkatoimistovirkailijoita ei enää ole Suomessa vuonna 2028, eksponentiaalisen mallin mukaan virkailijoiden on Suomessa aina.

- c) Ohjelma antaa lineaarisen mallin selitysasteeksi $0,9583 \approx 0,96$ ja eksponentiaalisen mallin selitysasteeksi $0,9665 \approx 0,97$.

KeskiarvoX	2
KeskiarvoY	2878.8
Sx	1.5811
Sy	300.0995
r	-0.9789
p	-1
Sxx	10
VarianssiY	360238.8
Sxy	-1858
R ²	0.9583
SSE	15022.4

KeskiarvoX	2
KeskiarvoY	2878.8
Sx	1.5811
Sy	300.0995
r	-0.9789
p	-1
Sxx	10
VarianssiY	360238.8
Sxy	-1858
R ²	0.9665
SSE	12065.1506

Vastaus: lineaarinen malli: 0,96, eksponentiaalinen malli: 0,97

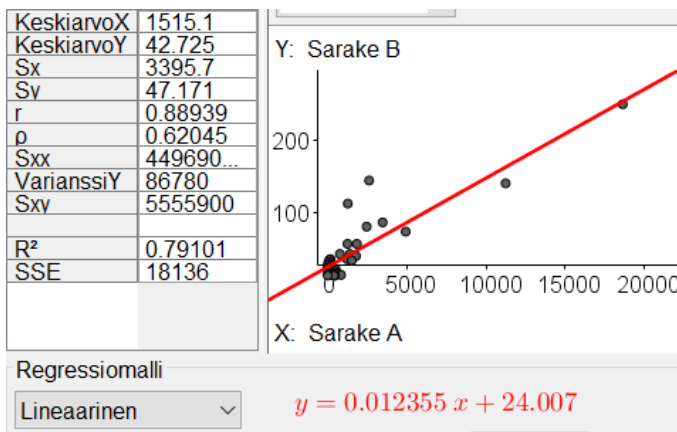
SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

361B. a) Muodostetaan taulukko mitalipisteluvuista ja bruttokanstantuotteesta (GDP). Lasketaan jokainen kultamitali kolmeksi pisteeksi, hopeamitali kahdeksi ja pronssi yhdeksi pisteeksi.

	Mitalipisteluku	GDP
USA	250	18624
Britannia	144	2629
Kiina	140	11232
Venäjä	112	1283
Saksa	86	3479
Ranska	80	2466
Japani	73	4937
Italia	56	1850
Australia	56	1262
Etelä-Korea	42	1411
Hollanti	42	778
Brasilia	39	1799
Espanja	35	1233
Uusi-Seelanti	35	182
Unkari	34	126
Kanada	33	1530
Kenia	31	69
Kazakstan	28	134
Azerbaidzhan	27	38
Jamaika	26	14
Tanska	25	307
Kroatia	23	50
Kuuba	23	87
Uzbekistan	23	67
Ruotsi	21	511
Etelä-Afrikka	20	350
Ukraina	20	93

Puola	18	468
Kolumbia	16	282
Serbia	16	38
Sveitsi	15	669
Iran	15	377
Valko-Venäjä	15	49
Pohjois-Korea	14	40
Tshekki	14	193
Kreikka	13	194
Turkki	13	863
Belgia	12	467
Thaimaa	12	407
Georgia	12	14

Sopivalla ohjelmalla saadaan bruttokansantuotteen ja mitalipisteluvun väliseksi korrelaatiokertoimeksi $r = 0,889... \approx 0,89$ ja selitysasteeksi $r^2 = 0,791 \approx 0,79$ sekä regressiosuoran yhtälöksi $y = 0,012355x + 24,007$.



Vastaus: $r \approx 0,89$, $r^2 \approx 0,79$, $y = 0,012355x + 24,007$

- b) Tilastollinen riippuvuus on voimakasta. Mahdollisia selityksenä voi olla se, että bruttokansantuotteen kasvaessa on enemmän varaa panostaa valmennukseen yms. Selityksenä voi olla myös se, että mitä suurempi väestö on, sitä suurempi on maan bruttokansantuote. On todennäköisempää, että suuren väestön joukossa on useampia urheilulahjakkuuksia kuin pienemmän väestön joukossa.

Vastaus: –

- c) Sijoittamalla $x = 237$ regressiosuoran yhtälöön $y = 0,012355x + 24,007$ saadaan Suomen mitalipistemääräksi $26,935 \approx 27$. Tämä on paljon suurempi kuin Suomen saavuttama yhden pronssimitalin pistemäärä 1.

$$y = 0.012355x + 24.007$$

Tarkka arvo: $x = 237$ $y = 26.935$

Suomen tulos Rion vuoden 2016 olympialaisissa ei ollut a-kohdan mallin mukainen.

Vastaus: ei ole

- 362B. a)** Määritetään taulukkolaskentaohjelmalla kysytyt tunnusluvut. Havaintoarvon etäisyys keskiarvosta kannattaa laskea itseisarvofunktion avulla, jotta havaintoarvon ja keskiarvon erotus on aina suurempi tai yhtä suuri kuin nolla.

C2 Σ = =ITSEISARVO(B2-\$B\$12)

	A	B	C	D
1		x	Etäisyys keskiarvosta	
2		1	4,5	
3		2	3,5	
4		3	2,5	
5		4	1,5	
6		5	0,5	
7		6	0,5	
8		7	1,5	
9		8	2,5	
10		9	3,5	
11		10	4,5	
12	Keskiarvo	5,5	2,5	
13	Keskihajonta	3,027650354		

Keskipoikkeama on 2,5 ja se on jonkin verran pienempi kuin keskihajonta $s = 3,027\dots$

Vastaus: 2,5, pienempi kuin keskihajonta

- b)** Keskipoikkeama on 5 ja se on jonkin verran pienempi kuin keskihajonta $s = 5,270\dots$

C12 Σ = =KESKIARVO(C2:C11)

	A	B	C	D
1		x	Etäisyys keskiarvosta	
2		0	5	
3		0	5	
4		0	5	
5		0	5	
6		0	5	
7		10	5	
8		10	5	
9		10	5	
10		10	5	
11		10	5	
12	Keskiarvo	5	5	
13	Keskihajonta	5,270462767		
14				

Vastaus: 5, pienempi kuin keskihajonta

363A. Olkoon luvut 1, 2 ja 3. Näiden aritmeettinen keskiarvo on

$$\bar{x} = \frac{1+2+3}{3} = 2 \text{ ja geometrinen keskiarvo on } \sqrt[3]{1 \cdot 2 \cdot 3} = 1,817\dots$$

Aritmeettinen keskiarvo on suurempi, mutta esimerkiksi luvuilla 2, 2 ja 2.

Aritmeettinen keskiarvo on $\bar{x} = \frac{2+2+2}{3} = 2$ ja geometrinen keskiarvo

on $2\sqrt[3]{2 \cdot 2 \cdot 2} = 2$, joten väite ei pidä yleisesti paikkansa. Tällöin ei yhden tapauksen avulla voida päätellä yleistä tapausta.

Vastaus: aritmeettinen, ei voida päätellä

364B. a) Tilaston mukaan vähintään sadan vuoden ikäisiä on $701 + 2045 = 2746$ sataa tuhatta syntynyttä kohti. Tämän mukaan

$$\frac{2746}{200\,000} = 0,01373 \approx 1,4\% \text{ vastasyntyneistä elää vähintään } 100\text{-vuotiaaksi.}$$

Vastaus: 1,4 %

b) 20-vuotiaita miehiä on 99 477 ja näistä elää vähintään 90-vuotiaaksi 18 465, joten 20-vuotiaista miehistä elää vähintään 90-vuotiaaksi

$$\frac{18\,465}{99\,477} = 0,185\dots \approx 19\%.$$

Vastaus: 19 %

c) 20-vuotiaita naisia on 99 613. 60-vuotiaita naisia on 95 414 ja 90-vuotiaita naisia 34 840. Naisia, jotka elävät 60-vuotiaiksi, mutta eivät 90-vuotiaiksi on $95\,414 - 34\,840 = 60\,574$. Tällöin 20-vuotiaista naisista elää 60-vuotiaaksi, mutta ei 90-vuotiaaksi

$$\frac{60\,574}{99\,613} = 0,609\dots \approx 61\%.$$

Vastaus: 61 %

365A. Absoluuttinen virhe on $53 \text{ g} - 52,69 \text{ g} = 0,31 \text{ g}$ ja suhteellinen virhe $\frac{0,31 \text{ g}}{52,69 \text{ g}} = 0,00588... \approx 0,006 = 0,6 \text{ \%}$.

Vastaus: absoluuttinen virhe 0,31 g, suhteellinen virhe 0,6 %

366B. a) Ylemmstä taulukosta voidaan lukea, että 25 % vastaajista oli iältään 15–19-vuotiaita.

	Ikäluokka (vuotta)				
Ryhmä	10–14	15–19	20–24	25–29	yhteensä %
Pelaaja	27	29	26	18	100
Tiedonhakija	30	20	21	29	100
Kommentoija	13	27	31	29	100
yhteensä %	23	25	26	26	100

Vastaus: 25 %

b) Alemmasta taulukosta voidaan lukea, että Pelaaja-ryhmäläisistä 27 % oli iältään 15–19-vuotiaita.

	Ikäluokka (vuotta)				
Ryhmä	10–14	15–19	20–24	25–29	yhteensä %
Pelaaja	27	27	23	16	23
Tiedonhakija	52	33	33	44	40
Kommentoija	21	40	44	40	37
yhteensä %	100	100	100	100	100

Vastaus: 27 %

- c) Alemmasta taulukosta voidaan lukea, että Tiedonhakija-ryhmään kuului 40 % vastaajista.

	Ikäluokka (vuotta)				
Ryhmä	10–14	15–19	20–24	25–29	yhteensä %
Pelaaja	27	27	23	16	23
Tiedonhakija	52	33	33	44	40
Kommentoija	21	40	44	40	37
yhteensä %	100	100	100	100	100

Vastaus: 40 %

- 367B. a) Kaikkien aineistojen keskiarvot ja keskihajonnat ovat kahden desimaalin tarkkuudella yhtä suuret.

Muuttuja x : keskiarvo 9,00 ja keskihajonta 3,32.

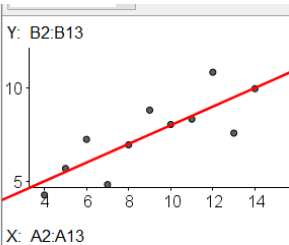
Muuttuja y : keskiarvo 7,50 ja keskihajonta 2,03.

Vastaus: Muuttuja x : $\bar{x} = 9,00$ ja $s = 3,32$, muuttuja y : $\bar{x} = 7,50$ ja $s = 2,03$, kaikkien aineistojen keskiarvot ja keskihajonnat ovat kahden desimaalin tarkkuudella yhtä suuret

- b) Piirretään aineistojen hajontakuviot ja regressiosuorat sekä määritetään kullekin aineistolle korrelaatiokerroin muuttujien x ja y väliselle riippuvuudelle.

Aineisto I

KeskiarvoX	9.0000
KeskiarvoY	7.5009
Sx	3.3166
Sy	2.0316
r	0.81642
ρ	0.81818
Sxx	110.00
VarianssiY	41.273
Sxy	55.010
R ²	0.66654
SSE	13.763

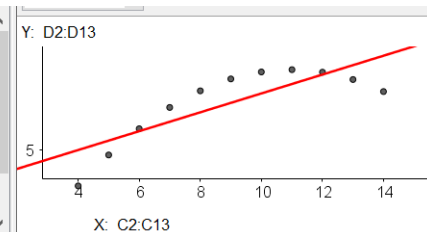


Regressiomalli

Lineaarinen $y = 0.50009x + 3.0001$

Aineisto II

KeskiarvoX	9.0000
KeskiarvoY	7.5009
Sx	3.3166
Sy	2.0317
r	0.81624
ρ	0.69091
Sxx	110.00
VarianssiY	41.276
Sxy	55.000

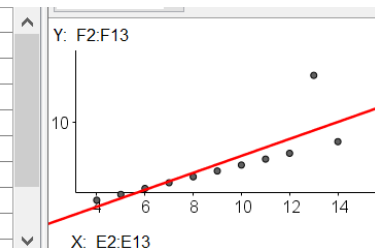


Regressiomalli

Lineaarinen $y = 0.50000x + 3.0009$

Aineisto III

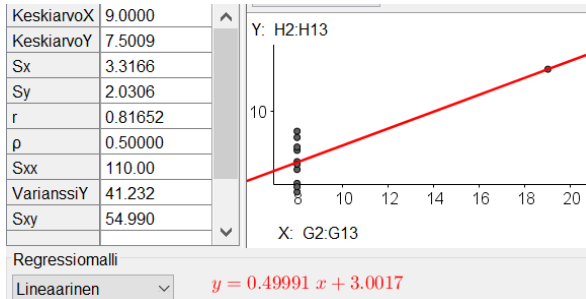
KeskiarvoX	9.0000
KeskiarvoY	7.5000
Sx	3.3166
Sy	2.0304
r	0.81629
ρ	0.99091
Sxx	110.00
VarianssiY	41.226
Sxy	54.970



Regressiomalli

Lineaarinen $y = 0.49973x + 3.0025$

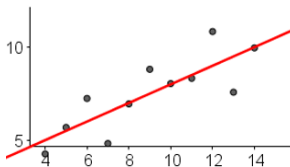
Aineisto IV



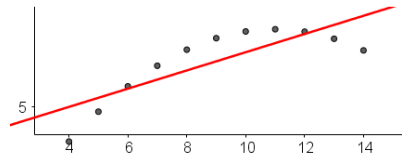
Huomataan, että vaikka kaikkien aineistojen hajontakuviot ovat erilaiset ja vain aineistojen I ja III muuttujat ovat selkeästi lineaarisesti riippuvia, on kaikissa korrelaatiokertoimen kahden desimaalin likiarvo yhtä suuri $r = 0,82$. Kaikkien aineistojen regressiosuoraksi saadaan kahden desimaalin tarkkuudella sama suora $y = 0,50x + 3,00$.

Vastaus: Hajontakuviot ovat erilaiset, mutta kaikkien aineistojen korrelaatiokerroin on $r = 0,82$ ja regressiosuoran yhtälö $y = 0,50x + 3,00$.

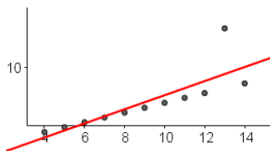
Aineisto I



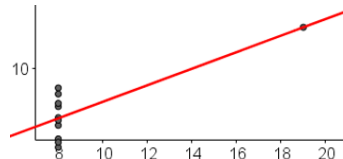
Aineisto II



Aineisto III



Aineisto IV



- c) Pelkkä korrelaatiokerroin voi antaa harhaanjohtavan kuvan muuttujien riippuvuudesta ja ilmiön luonteesta. Aineistoissa II ja IV hajontakuvio paljastaa selkeästi, että muuttujien välinen riippuvuus ei ole lineaarista.

Vastaus: Pelkkä korrelaatiokerroin voi antaa harhaanjohtavan kuvan muuttujien riippuvuudesta ja ilmiön luonteesta. Aineistoissa II ja IV hajontakuvio paljastaa selkeästi, että muuttujien välinen riippuvuus ei ole lineaarista.

368B. Valtion A tulojen keskiarvo on $\bar{x} = 47\,770$ ja keskihajonta $s = 40\,228,251\dots$

n	49
Keskiarvo	47770
σ	39815.6433
s	40228.2517
Σx	2340730
Σx^2	1894956594...
Min	0
Q1	25713
Mediaani	43649
Q3	60736.5
Max	261003

Valtion A variaatiokerroin on $\frac{40\,228,251\dots}{47\,770} = 0,842\dots$

Valtion B tulojen keskiarvo on $\bar{x} = 34\,996,612\dots$ ja keskihajonta $s = 36\,299,310\dots$

n	49
Keskiarvo	34996.6122
σ	35926.9999
s	36299.3103
Σx	1714834
Σx^2	1232600972...
Min	0
Q1	14083.5
Mediaani	29132
Q3	45012.5
Max	231921

Valtion B variaatiokerroin on $\frac{36\,299,310\dots}{34\,996,612\dots} = 1,037\dots$

Valtion A variaatiokerroin on pienempi kuin valtion B, joten valtiossa A tulot jakautuvat otoksen perusteella suhteellisesti tasaisemmin.

Vastaus: valtiossa A

- 369B. a)** Koska otoskeskihajonnan jakajassa on pienempi luku, on otoskeskihajonta suurempi kuin keskihajonta.

Vastaus: Otoskeskihajonta on suurempi kuin keskihajonta.

- b)** Kymmenen päivän ajanjaksolla keskihajonta on $57,099... \approx 57,1$ ja otoskeskihajonta $60,188... \approx 60,2$.

n	10
Keskiarvo	620,8
σ	57,0996
s	60,1882
Σx	6208
Σx^2	3886530
Min	530
Q1	563
Mediaani	651,5
Q3	671
Max	673

Kolmenkymmenen päivän ajanjaksolla keskihajonta on $104,813... \approx 104,8$ ja otoskeskihajonta $106,605... \approx 106,6$.

n	30
Keskiarvo	633,9333
σ	104,8138
s	106,6056
Σx	19018
Σx^2	12385722
Min	399
Q1	599
Mediaani	671
Q3	719
Max	737

Yhdeksänkymmenen päivän ajanjaksolla keskihajonta on $106,494... \approx 106,5$ ja otoskeskihajonta $107,090... \approx 107,1$.

n	90
Keskiarvo	597,2444
σ	106,4944
s	107,091
Σx	53752
Σx^2	33123778
Min	360
Q1	529
Mediaani	621
Q3	680
Max	737

Huomataan, että hajontaluvut lähestyvät toisiaan otoskoon kasvaessa.

Vastaus: Hajontaluvut lähestyvät toisiaan otoskoon kasvaessa.

- c) Koska otoskeskihajonta on suurempi kuin keskihajonta, on otoskeskihajonnan avulla laskettu väli pidempi kuin keskihajonnalla laskettu väli.

Pienten otosten perusteella tehdyt johtopäätökset ovat epävarmempia kuin suuremman otoksen perusteella tehdyt johtopäätökset. Tällöin pienillä otoksilla on järkevää käyttää jakajana lukua $n - 1$, koska silloin saadaan suurempi varmuusväli.

Vastaus: Otoskeskihajonnan avulla laskettu väli pidempi kuin keskihajonnalla laskettu väli. Saadaan suurempi varmuusväli.

- d) Jos n on suuri, on $n - 1$ melkein yhtä suuri, jolloin keskihajonta ja otoskeskihajonta ovat melkein yhtä suuret.

Vastaus: Jos n on suuri, on $n - 1$ melkein yhtä suuri.

9 VEROTUS, TALLETUKSET JA LAINAT

ALOITA PERUSTEISTA

370A. Kunnallisveroprosentti oli 19,5, joten 31 200 € tuloista oli maksettava kunnallisveroa

$$0,195 \cdot 31\,200 \text{ €} = 6084 \text{ €}.$$

Vastaus: 6084 euroa

371A. a) Hajuveden arvonlisäverokanta on 24 %. Hajuveden verottomaan hintaan lisätään veroa 24 % eli $0,24 \cdot 100,72 \text{ €} = 24,172 \dots \text{ €} \approx 24,17 \text{ €}$.

Vastaus: 24,17 euroa

b) Asiakas maksaa hajuvedestä $100,72 \text{ €} + 24,17 \text{ €} = 124,89 \text{ €}$.

Vastaus: 124,89 euroa

372A. Lähdeverokanta on 30 % ja tilin korkokanta 1,13 %, joten tilin nettokorkokanta oli $0,7 \cdot 1,13 \% = 0,791 \% = 0,00791$.

a) Vuodessa talletus kasvoi korkoa
 $0,00791 \cdot 1300 \text{ €} = 10,283 \text{ €} \approx 10,28 \text{ €}$.

Vastaus: 10,28 euroa

b) Korkopäiviä oli 213, joten korkoaika oli $\frac{213}{365}$ vuotta. Talletus kasvoi korkoa $0,00791 \cdot 1300 \text{ €} \cdot \frac{213}{365} = 6,000 \dots \text{ €} \approx 6,00 \text{ €}$.

Vastaus: 6,00 euroa

373A. A Talletuspäivä ei ole korkopäivä, mutta nostopäivä on korkopäivä.

Korkopäivien määrä oli $31 - 2 = 29$, joten korkoaika on $\frac{29}{365}$ vuotta.

Pääomalle maksettu korko oli

$$r = kit = 1650 \text{ €} \cdot 0,02 \cdot \frac{29}{365} = 2,621 \dots \text{ €} \approx 2,62 \text{ €}.$$

Ilmaisua A vastaa merkintä II.

B Talletuksen alkupääoma oli $k = 1650 \text{ €}$ ja vuosien lukumäärä $n = 2$.

Koska nettokorkokanta oli 2 %, korkokerroin on $q = 1,02$. Tilin

pääoma oli kahden vuoden jälkeen $K = 1650 \text{ €} \cdot 1,02^2$, joten ilmaisua B vastaa merkintä IV.

C Talletuspäivä ei ole korkopäivä, mutta nostopäivä on. Lasketaan korkopäivien lukumäärä.

elokuu: $31 - 5 = 26$

syyskuu: 30

lokakuu: 12

Korkopäiviä oli yhteensä $26 + 30 + 12 = 68$, joten korkoaika oli

$$t = \frac{68}{365}.$$

Ilmaisua C vastaa merkintä III.

D Tilillä oli kahden vuoden jälkeen 1650 €, joten kasvanut pääoma oli $K = 1650 \text{ €}$. Ilmaisua D vastaa merkintä I.

Vastaus: A: II, B: IV, C: III ja D: I

374A. A Laina-aika on neljä vuotta ja sitä lyhennetään kuukausittain, joten maksukertoja on $4 \cdot 12 = 48$. Koska laina on tasalyhenteinen, sitä lyhennetään jokaisella kerralla $\frac{5000}{48}$ euroa. Tätä vastaa merkintä II.

Lainan ensimmäinen korko on $5000 \text{ €} \cdot 0,06 \cdot \frac{1}{12}$. Tätä vastaa merkintä III.

B Koska laina on tasaerä- eli annuiteettilaina ja sitä lyhennetään kuukausittain, kuukausikorkokanta on $\frac{6,0\%}{12}$. Korkokerroin on

$$q = 1 + \frac{0,06}{12} = 1,005. \text{ Tätä vastaa merkintä I.}$$

Maksuerien lukumäärä on $n = 4 \cdot 12 = 48$. Sijoitetaan annuiteetin lausekkeeseen lainapääoma $K = 5000 \text{ €}$, korkokerroin $q = 1,005$ ja maksuerien lukumäärä $n = 48$, jolloin annuiteetti on

$$A = 5000 \text{ €} \cdot 1,005^{48} \cdot \frac{1 - 1,005}{1 - 1,005^{48}}. \text{ Tätä vastaa merkintä IV.}$$

Vastaus: A: II ja III; B: I ja IV

375A. Tutkitaan tilannetta kuvaus kerrallaan.

- I** Lainaa lyhennetään kuukausittain, joten lyhennysten määrä on $4 \cdot 12$. Kussakin maksuerässä, myös ensimmäisessä, lainaa lyhennetään siis
- $$\frac{4800 \text{ €}}{4 \cdot 12} = \frac{4800 \text{ €}}{48} = 100 \text{ €}.$$

Kuvaus I ja lauseke B kuuluvat yhteen.

- II** Korkokanta on 6,00 % ja korkoaika $t = 1$ kuukausi $= \frac{1}{12}$ vuotta, joten ensimmäisen maksuerän korko on $r = kit = 4800 \text{ €} \cdot 0,06 \cdot \frac{1}{12}$.

Kuvaus II ja lauseke D kuuluvat yhteen.

- III** Kunkin maksuerän lyhennys on 100 €, joten lainapääoman suuruus vuoden kuluttua on
- $$4800 \text{ €} - 12 \cdot 100 \text{ €} = 3600 \text{ €}.$$

Kuvaus III ja lauseke A kuuluvat yhteen.

- IV** Maksueriä on $4 \cdot 12 = 48$, joten ennen viimeistä maksuerää lainpääoman suuruus on
- $$k = 4800 \text{ €} - 47 \cdot 100 \text{ €}.$$

Viimeisessä maksuerässä korkoaika on $t = 1$ kuukausi $= \frac{1}{12}$ vuotta ja

korkokanta $i = 0,06$. Viimeisen maksuerän korko on siis

$$r = kit = (4800 \text{ €} - 47 \cdot 100 \text{ €}) \cdot 0,06 \cdot \frac{1}{12}.$$

Kuvaus IV ja lauseke C kuuluvat yhteen.

Vastaus: A: III, B: I, C: IV ja D: II

376A. Vuositulot olivat välillä 42 400 €–74 200€, joten vero alarajan kohdalla oli 3398,75 €.

Alarajan ylittävistä tuloista oli maksettava 21,25 % veroa.

Alarajan ylittävät tulot olivat
 $47\,561,76\text{ €} - 42\,400\text{ €} = 5161,76\text{ €}.$

Veroa oli maksettava alarajan ylittävältä osalta
 $0,2125 \cdot 5161,76\text{ €} = 1096,874\text{ €} \approx 1096,87\text{ €}.$

Valtion tuloveroa oli maksettava yhteensä
 $3398,75\text{ €} + 1096,87\text{ €} = 4495,62\text{ €}.$

Vastaus: 4495,62 €

377A. Alkupääoma $k = 550\text{ €}$ ja vuosien lukumäärä $n = 7$.

Tilin nettokorkokanta 30 %:n lähdeveron jälkeen on
 $0,7 \cdot 0,89\% = 0,623\%$, joten korkokerroin on $q = 1,00623$.

Tilillä olevan pääoman suuruus on seitsemän vuoden kuluttua
 $K = kq^n = 550\text{ €} \cdot 1,00623^7 = 574,438\dots\text{ €} \approx 574,44\text{ €}.$

Vastaus: 574,44 euron suuruiseksi

378A. Kasvanut pääoma $K = 3000$ €, korkokerroin $q = 1,02$ ja vuosien lukumäärä $n = 5$. Muodostetaan koronkoron $K = k \cdot q^n$ avulla yhtälö ja ratkaistaan siitä alkupääoma k .

$$\begin{aligned} K &= k \cdot q^n \\ 3000 &= k \cdot 1,02^5 && \| : 1,02^5 \\ k &= 2717,192\dots \end{aligned}$$

Talletuksen arvon pitää olla vähintään 2717,192... €.

Tutkitaan, riittääkö 2717,19 €:n suuruinen talletus, vai onko talletettava 2717,20 €.

$2717,19 \text{ €} \cdot 1,02^5 = 2999,997\dots \text{ €} \approx 2717,20 \text{ €}$, joten riittää tallettaa 2717,19 €.

Vastaus: 2717,19 euroa

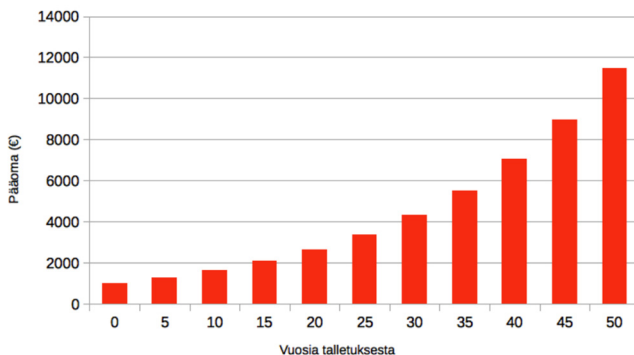
379B. Korkokerroin on $q = 1,05$. Lasketaan taulukkolaskentaohjelmalla talletuksen arvo viiden vuoden välein.

	A	B
1	Vuosia talletuksesta	Pääoma (€)
2	0	1000
3	5	$=1000*1,05^5$
4	10	$=1000*1,05^{10}$
5	15	$=1000*1,05^{15}$
6	20	$=1000*1,05^{20}$
7	25	$=1000*1,05^{25}$
8	30	$=1000*1,05^{30}$
9	35	$=1000*1,05^{35}$
10	40	$=1000*1,05^{40}$
11	45	$=1000*1,05^{45}$
12	50	$=1000*1,05^{50}$

	A	B
1	Vuosia talletuksesta	Pääoma (€)
2	0	1000,00
3	5	1276,28
4	10	1628,89
5	15	2078,93
6	20	2653,30
7	25	3386,35
8	30	4321,94
9	35	5516,02
10	40	7039,99
11	45	8985,01
12	50	11467,40

Piirretään pylväsdiagrammi talletuksen arvoista.

Vastaus:



380A. Merkitään elintarvikkeiden verotonta hintaa kirjaimella x . Verollinen hinta 54,35 € on 1,17-kertainen verottomaan hintaan verrattuna. Muodostetaan yhtälö verollisen hinnan avulla ja ratkaistaan siitä veroton hinta x .

$$\begin{aligned} 1,17x &= 54,35 & \| :1,17 \\ x &= 46,452\dots \end{aligned}$$

Jos arvonlisäveroa laskettaisiin 9 prosenttiyksikköä, arvonlisäveroprosentti on $17 - 9 = 8$. Tällöin ostoksen hinta olisi $1,08 \cdot 46,452\dots \text{ €} = 50,166 \text{ €} \approx 50,17 \text{ €}$.

Ostoksen hinta alenisi $54,35 \text{ €} - 50,17 \text{ €} = 4,18 \text{ €}$.

Alennuksen osuus on

$$\frac{4,18 \text{ €}}{54,35 \text{ €}} = 0,07690\dots = 7,690\dots \% \approx 7,7 \%$$

Vastaus: 4,18 euroa; 7,7 %

381B. Maksueriä on $2 \cdot 2 = 4$.

Lyhennyksen suuruus on $\frac{12\,000\text{ €}}{4} = 3000\text{ €}$.

Korkoaika on $\frac{1}{2}$ vuotta.

Ensimmäisen maksuerän korko on $r = \text{kit} = 12\,000\text{ €} \cdot 0,08 \cdot \frac{1}{2} = 480\text{ €}$.

Ensimmäinen maksuerä on $3000\text{ €} + 480\text{ €} = 3480\text{ €}$.

Täydennetään taulukko taulukkolaskentaohjelmalla vastaavalla tavalla.

	A	B	C	D	E	F
1	Maksukerta	Jäljellä oleva laina ennen lyhennystä (€)	Korko (€)	Lyhennys (€)	Maksuerä (€)	Jäljellä oleva laina lyhennyksen jälkeen (€)
2	1	12000	=B2*0,08*1/2	3000	=C2+D2	=B2-3000
3	2	=B2-3000	=B3*0,08*1/2	3000	=C3+D3	=B3-3000
4	3	=B3-3000	=B4*0,08*1/2	3000	=C4+D4	=B4-3000
5	4	=B4-3000	=B5*0,08*1/2	3000	=C5+D5	=B5-3000

	A	B	C	D	E	F
1	Maksukerta	Jäljellä oleva laina ennen lyhennystä (€)	Korko (€)	Lyhennys (€)	Maksuerä (€)	Jäljellä oleva laina lyhennyksen jälkeen (€)
2	1	12000	480	3000	3480	9000
3	2	9000	360	3000	3360	6000
4	3	6000	240	3000	3240	3000
5	4	3000	120	3000	3120	0

Lasketaan vielä korkojen summa.

	A	B	C	D	E	F
1	Maksukerta	Jäljellä oleva laina ennen lyhennystä (€)	Korko (€)	Lyhennys (€)	Maksuerä (€)	Jäljellä oleva laina lyhennyksen jälkeen (€)
2	1	12000	=B2*0,08*1/2	3000	=C2+D2	=B2-3000
3	2	=B2-3000	=B3*0,08*1/2	3000	=C3+D3	=B3-3000
4	3	=B3-3000	=B4*0,08*1/2	3000	=C4+D4	=B4-3000
5	4	=B4-3000	=B5*0,08*1/2	3000	=C5+D5	=B5-3000
6		Yhteensä	=SUMMA(C2:C5)			

Korkojen summaksi saadaan 1200 €.

Vastaus:

Maksukerta	Jäljellä oleva laina ennen lyhennystä (€)	Korko (€)	Lyhennys (€)	Maksuerä (€)	Jäljellä oleva laina lyhennyksen jälkeen (€)
1	120 000	480	3000	3480	9000
2	9000	360	3000	3360	6000
3	6000	240	3000	3240	3000
4	3000	120	3000	3120	0

1200 €

- 382B. a)** Lainan kuukausikorkokanta on $\frac{6,72\ \%}{12} = 0,56\ \%$, joten korkokerroin $q = 1,0056$. Maksuerien määrä on $n = 12 \cdot 2 = 24$. Lasketaan tasaerän suuruus.

$$A = 4000\ € \cdot 1,0056^{24} \cdot \frac{1 - 1,0056}{1 - 1,0056^{24}} = 178,583... \ € \approx 178,58 \ €$$

Vastaus: 178,58 euroa

- b)** Lasketaan jäljellä olevan lainan määrä sijoittamalla jäljellä olevan lainan lausekkeeseen $K = 4000 \ €$, maksettujen erien lukumäärä $k = 12$, $q = 1,0056$ ja $A = 178,58 \ €$.

$$\begin{aligned} V &= K \cdot q^k - A \cdot \frac{1 - q^k}{1 - q} \\ &= 4000\ € \cdot 1,0056^{12} - 178,58\ € \cdot \frac{1 - 1,0056^{12}}{1 - 1,0056} \\ &= 2067,024... \ € \approx 2067,02 \ € \end{aligned}$$

Vastaus: 2067,02 euroa

- c)** Laina-aikana lainaa maksetaan $24 \cdot 178,58 \ € = 4285,92 \ €$. Korkoa lainasta maksetaan $4285,92 \ € - 4000 \ € = 285,92 \ €$.

Vastaus: 285,92 euroa

VAHVISTA OSAAMISTA

383A. a) Kuukausitulot 2000 € jäävät alle tulorajan 2058,33 €, joten palkasta pidätetään ennakkoa 16,0 %. Ennakonpidätys on $0,16 \cdot 2000 \text{ €} = 320 \text{ €}$.

Vastaus: 320 euroa

b) Kuukausitulot ylittävät 2058,33 euron rajan
 $2500 \text{ €} - 2058,33 \text{ €} = 441,67 \text{ €}$ eurolla. Ennakonpidätys tulorajan kohdalla on $0,16 \cdot 2058,33 \text{ €} = 329,332 \dots \text{ €}$. Tulorajan ylittävältä osalta ennakonpidätys on 41,5 %, joten ennakonpidätys tulorajan ylittävältä osalta on $0,415 \cdot 441,67 \text{ €} = 183,293 \dots \text{ €}$.

Ennakkoa pidätetään
 $329,332 \dots \text{ €} + 183,293 \dots \text{ €} = 512,625 \dots \text{ €} \approx 512,63 \text{ €}$.

Vastaus: 512,63 euroa

384A. Perinnön saaja kuuluu I veroluokkaan. Perinnön arvo 32 000 € kuuluu välille 20 000 €–40 000 €, joten perintövero alarajan kohdalla on 100 €.

Alarajan ylittävästä perinnöstä on maksettava 7 % veroa.
 Alarajan ylittävä perintö on $32\,000 \text{ €} - 20\,000 \text{ €} = 12\,000 \text{ €}$.
 Perintöveroa alarajan ylittävältä osalta oli maksettava
 $0,07 \cdot 12\,000 \text{ €} = 840 \text{ €}$.

Perintöveroa oli maksettava yhteensä $100 \text{ €} + 840 \text{ €} = 940 \text{ €}$.

Perinnöstä jää verojen jälkeen $32\,000 \text{ €} - 940 \text{ €} = 31\,060 \text{ €}$.

Vastaus: 940 euroa, 31 060 euroa

- 385A. a)** Linda kuuluu II veroluokkaan. Lahjan arvo 10 000 € on välillä 5000 €–25 000 €, joten vero alarajan kohdalla on 100 €.

Alarajan ylittävän lahjan arvo on $10\,000\text{ €} - 5000\text{ €} = 5000\text{ €}$.

Linda maksoi alarajan ylittävästä osasta veroa 19 % eli

$$0,19 \cdot 5000\text{ €} = 950\text{ €}.$$

Linda maksoi lahjaveroa yhteensä $100\text{ €} + 950\text{ €} = 1050\text{ €}$.

Vastaus: 1050 euroa

- b)** Äiti kuuluu I veroluokkaan. Lahjavero 6260 € on suurempi kuin 4700 € ja pienempi kuin 22 100 €, joten lahjan arvo on välillä 55 000 €–200 000 €. Vero alarajan kohdalla on 4700 € ja alarajan ylittävästä osasta maksetaan veroa 12 %. Merkitään lahjan arvoa kirjaimella x . Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä lahjan arvo x .

$$4700 + (x - 55\,000) \cdot 0,12 = 6260$$

$$(x - 55\,000) \cdot 0,12 = 1560 \quad || : 0,12$$

$$x - 55\,000 = 13\,000$$

$$x = 68\,000$$

Auton arvo oli 68 000 €.

Vastaus: 68 000 euroa

386A. a) Talletuksen pääoma on $k = 15\,000$ €, korkoaika $t = \frac{200}{365}$ ja korko $r = 12,50$ €. Muodostetaan yksinkertaisen koron kaavan $r = kit$ avulla yhtälö ja ratkaistaan siitä nettokorkokanta i .

$$\begin{aligned} r &= kit \\ 12,50 &= 15\,000 \cdot i \cdot \frac{200}{365} \\ 8219,178\dots i &= 12,50 & \parallel : 8219,178\dots \\ i &= 0,00152\dots \end{aligned}$$

Nettokorkokanta on $0,00152\dots = 0,152\dots \% \approx 0,15\%$.

Lähdevero on 30 % korkokannasta, joten korkokannasta saadaan nettokorkokanta kertomalla se luvulla 0,7. Merkitään korkokantaa kirjaimella x . Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan korkokanta x .

$$\begin{aligned} 0,7x &= 0,00152\dots & \parallel : 0,7 \\ x &= 0,00217\dots \end{aligned}$$

Korkokanta on $0,00217\dots = 0,217\dots \% \approx 0,22\%$.

Vastaus: 0,15 %; 0,22 %

- b)** Talletuspäivä ei ole korkopäivä, mutta nostopäivä on.
 Korkopäiviä on yhteensä $(31 - 12) + 21 = 40$, joten korkoaika vuosina on $t = \frac{40}{365}$. Talletuksen pääoma on $k = 10\,000$ € ja korko $r = 2,36$ €.
 Muodostetaan yksinkertaisen koron kaavan $r = kit$ avulla yhtälö ja ratkaistaan siitä nettokorkokanta i .

$$\begin{aligned}
 r &= kit \\
 2,36 &= 10\,000 \cdot i \cdot \frac{40}{365} \\
 1095,890...i &= 2,36 & \| :1095,890... \\
 i &= 0,00215...
 \end{aligned}$$

Nettokorkokanta on $0,00215... = 0,215... \% \approx 0,22 \%$.

Lähdevero on 30 % korkokannasta, joten korkokannasta saadaan nettokorkokanta kertomalla se luvulla 0,7. Merkitään korkokantaa kirjaimella x . Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan korkokanta x .

$$\begin{aligned}
 0,7x &= 0,00215... & \| :0,7 \\
 x &= 0,00307...
 \end{aligned}$$

Korkokanta on $0,00307... = 0,307... \% \approx 0,31 \%$.

Vastaus: 0,22 %; 0,31 %

- 387A. a)** Jos tuotteen arvonlisäverokanta on 10 %, niin verottomaan hintaan lisätään 10 % arvonlisäveroa. Jos veroton hinta on a , myyntihinta eli verollinen hinta on tällöin $1,1a$.

Veron osuus myyntihinnasta on $\frac{0,1a}{1,1a} = 0,0909... = 9,09...%$ eli vähemmän kuin 10 %.

Vastaus: vähemmän

- b)** Valtion tulovero on progressiivinen, eli tulojen kasvaessa veroprosentti nousee. Jos vero alarajan ylittävstä tulon osasta on 21,25 %, vero alarajan alittavasta tulon osasta on alle 21,25 %. Tällöin henkilö maksaa osasta ansiotulojaan alle 21,25 % ja osasta tasan 21,25 % veroa, joten hän maksaa kaikista ansiotuloistaan veroa vähemmän kuin 21,25 %.

Vastaus: vähemmän

- c)** Leski kuuluu I veroluokkaan. Perinnön suuruus 300 000 € on välillä 200 000 € – 1 000 000 €, joten vero alarajan kohdalla on 21 700 €.

Vero ylittää 200 000 euron alarajan 100 000 eurolla.

Leski maksaa veroa alarajan ylittävstä perinnön osasta 16 % eli $0,16 \cdot 100\,000\,€ = 16\,000\,€$.

Perintöveron suuruus on yhteensä $21\,700\,€ + 16\,000\,€ = 37\,700\,€$.

Vastaus: yhtä paljon

- d) Pääomatuloverokanta on 30 % ja 30 000 € ylittävältä osalta 34 %.
100 000 € ylittää 30 000 euron rajan 70 000 eurolla, joten 100 000 euron pääomatulosta maksetaan veroa
 $0,3 \cdot 30\,000\,€ + 0,34 \cdot 70\,000\,€ = 32\,800\,€$.

100 000 € ylittää valtion tuloveroasteikolla korkeimman rajan 74 200 €, joten vero alarajan kohdalla on 10 156,25 € ja vero alarajan ylittävästä osasta 31,25 %.

$100\,000\,€ - 74\,200\,€ = 25\,800\,€$, joten vero alarajan ylittävästä osasta on
 $0,3125 \cdot 25\,800\,€ = 8062,50\,€$.

Valtion tulovero 100 000 euron ansiotuloista on yhteensä
 $10\,156,25\,€ + 8062,50\,€ = 18\,218,75\,€$.

Kunnallisveroprosentilla 16,5 kunnallisveron suuruus 100 000 euron ansiotuloista on
 $0,165 \cdot 100\,000\,€ = 16\,500\,€$.

Valtion tuloveroa ja kunnallisveroa maksetaan siis 100 000 euron ansiotuloista vähintään $18\,218,75\,€ + 16\,500\,€ = 34\,718,75\,€$ eli enemmän kuin pääomatuloveroa. 100 000 euron pääomatulosta maksetaan siis vähemmän veroa kuin vastaavan suuruisesta ansiotulosta.

Vastaus: vähemmän

- 388B. a)** Lahjoituksen arvo 30 000 € on välillä 17 000 €–50 000€, joten vero alarajan kohdalla on 1010 €. Alarajan ylittävä lahjan arvo on $30\,000\text{ €} - 17\,000\text{ €} = 13\,000\text{ €}$. Alarajan ylittävän osan vero on 10 % eli $0,10 \cdot 13\,000\text{ €} = 1300\text{ €}$.

Lahjoituksesta maksetaan veroa yhteensä $1010\text{ €} + 1300\text{ €} = 2310\text{ €}$.

Vastaus: 2310 euroa

- b)** Merkitään lahjan arvoa kirjaimella x .

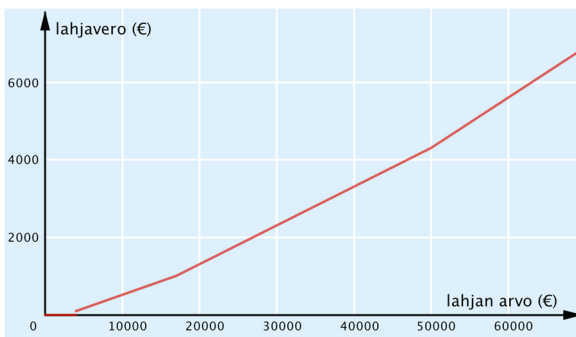
Kun lahjan arvo on välillä $0 < x < 4000$, lahjaveron suuruus on 0 €.

Kun lahjan arvo on välillä $4000 \leq x < 17\,000$, lahjaveron suuruus on 100 € ja 4000 euron ylittävältä osalta 7 %. Lahjavero yhteensä on $100 + (x - 4000) \cdot 0,07$.

Kun lahjan arvo on välillä $17\,000 \leq x < 50\,000$, lahjaveron suuruus on 1010 € ja 17 000 euron ylittävältä osalta 10 %. Lahjavero yhteensä on $1010 + (x - 17\,000) \cdot 0,10$.

Kun lahjan arvo on yli 50 000 €, lahjaveron suuruus on 4310 € ja 50 000 euron ylittävältä osalta 13 %. Lahjaveron yhteensä on $4310 + (x - 50\,000) \cdot 0,13$.

Piirretään sen funktion kuvaaja, joka kuvaa lahjaveron riippuvuutta lahjan arvosta.



389A. Lainan korko helmikuussa 2018 oli $r = 410 \text{ €} - 400 \text{ €} = 10 \text{ €}$, korkokerroin $i = 0,06$ ja korkoaika $t = \frac{1}{12}$. Muodostetaan kaavan $r = kit$ avulla yhtälö ja ratkaistaan lainapääoma k .

$$\begin{aligned} 10 &= k \cdot 0,06 \cdot \frac{1}{12} \\ 0,005k &= 10 & \| : 0,0005 \\ k &= 2000 \end{aligned}$$

Helmikuussa 2018 lainapääoma on 2000 €, joten lainan takaisinmaksuun kuluu $\frac{2000 \text{ €}}{400 \text{ €}} = 5$ kuukautta. Maksuerät suoritetaan vuoden 2018 helmikuussa, maaliskuussa, huhtikuussa, toukokuussa ja kesäkuussa. Laina on maksettu kokonaan takaisin kesäkuussa 2018.

Vastaus: kesäkuussa 2018

390B. Lainan kuukausikorkokanta oli $\frac{6,6\%}{12} = 0,55\%$, joten korkokerroin oli $q = 1,0055$. Lainan annuiteetti oli $A = 222,96 \text{ €}$ ja maksuerien lukumäärä $n = 2 \cdot 12 = 24$. Muodostetaan annuiteetin kaavan $A = K \cdot q^n \cdot \frac{1-q}{1-q^n}$ avulla yhtälö ja ratkaistaan siitä lainapääoma K .

$$222,96 = K \cdot 1,0055^{24} \cdot \frac{1-1,0055}{1-1,0055^{24}}$$

Symbolisen laskennan ohjelmalla ratkaisuksi saadaan $K = 5000,060 \dots \approx 5000$.

Lainan suuruus oli 5000 €.

Vastaus: 5000 euroa

391B. Määritetään taulukkolaskentaohjelmalla ensimmäisen vuoden aikana tehtävistä talletuksista saatava korko.

	A	B		A	B
1	Korkoaika kuukausina	Korko vuoden lopussa (€)	1	Korkoaika kuukausina	Korko vuoden lopussa (€)
2	12	$=7*0,015*A2/12$	2	12	0,11
3	10	$=7*0,015*A3/12$	3	10	0,09
4	8	$=7*0,015*A4/12$	4	8	0,07
5	6	$=7*0,015*A5/12$	5	6	0,05
6	4	$=7*0,015*A6/12$	6	4	0,04
7	2	$=7*0,015*A7/12$	7	2	0,02
8	Summa	$=SUMMA(B2:B7)$	8	Summa	0,37

Vuoden aikana tehtävät talletukset ja korot kasvavat pääomaa
 $6 \cdot 7 \text{ €} + 0,37 \text{ €} = 42,37 \text{ €}$.

Tämä vastaa yhtä vuoden lopussa tehtävää 42,37 euron talletusta.

Määritetään taulukkolaskentaohjelmalla vuotuisia talletuksia korkoineen 40 vuoden ajalta.

	A	B		A	B
1	Korkokausien määrä vuosina	Talletuksen arvo lopuksi	1	Korkokausien määrä vuosina	Talletuksen arvo lopuksi
2	39	$=42,37*1,015^A2$	2	39	75,72
3	38	$=42,37*1,015^A3$	3	38	74,61
4	37	$=42,37*1,015^A4$	4	37	73,50
5	36	$=42,37*1,015^A5$	5	36	72,42
6	35	$=42,37*1,015^A6$	6	35	71,35
7	34	$=42,37*1,015^A7$	7	34	70,29
8	33	$=42,37*1,015^A8$	8	33	69,25

37	4	$=42,37*1,015^A37$	37	4	44,97
38	3	$=42,37*1,015^A38$	38	3	44,31
39	2	$=42,37*1,015^A39$	39	2	43,65
40	1	$=42,37*1,015^A40$	40	1	43,01
41	0	$=42,37*1,015^A41$	41	0	42,37
42	Summa	$=SUMMA(B2:B41)$	42	Summa	2299,33

Henkilölle kertyisi rahaa 2299,33 €.

Vastaus: 2299,33 euroa

392B. Elvi tekee vuosittain 12 talletusta. Talletusten nettokorkokanta on $0,7 \cdot 0,60 \% = 0,42 \%$. Määritetään taulukkolaskentaohjelmalla ensimmäisen vuoden aikana saatavat korot.

	A	B		A	B
1	Korkoaika kuukausina	Korko vuoden lopussa (€)	1	Korkoaika kuukausina	Korko vuoden lopussa (€)
2	12	$=150*0,0042*A2/12$	2	12	0,63
3	11	$=150*0,0042*A3/12$	3	11	0,58
4	10	$=150*0,0042*A4/12$	4	10	0,53
5	9	$=150*0,0042*A5/12$	5	9	0,47
6	8	$=150*0,0042*A6/12$	6	8	0,42
7	7	$=150*0,0042*A7/12$	7	7	0,37
8	6	$=150*0,0042*A8/12$	8	6	0,32
9	5	$=150*0,0042*A9/12$	9	5	0,26
10	4	$=150*0,0042*A10/12$	10	4	0,21
11	3	$=150*0,0042*A11/12$	11	3	0,16
12	2	$=150*0,0042*A12/12$	12	2	0,11
13	1	$=150*0,0042*A13/12$	13	1	0,05
14	Summa	$=SUMMA(B2:B13)$	14	Summa	4,10

Vuoden aikana tehtävät talletukset ja korot kasvattavat pääomaa $12 \cdot 150 \text{ €} + 4,10 \text{ €} = 1804,10 \text{ €}$.

Määritetään taulukkolaskentaohjelmalla pääoman suuruus viiden vuoden jälkeen.

	A	B
1	Korkokausien määrä vuosina	Talletuksen arvo lopuksi
2	4	$=1804,1*1,0042^A2$
3	3	$=1804,1*1,0042^A3$
4	2	$=1804,1*1,0042^A4$
5	1	$=1804,1*1,0042^A5$
6	0	$=1804,1*1,0042^A6$
7	Summa	$=SUMMA(B2:B6)$
	A	B
1	Korkokausien määrä vuosina	Talletuksen arvo lopuksi
2	4	1834,60
3	3	1826,93
4	2	1819,29
5	1	1811,68
6	0	1804,10
7	Summa	9096,59

Elvillä on tilillä rahaa viiden vuoden jälkeen 9096,59 €.

Vastaus: 9096,59 euroa

393B. Selvitetään pikavipin todellinen vuosikorko koronkoron periaatteella.

Laina-aika on 2 kuukautta, joten korkoaika on $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ vuotta.

Lainapääoma alussa on 75 € ja kasvanut pääoma 80 €. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä korkokerroin q .

$$75 \cdot q^{\frac{1}{6}} = 80$$

Symbolisen laskennan ohjelmalla saadaan $q = 1,47289\dots$

Pikavipin todellinen vuosikorko on
 $147,289\dots \% - 100 \% = 47,289\dots \approx 47,29 \%$.

Vastaus: 47,29 %

394B. Lainaa lyhennetään $15 \cdot 12 = 180$ kertaa, joten kunkin lyhennyksen suuruus on $\frac{140\,000 \text{ €}}{180} = 777,777... \text{ €} \approx 777,78 \text{ €}$.

Kolmen vuoden kuluttua lainaa on lyhennetty $3 \cdot 12 = 36$ kertaa eli lainaa on jäljellä

$$140\,000 \text{ €} - 36 \cdot 777,78 \text{ €} = 111\,999,92 \text{ €}.$$

Määritetään suurin mahdollinen korkokanta tälle pääomalle, koska tämän jälkeen pääoma ja samalla korko pienenee.

Korko voi olla korkeintaan $1050 \text{ €} - 777,78 \text{ €} = 272,22 \text{ €}$. Sijoitetaan kaavaan $r = \text{kit}$ korko $r = 272,22$, lainapääoma $k = 111\,999,92$ ja

korkoaika $t = \frac{1}{12}$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä korkokerroin i .

$$272,22 = 111\,999,92 \cdot i \cdot \frac{1}{12}$$

Symbolisen laskennan ohjelman avulla saadaan

$$i = 0,029166... = 2,9166... \text{ \%}.$$

Euribor voi nousta $2,9166... - 1,50 = 1,4166... \approx 1,416$ prosenttiin, jotta lainasta voi selvitä.

Vastaus: 1,416 %:iin

395B. Tilin nettokorkokanta on 1,750 %, joten korkokerroin on $q = 1,0175$. Ensimmäisen vuoden lopussa tilillä on rahaa $1,0175 \cdot 700$ €, toisen vuoden jälkeen $700 \cdot 1,0175 + 700 \cdot 1,0175^2$, kolmannen vuoden jälkeen $700 \cdot 1,0175 + 700 \cdot 1,0175^2 + 700 \cdot 1,0175^3$ ja niin edelleen.

Tilillä olevat rahamäärät muodostavat geometrisen summan. Sen ensimmäinen yhteenlaskettava on $a_1 = 1,0175 \cdot 700 = 712,25$, suhdeluku $q = 1,0175$ ja yhteenlaskettavien määrä n . Muodostetaan ja sievennetään summan lauseke.

$$S_n = \frac{712,25(1 - 1,0175^n)}{1 - 1,0175} = -40\,700 \cdot (1 - 1,0175^n) = 40\,700 \cdot 1,0175^n - 40\,700$$

Vuonna 2010 on $n = 5$, joten

$S_5 = 40\,700 \cdot 1,0175^5 - 40\,700 = 3688,094\dots \approx 3688,09$, joten vuoden 2010 lopussa rahaa on 3688,09 euroa.

Ratkaistaan symbolisen laskennan ohjelmalla, kuinka monen vuoden kuluttua rahaa on vähintään 12 000 €.

$$40\,700 \cdot 1,0175^n - 40\,700 = 12\,000$$

$$n = 14,893\dots$$

Aikaa kuluu 15 vuotta, jolloin ollaan vuoden 2020 lopussa.

Vastaus: 3688,09 €, $40\,700 \cdot 1,0175^n - 40\,700$, jossa n on talletusten lukumäärä, vuoden 2020 lopussa

396B. Vuositulot olivat $12 \cdot 3373,00 \text{ €} + 1686 \text{ €} = 42\,162 \text{ €}$. Verovähennysten jälkeen ansiotulo kunnallis- ja kirkollisverotuksessa oli $42\,162 \text{ €} - 3050 \text{ €} = 39\,112 \text{ €}$ ja valtion tuloverotuksessa $42\,162 \text{ €} - 2630 \text{ €} = 39\,532 \text{ €}$.

Kunnallis- ja kirkollisveroa olisi pitänyt maksaa $0,2195 \cdot 39\,112 \text{ €} = 8585,084 \text{ €} \approx 8585,08 \text{ €}$.

Valtion tuloverotuksen verotettava tulo $39\,532 \text{ €}$ on välillä $25\,700 \text{ €} - 42\,400 \text{ €}$.

Vero $25\,700$ euron alarajalla oli $518,00 \text{ €}$.

Alarajan ylittävät tulot olivat $39\,532 \text{ €} - 25\,700 \text{ €} = 13\,832 \text{ €}$. Alarajan ylittävistä tuloista veroa pitää maksaa $17,25 \%$ eli $0,1725 \cdot 13\,832 \text{ €} = 2386,02 \text{ €}$.

Valtion tuloveroa piti maksaa yhteensä $518,00 \text{ €} + 2386,02 \text{ €} = 2904,02 \text{ €}$.

Kunnallis-, kirkollis- ja valtion tuloveroa piti maksaa yhteensä $8585,08 \text{ €} + 2904,02 \text{ €} = 11\,489,10 \text{ €}$.

Kuukausitulot $3373,00 \text{ €}$ jäivät muina kuukausina paitsi heinäkuussa alle tulorajan 3500 € , joten näinä kuukausina palkasta tehtiin $0,28 \cdot 3373,00 \text{ €} = 944,44 \text{ €}$ suuruinen ennakonpidätys.

Heinäkuussa kuukausitulot olivat $3373,00 \text{ €} + 1686,00 \text{ €} = 5059,00 \text{ €}$. Kuukausitulot ylittävät 3500 euron rajan $5059,00 \text{ €} - 3500 \text{ €} = 1559,00$ eurolla. Ennakonpidätys tulorajan kohdalla on $0,28 \cdot 3500 \text{ €} = 980 \text{ €}$. Tulorajan ylittävältä osalta ennakonpidätys on 46% , joten ennakonpidätys tulorajan ylittävältä osalta on $0,46 \cdot 1559 \text{ €} = 717,14 \text{ €}$. Heinäkuussa ennakonpidätystä pidätettiin $980 \text{ €} + 717,14 \text{ €} = 1697,14 \text{ €}$.

Vuoden aikana ennakonpidätystä pidätettiin yhteensä $11 \cdot 944,44 \text{ €} + 1697,14 \text{ €} = 12\,085,98 \text{ €}$.

Ennakonpidätystä pidätettiin enemmän kuin veroa piti maksaa, joten Nelli sai veronpalautusta $12\,085,98 \text{ €} - 11\,489,10 \text{ €} = 596,88 \text{ €}$.

Vastaus: veronpalautusta $596,88$ euroa

397A. Talletukset olivat yhteensä $120 \text{ €} + 270 \text{ €} + 160 \text{ €} = 550 \text{ €}$. Talletukset kasvoivat vuoden aikana korkoa $551,86 \text{ €} - 550 \text{ €} = 1,86 \text{ €}$.

Ensimmäinen talletus kasvaa korkoa 12 kk, toinen 10 kk ja kolmas 9 kk. Muodostetaan yksinkertaisen koron kaavalla $r = \text{kit}$ yhtälö ja ratkaistaan siitä nettokorkokanta i .

$$120 \cdot i \cdot \frac{12}{12} + 270 \cdot i \cdot \frac{10}{12} + 160 \cdot i \cdot \frac{9}{12} = 1,86$$

$$465i = 1,86 \quad \| : 465$$

$$i = 0,004$$

Ensimmäinen talletus on kasvanut korkoa $0,004 \cdot 120 \text{ €} = 0,48 \text{ €}$.

Vastaus: 0,48 euroa

398B. Koko laina-aikana maksueriä on $n = 20 \cdot 12 = 240$. Lainan korkokanta ensimmäisenä vuonna on $1,363 \% + 1,65 \% = 3,013 \%$, joten kuukausikorkokanta on $\frac{3,013 \%}{12} = 0,251\dots \%$ ja korkokerroin $q = 1,00251\dots$

Lasketaan ensimmäisen vuoden annuiteetti sijoittamalla annuiteetin lausekkeeseen $K = 190\,000 \text{ €}$, $q = 1,00251\dots$ ja $n = 240$.

$$\begin{aligned} A &= K \cdot q^n \cdot \frac{1-q}{1-q^n} \\ &= 190\,000 \text{ €} \cdot 1,00251\dots^{240} \cdot \frac{1-1,00251\dots}{1-1,00251\dots^{240}} \\ &= 1054,972\dots \text{ €} \approx 1054,97 \text{ €} \end{aligned}$$

Ensimmäisen vuoden aikana maksuerä on $1054,97 \text{ €}$.

Lasketaan, kuinka paljon lainaa on jäljellä ensimmäisen vuoden jälkeen, sijoittamalla jäljellä olevan lainapääoman lausekkeeseen $K = 190\,000 \text{ €}$, $k = 12$, $q = 1,00251\dots$ ja $A = 1054,97$.

$$\begin{aligned} V &= K \cdot q^k - A \cdot \frac{1-q^k}{1-q} \\ &= 190\,000 \text{ €} \cdot 1,00251\dots^{12} - 1054,97 \text{ €} \cdot \frac{1-1,00251\dots^{12}}{1-1,00251\dots} \\ &= 182\,968,456\dots \text{ €} \approx 182\,968,46 \text{ €} \end{aligned}$$

Lasketaan toisen vuoden maksuerän suuruus. Maksueriä on ensimmäisen vuoden jälkeen jäljellä $240 - 12 = 228$. Lainan korkokanta toisen vuoden aikana on $0,891 \% + 1,65 \% = 2,541 \%$, joten kuukausikorkokanta on $0,211\dots \%$ ja korkokerroin $q = 1,00211\dots$

Lasketaan uusi maksuerä, kun lainapääoma on $182\,968,46 \text{ €}$. Sijoitetaan tiedot annuiteetin lausekkeeseen ja lasketaan annuiteetti.

$$\begin{aligned}
 A &= K \cdot q^n \cdot \frac{1-q}{1-q^n} \\
 &= 182\,968,46 \text{ €} \cdot 1,00211...^{228} \cdot \frac{1-1,00211...}{1-1,00211...^{228}} \\
 &= 1012,571... \text{ €} \approx 1012,57 \text{ €}
 \end{aligned}$$

Toisen vuoden aikana maksuerä on 1012,57 €.

Vastaus: 1054,97 euroa; 1012,57 euroa

SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

399B. Nettokorkokanta on $0,72 \cdot 2,2 \% = 1,584 \%$, joten korkokerroin on $q = 1,01584$.

Lasketaan diskonttausperiaatteella suoritettujen maksujen arvo nykyrahassa.

$$\begin{aligned}
 &2500 \text{ €} \cdot 1,01584^{-1} + 2500 \text{ €} \cdot 1,01584^{-2} + \dots + 2500 \text{ €} \cdot 1,01584^{-5} \\
 &= 11\,927,278... \text{ €} \approx 11\,927,28 \text{ €}.
 \end{aligned}$$

Vastaus: 11 927,28 euroa

- 400B. a)** Perintö kuuluu kategoriaan 40 000 €–60 000 €, joten veron määrä on $1700 \text{ €} + 0,11 \cdot (58\,000 \text{ €} - 40\,000 \text{ €}) = 3680 \text{ €}$.

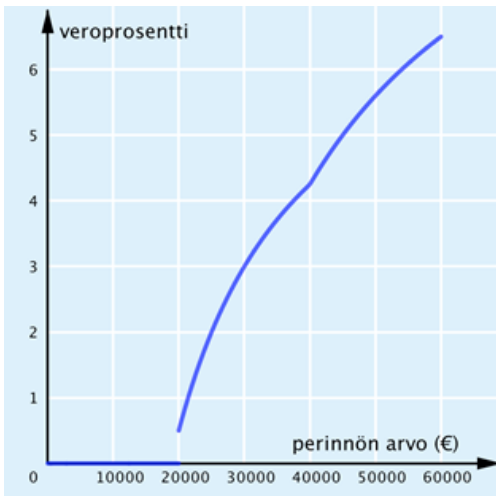
$$\text{Veroa pitää maksaa } \frac{3680 \text{ €}}{58\,000 \text{ €}} = 0,06344... = 6,344... \% \approx 6,3 \%$$

Vastaus: 3680 euroa; 6,3 %

- b)** Veron suuruus prosentteina saadaan laskemalla yhteen vero alarajan kohdalla ja vero alarajan ylittävstä osasta ja jakamalla summa verotettavalla tulolla. Muodostetaan funktion lauseke.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } 0 < x < 20\,000 \\ \frac{100 + 0,08(x - 20\,000)}{x}, & \text{kun } 20\,000 \leq x \leq 40\,000 \\ \frac{1700 + 0,11(x - 40\,000)}{x}, & \text{kun } 40\,000 \leq x \leq 60\,000 \end{cases}$$

Piirretään kuvaaja.



401B. Tilin nettokorkokanta on 0,75 %, joten korkokerroin on 1,0075. Merkitään vuosittaista talletusta kirjaimella x . Taulukoidaan talletuksia korkoineen.

	Korkoaika (a)	Talletuksen arvo 5 vuoden kuluttua (€)
1. talletus	5	$x \cdot 1,0075^5$
2. talletus	4	$x \cdot 1,0075^4$
3. talletus	3	$x \cdot 1,0075^3$
4. talletus	2	$x \cdot 1,0075^2$
5. talletus	1	$x \cdot 1,0075$

Tilillä on rahaa 5 vuoden kuluttua

$$x \cdot 1,0075^5 + x \cdot 1,0075^4 + \dots + x \cdot 1,0075 = 5,113\dots x.$$

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan vuosittainen talletus x .

$$\begin{aligned} 5,113\dots x &= 10\,000 & || : 5,113\dots \\ x &= 1955,557\dots \end{aligned}$$

Vuosittainen talletus pitää olla 1956 €.

Vastaus: 1956 euroa

402B. Muodostetaan annuiteetin kaavan $A = K \cdot q^n \cdot \frac{1-q}{1-q^n}$ avulla yhtälö, kun maksuerän suuruus on $A = 2000$ €, lainapääoma $K = 7500$ € ja maksuerien lukumäärä $n = 4$. Ratkaistaan yhtälöstä korkokerroin q .

$$2000 = 7500 \cdot q^4 \cdot \frac{1-q}{1-q^4}$$

Symbolisen laskennan ohjelmalla saadaan $q = -0,61366\dots$ tai $q = 1,026324\dots$ Hylätään negatiivinen ratkaisu.

Vuotuinen korkoprosentti on $102,624\dots - 100 = 2,624\dots \approx 2,6$.

Vastaus: 2,6 %

- 403B. a)** Merkitään ensimmäisenä vuonna jaettua summa euroina kirjaimella x . Toisena vuonna jaettavaa on siten $1,1x$ ja sitä seuraavana $1,1x \cdot 1,1 = 1,1x^2$ ja niin edelleen.

Seitsemänä vuonna jaettavaa on
 $x + 1,1x + 1,1^2x + \dots + 1,1^6x = 9,487171x$.

Yhtälön $9,487171x = 800\,000$ ratkaisuksi saadaan
 $x = 84\,324,40 \approx 84\,300$.

Vastaus: 84 300 euroa

- b)** Merkitään kasvukerrointia kirjaimella q . Koska ensimmäisenä vuonna jaetaan 70 000 euroa, niin seuraavana vuonna jaetaan $70\,000q$ euroa, sitä seuraavana vuona $70\,000q \cdot q = 70\,000q^2$ euroa ja niin edelleen. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se symbolisen laskennan ohjelmalla.

$$70\,000 + 70\,000q + 70\,000q^2 + \dots + 70\,000q^6 = 800\,000$$

Ohjelmalla saadaan ratkaisuksi $q = -1,61703\dots$ tai $q = 1,160416\dots$
 Hylätään negatiivinen ratkaisu.

Kasvuprosentin tulee olla
 $116,0416\dots \% - 100 \% = 16,0416\dots \% \approx 16 \%$.

Vastaus: 16 %

- 404A. a)** Puhtaan ansiotulon arvo 38 400 € ylittää 14 000 euron rajan
 $38\,400 - 14\,000 = 24\,400$ eurolla.

Vähennystä pienennetään $0,045 \cdot 24\,400 \text{ €} = 1098 \text{ €}$.

Ansiotulovähennyksen määrä on
 $3570 \text{ €} - 1098 \text{ €} = 2472 \text{ €}$.

Vastaus: 2472 euroa

- b)** Merkitään puhdasta ansiotulo kirjaimella x . Ansiotulovähennyksen määrä on
 $3570 - 0,045(x - 14\,000)$ euroa. Vähennystä ei myönnetä, kun ansiotulovähennyksen määrä on 0 € tai pienempi. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä puhdas ansiotulo x .

$$\begin{aligned} 3570 - 0,045(x - 14\,000) &= 0 \\ -0,045(x - 14\,000) &= -3570 && \parallel : (-0,045) \\ x - 14\,000 &= 79\,333,333\dots \\ x &= 93\,333,333\dots \\ x &\approx 93\,333,33 \end{aligned}$$

Ansiotulovähennystä ei myönnetä, kun puhdas ansiotulo on 93 333,33 euroa tai suurempi.

Vastaus: 93 333,33 €

405B. Vuoden 2017 lopussa talletusten arvioitu kokonaismäärä on
 $1,01 \cdot 1,015 \cdot 80\,778\,000\,000\text{ €} = 82\,809\,566\,700\text{ €}.$

Vuoden 2017 lopussa arvioitu talletusten korkokanta on
 $0,32\% - 2 \cdot 0,05\% = 0,22\%.$

TAPA 1:

Arvioitu talletuksille maksettu korko on
 $0,0022 \cdot 82\,809\,566\,700\text{ €} = 182\,181\,046,74\text{ €}.$

Arvioitu saatava lähdevero vuonna 2017 on
 $0,30 \cdot 182\,181\,046,74\text{ €} = 54\,654\,314,022\text{ €} \approx 55\,000\,000\text{ €}.$

TAPA 2:

Koska talletusten arvioitu kokonaismäärä vuoden 2017 alussa on
 $1,015 \cdot 80\,778\,000\,000\text{ €} = 81\,989\,670\,000\text{ €}$
 ja vuoden 2017 lopussa $82\,809\,566\,700\text{ €}$,
 arvioidaan sen olevan vuonna 2017 näiden keskiarvo eli

$$\frac{81\,989\,670\,000\text{ €} + 82\,809\,566\,700\text{ €}}{2} = 82\,399\,618\,350\text{ €}.$$

Koska korkokannan arvioidaan olevan vuoden 2017 alussa $0,27\%$ ja
 vuoden 2017 lopussa $0,22\%$, arvioidaan korkokannan olevan vuonna
 2017 näiden kahden keskiarvo eli $\frac{0,27\% + 0,22\%}{2} = 0,245\%.$

Arvioitu talletuksille maksettu korko on
 $0,00245 \cdot 82\,399\,618\,350\text{ €} = 201\,879\,064,9575\text{ €} \approx 201\,879\,064,96\text{ €}.$

Arvioitu saatava lähdevero vuonna 2017 on
 $0,30 \cdot 201\,879\,064,96\text{ €} = 60\,563\,719,488\text{ €} \approx 61\,000\,000\text{ €}.$

Molemmat laskutavat ja vastaukset hyväksytään.

Vastaus: 55 000 000 euroa tai 61 000 000 euroa

406B. Talletuksen nettokorkokanta on $0,71 \cdot 2,00 \% = 1,42 \%$, joten korkokerroin on $q = 1,0142$. Ensimmäinen talletus K kasvaa seitsemässä vuodessa määrään $1,0142^7 \cdot K$.

Toisen vuoden alusta lähtien henkilö tekee 2% inflaatiokorotuksen talletukseen, joten talletus on $1,02$ -kertainen ensimmäisen vuoden talletukseen verrattuna. Toisen vuoden talletus kasvaa kuudessa vuodessa määrään $1,0142^6 \cdot 1,02 \cdot K$. Vastaavasti kolmannen vuoden talletus kasvaa viidessä vuodessa määrään $1,0142^5 \cdot 1,02^2 \cdot K$ ja niin edelleen. Seitsemännen vuoden talletus kasvaa yhdessä vuodessa määrään $1,0142 \cdot 1,02^6 \cdot K$.

TAPA 1:

Muodostetaan talletusten arvon lauseke ja sievennetään se sopivalla ohjelmalla.

$1.0142^7 \cdot K + 1.0142^6 \cdot 1.02K + 1.0142^5 \cdot 1.02^2 \cdot K + 1.0142^4 \cdot 1.02^3 \cdot K + 1.0142^3 \cdot 1.02^4 K + 1.0142^2 \cdot 1.02^5 K + 1.0142 \cdot 1.02^6 K$

→ $\frac{6.140606322E26}{7.812500000E25} K$

$614060632157180817083900491 / 78125000000000000000000000 K$

≈ $7.859976092 K$

Säästösumma on $7,859 \dots K$.

Jos $K = 500 \text{ €}$, niin säästösumma on
 $7,859 \dots \cdot 500 \text{ €} = 3929,988 \dots \text{ €} \approx 3929,99 \text{ €}$.

TAPA 2:

Säästösumma yhteensä on

$S_7 = 1,0142^7 \cdot K + 1,0142^6 \cdot 1,02 \cdot K + \dots + 1,0142 \cdot 1,02^6 \cdot K$. Otetaan summasta yhteiseksi tekijäksi $1,0142^7 \cdot K$. Tällöin summa saadaan muotoon

$$1,0142^7 K \left(1 + \frac{1,02}{1,0142} + \left(\frac{1,02}{1,0142} \right)^2 + \dots + \left(\frac{1,02}{1,0142} \right)^6 \right).$$

Summasta osa $1 + \frac{1,02}{1,0142} + \left(\frac{1,02}{1,0142} \right)^2 + \dots + \left(\frac{1,02}{1,0142} \right)^6$ muodostaa

geometrisen summan, jonka ensimmäinen yhteenlaskettava on $a_1 = 1$,

suhdeluku $q = \frac{1,02}{1,0142}$ ja yhteenlaskettavien lukumäärä $n = 7$. Lasketaan geometrinen summa.

$$1 + \frac{1,02}{1,0142} + \left(\frac{1,02}{1,0142} \right)^2 + \dots + \left(\frac{1,02}{1,0142} \right)^6 = \frac{1 \cdot \left(1 - \left(\frac{1,02}{1,0142} \right)^7 \right)}{1 - \frac{1,02}{1,0142}}$$

$$\text{Säästösumma on siis } S = 1,0142^7 K \cdot \frac{1 \cdot \left(1 - \left(\frac{1,02}{1,0142} \right)^7 \right)}{1 - \frac{1,02}{1,0142}}.$$

Kun $K = 500$ €, säästösummaksi tulee

$$1,0142^7 \cdot 500 \text{ €} \cdot \frac{1 \cdot \left(1 - \left(\frac{1,02}{1,0142} \right)^7 \right)}{1 - \frac{1,02}{1,0142}} = 3929,988... \text{ €} \approx 3929,99 \text{ €}.$$

$$\text{Vastaus: } S = 1,0142^7 K \cdot \frac{1 \cdot \left(1 - \left(\frac{1,02}{1,0142} \right)^7 \right)}{1 - \frac{1,02}{1,0142}} \approx 7,86K, \text{ } 3929,99 \text{ €}$$

10 RAHALIIKENNELASKELMIA

ALOITA PERUSTEISTA

407A. Yrityksen kuukauden myyntituotto on yhteensä $3100 \text{ €} + 1600 \text{ €} = 4700 \text{ €}$, joten kuukauden liikevaihto on 4700 € .

Kuukauden kulut ovat yhteensä

$1300 \text{ €} + 1100 \text{ €} + 140 \text{ €} + 250 \text{ €} + 90 \text{ €} = 2880 \text{ €}$, joten kuukauden tulos on $4700 \text{ €} - 2880 \text{ €} = 1820 \text{ €}$.

Vastaus: 4700 euroa ja 1820 euroa

408A. Devalvoituminen tarkoittaa valuutan arvon alenemista muihin valuuttoihin nähden, joten käsite A ja selitys III kuuluvat yhteen.

Revalvoituminen tarkoittaa valuutan arvon nousemista muihin valuuttoihin nähden, joten käsite B ja selitys IV kuuluvat yhteen.

Inflaatio tarkoittaa hintatason nousemista, joten käsite C ja selitys I kuuluvat yhteen.

Deflaatio tarkoittaa hintatason alenemista, joten käsite D ja selitys II kuuluvat yhteen.

Vastaus: A: III, B: IV, C: I ja D: II

- 409A. a)** Merkitään euromäärää kirjaimella x ja taulukoidaan tehtävänannon tiedot.

EUR	AUD
0,641	1
x	600

Valuuttojen määrät ovat suoraan verrannolliset. Muodostetaan verranto ja ratkaistaan siitä euromäärä x .

$$\begin{aligned}\frac{0,641}{x} &= \frac{1}{600} \\ x &= 0,641 \cdot 600 \\ x &= 384,60\end{aligned}$$

Vastaus: 384,60 euroa

- b)** Merkitään euromäärää kirjaimella x ja taulukoidaan tehtävänannon tiedot.

EUR	AUD
1	1,531
x	600

Valuuttojen määrät ovat suoraan verrannolliset. Muodostetaan verranto ja ratkaistaan siitä euromäärä x .

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} &= \frac{1,531}{600} \\ 1,531x &= 600 \quad \parallel :1,531 \\ x &= 391,900... \\ x &\approx 391,90\end{aligned}$$

Vastaus: 391,90 euroa

410A. Merkitään takin kuluttajahintaindeksin mukaista hintaa kirjaimella x ja taulukoidaan tehtävänannon tiedot.

Takin hinta (€)	KHI
x	104,6
129,90	107,3

Hinta ja indeksi ovat suoraan verrannolliset. Muodostetaan verranto ja ratkaistaan siitä hinta x .

$$\begin{aligned}\frac{x}{129,90} &= \frac{104,6}{107,3} \\ 107,3x &= 104,6 \cdot 129,90 \quad \| :107,3 \\ x &= 126,631... \\ x &\approx 126,63\end{aligned}$$

Takin hinta aiemmin oli 126,63 €

Vastaus: 126,63 euroa

411A. a) Merkitään viimeisen vuoden ostoskorin hintaa kirjaimella x . Hinta ja indeksi ovat suoraan verrannolliset. Muodostetaan verranto ja ratkaistaan siitä ostoskorin hinta x .

$$\begin{aligned}\frac{46,87}{x} &= \frac{108,8}{109,2} \\ 108,8x &= 109,2 \cdot 46,87 \quad \| :108,8 \\ x &= 47,042... \\ x &\approx 47,04\end{aligned}$$

Viimeisen vuoden ostoskorin hinta oli 47,04 €.

Vastaus: 47,04 euroa

- b)** Merkitään ensimmäisen vuoden indeksin pistelukua kirjaimella x .
Hinta ja indeksi ovat suoraan verrannolliset. Muodostetaan verranto ja ratkaistaan siitä ensimmäisen vuoden indeksin pisteluku x .

$$\begin{aligned}\frac{46,96}{46,87} &= \frac{x}{108,8} \\ 46,87x &= 46,96 \cdot 108,8 \quad \| : 46,87 \\ x &= 109,008... \\ x &\approx 109,0\end{aligned}$$

Ensimmäisen vuoden indeksin pisteluku oli 109,0.

Vastaus: 109,0

- c)** Lasketaan, kuinka monta prosenttia viimeisen vuoden indeksin pisteluku on ensimmäisen vuoden indeksin pisteluvusta.

$$\frac{109,2}{109,008...} = 1,00175... = 100,175... \%$$

Hintataso nousi kolmen vuoden aikana
 $100,175... \% - 100 \% = 0,175... \% \approx 0,2 \%$.

Vastaus: 0,2 %

- 412A. a)** Yhden tuotteen hinta ennen inflaatiota oli $\frac{600 \text{ €}}{125} = 4,80 \text{ €}$.

Hinnat nousivat 5,2 %, joten inflaation jälkeen yhden tuotteen hinta oli
 $1,052 \cdot 4,80 \text{ €} = 5,049... \text{ €} \approx 5,05 \text{ €}$.

Inflaation jälkeen 600 eurolla tuotteita sai $\frac{600 \text{ €}}{5,05 \text{ €}} = 118,81... \dots$

Kappalemäärä on pyöristettävä alaspäin, joten tuotteita sai 118 kappaletta.

Vastaus: 118 kpl

- b) Tuotteita sai $\frac{118}{125} = 0,944 = 94,4 \%$ inflaatiota edeltävästä määrästä, joten niitä pystyi ostamaan $100 \% - 94,4 \% = 5,6 \%$ aiempaa vähemmän.

Vastaus: 5,6 %

- 413A. a) Valuutanvaihtopiste myy matkustajalle puntia, joten käytetään setelien myyntikurssia. Merkitään Egyptin puntien määrää kirjaimella x ja taulukoidaan tehtävänannon tiedot.

EUR	EGP
1	18,02
700	x

Muodostetaan verranto ja ratkaistaan siitä Egyptin puntien määrä x .

$$\begin{aligned}\frac{1}{700} &= \frac{18,02}{x} \\ x &= 700 \cdot 18,02 \\ x &= 12\,614\end{aligned}$$

700 eurolla saa 12 614 Egyptin puntia. Lasketaan, kuinka monta 200 punnan seteliä summalla saa.

$$\frac{12\,614 \text{ EGP}}{200 \text{ EGP}} = 63,07 \approx 63$$

200 punnan seteleitä saa 63 kappaletta.

Vastaus: 63 seteliä

- b) Valuutanvaihtopiste ostaa puntia matkustajalta, joten käytetään setelien ostokurssia. Valuutanvaihtopiste ottaa vastaan vain 200 punnan seteleitä, joten matkustaja voi vaihtaa 1000 punttaa. Merkitään euromäärää kirjaimella x ja taulukoidaan tehtävänannon tiedot.

EUR	EGP
1	24,04
x	1000

Muodostetaan verranto ja ratkaistaan siitä Egyptin puntien määrä x .

$$\frac{1}{x} = \frac{24,04}{1000}$$

$$24,04x = 1000 \quad || : 24,04$$

$$x = 41,597\dots$$

Matkustaja saa 41,60 €.

Vastaus: 41,60 €

- c) Matkustajalle jää 100 punttaa. Käytetään setelien ostokurssia. Merkitään euromäärää kirjaimella x ja taulukoidaan tehtävänannon tiedot.

EUR	EGP
1	24,04
x	100

Muodostetaan verranto ja ratkaistaan siitä Egyptin puntien määrä x .

$$\frac{1}{x} = \frac{24,04}{100}$$

$$24,04x = 100 \quad || : 24,04$$

$$x = 4,159\dots$$

$$x \approx 4,16$$

Matkustajalle jää Egyptin puntia 4,16 euron arvosta.

Vastaus: 4,16 €

- 414A. a)** Maryam maksoi osakkeista ostokuluineen
 $125 \cdot 16,69 \text{ €} + 10 \text{ €} = 2096,25 \text{ €}.$

Vastaus: 2096,25 €

- b)** Maryam sai osakkeet myydessään $125 \cdot 23,48 \text{ €} - 10 \text{ €} = 2925,00 \text{ €}.$

Vastaus: 2925,00 €

- c)** Myyntivoitto oli $2925,00 \text{ €} - 2096,25 \text{ €} = 828,75 \text{ €}.$
Myyntivoitosta perittiin pääomatuloveroa 30 %, joten myyntivoitosta jäi verojen jälkeen jäljelle $0,7 \cdot 828,75 \text{ €} = 580,125 \text{ €} \approx 580,13 \text{ €}.$

Vastaus: 580,13 €

- 415A. a)** Koska emissiokurssi on 104 %, obligaatio maksoi
 $1,04 \cdot 2000 \text{ €} = 2080 \text{ €}.$

Vastaus: 2080 €

- b)** Obligaation yhden vuoden korko oli $0,038 \cdot 2000 \text{ €} = 76 \text{ €}.$ Korosta maksettiin 30 % lähdeveroa, joten korosta jäi käteen
 $0,7 \cdot 76 \text{ €} = 53,20 \text{ €}.$

Thomas sai viidessä vuodessa korkotuloja $5 \cdot 53,20 \text{ €} = 266 \text{ €}.$

Vastaus: 266 €

- c)** Thomas sai obligaatiosta takaisinmaksupäivänä 2000 €. Koska hän oli maksanut obligaatiosta enemmän kuin sai siitä, ei pääomatuloveroa mene. Thomas sai obligaatiosta yhteensä $2000 \text{ €} + 266 \text{ €} = 2266 \text{ €}.$
Verojen jälkeen voittoa jäi $2266 \text{ €} - 2080 \text{ €} = 186 \text{ €}.$

Vastaus: 186 €

416A. a) Kun euro revalvoituu Ruotsin kruunuun nähden, niin euron arvo kruunuissa nousee. Tällöin eurolla saa enemmän kruunuja ja enemmän ruotsalaisia tuotteita, joten ruotsalaisten tuotteiden hinta alenee Suomessa. Väite on väärin.

Vastaus: väärin, alenee

b) Inflaatio tarkoittaa yleisen hintatason nousuprosenttia. Kun yleinen hintataso nousee nopeasti, niin samalla rahalla saa koko ajan vähemmän ja vähemmän tavaroita ja palveluita, joten rahan ostovoima alenee. Väite on oikein.

Vastaus: oikein

c) Jos tilin nettokorko on inflaation suuruinen, talletuksen nimellisarvo nousee inflaation verran, mutta reaaliarvo pysyy samana. Väite on väärin.

Vastaus: väärin, pysyy samana

d) Reaalipalkassa otetaan huomioon hintatason nousu ja nimellispalkassa ei, joten nimellispalkat nousevat reaalipalkkoja nopeammin. Väite on oikein.

Vastaus: oikein

VAHVISTA OSAAMISTA

417B. Muodostetaan hinnan muutoksia kuvaavat prosenttikertoimet.

Vuosi	Kuinka monta prosenttia edellisen vuoden hinnasta?	Prosenttikerroin
1	100 %	1
2	$100 \% - 5,4 \% = 94,6 \%$	0,946
3	$100 \% + 1,2 \% = 101,2 \%$	1,012
4	$100 \% - 2,3 \% = 97,7 \%$	0,977
5	$100 \% + 3,7 \% = 103,7 \%$	1,037
6	$100 \% + 0,8 \% = 100,8 \%$	1,008

Perusajankohdan indeksin pisteluku on 100. Seuraavat vuodet lasketaan kertomalla edellistä muutosta kuvaavalla prosenttikertoimella.

Vuosi	Indeksin pisteluku
1	100
2	$100 \cdot 0,946 = 94,6$
3	$94,6 \cdot 1,012 = 95,735... \approx 95,7$
4	$95,735... \cdot 0,977 = 93,533... \approx 93,5$
5	$93,533... \cdot 1,037 = 96,994... \approx 97,0$
6	$96,994... \cdot 1,008 = 97,769... \approx 97,8$

Indeksistä nähdään, että kahvin kilohinta aleni kuudessa vuodessa $100 \% - 97,8 \% = 2,2 \%$.

Vastaus:

Vuosi	1	2	3	4	5	6
Indeksin pisteluku	100,0	94,6	95,7	93,5	97,0	97,8

aleni 2,2 %

418B. Osakkeet maksoivat $30 \cdot 99,90 \text{ €} = 2997 \text{ €}$. Kaupankäyntipalkkio oli $0,005 \cdot 2997 \text{ €} = 14,985 \text{ €} \approx 14,99 \text{ €}$. Antti maksoi osakkeista yhteensä $2997 \text{ €} + 14,99 \text{ €} = 3011,99 \text{ €}$.

Myydessä osakkeista sai $30 \cdot 105,41 \text{ €} = 3162,30 \text{ €}$. Kaupankäyntipalkkio oli $0,005 \cdot 3162,30 \text{ €} = 15,8115 \text{ €} \approx 15,81 \text{ €}$. Antti sai osakkeista $3162,30 \text{ €} - 15,81 \text{ €} = 3146,49 \text{ €}$.

Myyntivoitto oli $3146,49 \text{ €} - 3011,99 \text{ €} = 134,50 \text{ €}$. Myyntivoitosta perittiin pääomaveroa 30 %, joten myyntivoitosta jäi verojen jälkeen $0,7 \cdot 134,50 \text{ €} = 94,15 \text{ €}$.

Vastaus: 94,15 euroa

419B. a) Vaihtopalkkio on 4 €, joten valuutan vaihtoon on käytettävissä $500 \text{ €} - 4 \text{ €} = 496 \text{ €}$. Valuutanvaihtopiste myy matkustajalle Kanadan dollareita, joten käytetään setelien myyntihintaa. Merkitään dollarien määrää kirjaimella x ja taulukoidaan tehtävänannon tiedot.

EUR	CAD
1	1,3554
496	x

Muodostetaan verranto ja ratkaistaan siitä Kanadan dollarien määrä x .

$$\begin{aligned}\frac{1}{496} &= \frac{1,3554}{x} \\ x &= 1,3554 \cdot 496 \\ x &= 672,278... \\ x &\approx 672\end{aligned}$$

Valuutanvaihtopisteeltä saa 672 Kanadan dollaria.

Vastaus: 672 dollaria

- b)** Yritys maksaa laskun tilisiirtona ja pankki myy Kanadan dollareita, joten käytetään tilivaluutan myyntikurssia. Merkitään laskun suuruutta euroina kirjaimella x ja taulukoidaan tiedot.

EUR	CAD
1	1,3679
x	8500

Muodostetaan verranto ja ratkaistaan laskun suuruus x .

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} &= \frac{1,3679}{8500} \\ 1,3679x &= 8500 \\ x &= 6213,904... \\ x &\approx 6213,90\end{aligned}$$

Laskun suuruus on 6213,90 €.

Vastaus: 6213,90 euroa

- 420B. a)** Koska yhden kännykkäkotelon valmistuskustannukset ovat 12,30 € ja valmistusmäärä on x , valmistuskustannukset ovat yhteensä $12,30x$ euroa. Lisäämällä valmistuskustannuksiin kiinteät kustannukset 98 000 euroa saadaan kokonaiskustannusten lauseke $12,30x + 98\,000$.

Vastaus: $12,30x + 98\,000$

- b)** Koska 75 % kotelosta myydään 17,99 euron ja viimeiset 25 % 14,00 euron kappalehintaan, kotelosta saatu rahamäärä on $17,99 \cdot 0,75x + 14,00 \cdot 0,25x$.

Lasketaan yhtiön saama voitto vähentämällä myyntitulosta a-kohdassa selvitetty kokonaiskustannukset.

$$17,99 \cdot 0,75x + 14,00 \cdot 0,25x - (12,30x + 98\,000) = 4,6925x - 98\,000.$$

Vastaus: $4,6925x - 98\,000$

- c) Kiinteät kustannukset saadaan katettua sellaisella myyntimäärällä x , jolla voittoa kuvaava lauseke saa arvon 0. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä myyntimäärä x .

$$\begin{aligned} 4,6925x - 98\,000 &= 0 \\ 4,6925x &= 98\,000 & \| : 4,6925 \\ x &= 20\,884,389... \end{aligned}$$

20 884 kappaleen valmistaminen ei vielä kata kustannuksia, joten koteloita täytyy valmistaa 20 885 kappaletta.

Vastaus: 20 885 kännykkäkotelo

- 421B.** Yrittäjä saa yhdestä vihermehusta $6,50 \text{ €} - 3,20 \text{ €} = 3,30 \text{ €}$. Merkitään vihermehuannosten lukumäärää kirjaimella x , jolloin myyntituotto on euroina $3,3x$.

Yrityksellä on kuluja kuukaudessa yhteensä $600 \text{ €} + 700 \text{ €} = 1300 \text{ €}$.

Tulos on myyntituoton ja kulujen erotus, joten tulos on $3,30x - 1300$.

Muodostetaan tuloksen avulla yhtälö ja ratkaistaan siitä myytävien annosten lukumäärä x .

$$\begin{aligned} 3,3x - 1300 &= 2500 \\ 3,3x &= 3800 & \| : 3,3 \\ x &= 1151,515... \end{aligned}$$

Kuukaudessa tulee myydä 1151,515... annosta, joten päivässä annoksia tulee myydä

$$\frac{1151,515...}{25} = 46,060...$$

46 annosta päivässä ei riitä, joten on myytävä vähintään 47 annosta.

Vastaus: vähintään 47 annosta

- 422B. a)** Merkitään palkkion hintaa euroina sopimuksen tekohetkellä kirjaimella x ja taulukoidaan tiedot.

EUR	GBP
1	0,795
x	5000

Muodostetaan verranto ja ratkaistaan siitä eurojen määrä x .

$$\frac{1}{x} = \frac{0,795}{5000}$$

$$0,795x = 5000 \quad \parallel : 0,795$$

$$x = 6289,308\dots$$

Sopimuksen tekohetkellä palkkion suuruus on
6289,308... € $\approx$ 6289,31 €.

Merkitään palkkion suuruutta euroina maksupäivänä kirjaimella y ja taulukoidaan tiedot.

EUR	GBP
1	0,839
y	5000

Muodostetaan verranto ja ratkaistaan siitä eurojen määrä x .

$$\frac{1}{y} = \frac{0,839}{5000}$$

$$0,839y = 5000$$

$$y = 5959,475\dots$$

Sopimuksen tekohetkellä palkkion suuruus on
5959,475... € $\approx$ 5959,48 €.

Vastaus: 6289,31 € ja 5959,48 €

- b)** Maksupäivänä palkkio oli $\frac{5959,475\dots \text{€}}{6289,308\dots \text{€}} = 0,94755\dots$ -kertainen
sopimuksen tekohetkeen verrattuna, joten se oli
100 % – 94,755... % = 5,244... % $\approx$ 5,2 % halvempi.

Vastaus: 5,2 % halvempi

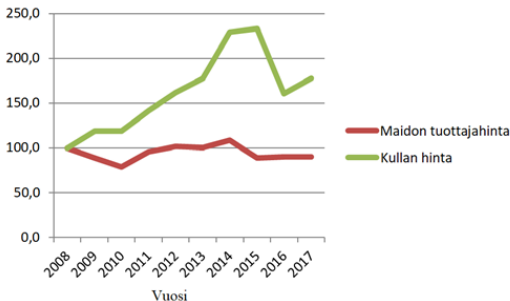
423B. Muodostetaan indeksien pisteluvut taulukkolaskentaohjelmalla.

	A	B	C	D	E	F
1	Maidon tuottajahinnat			Kullan hinta		
2						
3	Vuosi	Tuottajahinta keskimäärin (€/l) 1)	Indeksi	Vuosi	Kullan hinta (€/Unssi)	Indeksi
4	2008	41,54	=B4/\$B\$4*100	2008	563,23	=E4/\$E\$4*100
5	2009	37,01	=B5/\$B\$4*100	2009	667,53	=E5/\$E\$4*100
6	2010	32,82	=B6/\$B\$4*100	2010	668,71	=E6/\$E\$4*100
7	2011	39,78	=B7/\$B\$4*100	2011	800,24	=E7/\$E\$4*100
8	2012	42,24	=B8/\$B\$4*100	2012	911,56	=E8/\$E\$4*100
9	2013	41,89	=B9/\$B\$4*100	2013	1003,73	=E9/\$E\$4*100
10	2014	45,17	=B10/\$B\$4*100	2014	1289,45	=E10/\$E\$4*100
11	2015	36,97	=B11/\$B\$4*100	2015	1313,75	=E11/\$E\$4*100
12	2016	37,3	=B12/\$B\$4*100	2016	903,28	=E12/\$E\$4*100
13	2017	37,33	=B13/\$B\$4*100	2017	1002,18	=E13/\$E\$4*100

	A	B	C	D	E	F
1	Maidon tuottajahinnat			Kullan hinta		
2						
3	Vuosi	Tuottajahinta keskimäärin (€/l) 1)	Indeksi	Vuosi	Kullan hinta (€/Unssi)	Indeksi
4	2008	41,54	100,0	2008	563,23	100,0
5	2009	37,01	89,1	2009	667,53	118,5
6	2010	32,82	79,0	2010	668,71	118,7
7	2011	39,78	95,8	2011	800,24	142,1
8	2012	42,24	101,7	2012	911,56	161,8
9	2013	41,89	100,8	2013	1003,73	178,2
10	2014	45,17	108,7	2014	1289,45	228,9
11	2015	36,97	89,0	2015	1313,75	233,3
12	2016	37,3	89,8	2016	903,28	160,4
13	2017	37,33	89,9	2017	1002,18	177,9

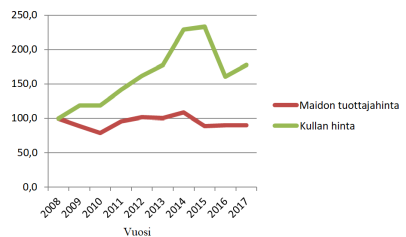
Piirretään indeksin pisteluvuista viivakaavio.

Indeksin pisteluku



Vastaus:

Vuosi	Maidon tuottajahinta (2008 = 100)	Kullan hinta (2008 = 100)
2008	100,0	100,0
2009	89,1	118,5
2010	79,0	118,7
2011	95,8	142,1
2012	101,7	161,8
2013	100,8	178,2
2014	108,7	228,9
2015	89,0	233,3
2016	89,8	160,4
2017	89,9	177,9



424A. Palkkakuluja on aluksi $0,31 \cdot 273\,000\text{ €} = 84\,630\text{ €}$.
Muita kuluja on aluksi $273\,000\text{ €} - 84\,630\text{ €} = 188\,370\text{ €}$.
Tulos aluksi on $312\,000\text{ €} - 273\,000\text{ €} = 39\,000\text{ €}$.

Palkkakuluja on lopuksi $1,035 \cdot 84\,630\text{ €} = 87\,592,05\text{ €}$.
Kuluja on lopuksi $87\,592,05\text{ €} + 188\,370\text{ €} = 275\,962,05\text{ €}$.
Liikevaihto on lopuksi $0,989 \cdot 312\,000\text{ €} = 308\,568\text{ €}$.
Tulos lopuksi on $308\,568\text{ €} - 275\,962,05\text{ €} = 32\,605,95\text{ €}$.

$$\frac{32\,605,95\text{ €}}{39\,000\text{ €}} = 0,83605 = 83,605\%, \text{ joten tulos on pienentynyt}$$

$$100\% - 83,605\% = 16,395\% \approx 16,4\%.$$

Vastaus: pienenee 16,4 %

- 425A. a)** Nimellispalkka tuli $\frac{2450 \text{ €}}{2130 \text{ €}} = 1,15023\dots$ -kertaiseksi, joten se nousi $115,023\dots \% - 100 \% = 15,0234\dots \% \approx 15,0 \%$.

Vastaus: 15,0 %

- b)** Tutkitaan, mikä vuoden 2010 palkka olisi ollut 2017, jos se olisi noudattanut elinkustannusindeksiä. Merkitään indeksin mukaista palkkaa kirjaimella x ja taulukoidaan tehtävänannon tiedot.

Palkka (€)	EKI (1951 = 100)
2130	1751
x	1927

Muodostetaan verranto ja ratkaistaan siitä indeksin mukainen palkka x .

$$\frac{2130}{x} = \frac{1751}{1927}$$

$$1751x = 2130 \cdot 1927 \quad || :1751$$

$$x = 2344,094\dots$$

Palkka olisi ollut 2344,094... €, jos palkka olisi noudattanut elinkustannusindeksiä. Koska todellinen palkka oli 2450 €,

reaalipalkka tuli $\frac{2450 \text{ €}}{2344,094\dots \text{ €}} = 1,04517\dots$ -kertaiseksi, eli se kasvoi $104,517\dots \% - 100 \% = 4,517\dots \% \approx 4,5 \%$.

Vastaus: 4,5 %

- 426B. a)** Kesäkuussa 2006 indeksin pisteluku oli 101,7 ja kesäkuussa 2010 se oli 109,7.

Kesäkuun 2010 indeksin pisteluku oli $\frac{109,7}{101,7} = 1,07866\dots$ -kertainen kesäkuun 2006 indeksin pistelukuun verrattuna.

Kuluttajahinta oli noussut $107,866\dots \% - 100 \% = 7,866\dots \% \approx 7,9 \%$.

Vastaus: 7,9 %

- b)** Vuokraa on korotettu viimeksi tammikuussa 2014 vastaamaan joulukuun 2013 indeksii. Syyskuun 2011 indeksin pisteluku oli 114,2 ja joulukuun 2013 indeksin pisteluku oli 119,1.

Merkitään vuokrasopimuksen solmimishetken vuokra kirjaimella x . Muodostetaan verranto ja ratkaistaan siitä vuokrasopimuksen solmimishetken vuokra x .

$$\begin{aligned}\frac{x}{542} &= \frac{114,2}{119,1} \\ 119,1x &= 542 \cdot 114,2 \quad \| : 119,1 \\ x &= 519,701\dots \\ x &\approx 520\end{aligned}$$

Vuokra vuokrasopimusta solmittaessa oli 520 €/kk.

Vastaus: 520 €/kk

427B. Lasketaan taulukkolaskentaohjelmalla osakesalkun nykyinen arvo ja arvo ostohetkellä.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Osake	Osakkeiden lukumäärä (kpl)	Nykyinen kurssi (€)	Osakkeiden arvo (€)	Kurssin muutos	Prosenttikerroin	Kurssi ostohetkellä (€)	Osakkeiden arvo (€)
2	Nokia Corporation	250	3,98	=B2*C2	-39,24	=(100+E2)/100	=C2/F2	=B2*G2
3	Fortum Corporation	100	17,85	=B3*C3	-5,8	=(100+E3)/100	=C3/F3	=B3*G3
4	Kone Oyj	50	45,22	=B4*C4	14,8	=(100+E4)/100	=C4/F4	=B4*G4
5	Finnair Oyj	200	10,74	=B5*C5	468,25	=(100+E5)/100	=C5/F5	=B5*G5
6	Elisa Corporation A	100	31,91	=B6*C6	30,94	=(100+E6)/100	=C6/F6	=B6*G6
7			Summa	=SUMMA(D2:D6)			Summa	=SUMMA(H2:H6)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Osake	Osakkeiden lukumäärä (kpl)	Nykyinen kurssi (€)	Osakkeiden arvo (€)	Kurssin muutos	Prosenttikerroin	Kurssi ostohetkellä (€)	Osakkeiden arvo (€)
2	Nokia Corporation	250	3,98	995	-39,24	0,6076	6,55	1637,59
3	Fortum Corporation	100	17,85	1785	-5,80	0,942	18,95	1894,90
4	Kone Oyj	50	45,22	2261	14,80	1,148	39,39	1969,51
5	Finnair Oyj	200	10,74	2148	468,25	5,6825	1,89	378,00
6	Elisa Corporation A	100	31,91	3191	30,94	1,3094	24,37	2436,99
7			Summa	10380			Summa	8317,00

Osakesalkun nykyarvo on 10380 € ja ostohetkellä arvo oli 8317 €.

$$\frac{10380 \text{ €}}{8317 \text{ €}} = 1,24804\dots, \text{ joten osakesalkun arvo on noussut}$$

$$24,804\dots \% \approx 24,8 \%$$

Vastaus: noussut 24,8 %

428B. a) Merkitään vuotuista korkokerrointa kirjaimella q . Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä vuotuinen korkokerroin q .

$$1000q^3 = 1086,37 \quad || :1000$$

$$q^3 = 1,08637$$

$$q = \sqrt[3]{1,08637}$$

$$q = 1,02799\dots$$

Nimellinen vuosikorkoprosentti oli $102,799\dots - 100 = 2,799\dots \approx 2,8$.

Vastaus: 2,8

b) Inflaation takia rahan arvo on laskenut. 1000 € vuonna 2010 vastaa $1,085 \cdot 1000 \text{ €} = 1085 \text{ €}$ vuonna 2013.

Todellista korkoa talletukselle on kertynyt kolmessa vuodessa $1086,37 \text{ €} - 1085 \text{ €} = 1,37 \text{ €}$.

Vastaus: 1,37 euroa

- 429B. a)** Koska emissiokurssi on 113 %, sijoittaja maksaa obligaatiosta
 $1,13 \cdot 10\,000 \text{ €} = 11\,300 \text{ €}$.

Vastaus: 11 300 euroa

- b)** Takaisinmaksupäivänä sijoittajalle maksetaan sijoitusobligaation
nimellisarvo ja 135 % tuotosta.

Jos osakekorin arvo nousee 30 %, osakekorin tuotto on
 $0,30 \cdot 10\,000 \text{ €} = 3000 \text{ €}$. Sijoittajalle maksetaan
 $10\,000 \text{ €} + 1,35 \cdot 3000 \text{ €} = 14\,050 \text{ €}$.

Myyntivoitto on $14\,050 \text{ €} - 11\,300 \text{ €} = 2750 \text{ €}$. Pääomatulovero on
30 %, joten veroa on maksettava $2750 \text{ €} \cdot 0,3 = 825 \text{ €}$.

Sijoittaja saa obligaatiosta takaisinmaksupäivänä
 $14\,050 \text{ €} - 825 \text{ €} = 13\,225 \text{ €}$.

Jos osakekori tuottaa tappiota, sijoittajalle maksetaan
takaisinmaksupäivänä obligaation nimellisarvo 10 000 €.

Vastaus: 13 225 euroa ja 10 000 euroa

- c) Jos osakekorin arvo nousee 30 %, sijoittaja maksaa obligaatiosta 11 300 € ja saa siitä takaisin 13 225 €. Merkitään keskimääräistä vuosittaista korkokerrointa kirjaimella q ja ratkaistaan se yhtälön avulla.

$$11\,300q^3 = 13\,225 \quad \| :11\,300$$

$$q^3 = \frac{13\,225}{11\,300}$$

$$q = \sqrt[3]{\frac{13\,225}{11\,300}}$$

$$q = 1,05383\dots$$

Koska korkokerroin on 1,05383..., sijoituksen vuosituotto on $105,383\dots \% - 100 \% = 5,383\dots \% \approx 5,4 \%$.

Jos osakekori tuottaa tappiota, sijoittaja maksaa obligaatiosta 11 300 € ja saa siitä takaisin 10 000 €. Merkitään keskimääräistä vuosittaista korkokerrointa kirjaimella q ja ratkaistaan se yhtälön avulla.

$$11\,300q^3 = 10\,000 \quad \| :11\,300$$

$$q^3 = \frac{10\,000}{11\,300}$$

$$q = \sqrt[3]{\frac{10\,000}{11\,300}}$$

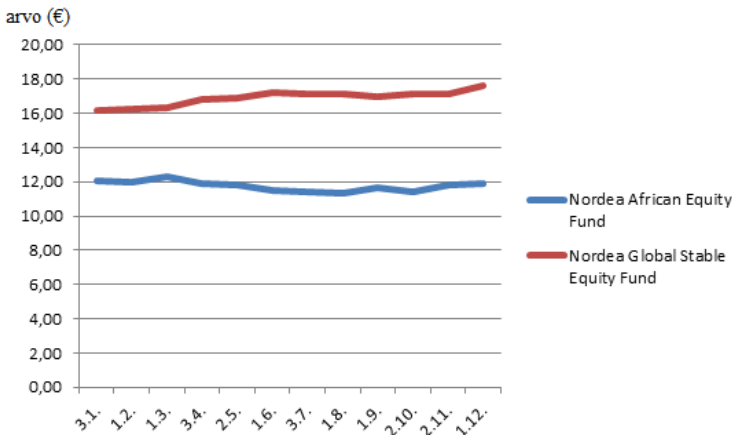
$$q = 0,96007\dots$$

Koska korkokerroin on 0,96007..., sijoituksen vuosituotto on $96,007\dots \% - 100 \% = -3,992\dots \% \approx -4,0 \%$.

Vastaus: 5,4 % ja -4,0 %

430B. a) Piirretään viivakaavio.

Vastaus:



b) Lasketaan taulukkolaskentaohjelmalla rahasto-osuuksien määrät jakamalla 75 € yhden rahasto-osuuden hinnalla.

	A	B	C	D	E	F
	Päivä	Nordea African Equity Fund	Rahasto-osuuksien määrä (kpl)		Nordea Global Stable Equity Fund	Rahasto-osuuksien määrä (kpl)
1						
2	3.1.	12,06	6,2189		16,19	4,6325
3	1.2.	11,96	6,2709		16,27	4,6097
4	1.3.	12,30	6,0976		16,29	4,6041
5	3.4.	11,86	6,3238		16,84	4,4537
6	2.5.	11,79	6,3613		16,89	4,4405
7	1.6.	11,50	6,5217		17,23	4,3529
8	3.7.	11,38	6,5905		17,16	4,3706
9	1.8.	11,34	6,6138		17,13	4,3783
10	1.9.	11,63	6,4488		16,96	4,4222
11	2.10.	11,41	6,5732		17,13	4,3783
12	2.11.	11,78	6,3667		17,13	4,3783
13	1.12.	11,90	6,3025		17,60	4,2614
14		Yhteensä	76,6897		Yhteensä	53,2823

Mohammed sai Nordea African Equity Fund -rahasto-osuuksia 76,6897 ja Nordea Global Stable Equity Fund -rahasto-osuuksia 53,2823.

Vastaus: 76,6897 ja 53,2823

- c) Mohammed sai myyntihetkellä Nordea African Equity Fund -rahastosta
 $76,6897 \cdot 13,14 \text{ €} = 1007,7032... \text{ €} \approx 1007,70 \text{ €}$ ja Nordea Global Stable Equity Fund-rahastosta
 $53,2823 \cdot 18,15 \text{ €} = 967,074... \text{ €} \approx 967,07 \text{ €}.$

Rahastoista saadut myyntivoitot olivat

$$1007,70 \text{ €} - 12 \cdot 75 \text{ €} = 107,70 \text{ € ja}$$

$$967,07 \text{ €} - 12 \cdot 75 \text{ €} = 67,07 \text{ €}. \text{ Myyntivoitto yhteensä oli } 174,77 \text{ €}.$$

Myyntivoitosta peritään pääomatuloveroa 30 %, joten sijoituksien tuotto oli

$$0,7 \cdot 174,77 \text{ €} = 122,339 \text{ €} = 122,34 \text{ €}$$

Vastaus: 122,34 euroa

431B. a) Lasketaan taulukkolaskentaohjelmalla palvelun kuukausimaksut ja niiden summa.

	A	B	C	D
1	Maksupäivä	Dollarin kurssi	1 dollarin arvo euroina	Laskun hinta euroina
2	2.1.	1,0465	=1/B2	=C2*4000
3	1.2.	1,079	=1/B3	=C3*4000
4	1.3.	1,0533	=1/B4	=C4*4000
5	3.4.	1,0661	=1/B5	=C5*4000
6	1.5.	1,0899	=1/B6	=C6*4000
7	1.6.	1,1219	=1/B7	=C7*4000
8	3.7.	1,1369	=1/B8	=C8*4000
9	1.8.	1,1812	=1/B9	=C9*4000
10	1.9.	1,192	=1/B10	=C10*4000
11	2.10.	1,1744	=1/B11	=C11*4000
12	1.11.	1,1612	=1/B12	=C12*4000
13	1.12.	1,1885	=1/B13	=C13*4000
14			Summa	=SUMMA(D2:D13)

	A	B	C	D
1	Maksupäivä	Dollarin kurssi	1 dollarin arvo euroina	Laskun hinta euroina
2	2.1.	1,0465	0,9556	3822,26
3	1.2.	1,0790	0,9268	3707,14
4	1.3.	1,0533	0,9494	3797,59
5	3.4.	1,0661	0,9380	3751,99
6	1.5.	1,0899	0,9175	3670,06
7	1.6.	1,1219	0,8913	3565,38
8	3.7.	1,1369	0,8796	3518,34
9	1.8.	1,1812	0,8466	3386,39
10	1.9.	1,1920	0,8389	3355,70
11	2.10.	1,1744	0,8515	3405,99
12	1.11.	1,1612	0,8612	3444,71
13	1.12.	1,1885	0,8414	3365,59
14			Summa	42791,15

Yritys maksoi palvelusta vuoden aikana 42 791,15 €.

Vastaus: 42 791,15 euroa

b) Palvelun lopullinen hinta oli $\frac{42\,791,15\text{ €}}{44\,000\text{ €}} = 0,97252\dots$, joten budjetti

alittui

$100\% - 97,252\dots\% = 2,747\dots\% \approx 2,7\%$

Vastaus: alittui 2,7 prosentilla

432B. Lasketaan dollarin arvo euroina 11.1.1999.

$$1 \text{ EUR} = 1,1569 \text{ USD} \quad || :1,1569$$

$$\frac{1}{1,1569} \text{ EUR} = 1 \text{ USD}$$

$$1 \text{ USD} = 0,864378... \text{ EUR}$$

$$1 \text{ USD} \approx 0,86438 \text{ EUR}$$

Lasketaan jenin arvo euroina 11.1.1999.

$$1 \text{ EUR} = 126,33 \text{ JPY} \quad || :126,33$$

$$\frac{1}{126,33} \text{ EUR} = 1 \text{ JPY}$$

$$1 \text{ JPY} = 0,00791577... \text{ EUR}$$

$$1 \text{ JPY} \approx 0,0079158 \text{ EUR}$$

Lasketaan dollarin arvo euroina 12.7.1999.

$$1 \text{ EUR} = 1,0124 \text{ USD} \quad || :1,0124$$

$$\frac{1}{1,0124} \text{ EUR} = 1 \text{ USD}$$

$$1 \text{ USD} = 0,987751... \text{ EUR}$$

$$1 \text{ USD} \approx 0,98775 \text{ EUR}$$

Lasketaan jenin arvo euroina 12.7.1999.

$$1 \text{ EUR} = 123,82 \text{ JPY} \quad || :123,82$$

$$\frac{1}{123,82} \text{ EUR} = 1 \text{ JPY}$$

$$1 \text{ JPY} = 0,00807623... \text{ EUR}$$

$$1 \text{ JPY} \approx 0,0080762 \text{ EUR}$$

Lasketaan dollarin kurssin muutos.

$$\frac{0,98775...}{0,86437...} = 1,1427...$$

Dollarin kurssi vahvistui $114,27... \% - 100 \% = 14,27... \% \approx 14,3 \%$

Lasketaan jenin kurssin muutos.

$$\frac{0,0080762...}{0,0079157...} = 1,02027...$$

Jenin kurssi vahvistui $102,027... \% - 100 \% = 2,027... \% \approx 2,0 \%$

Vastaus: 11.1.1999: 1 USD = 0,86438 EUR, 1 JPY = 0,0079158 EUR,
12.7.1999: 1 USD = 0,98775 EUR, 1 JPY = 0,0080762 EUR, USD:n
kurssi vahvistui 14,3 % ja JPY:n kurssi vahvistui 2,0 % euroon nähden.

433B. Ennen 1.1.2005 lähdevero oli 29 %, joten nettokorkokanta oli silloin $0,71 \cdot 1,5 \% = 1,065 \%$ ja korkokerroin $q_1 = 1,01065$. 1.1.2005 jälkeen lähdevero oli 28 %, joten nettokorkokanta silloin oli $0,72 \cdot 1,5 \% = 1,08 \%$ ja korkokerroin $q_2 = 1,0108$.

Liisan talletus 1.1.2005 oli $1,01065^3 \cdot 1000 \text{ €}$ ja kaksi vuotta myöhemmin $1,0108^2 \cdot 1,01065^3 \cdot 1000 \text{ €} = 1054,709... \text{ €} \approx 1054,71 \text{ €}$.

Vuoden 2002 alussa elinkustannusindeksin pisteluku oli 1548 ja viisi vuotta myöhemmin 1632.

Lasketaan vuoden 2002 alun 1000 euron arvo viisi vuotta myöhemmin.

$$\frac{1000}{x} = \frac{1548}{1632}$$

$$1548x = 1000 \cdot 1632 \quad \| :1548$$

$$x = 1054,263...$$

Talletuksen todellinen arvo on $\frac{1054,709... \text{ €}}{1054,263... \text{ €}} = 1,0004228... \text{ -kertainen}$

verrattuna reaaliarvoon. Todellinen korko kolmen vuoden aikana on $100,04228... \% - 100 \% = 0,04228... \% \approx 0,0423 \%$.

Vastaus: 1054,71 euroa, 0,0423 %

434B. Merkitään Eemelin saamaa verotonta hintaa kirjaimella x . Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä veroton hinta x .

$$\begin{aligned} 1,10x &= 800 & || : 1,10 \\ x &= 727,272\dots \\ x &\approx 727,27 \end{aligned}$$

Eemeli tilitti valtiolle arvonlisäveroa $800 \text{ €} - 727,27 \text{ €} = 72,73 \text{ €}$.

Merkitään taidegallerian saamaa verotonta hintaa kirjaimella y . Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä veroton hinta y .

$$\begin{aligned} 1,24y &= 1500 & || : 1,24 \\ y &= 1209,677\dots \\ y &\approx 1209,68 \end{aligned}$$

Arvonlisäveroa valtiolle tilittäessään taidegalleria saa vähentää Eemelin tilittämän arvonlisäveron. Taidegalleria tilittää siis arvonlisäveroa valtiolle $1500 \text{ €} - 1209,68 \text{ €} - 72,73 \text{ €} = 217,59 \text{ €}$.

Vastaus: 72,73 euroa ja 217,59 euroa

435A. Koska Turkin liira devalvoituu tai revalvoituu, lasketaan yhden Turkin liiran kurssi euroissa alkutilanteessa.

$$\begin{aligned} 1 \text{ EUR} &= 4,6557 \text{ TRY} & \| : 4,6557 \\ 0,21479... \text{ EUR} &= 1 \text{ TRY} \\ 1 \text{ TRY} &= 0,21479... \text{ EUR} \end{aligned}$$

- a)** Koska Turkin liira devalvoituu 6,2 % euroon nähden, yhdellä Turkin liiralla saa 6,2 % vähemmän euroja.

$$\begin{aligned} 1 \text{ TRY} &= 0,938 \cdot 0,21479... \text{ EUR} \\ 1 \text{ TRY} &= 0,20147... \text{ EUR} \end{aligned}$$

Lasketaan uusi Turkin liiran kurssi.

$$\begin{aligned} 1 \text{ TRY} &= 0,20147... \text{ EUR} & \| : 0,20147... \\ 4,96343... \text{ TRY} &= 1 \text{ EUR} \\ 1 \text{ EUR} &= 4,96343... \text{ TRY} \end{aligned}$$

Uusi Turkin liiran kurssi on $4,96343... \approx 4,9634$.

Vastaus: 4,9634

- b)** Koska Turkin liira revalvoituu 6,2 % euroon nähden, yhdellä Turkin liiralla saa 6,2 % enemmän euroja.

$$\begin{aligned} 1 \text{ TRY} &= 1,062 \cdot 0,21479... \text{ EUR} \\ 1 \text{ TRY} &= 0,22810... \text{ EUR} \end{aligned}$$

Lasketaan uusi Turkin liiran kurssi.

$$\begin{aligned} 1 \text{ TRY} &= 0,22810... \text{ EUR} & \| : 0,22810... \\ 4,38389... \text{ TRY} &= 1 \text{ EUR} \\ 1 \text{ EUR} &= 4,38389... \text{ TRY} \end{aligned}$$

Uusi Turkin liiran kurssi on $4,38389... \approx 4,3839$.

Vastaus: 4,3839

SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

436B. Täydennetään taulukkoon tuotteiden hinnat, kun alkuperäisen ruokakorin hinta on a .

Tuote	Osuus korissa	Tuotteen alkuperäinen hinta	Hinnanmuutos	Tuotteen uusi hinta
A	35 %	$0,35a$	+2,0 %	$1,02 \cdot 0,35a = 0,357a$
B	25 %	$0,25a$	-1,0 %	$0,99 \cdot 0,25a = 0,2475a$
C	20 %	$0,20a$	+4,4 %	$1,044 \cdot 0,20a = 0,2088a$
D	14 %	$0,14a$	-5,8 %	$0,942 \cdot 0,14a = 0,13188a$
E	6 %	$0,06a$	+6,2 %	$1,062 \cdot 0,06a = 0,06372a$
Yhteensä:		a		$1,0089a$

Korin uusi hinta on 100,89 % vanhasta hinnasta, joten ruokakorin hinta on noussut $100,89 \% - 100 \% = 0,89 \%$.

Vastaus: nousi 0,89 %

437B. a) Pääomatulo on x . Pääomatulovero on 40 000 euron tuloihin saakka 30 % ja euroina $0,3x$. Pääomatulovero on 40 000 euron tuloista $0,3 \cdot 40\,000 \text{ €} = 12\,000 \text{ €}$. Yli 40 000 euron menevä pääomatulo on $x - 40\,000$ ja siitä maksettava pääomatulovero on $0,32(x - 40\,000)$. Pääomatuloveron ilmaiseva funktio, kun pääomatulo x on yli 40 000 euroa vuodessa, on

$$f(x) = 12\,000 + 0,32(x - 40\,000) = 0,32x - 800.$$

Vastaus: $f(x) = 0,32x - 800$, kun $x > 40\,000$ euroa

b) Koska tulot ylittävät 40 000 euroa, voidaan käyttää a-kohdan funktiota. Sijoitetaan $x = 41\,700,23$ funktioon f .

$$\begin{aligned} f(41\,700,23) &= 12\,000 + 0,32(41\,700,23 - 40\,000) \\ &= 12\,544,0736 \approx 12\,544,07 \end{aligned}$$

Veron määrä on 12 544,07 €.

Vastaus: 12 544,07 euroa

- c) Osingon määrä on 41 700,23 € ja siitä veronalainen määrä on $0,85 \cdot 41\,700,23\,€ = 35\,445,195...€ \approx 35\,445,20\,€$. Koska veronalainen määrä on alle 40 000 €, on veroprosentti 30 ja veron määrä euroina $0,30 \cdot 35\,445,20 = 10\,633,558... \approx 10\,633,56$. Veron osuus osinkotuloista on $\frac{10\,633,56\,€}{41\,700,23\,€} = 0,2550...$, joka on prosentteina $25,50... \% \approx 25,5\, \%$.

Vastaus: 25,5 %

- 438B. a) Merkitään osakkeiden arvoa alussa kirjaimella a . Osakkeiden arvo putosi 20 % ja nousi sen jälkeen 7,0 %. Osakkeiden arvo vuoden lopussa oli $1,07 \cdot 0,80a = 0,856a$. Osakkeen arvo aleni vuoden alusta vuoden loppuun mennessä $100\, \% - 85,6\, \% = 14,4\, \%$.

Vastaus: oli alentunut 14,4 %

- b) Koska osakkeiden arvo putosi 14,4 %, oli menetys $0,144a$. Muodostetaan menetyksen avulla yhtälö ja ratkaistaan siitä ostohinta a .

$$\begin{aligned} 0,144a &= 900 & \parallel : 0,144 \\ a &= 6250 \end{aligned}$$

Osakkeiden ostohinta oli 6250 €.

Vastaus: 6250 euroa

- c) Osakkeiden arvo oli vuoden lopussa $0,856a$. Merkitään nousukerrointa kirjaimella q . Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä q .

$$\begin{aligned} q \cdot 0,856a &= a & \parallel : 0,856a \\ q &= 1,1682... \end{aligned}$$

Osakkeiden olisi tullut nousta $116,82... \% - 100\, \% = 16,82... \% \approx 16,8\, \%$.

Vastaus: 16,8 %

439B. Koska euro revalvoitui 3,1 % rupiaan nähden, on Intian rupian uusi kurssi $1,031 \cdot 76,6550 = 79,031305$.

Intiasta tehtyjen hankintojen hinta oli alun perin euroina

$$\frac{2000000}{76,6550} = 26090,926... \approx 26090,93.$$

Revalvoitumisen jälkeen lasku oli euroina

$$\frac{2000000}{79,031305} = 25306,427... \approx 25306,43. \text{ Lasku oli pienentynyt}$$

$$26\,090,93 \text{ €} - 25\,306,43 \text{ €} = 784,50 \text{ €}.$$

Euro devalvoitui 3,2 % Norjan kruunuun nähden, joten Norjan kruunun uusi kurssi on

$$0,968 \cdot 9,8753 = 9,5592904.$$

Norjan saamiset olivat alun perin euroina

$$\frac{150000}{9,8753} = 15189,411... \approx 15189,41. \text{ Devalvoitumisen jälkeen saamiset}$$

$$\text{olivat euroina } \frac{150000}{9,559204} = 15691,541... \approx 15541,54. \text{ Saamiset olivat}$$

$$\text{kasvaneet } 15\,691,54 \text{ €} - 15\,189,41 \text{ €} = 502,13 \text{ €}. \text{ Yritys hyötyi kurssimuutoksista } 784,50 \text{ €} + 502,13 \text{ €} = 1286,63 \text{ €}.$$

Vastaus: hyötyi 1286,63 euroa

440B. Osakkeet maksavat ostovaiheessa $300 \cdot 34,90 \text{ €} = 10\,470 \text{ €}$ ilman kaupankäyntipalkkiota. Kaupankäyntipalkkio on 0,8 %, joten palkkion kanssa ostokuluiksi tulee $1,008 \cdot 10\,470 \text{ €} = 10\,553,76 \text{ €}$.

Jotta Emma saisi nettotuottoa 4,0 % vuosittain, hänen pitäisi kolmen vuoden kuluttua osakkeet myydessään saada rahaa $1,04^3 \cdot 10\,553,76 \text{ €} = 11\,871,544\dots \text{ €}$ eli vähintään 11 871,55 €.

Myyntivoiton kulujen ja verojen jälkeen pitäisi siis olla $11\,871,55 \text{ €} - 10\,553,76 \text{ €} = 1317,79 \text{ €}$.

Myyntivoitosta maksetaan veroa 30 %. Loput 70 % jää käteen. Kun myyntivoittoa ennen veroja merkitään kirjaimella x , myyntivoitto on verojen maksun jälkeen $0,7x$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä myyntivoitto ennen verojen maksua.

$$\begin{aligned} 0,7x &= 1317,79 & \| : 0,7 \\ x &= 1882,557\dots \end{aligned}$$

Myyntivoiton ennen verojen maksua pitäisi olla $1882,557\dots \text{ €} \approx 1882,56 \text{ €}$.

Emman pitäisi siis saada osakkeista myyntivaiheessa $10\,553,76 \text{ €} + 1882,56 \text{ €} = 12\,436,32 \text{ €}$, kun kaupankäyntipalkkiota ei oteta huomioon.

Kaupankäyntipalkkio on 0,8 %, joten Emman saama rahamäärä on 99,2 % osakkeiden arvosta. Merkitään osakkeiden arvoa myyntivaiheessa kirjaimella y ja ratkaistaan arvo yhtälön avulla.

$$\begin{aligned} 0,992x &= 12436,32 & \| : 0,992 \\ x &= 12536,612\dots \end{aligned}$$

Osakkeiden arvon on myyntivaiheessa oltava vähintään 12 536,62 €.

Osakkeen kurssin on siis oltava myyntivaiheessa

$$\frac{12536,62 \text{ €}}{300} = 41,788\dots \text{ €} \approx 41,79 \text{ €}.$$

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä nousua vastaava prosenttikerroin q .

$$34,90q^3 = 41,79 \quad \| : 34,90$$

$$q^3 = 1,197\dots$$

$$q = (\pm)\sqrt[3]{1,197\dots}$$

$$q = 1,0618\dots$$

Osakkeen arvon pitäisi vuosittain nousta $6,18\dots \% \approx 6,2 \%$.

Vastaus: 41,79 €; 6,2 %

441B. a) Jakamalla kunkin vuoden rahanarvonkerroin edeltävän vuoden kertoimella saadaan rahan ostovoiman kerroin. Hintatason muutoskerroin saadaan laskemalla rahan ostovoiman kertoimen käänteisluku.

2002	1,2235		
2003	1,2129	=H27/H26	=1/I27
2004	1,2106	=H28/H27	=1/I28
2005	1,2003	=H29/H28	=1/I29
2006	1,1795	=H30/H29	=1/I30
2007	1,1506	=H31/H30	=1/I31
2008	1,1057	=H32/H31	=1/I32
2009	1,1056	=H33/H32	=1/I33
2010	1,0923	=H34/H33	=1/I34
2011	1,0557	=H35/H34	=1/I35
2012	1,0269	=H36/H35	=1/I36
2013	1,0119	=H37/H36	=1/I37
2014	1,0015	=H38/H37	=1/I38
2015	1,0036	=H39/H38	=1/I39
2016	1	=H40/H39	=1/I40

2002	1,2235		
2003	1,2129	0,99134	1,008739
2004	1,2106	0,99810	1,0019
2005	1,2003	0,99149	1,008581
2006	1,1795	0,98267	1,017635
2007	1,1506	0,97550	1,025117
2008	1,1057	0,96098	1,040608
2009	1,1056	0,99991	1,00009
2010	1,0923	0,98797	1,012176
2011	1,0557	0,96649	1,034669
2012	1,0269	0,97272	1,028046
2013	1,0119	0,98539	1,014824
2014	1,0015	0,98972	1,010384
2015	1,0036	1,00210	0,997908
2016	1	0,99641	1,0036

Taulukosta havaitaan, että suurin hintatason nousukerroin oli 1,040... vuodesta 2007 vuoteen 2008. Inflaatio eteni siis nopeimmin vuonna 2008.

Vastaus: Vuonna 2008

- b) Taulukosta havaitaan, että vuoden 2015 hintataso oli 99,790...% vuoden 2014 hintatasosta, joten vuonna 2015 deflaatio oli $100\% - 99,790\% = 0,21\% \approx 0,2\%$.

2002	1,2235		
2003	1,2129	0,99134	1,008739
2004	1,2106	0,99810	1,0019
2005	1,2003	0,99149	1,008581
2006	1,1795	0,98267	1,017635
2007	1,1506	0,97550	1,025117
2008	1,1057	0,96098	1,040608
2009	1,1056	0,99991	1,00009
2010	1,0923	0,98797	1,012176
2011	1,0557	0,96649	1,034669
2012	1,0269	0,97272	1,028046
2013	1,0119	0,98539	1,014824
2014	1,0015	0,98972	1,010384
2015	1,0036	1,00210	0,997908
2016	1	0,99641	1,0036

Vastaus: Tapahtui vuonna 2015, 0,2 %.

- c) Taulukon avulla ei voida selvittää vuosien 2001 ja 2002 välistä hintatason muutosta, koska vuonna 2002 siirryttiin markoista euroihin ja tarvittaisiin markan ja euron välinen kurssi.

2001	0,209
2002	1,2235

Vastaus: Ei voida, koska tarvittaisiin markan ja euron välinen kurssi.

442B. a) Jotta voidaan verrata ansiotulokehitystä vuodesta 2012 vuoteen 2016, on vuoden 2016 indeksin pisteluvut muutettava niin, että perusvuodeksi tulee sama kuin muiden vuosien indekseissä eli vuosi 2010. Vuoden 2016 indeksin pisteluku ilmaisee kuinka monta prosenttia vuoden 2016 pisteluku on vuoden 2015 pisteluvusta. Kertomalla prosenttilukua vastaavalla prosenttikertoimella kunkin toimialan vuoden 2015 pisteluku saadaan vuoden 2016 indeksi perusvuotena 2010.

	A	B	C	D
1	Ansiotasoindeksi			
2		2016	2015	
3	Toimiala			
4	A Maa- ja metsätalous	100,1	111	=B4/100*C4
5	Tuntipalkkaiset	97,7	110,4	=B5/100*C5
6	Kuukausipalkkaiset	100,9	112	=B6/100*C6
7	C Teollisuus	99,8	111	=B7/100*C7

Ansiotasoindeksi	2016	2015	2016 (2010=100)	2012	Vuosien 2016 ja 2012 pistelukujen suhde
Toimiala					
A Maa- ja metsätalous	100,1	111	111,1	106,3	1,0453
Tuntipalkkaiset	97,7	110,4	107,9	105,3	1,0243
Kuukausipalkkaiset	100,9	112	113,0	108,1	1,0454
C Teollisuus	99,8	111	110,8	104,7	1,0581
Tuntipalkkaiset	100,5	109,7	110,2	105,8	1,0420
Kuukausipalkkaiset	99,3	112,1	111,3	103,8	1,0724
10-11 Elintarviketeollisuus	100,2	110,1	110,3	105	1,0507
Tuntipalkkaiset	101,4	108,9	110,4	105,6	1,0457
Kuukausipalkkaiset	99,6	110,9	110,5	104,5	1,0570
13-15 Tekstiili- ja vaatetusteollisuus	103	113,2	116,6	106	1,1000
Tuntipalkkaiset	101,7	110,4	112,3	106	1,0592
Kuukausipalkkaiset	103,9	117	121,6	106	1,1468
16 Sahateollisuus	100,1	114,5	114,6	106,4	1,0777

Taulukosta havaitaan, että säännöllisen työajan keskiansioiden kehitys oli suurinta vuodesta 2012 vuoteen 2016 Tekstiili- ja vaatetusteollisuuden kuukausipalkkaisilla työntekijöillä.

Vastaus: tekstiili- ja vaatetusteollisuuden kuukausipalkkaisilla työntekijöillä

- b) Reaalinen ansiotasoindeksi saadaan jakamalla ansiotasoindeksin pisteluku hintatason muutuskertoimella. Hintatason muutuskertoimen saadaan jakamalla vuoden 2016 kuluttajahintaindeksin pisteluku vuoden 2012 pisteluvulla.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Ansiotasoindeksi						
2		2016	2015	2016 (2010=100)	2012	Vuosien 2016 ja 2012	Reaali-ansiotasoindeksi
3	Toimiala						
4	A Maa- ja metsätalous	100,1	111	=B4/100*C4	106,3	=D4/E4	=F4/(109,2/106,3)
5	Tuntipalkkaiset	97,7	110,4	=B5/100*C5	105,3	=D5/E5	=F5/(109,2/106,3)
6	Kuukausipalkkaiset	100,9	112	=B6/100*C6	108,1	=D6/E6	=F6/(109,2/106,3)
7	C Kulkuneuvot	100,8	111	=B7/100*C7	104,7	=D7/E7	=F7/(109,2/106,3)
	Maa- ja metsätalous, tuntipalkkaiset	97,7	110,4	107,9	105,3	1,0243	0,997116
	28-30 Kone- ja kulkuneuvot	100	107,7	107,7	106,1	1,0151	0,988123
	L Kiinteistöalan toiminta	101,7	106	107,8	105,2	1,0247	0,99752

Taulukosta havaitaan, että kolmella toimialalla reaalinen ansiotaso on laskenut: maa- ja metsätalouden tuntipalkkaisilla, kone- ja kulkuneuvojen valmistuksessa sekä kiinteistöalan toiminnassa.

Vastaus: maa- ja metsätalouden tuntipalkkaisilla, kone- ja kulkuneuvojen valmistuksessa sekä kiinteistöalan toiminnassa

443A. Merkitään alkuperäisiä hankintakustannuksia kirjaimella a . Voiton tulee olla tästä 10 % eli $0,1a$. Alkuperäinen myyntihinta on silloin $1,1a$. Taulukoidaan hankintakustannukset alussa ja lopussa.

	Alussa	Lopussa
Kotimaassa	$0,2a$	$0,66 \cdot 0,20a$
Ulkomailla	$0,80a$	$1,25 \cdot 0,80a$
Yhteensä	a	$1,132a$

Koska tavaramäärästä oli ehditty myydä $\frac{1}{4} = 0,25$ alkuperäisellä hinnalla $1,1a$, on rahaa saatu $0,25 \cdot 1,1a$.

Merkitään tarvittavaa hinnan korotuskerrointa kirjaimella q . Tällöin loppuerästä saatava rahamäärä on $q \cdot 0,75 \cdot 1,1a$.

Kun saaduista ja saatavista rahamääristä vähennetään hankintakustannukset, saadaan voitto, jonka on oltava $0,1a$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä q .

$$\begin{aligned}
 1,1 \cdot 0,25a + q \cdot 1,1 \cdot 0,75a - 1,132a &= 0,1a \\
 -0,857a + 0,825aq &= 0,1a & \parallel : a \\
 -0,857 + 0,825q &= 0,1 \\
 0,825q &= 0,957 & \parallel : 0,825 \\
 q &= 1,16
 \end{aligned}$$

Hinnan korotuskerroin on 1,16, joten hintaa on nostettava 16 %.

Vastaus: 16 %

11 MATEMAATTINEN ANALYYSI

ALOITA PERUSTEISTA

444A. a) Funktion arvot ovat positiivisia silloin, kun kuvaaja on x -akselin yläpuolella. Kuvan perusteella funktion f arvot ovat positiivisia, kun $x < 0$ tai $x > 1$.

Vastaus: $x < 0$ tai $x > 1$

b) Epäyhtälön $f(x) < 0$ ratkaisu tarkoittaa, että etsitään ne muuttujan x arvot, joilla funktion f arvot ovat pienempiä kuin 0, eli negatiivisia. Funktion arvot ovat negatiivisia silloin, kun kuvaaja on x -akselin alapuolella. Kuvan perusteella funktion f arvot ovat negatiivisia, kun $0 < x < 1$.

Vastaus: $0 < x < 1$

445B. a) Ratkaistaan epäyhtälö $-3x + 12 \leq 0$. Merkitään epäyhtälön vasen puoli funktioksi $f(x) = -3x + 12$ ja ratkaistaan sen nollakohdat yhtälöstä $f(x) = 0$.

$$\begin{aligned} -3x + 12 &= 0 \\ -3x &= -12 && \| :(-3) \\ x &= 4 \end{aligned}$$

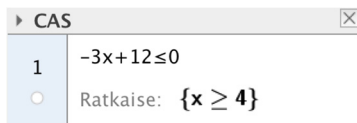
Laaditaan merkkikaavio. Valitaan arvot nollakohdan rajaamilta lukusuoran väleiltä ja lasketaan funktion f arvot niissä.

$$\begin{aligned} f(0) &= -3 \cdot 0 + 12 = 12 > 0 \\ f(5) &= -3 \cdot 5 + 12 = -3 < 0 \end{aligned}$$

		4	
$f(x)$	+		-

Merkkikaaviosta nähdään, että funktion f arvo on negatiivinen, kun $x > 4$. Epäyhtälön $-3x + 12 \leq 0$ ratkaisu on siis $x \geq 4$.

Tarkistetaan ratkaisu ohjelmalla.



Vastaus: $x \geq 4$

- b) Ratkaistaan epäyhtälö $-x^2 + x + 6 \geq 0$. Merkitään epäyhtälön vasen puoli funktioksi $f(x) = -x^2 + x + 6$ ja ratkaistaan sen nollakohdat yhtälöstä $f(x) = 0$.

Sijoitetaan kertoimet $a = -1$, $b = 1$ ja $c = 6$ toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 6}}{2 \cdot (-1)}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{-2}$$

$$x = \frac{-1 \pm 5}{-2}$$

$$x = \frac{-1+5}{-2} = \frac{4}{-2} = -2 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-1-5}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3$$

Laaditaan merkkikaavio. Valitaan arvot nollakohtien rajaamilta lukusuoran väleiltä ja lasketaan funktion f arvot niissä.

$$f(-3) = -(-3)^2 + (-3) + 6 = -6 < 0$$

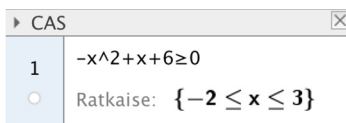
$$f(0) = -0^2 + 0 + 6 = 6 > 0$$

$$f(4) = -4^2 + 4 + 6 = -6 < 0$$

	-2	3	
$f(x)$	-	+	-

Merkkikaaviosta nähdään, että funktion f arvo on positiivinen, kun $-2 < x < 3$. Epäyhtälön $-x^2 + x + 6 \geq 0$ ratkaisu on siis $-2 \leq x \leq 3$.

Tarkistetaan ratkaisu ohjelmalla.



Vastaus: $-2 \leq x \leq 3$

446A. a) Derivoidaan lauseke $2x + 1$.

$$D(2x + 1) = 2$$

Vastaus: 2

b) Derivoidaan lauseke $\frac{1}{2}x^2 - x$.

$$D\left(\frac{1}{2}x^2 - x\right) = \frac{1}{2} \cdot 2x - 1 = x - 1$$

Vastaus: $x - 1$

c) Derivoidaan lauseke $x^3 - 4x^2 + 12x - 14$.

$$D(x^3 - 4x^2 + 12x - 14) = 3x^2 - 4 \cdot 2x + 12 = 3x^2 - 8x + 12$$

Vastaus: $3x^2 - 8x + 12$

d) Sievennetään lauseke $x - (x^2 + 3)$.

$$x - (x^2 + 3) = x - x^2 - 3 = -x^2 + x - 3$$

Derivoidaan lauseke $-x^2 + x - 3$.

$$D(-x^2 + x - 3) = -2x + 1$$

Vastaus: $-2x + 1$

447A. a) Sievennetään lauseke $2(x^3 + 4x - 2)$.

$$2(x^3 + 4x - 2) = 2x^3 + 8x - 4$$

Derivoidaan lauseke $2x^3 + 8x - 4$.

$$D(2x^3 + 8x - 4) = 2 \cdot 3x^2 + 8 = 6x^2 + 8$$

Vastaus: $6x^2 + 8$

b) Sievennetään lauseke $3x(2x^2 - 3x + 5)$.

$$3x(2x^2 - 3x + 5) = 6x^3 - 9x^2 + 15x$$

Derivoidaan lauseke $6x^3 - 9x^2 + 15x$.

$$D(6x^3 - 9x^2 + 15x) = 6 \cdot 3x^2 - 9 \cdot 2x + 15 = 18x^2 - 18x + 15$$

Vastaus: $18x^2 - 18x + 15$

c) Sievennetään lauseke $(x - 1)(3x + 2)$.

$$\begin{aligned}(x - 1)(3x + 2) &= x \cdot 3x + x \cdot 2 - 1 \cdot 3x - 1 \cdot 2 \\ &= 3x^2 + 2x - 3x - 2 \\ &= 3x^2 - x - 2\end{aligned}$$

Derivoidaan lauseke $3x^2 - x - 2$.

$$D(3x^2 - x - 2) = 6x - 1$$

Vastaus: $6x - 1$

d) Sievennetään lauseke $(x^2 + 5x)(4x - 3)$.

$$\begin{aligned}(x^2 + 5x)(4x - 3) &= x^2 \cdot 4x + x^2 \cdot (-3) + 5x \cdot 4x + 5x \cdot (-3) \\ &= 4x^3 - 3x^2 + 20x^2 - 15x \\ &= 4x^3 + 17x^2 - 15x\end{aligned}$$

Derivoidaan lauseke $4x^3 + 17x^2 - 15x$.

$$D(4x^3 + 17x^2 - 15x) = 4 \cdot 3x^2 + 17 \cdot 2x - 15 = 12x^2 + 34x - 15$$

Vastaus: $12x^2 + 34x - 15$

448A. a) Sievennetään lauseke $\frac{1}{3}(3x^2 + 9x + 12)$.

$$\frac{1}{3}(3x^2 + 9x + 12) = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 + \frac{1}{3} \cdot 9x + \frac{1}{3} \cdot 12 = x^2 + 3x + 4$$

Derivoidaan lauseke $x^2 + 3x + 4$.

$$D(x^2 + 3x + 4) = 2x + 3$$

Vastaus: $2x + 3$

b) Sievennetään lauseke $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$.

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 &= \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) \\ &= x \cdot x + x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \cdot x - \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \\ &= x^2 - x + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Derivoidaan lauseke $x^2 - x + \frac{1}{4}$.

$$D\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) = 2x - 1$$

Vastaus: $2x - 1$

c) Sievennetään lauseke $\left(\frac{1}{2}x + 3\right)(2x - 2)$.

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}x + 3\right)(2x - 2) &= \frac{1}{2}x \cdot 2x + \frac{1}{2}x \cdot (-2) + 3 \cdot 2x + 3 \cdot (-2) \\ &= x^2 - x + 6x - 6 \\ &= x^2 + 5x - 6 \end{aligned}$$

Derivoidaan lauseke $x^2 + 5x - 6$.

$$D(x^2 + 5x - 6) = 2x + 5$$

Vastaus: $2x + 5$

449B. a) Derivoidaan funktio $f(x) = x^5 - 3x^4 + 5x^2 - x + 11$.
 $f'(x) = 5x^4 - 12x^3 + 10x - 1$

Lasketaan derivaatan arvo, kun $x = 1$.

$$f'(1) = 5 \cdot 1^4 - 12 \cdot 1^3 + 10 \cdot 1 - 1 = 5 - 12 + 10 - 1 = 2$$

Tarkistetaan ratkaisu ohjelmalla.

CAS	
1	$f(x) := x^5 - 3x^4 + 5x^2 - x + 11$
☒	$\rightarrow f(x) := x^5 - 3x^4 + 5x^2 - x + 11$
2	$f'(x)$
☐	$\rightarrow 5x^4 - 12x^3 + 10x - 1$
3	$f'(1)$
☐	$\rightarrow 2$

Vastaus: $f'(x) = 5x^4 - 12x^3 + 10x - 1$, $f'(1) = 2$

b) Derivoidaan funktio $g(x) = \frac{1}{6}x^6 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 1$.

$$g'(x) = \frac{1}{6} \cdot 6x^5 - \frac{2}{3} \cdot 3x^2 - \frac{1}{2} \cdot 2x + 0 = x^5 - 2x^2 - x$$

Lasketaan derivaatan arvo, kun $x = 1$.

$$g'(1) = 1^5 - 2 \cdot 1^2 - 1 = 1 - 2 - 1 = -2$$

Tarkistetaan ratkaisu ohjelmalla.

CAS	
1	$g(x) := 1/6x^6 - 2/3x^3 - 1/2x^2 + 1$
☒	$\rightarrow g(x) := \frac{1}{6}x^6 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 1$
2	$g'(x)$
☐	$\rightarrow x^5 - 2x^2 - x$
3	$g'(1)$
☐	$\rightarrow -2$

Vastaus: $g'(x) = x^5 - 2x^2 - x$, $g'(1) = -2$

c) Sievennetään funktion $h(x) = (2x - 3)^2$ lauseke.

$$\begin{aligned} h(x) &= (2x - 3)^2 = (2x - 3)(2x - 3) \\ &= 2x \cdot 2x + 2x \cdot (-3) - 3 \cdot 2x - 3 \cdot (-3) \\ &= 4x^2 - 6x - 6x + 9 \\ &= 4x^2 - 12x + 9 \end{aligned}$$

Derivoidaan funktio $h(x) = 4x^2 - 12x + 9$.

$$h'(x) = 4 \cdot 2x - 12 \cdot 1 + 0 = 8x - 12$$

Lasketaan derivaatan arvo, kun $x = 1$.

$$h'(1) = 8 \cdot 1 - 12 = 8 - 12 = -4$$

Tarkistetaan ratkaisu ohjelmalla.

CAS	
1	$h(x) := (2x - 3)^2$
☒	$\rightarrow h(x) := (2x - 3)^2$
2	$h'(x)$
☐	$\rightarrow 8x - 12$
3	$h'(1)$
☐	$\rightarrow -4$

Vastaus: $h'(x) = 8x - 12$, $h'(1) = -4$

d) Sievennetään funktion $i(t) = \frac{2x^4 - 3x^2}{x^2}$ lauseke.

$$i(x) = \frac{2x^4 - 3x^2}{x^2} = \frac{2x^4}{x^2} - \frac{3x^2}{x^2} = 2x^2 - 3$$

Derivoidaan funktio $i(x) = 2x^2 - 3$.

$$i'(x) = 4x - 0 = 4x$$

Lasketaan derivaatan arvo, kun $x = 1$.

$$i'(1) = 4 \cdot 1 = 4$$

Tarkistetaan ratkaisu ohjelmalla.

CAS	
1	$i(x) := (2x^4 - 3x^2)/x^2$
☒	$\rightarrow i(x) := 2x^2 - 3$
2	$i'(x)$
☐	$\rightarrow 4x$
3	$i'(1)$
☐	$\rightarrow 4$

Vastaus: $i'(x) = 4x$, $i'(1) = 4$

450A. Ratkaistaan ensimmäisen asteen epäyhtälö $4x + 17 > 2 - x$. Siirretään kaikki termit epäyhtälömerkin vasemmalle puolelle.

$$4x + 17 > 2 - x$$

$$5x + 15 > 0$$

Merkitään epäyhtälön vasen puoli funktioksi $f(x) = 5x + 15$ ja ratkaistaan sen nollakohdat yhtälöstä $f(x) = 0$.

$$5x + 15 = 0$$

$$5x = -15 \quad \| :5$$

$$x = -3$$

Laaditaan merkkikaavio. Valitaan arvot nollakohdan rajaamilta lukusuoran väleiltä ja lasketaan funktion f arvot niissä.

$$f(-4) = 5 \cdot (-4) + 15 = -5 < 0$$

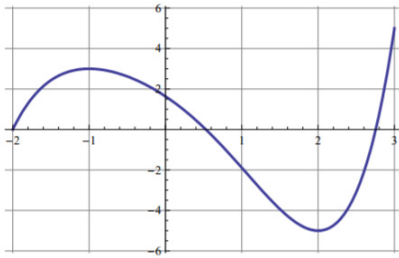
$$f(0) = 5 \cdot 0 + 15 = 15 > 0$$

		-3	
$f(x)$	-		+

Merkkikaaviosta nähdään, että funktion f arvo on positiivinen, kun $x > -3$. Koska funktio f on saatu muokkaamalla alkuperäistä epäyhtälöä, niin myös epäyhtälön $4x + 17 > 2 - x$ ratkaisu on $x > -3$.

Vastaus: $x > -3$

451A.



- a) Funktion nollakohdat ovat kuvaajan ja x -akselin leikkauspisteiden x -koordinaatit.
Kuvion perusteella funktion nollakohdat ovat $x \approx -2$, $x \approx 0,5$ ja $x \approx 2,8$.

Vastaus: $x \approx -2$, $x \approx 0,5$ ja $x \approx 2,8$

- b) Derivaatan nollakohtaan piirretty tangentti on vaakasuora. Kuvion perusteella kohtiin $x \approx -1$ ja $x \approx 2$ voidaan piirtää vaakasuoran tangentit.

Vastaus: $x \approx -1$ ja $x \approx 2$

- c) Kuvion perusteella funktion suurin arvo välillä $[-2, 3]$ on noin 5.

Vastaus: n. 5

- d) Kuvion perusteella funktion pienin arvo välillä $[-2, 3]$ on noin -5 .

Vastaus: n. -5

- e) Funktio on kasvava, kun muuttujan arvon kasvaessa funktion arvot kasvavat. Kuvion perusteella funktio on kasvava likimain, kun $-2 \leq x \leq -1$ ja $2 \leq x \leq 3$

Vastaus: likimain, kun $-2 \leq x \leq -1$ ja $2 \leq x \leq 3$

- f) Funktio on vähenevä, kun muuttujan arvojen kasvaessa funktion arvot pienenevät. Kuvion perusteella funktio on vähenevä likimain, kun $-1 \leq x \leq 2$.

Vastaus: likimain, kun $-1 \leq x \leq 2$

452B. a) Sievennetään funktion $f(x) = (x + 2)(x^2 - 4)$ lauseke.

$$\begin{aligned} f(x) &= (x + 2)(x^2 - 4) \\ &= x \cdot x^2 + x \cdot (-4) + 2 \cdot x^2 + 2 \cdot (-4) \\ &= x^3 - 4x + 2x^2 - 8 \\ &= x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \end{aligned}$$

Derivoidaan funktio $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$.

$$f'(x) = 3x^2 + 4x - 4$$

Tarkistetaan ratkaisu ohjelmalla.

CAS	
1	$f(x) := (x+2)(x^2-4)$
☒	$\rightarrow \mathbf{f(x) := (x+2)(x^2-4)}$
2	$f'(x)$
☐	$\rightarrow \mathbf{3x^2 + 4x - 4}$

Vastaus: $f'(x) = 3x^2 + 4x - 4$

b) Lasketaan $f(0)$.

$$f(0) = 0^3 + 2 \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 - 8 = -8$$

Lasketaan $f'(0)$.

$$f'(x) = 3 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 - 4 = -4$$

Tarkistetaan ratkaisu ohjelmalla.

3	$f(0)$
☐	$\rightarrow \mathbf{-8}$
4	$f'(0)$
☐	$\rightarrow \mathbf{-4}$

Vastaus: $f(0) = -8, f'(0) = -4$

- c) Lasketaan derivaatan nollakohdat yhtälöstä $f'(x) = 0$.
 $3x^2 + 4x - 4 = 0$

Sijoitetaan kertoimet $a = 3$, $b = 4$ ja $c = -4$ toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan ja sievennetään lauseke.

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
 x &= \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-4)}}{2 \cdot 3} \\
 x &= \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{6} \\
 x &= \frac{-4 \pm 8}{6} \\
 x &= \frac{-4 + 8}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \quad \text{tai} \quad x = \frac{-4 - 8}{6} = \frac{-12}{6} = -2
 \end{aligned}$$

Tarkistetaan ratkaisu ohjelmalla.

5	Ratkaise($f'(x)=0$)
☐	$\rightarrow \left\{ x = -2, x = \frac{2}{3} \right\}$

Vastaus: $x = -2$ ja $x = \frac{2}{3}$

d) Ratkaistaan yhtälö $3x^2 + 4x - 4 = 3$.
 $3x^2 + 4x - 7 = 0$

Sijoitetaan kertoimet $a = 3$, $b = 4$ ja $c = -7$ toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan ja sievennetään lauseke.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-7)}}{2 \cdot 3}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{100}}{6}$$

$$x = \frac{-4 \pm 10}{6}$$

$$x = \frac{-4 + 10}{6} = \frac{6}{6} = 1 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-4 - 10}{6} = \frac{-14}{6} = -\frac{7}{3}$$

Tarkistetaan ratkaisu ohjelmalla.

6	Ratkaise(f'(x)=3)
→	$\left\{x = -\frac{7}{3}, x = 1\right\}$

Vastaus: $x = 1$ ja $x = -\frac{7}{3}$

453A. Määritetään funktion $f(x) = x^2 + 4x - 5$ suurin ja pienin arvo välillä $[-6, 3]$.

Polynomifunktio saa suljetulla välillä suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteessä tai välille kuuluvassa derivaatan nollakohdassa.

Derivoidaan funktio f .

$$f'(x) = 2x + 4$$

Lasketaan derivaatan nollakohta yhtälöstä $f'(x) = 0$.

$$\begin{aligned} 2x + 4 &= 0 \\ 2x &= -4 \quad ||: 2 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

Derivaatan nollakohta kuuluu välille $[-6, 3]$.

Lasketaan funktion arvot derivaatan nollakohdassa ja välin päätepisteissä.

$$\begin{aligned} f(-6) &= (-6)^2 + 4 \cdot (-6) - 5 = 7 \\ f(-2) &= (-2)^2 + 4 \cdot (-2) - 5 = -9 \\ f(3) &= 3^2 + 4 \cdot 3 - 5 = 16 \end{aligned}$$

Funktion f suurin arvo välillä $[-6, 3]$ on 16 ja pienin arvo -9 .

Vastaus: suurin arvo: 16, pienin arvo: -9

454A. a) Funktion keskimääräinen muutosnopeus välillä 1940–1980 on funktion kuvaajalle tälle välille piirretyn sekantin kulmakerroin.

Sekantin kulmakerroin on

$$k = \frac{1\,472\,190 - 1\,121\,939}{1980 - 1940} = \frac{350\,251}{40} = 8756,275.$$

Funktion keskimääräinen muutosnopeus välillä 1940–1980 on 8756 asukasta/vuosi.

Vastaus: 8756 asukasta/vuosi

- b)** Funktion hetkellinen muutosnopeus kohdassa $x = 2010$ on kohtaan $x = 2010$ piirretyn tangentin kulmakerroin.

Tangentin kulmakerroin on

$$k = \frac{1\,333\,290 - 1\,600\,000}{2010 - 1940} = \frac{-266\,710}{70} = -3810,142\dots$$

Funktion hetkellinen muutosnopeus kohdassa $x = 2010$ on -3810 asukasta/vuosi.

Vastaus: -3810 asukasta/vuosi

- c)** Kohdan a tulos tarkoittaa käytännössä sitä, että aikavälillä 1940–1980 Viron asukasluku kasvoi keskimäärin 8756 asukkaalla vuodessa.

Kohdan b tulos tarkoittaa käytännössä sitä, että vuonna 2010 Viron asukasluku väheni 3810 asukkaalla.

Vastaus: a-kohta: välillä 1940–1980 asukasluku kasvoi keskimäärin 8756 asukkaalla vuodessa, b-kohta: vuonna 2010 asukasluku väheni 3810 asukkaalla

455A. a) Derivoidaan funktio $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4$.

$$f'(x) = x^2 - 4x$$

Vastaus: $f'(x) = x^2 - 4x$

- b)** Funktion kuvaajalle piirretty tangentti on x -akselin suuntainen, kun tangentin kulmakerroin on 0. Tangentin kulmakerroin saadaan funktion derivaatan avulla. Määritetään kohdat, joissa derivaatta on 0. Ratkaistaan yhtälö $x^2 - 4x = 0$.

Sijoitetaan kertoimet $a = 1$, $b = -4$ ja $c = 0$ toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan ja sievennetään lauseke.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16}}{2}$$

$$x = \frac{4 \pm 4}{2}$$

$$x = \frac{4+4}{2} = \frac{8}{2} = 4 \quad \text{tai} \quad x = \frac{4-4}{2} = 0$$

Funktion kuvaajan tangentti on x -akselin suuntainen, kun $x = 0$ tai $x = 4$.

Vastaus: $x = 0$ ja $x = 4$

- c)** Kohdan b mukaan derivaatan nollakohdat ovat $x = 0$ ja $x = 4$. Valitaan kohdat nollakohtien rajaamilta lukusuoran väleiltä ja lasketaan derivaatan f' arvot niissä. Laaditaan funktion f kulkukaavio.

$$f'(-1) = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) = 5 > 0$$

$$f'(1) = 1^2 - 4 \cdot 1 = -3 < 0$$

$$f'(5) = 5^2 - 4 \cdot 5 = 5 > 0$$

		0		4	
$f'(x)$	+		–		+
$f(x)$	↗		↘		↗

Kulkukaavion perusteella funktio f on vähenevä, kun $0 \leq x \leq 4$.

Vastaus: välillä $[0, 4]$

456A. a) $f(x) = 1,5$, kun $x \approx 1,2$, $x \approx 3,3$ ja $x \approx 4,9$.

Vastaus: $x \approx 1,2$, $x \approx 3,3$ ja $x \approx 4,9$

b) Funktio f on vähenevä likimain, kun $2,1 \leq x \leq 4,2$ ja $8,3 \leq x \leq 10$.

Vastaus: likimain, kun $2,1 \leq x \leq 4,2$ ja $8,3 \leq x \leq 10$

c) Funktion f suurin arvo välillä $2 \leq x \leq 7$ on noin 4,2 ja pienin arvo noin 1,2.

Vastaus: suurin arvo: n. 4,2, pienin arvo: n. 1,2

457. Vaihe A: Kirjoitetaan suorakulmion pinta-alan lauseke.

Vaihe B: Merkitään suorakulmion toista sivua kirjaimella x .

Vaihe C: Muodostetaan lauseke suorakulmion toisen sivun pituudelle. Toisen sivun pituus saadaan, kun luvusta 26 vähennetään $2x$.

Vaihe D: Piirretään kuva tilanteesta.

Vaihe E: Muodostetaan pinta-alan lauseke sivujen pituuksien lausekkeiden avulla.

Vaihe F: Määritellään väli, jolla muuttuja x on.

Vaihe G: Derivoidaan pinta-alan lauseke

Vaihe H: Lasketaan derivaatan nollakohdat.

Vaihe I: Laaditaan kulkukaavio.

Vaihe J: Pinta-alafunktion maksimikohta on $x = 6,5$.

Vaihe K: Lasketaan suorakulmion toisen sivun pituus.

Vaihe L: Lasketaan pinta-alafunktion arvo, kun $x = 6,5$.

Sanallinen vastaus: Aitauksen suurin pinta-ala on $84,5 \text{ m}^2$ ja mitat $6,5 \text{ m}$ ja 13 m .

Vastaus: A: Kirjoitetaan suorakulmion pinta-alan lauseke. B: Merkitään toista sivua kirjaimella x . C: Toisen sivun pituus saadaan, kun luvusta 26 vähennetään $2x$. D: Piirretään kuva tilanteesta. E: Muodostetaan pinta-alan lauseke sivujen pituuksien lausekkeiden avulla. F: Määritellään väli, jolla muuttuja x on. G: Derivoidaan pinta-alan lauseke. H: Lasketaan derivaatan nollakohdat. I: Laaditaan kulkukaavio. J: Pinta-alafunktion maksimikohta on $x = 6,5$. K: Lasketaan suorakulmion toisen sivun pituus. L: Lasketaan pinta-alafunktion arvo, kun $x = 6,5$. Vastaus: Aitauksen suurin pinta-ala on $84,5 \text{ m}^2$ ja mitat $6,5 \text{ m}$ ja 13 m .

- 458B. a)** Koska aitamateriaalia on 7,0 metriä ja toisen aidattavan sivun pituus on x , toisen sivun pituus on $7,0 - x$.

Vastaus: $7,0 - x$

- b)** Suorakulmion pinta-ala lasketaan kertomalla pituus leveydellä, joten pinta-alafunktio on

$$A(x) = x(7,0 - x) = 7,0x - x^2.$$

Vastaus: $A(x) = 7,0x - x^2$

- c)** Derivoidaan funktio $A(x) = 7,0x - x^2$.

$$A'(x) = 7,0 - 2x$$

Lasketaan derivaatan nollakohdat yhtälöstä $A'(x) = 0$.

$$\begin{aligned} 7,0 - 2x &= 0 \\ -2x &= -7,0 \quad || : (-2) \\ x &= 3,5 \end{aligned}$$

Valitaan kohdat nollakohdan rajaamilta lukusuoran väleiltä ja lasketaan derivaatan A' arvot niissä. Laaditaan funktion A kulkukaavio ja merkitään siihen paikalliset ääriarvokohdat.

$$A'(0) = 7,0 - 2 \cdot 0 = 7,0 > 0$$

$$A'(4) = 7,0 - 2 \cdot 4 = -1,0 < 0$$

		3,5	
$A'(x)$	+		-
$A(x)$	↗		↘
max			

Kulkukaavion perusteella pinta-alan suurin arvo saavutetaan kohdassa $x = 3,5$.

Sivun x pituus on siis 3,5 m ja toisen sivun pituus on $7,0 \text{ m} - 3,5 \text{ m} = 3,5 \text{ m}$.

Aitauksen suurin pinta-ala on $3,5 \text{ m} \cdot 3,5 \text{ m} = 12,25 \text{ m}^2$.

Vastaus: 3,5 m ja 3,5 m, $12,25 \text{ m}^2$

VAHVISTA OSAAMISTA

- 459A. a)** Funktion hetkellinen muutosnopeus on funktion kuvaajalle tietyllä välillä piirretyn sekantin kulmakerroin, kun taas funktion hetkellinen muutosnopeus on funktion kuvaajalle tiettyyn kohtaan piirretyn tangentin kulmakerroin.

Vastaus: Funktion hetkellinen muutosnopeus on funktion kuvaajalle tietyllä välillä piirretyn sekantin kulmakerroin, kun taas funktion hetkellinen muutosnopeus on funktion kuvaajalle tiettyyn kohtaan piirretyn tangentin kulmakerroin.

- b)** Hetkellinen muutosnopeus määritetään esimerkiksi, kun halutaan tietää automatkan keskinopeus.

Hetkellinen muutosnopeus määritetään esimerkiksi, kun halutaan tietää auton nopeus tietyllä ajanhetkellä.

Vastaus: keskimääräinen muutosnopeus: esim. automatkan keskinopeus, hetkellinen muutosnopeus: esim. auton nopeus tietyllä ajanhetkellä

460A. Polynomi $3x^2 + 8x - 3$ on toisen asteen polynomi, jonka toisen asteen termin kerroin on positiivinen. Polynomia vastaavan funktion

$f(x) = 3x^2 + 8x - 3$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, joten funktio saa negatiivisia arvoja nollakohtiensa välissä.

Ratkaistaan nollakohdat yhtälöstä $f(x) = 0$.

$$3x^2 + 8x - 3 = 0$$

Sijoitetaan kertoimet $a = 3$, $b = 8$ ja $c = -3$ toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan ja sievennetään lauseke.

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x &= \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-3)}}{2 \cdot 3} \\ x &= \frac{-8 \pm \sqrt{100}}{6} \\ x &= \frac{-8 \pm 10}{6} \\ x &= \frac{-8+10}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad \text{tai} \quad x = \frac{-8-10}{6} = \frac{-18}{6} = -3 \end{aligned}$$

Polynomi $3x^2 + 8x - 3$ saa negatiivisia arvoja, kun $-3 < x < \frac{1}{3}$.

Vastaus: $-3 < x < \frac{1}{3}$

461A. a) $f(x) = 1$, kun $x \approx -1$ ja $x \approx 3$.

Vastaus: $x \approx -1$ ja $x \approx 3$

b) $f(x) \leq 0$, kun funktion kuvaaja on x -akselin alapuolella. Tämä toteutuu likimain, kun $0 \leq x \leq 2$.

Vastaus: likimain, kun $0 \leq x \leq 2$

c) $f'(x) \leq 0$, kun funktio f on vähenevä. Kuvion perustella funktio f on vähenevä välillä $-2 \leq x \leq 4$ likimain, kun $-2 \leq x \leq 1$

Vastaus: likimain, kun $-2 \leq x \leq 1$

462A. Kuva A: Funktion ääriarvokohdat ovat likimain kohdissa $x = -1,3$ ja $x = 0$. Kuvan A funktiota vastaavan derivaattafunktion nollakohdat on oltava siis $x = -1,3$ ja $x = 0$. Kuvat A ja III vastaavat siis toisiaan.

Kuva B: Funktion kuvaajan huippu on kohdassa $x = 0$, huipun vasemmalla puolella funktio on vähenevä ja oikealla puolella kasvava. Kuvan B funktiota vastaavan derivaattafunktion nollakohdan on oltava siis $x = 0$ ja sen vasemmalla puolella derivaatan arvon on oltava negatiivinen ja oikealla puolella positiivinen. Kuvat B ja I vastaavat siis toisiaan.

Kuva C: Funktion kuvaajan huippu on kohdassa $x = 0$, huipun vasemmalla puolella funktio on kasvava ja oikealla puolella vähenevä. Kuvan C funktiota vastaavan derivaattafunktion nollakohdan on oltava siis $x = 0$ ja sen vasemmalla puolella derivaatan arvon on oltava positiivinen ja oikealla puolella negatiivinen. Kuvat C ja II vastaavat siis toisiaan.

Vastaus: A: III, B: I ja C: II

- 463A. a)** Derivoidaan funktio $f(x) = tx^3 - 3t^2x^2 + x + 5$ muuttujansa x suhteen.
 $f'(x) = 3tx^2 - 6t^2x + 1$

Vastaus: $f'(x) = 3tx^2 - 6t^2x + 1$

- b)** Derivoidaan $f(t) = tx^3 - 3t^2x^2 + x + 5$ muuttujansa t suhteen.
 $f'(t) = x^3 - 6x^2t$

Vastaus: $f'(t) = x^3 - 6x^2t$

- 464A. a)** Funktiolla on derivaatan nollakohdassa paikallinen ääriarvokohta. Lintupopulaation koko kääntyy ensimmäisessä kohdassa kasvuun ja toisessa kohdassa laskuun.

Vastaus: Funktiolla on derivaatan nollakohdassa paikallinen ääriarvokohta. Lintupopulaation koko kääntyy ensimmäisessä kohdassa kasvuun ja toisessa kohdassa laskuun.

- b)** Yhden vuoden kuluttua seurannan aloituksesta lintupopulaation koko väheni noin 87 lintua / vuosi.

Vastaus: Yhden vuoden kuluttua seurannan aloituksesta lintupopulaation koko väheni noin 87 lintua / vuosi.

465A. Derivoidaan funktio $f(x) = ax^3 + 4bx^2$.
 $f'(x) = 3ax^2 + 8bx$

On oltava $f'(x) = 6x^2 + 4x$, joten saadaan yhtälöpari $\begin{cases} 3a = 6 \\ 8b = 4 \end{cases}$.

Ensimmäisestä yhtälöstä saadaan

$$\begin{aligned} 3a &= 6 & || :3 \\ a &= 2. \end{aligned}$$

Toisesta yhtälöstä saadaan

$$\begin{aligned} 8b &= 4 & || :8 \\ b &= \frac{4}{8} \\ b &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Vastaus: $a = 2$, $b = \frac{1}{2}$

466A. a) Funktio $f(x) = 3x^3 - 9x + 9$ saa suurimman ja pienimmän arvonsa suljetun välin $[0, 2]$ päätepisteissä tai välille kuuluvassa derivaatan nollakohdassa.

$$\text{Derivoidaan funktio } f(x) = 3x^3 - 9x + 9$$

$$f'(x) = 9x^2 - 9$$

Lasketaan derivaatan nollakohdat yhtälöstä $f'(x) = 0$.

$$9x^2 - 9 = 0 \quad \| :9$$

$$x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm\sqrt{1}$$

$$x = \pm 1$$

Nollakohdat ovat $x = 1$ ja $x = -1$. Derivaatan nollakohdista $x = 1$ kuuluu välille $[0, 2]$.

Lasketaan funktion f arvot derivaatan nollakohdassa $x = 1$ ja tarkasteltavan välin päätepisteissä.

$$f(0) = 3 \cdot 0^3 - 9 \cdot 0 + 9 = 9$$

$$f(1) = 3 \cdot 1^3 - 9 \cdot 1 + 9 = 3 - 9 + 9 = 3$$

$$f(2) = 3 \cdot 2^3 - 9 \cdot 2 + 9 = 3 \cdot 8 - 18 + 9 = 24 - 18 + 9 = 15$$

Funktion suurin arvo välillä $[0, 2]$ on 15 ja pienin arvo 3.

Vastaus: 15, 3

- b) Valitaan kohdat nollakohtien rajaamilta lukusuoran väleiltä ja lasketaan derivaatan f' arvot niissä. Laaditaan funktion f kulkukaavio ja merkitään siihen paikalliset ääriarvokohdat.

$$f'(-2) = 9 \cdot (-2)^2 - 9 = 27 > 0$$

$$f'(0) = 9 \cdot 0^2 - 9 = -9 < 0$$

$$f'(2) = 9 \cdot 2^2 - 9 = 27 > 0$$

	-1	1	
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	↗	↘	↗
	max	min	

Funktiolla f on paikallinen maksimikohta $x = -1$. Paikallinen maksimiarvo on $f(-1) = 3 \cdot (-1)^3 - 9 \cdot (-1) + 9 = 15$.

Funktiolla f on paikallinen minimikohta $x = 1$. Paikallinen minimiarvo on $f(1) = 3 \cdot 1^3 - 9 \cdot 1 + 9 = 3$.

Vastaus: paikallinen maksimiarvo 15, paikallinen minimiarvo 3

467A. Sievennetään lauseketta $(x-3)^2 + (x-9)^2$.

$$\begin{aligned}(x-3)^2 + (x-9)^2 &= x^2 - 6x + 9 + x^2 - 18x + 81 \\ &= 2x^2 - 24x + 90\end{aligned}$$

Merkitään lauseke funktioksi $f(x) = 2x^2 - 24x + 90$.

Funktion toisen asteen termin kerroin on positiivinen, joten sen kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli ja funktion pienin arvo on paraabelin huipussa. Määritetään, missä kohdassa paraabelin huippu on. Paraabelin huippuun piirretty tangentti on x -akselin suuntainen, joten sen kulmakerroin on nolla. Määritetään, missä kohdassa funktion f derivaatta saa arvon 0.

Derivoidaan funktio f .

$$f'(x) = 4x - 24$$

Lasketaan derivaatan nollakohta yhtälöstä $f'(x) = 0$.

$$\begin{aligned}4x - 24 &= 0 \\ 4x &= 24 \quad ||: 4 \\ x &= 6\end{aligned}$$

Paraabelin huippu on kohdassa $x = 6$, joten muuttujan arvolla $x = 6$ summa $(x-3)^2 + (x-9)^2$ on mahdollisimman pieni.

Vastaus: $x = 6$

468A. Paraabeli $y = x^2 - 5x - 14$ on funktion $f(x) = x^2 - 5x - 14$ kuvaaja. Paraabelin huippuun piirretty tangentti on x -akselin suuntainen, eli sen kulmakerroin on 0. Koska derivaatta on tangentin kulmakerroin, huippu löytyy kohdasta, jossa funktion derivaatta saa arvon 0.

Derivoidaan funktio f .

$$f'(x) = 2x - 5$$

Lasketaan derivaatan nollakohta yhtälöstä $f'(x) = 0$.

$$\begin{aligned} 2x - 5 &= 0 \\ 2x &= 5 & \| :2 \\ x &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Lasketaan huipun y -koordinaatti.

$$y = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5 \cdot \frac{5}{2} - 14 = \frac{25}{4} - \frac{25}{2} - 14 = \frac{25}{4} - \frac{50}{4} - \frac{56}{4} = -\frac{81}{4}$$

Paraabelin huippu on pisteessä $\left(\frac{5}{2}, -\frac{81}{4}\right)$.

Toinen tapa määrittää paraabelin huipun x -koordinaatti on laskea ensin funktion $f(x) = x^2 - 5x - 14$ nollakohdat yhtälöstä $f(x) = 0$. Huipun x -koordinaatti on nollakohtien puolivälissä. Huipun y -koordinaatti saadaan samalla tavalla kuin derivaatan avulla määritettäessä.

Vastaus: $\left(\frac{5}{2}, -\frac{81}{4}\right)$ esim. huipun x -koordinaatti saadaan laskemalla

funktion nollakohtien puoliväli ja y -koordinaatti laskemalla funktion arvo kyseisessä kohdassa.

469A. Määritetään funktion $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x + 1$ derivaatan suurin ja pienin arvo.

Derivoidaan funktio f .

$$f'(x) = -x^2 - 2x + 3.$$

Derivaatafunktio on toisen asteen polynomifunktio, jonka toisen asteen termi -1 on negatiivinen. Derivaatafunktion kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, joten sillä on suurin arvo, mutta ei pienintä arvoa.

Määritetään paraabelin huipun y -koordinaatti.

Lasketaan derivaatafunktion nollakohdat yhtälöstä $f'(x) = 0$.

$$-x^2 - 2x + 3 = 0$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 3}}{2 \cdot (-1)} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{-2} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{16}}{-2} \\ &= \frac{2 \pm 4}{-2} \\ x &= \frac{2+4}{-2} = \frac{6}{-2} = -3 \quad \text{tai} \quad x = \frac{2-4}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1 \end{aligned}$$

Nollakohdat ovat $x = -3$ ja $x = 1$.

Huipun x -koordinaatti on nollakohtien puolivälissä kohdassa

$$x = \frac{-3+1}{2} = -1.$$

Huipun y -koordinaatti on $y = f'(-1) = -(-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 3 = 4$.

Funktion f derivaatta voi saada luvun 4 ja kaikki sitä pienemmät arvot.

Vastaus: luku 4 ja kaikki sitä pienemmät arvot

470A. Paraabelin $y = x^2 + 2x - 1$ x -koordinaattia vastaava y -koordinaatti on $y = x^2 + 2x - 1$.

Koordinaattien summa on $x + y = x + x^2 + 2x - 1 = x^2 + 3x - 1$.

Merkitään lauseke funktioksi $f(x) = x^2 + 3x - 1$.

Funktion kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, joten funktio saavuttaa pienimmän arvonsa paraabelin huipussa. Etsitään huipun y -koordinaatti derivaatan avulla.

$$f'(x) = 2x + 3$$

Paraabelin huippuun piirretty tangentti on x -akselin suuntainen. Etsitään derivaatan nollakohta.

$$2x + 3 = 0$$

$$2x = -3 \quad \| : 2$$

$$x = -\frac{3}{2}$$

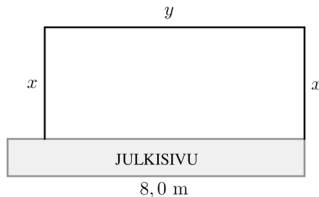
Huipun y -koordinaatti on $y = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 3 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) - 1 = -\frac{7}{4}$.

Paraabelin $y = x^2 + 2x - 1$ pisteen $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{7}{4}\right)$ koordinaattien summa on mahdollisimman pieni.

Vastaus: $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{7}{4}\right)$

471A. Vastaus:

Välivaiheen järjestysnumero	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Välivaihe	D	H	I	B	J	E	F	A	C	G

472B. Piirretään mallikuva terassin pohjapiirroksesta.

Koska aitaa on käytettävissä 20 m, voidaan muodostaa yhtälö $2x + y = 20$. Ratkaistaan yhtälöstä julkisivun suuntainen sivu y .

$$2x + y = 20$$

$$y = 20 - 2x$$

Terassin pinta-ala noudattaa funktiota $A(x) = xy = x(20 - 2x) = 20x - 2x^2$.

Päätellään suurin ja pienin arvo, jonka sivu x voi saada.

Sivun x suurin mahdollinen arvo saadaan, kun julkisivun suuntainen sivu y on 0 metriä. Ratkaistaan sivun x suurin mahdollinen arvo ohjelman avulla yhtälöstä $20 - 2x = 0$. Ratkaisuksi saadaan $x = 10$.

Sivu y voi olla korkeintaan julkisivun 8 metriä. Ratkaistaan sivun x pienin mahdollinen arvo ohjelman avulla yhtälöstä $20 - 2x = 8$. Ratkaisuksi saadaan $x = 6$.

Koska funktio A on polynomifunktio, se saa pienimmän ja suurimman arvonsa suljetulla välillä $[6, 10]$ olevassa derivaatan nollakohdassa tai välin päätepisteessä.

Funktion A derivaatta on $A'(x) = 20 - 4x$.

Määritetään derivaatan nollakohdat ohjelmalla yhtälöstä $A'(x) = 0$.

Ratkaisuksi saadaan $x = 5$.

Derivaatan nollakohta ei kuulu tarkasteltavalle välille $[6, 10]$. Lasketaan ohjelman avulla funktion A arvot välin päätepisteissä.

$$A(6) = 48$$

$$A(10) = 0$$

Terassin suurin pinta-ala on 48 m^2 , kun sivun pituus on 6 m ja julkisivun suuntaisen sivun pituus on $20 - 2 \cdot 6 \text{ m} = 8 \text{ m}$.

Vastaus: 48 m^2 , 8 m ja 6 m

473B. $A = 12 \text{ m}^2$

Merkitään pohjaneliön sivun pituutta kirjaimella x ja suojan korkeutta kirjaimella y .

Suojapeitteen pinta-alan lauseke on $3xy + x^2$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä korkeuden y lauseke.

$$\begin{aligned} 3xy + x^2 &= 12 \\ 3xy &= 12 - x^2 & \| : 3x \\ y &= \frac{12 - x^2}{3x} \\ y &= \frac{12}{3x} - \frac{x^2}{3x} \\ y &= \frac{4}{x} - \frac{1}{3}x \end{aligned}$$

Suojan tilavuus on $V = x \cdot x \cdot y = x^2 \cdot \left(\frac{4}{x} - \frac{1}{3}x\right) = \frac{4x^2}{x} - \frac{1}{3}x^3 = 4x - \frac{1}{3}x^3$.

Määritetään, milloin tilavuus on suurimmillaan.

Derivoidaan funktio V .

$$V'(x) = 4 - x^2$$

Lasketaan derivaatan nollakohdat ohjelman avulla yhtälöstä $V'(x) = 0$. Nollakohdat ovat $x = 2$ ja $x = -2$. Hylätään negatiivinen vastaus.

Laaditaan funktion V kulkukaavio ja merkitään siihen paikalliset ääriarvokohdat.

$$V'(-3) = -5 < 0$$

$$V'(0) = 4 > 0$$

$$V'(3) = -5 > 0$$

	-2	2	
$V'(x)$	-	+	-
$V(x)$	↘	↗	↘
	min		max

Suojan pohjan mitat ovat 2 m ja 2 m ja korkeus on

$$y = \frac{4}{2} - \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3} \approx 1,33 \text{ metriä.}$$

Vastaus: 2 m, 2 m ja 1,33 m

474B. Merkitään korotusten määrää kirjaimella x .
Muodostetaan lauseke myynnistä saadulle voitolle. Yhden tuotteen kustannukset on 3 €, jolloin voittoa saadaan $5 \text{ €} - 3 \text{ €} = 2 \text{ €}$.

Euron hinnankorotusten määrä	Voiton määrä (€)	Viikossa myytyjen tuotteiden määrä	Myyntivoitto
0	$5 - 3$	1000	$(5 - 3) \cdot 1000$
1	$5 + 1 - 3$	$1000 - 200 \cdot 1$	$(5 + 1 - 3) \cdot (1000 - 200 \cdot 1)$
2	$5 + 2 - 3$	$1000 - 200 \cdot 2$	$(5 + 2 - 3) \cdot (1000 - 200 \cdot 2)$
3	$5 + 3 - 3$	$1000 - 200 \cdot 3$	$(5 + 3 - 3) \cdot (1000 - 200 \cdot 3)$
x	$5 + x - 3$	$1000 - 200x$	$(5 + x - 3) \cdot (1000 - 200x)$

Kun hinnan korotuksia tehdään x kappaletta, myyntivoitto on
 $M(x) = (5 + x - 3) \cdot (1000 - 200x) = (2 + x) \cdot (1000 - 200x)$.

Derivoidaan myyntitulon lauseke M sopivalla ohjelmalla.
 $M'(x) = -400x + 600$

Määritetään derivaatan nollakohta sopivalla ohjelmalla yhtälöstä
 $M'(x) = 0$.

Nollakohdaksi saadaan $x = 1,5$.

Valitaan kohdat nollakohtien rajaamilta lukusuoran väleiltä ja lasketaan derivaatan M' arvot niissä. Laaditaan funktion M kulkukaavio ja merkitään siihen paikalliset ääriarvokohdat.

$$M'(0) = -400 \cdot 0 + 600 = 600 > 0$$

$$M'(2) = -400 \cdot 2 + 600 = -200 < 0$$

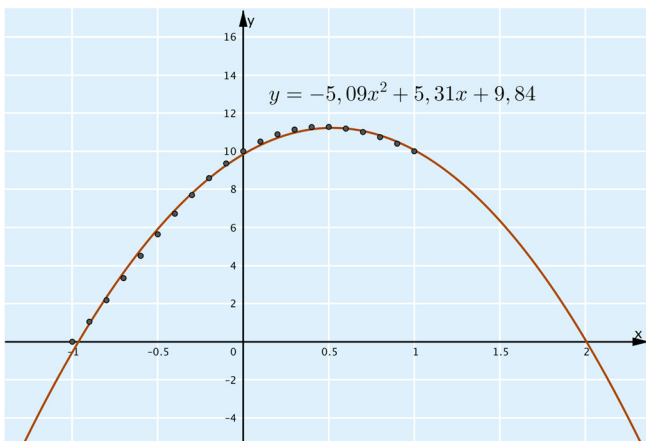
	1,5	
$M'(x)$	+	−
$M(x)$	↗	↘
max		

Hinnan korotuksia tulee tehdä siis 1,5. Tuotteen hinnaksi kannattaa asettaa $5 \text{ €} + 1,5 \text{ €} = 6,50 \text{ €}$.

Voittoa saadaan tällöin $M(1,5) = (2 + 1,5) \cdot (1000 - 200 \cdot 1,5) = 2450 \text{ €}$.

Vastaus: 6,50 €, 2450 €

475B. Sovitetaan aineistoon toisen asteen polynomifunktio sopivalla ohjelmalla.



Määritetään ohjelman avulla funktion $f(x) = -5,09x^2 + 5,31x + 9,84$ derivaatan arvo kohdassa $x = 0$.

Arvoksi saadaan $f'(0) = 5,31$.

Vastaus: $f(x) = -5,09x^2 + 5,31x + 9,84$, $f'(0) = 5,31$

476B. Koska suorakulmaisen kolmion toisen kateetin päätepisteet ovat origo ja piste $(x, 0)$, on kateetin pituus x .

Koska toisen kateetin päätepisteet ovat piste $(x, 0)$ ja $(x, -x(x-5))$, on sen pituus yhtä suuri kuin y -koordinaatti $y = -x(x-5)$. Kolmion pinta-ala on

$$A(x) = \frac{x \cdot (-x(x-5))}{2} = \frac{-x^3 + 5x^2}{2} = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{2}x^2$$

Derivoidaan funktio A .

$$A'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 5x$$

Lasketaan derivaatan nollakohdat sopivalla ohjelmalla.

Nollakohdiksi saadaan $x = 0$ ja $x = \frac{10}{3}$

Valitaan kohdat nollakohtien rajaamilta lukusuoran väleiltä ja lasketaan derivaatan A' arvot niissä. Laaditaan funktion A kulkukaavio ja merkitään siihen paikalliset ääriarvokohdat.

$$A'(-1) = -6,5 < 0$$

$$A'(1) = 3,5 > 0$$

$$A'(4) = -4 < 0$$

	0	$\frac{10}{3}$	
$A'(x)$	-	+	-
$A(x)$	↘	↗	↘
	min	max	

Kolmion pinta-ala on suurimmillaan, kun $x = \frac{10}{3}$. Pinta-ala on tällöin

$$A\left(\frac{10}{3}\right) = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{10}{3}\right)^3 + \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{10}{3}\right)^2 = \frac{250}{27} = 9,259... \approx 9,26.$$

$$\text{Vastaus: } A(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{2}x^2, \quad \frac{250}{27} \approx 9,26$$

- 477B. a)** Funktio $f(x) = ax^2 - 4x + 8$ on toisen asteen polynomifunktio, joten sillä on pienin arvo vain silloin, kun $a > 0$. Pienin arvo saadaan derivaatan $f'(x)$ nollakohdassa. Funktion f derivaatta on $f'(x) = 2ax - 4$. Ratkaistaan derivaatan nollakohta ohjelmalla yhtälöstä $f'(x) = 0$. Ratkaisuksi saadaan $x = \frac{2}{a}$.

Lasketaan ohjelmalla funktion f pienin arvo.

$$f\left(\frac{2}{a}\right) = 8 - \frac{4}{a}$$

Pienin arvo on 0, kun $8 - \frac{4}{a} = 0$. Ohjelmalla yhtälön ratkaisuksi saadaan $a = \frac{1}{2}$.

$$\text{Vastaus: } a = \frac{1}{2}$$

- b)** Funktio $g(x) = bx^2 - 4x + 8$ on toisen asteen polynomifunktio, joten ehto voi toteutua vain, kun funktion g kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli eli $b < 0$.

Funktion $g(x)$ nollakohdat on oltava -2 ja 1 , joten saadaan yhtälöt

$$g(-2) = 0 \text{ eli } b \cdot (-2) - 4 \cdot (-2) + 8 = 0$$

$$\text{ja } g(1) = 0 \text{ eli } b \cdot 1 - 4 \cdot 1 + 8 = 0.$$

Ratkaistaan ohjelmalla yhtälöstä $b \cdot (-2) - 4 \cdot (-2) + 8 = 0$ vakio b .

Ratkaisuksi saadaan $b = 4$. Vastaavasti yhtälöstä $b \cdot 1 - 4 \cdot 1 + 8 = 0$ ratkaisuksi saadaan $b = -4$.

Koska b :n tulee olla negatiivinen, on ratkaisuna $b = -4$.

$$\text{Vastaus: } b = -4$$

478B. Koska funktiolla on paikallinen minimi -2 kohdassa $x = 0$, funktio saa arvon -2 kohdassa $x = 0$.

Sijoittamalla arvot funktion lausekkeeseen saadaan yhtälö

$$\begin{aligned}f(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\-2 &= a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d \\d &= -2\end{aligned}$$

Koska funktiolla on paikallinen maksimi 1 kohdassa $x = 2$, funktio saa arvon 1 kohdassa $x = 2$.

Sijoittamalla arvot funktion lausekkeeseen saadaan yhtälö

$$\begin{aligned}f(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\1 &= a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 + d \\8a + 4b + 2c + d &= 1\end{aligned}$$

Seuraavat kaksi yhtälöä saadaan derivaatan avulla, koska paikallisissa ääriarvokohdissa derivaatan arvo on nolla.

Funktion $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ derivaatta on $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Sijoittamalla derivaatan nollakohta $x = 0$ derivaatan lausekkeeseen saadaan yhtälö $3a \cdot 0^2 + 2b \cdot 0 + c = 0$. Yhtälön vasemman puolen sieventämisen jälkeen nähdään, että $c = 0$.

Sijoittamalla derivaatan nollakohta $x = 2$ derivaatan lausekkeeseen saadaan yhtälö $3a \cdot 2^2 + 2b \cdot 2 + c = 0$.

Sievennetään yhtälön vasemman puolen lauseke, jolloin yhtälö tulee muotoon $12a + 4b + c = 0$.

Saatiin neljän yhtälön yhtälöryhmä

$$\begin{cases} d = -2 \\ 8a + 4b + 2c + d = 1 \\ c = 0 \\ 12a + 4b + c = 0 \end{cases}$$

Ratkaistaan yhtälöryhmä ohjelmalla, jolloin saadaan

$$\begin{cases} a = -\frac{3}{4} \\ b = \frac{9}{4} \\ c = 0 \\ d = -2 \end{cases}.$$

Vastaus: $a = -\frac{3}{4}$, $b = \frac{9}{4}$, $c = 0$ ja $d = -2$

479B. Määritetään käyrien $y = x^2 + 4x + 5$ ja $y = -x^2 + 3$ leikkauspiste ratkaisemalla ohjelmalla yhtälöpari

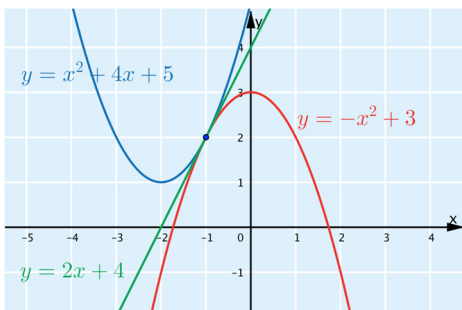
$$\begin{cases} y = x^2 + 4x + 5 \\ y = -x^2 + 3 \end{cases}.$$

Ratkaisuksi saadaan $x = -1$ ja $y = 2$, joten käyrillä on vain yksi yhteinen piste $(-1, 2)$.

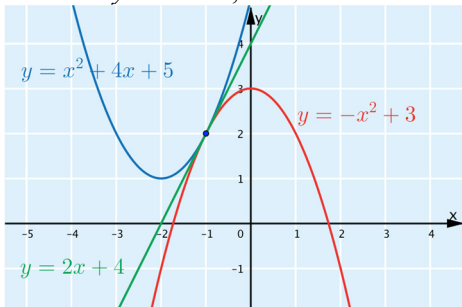
Tangentin kulmakerroin on funktion $f(x) = -x^2 + 3$ derivaatan $f'(x) = -2x$ arvo kohdassa -1 eli $f'(-1) = -2 \cdot (-1) = 2$.

Tangentin yhtälö on muotoa $y = 2x + b$. Sijoitetaan pisteen $(-1, 2)$ koordinaatit suoran yhtälöön ja ratkaistaan siitä vakiotermi b . Yhtälön $2 = 2 \cdot (-1) + b$ ratkaisuksi saadaan $b = 4$. Tangentin yhtälö on $y = 2x + 4$.

Piirretään ohjelmalla kuva.



Vastaus: $y = 2x + 4$,



SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

480B. a) Sijoitetaan ajanhetki $t = 0$ funktioon $r(t) = -0,2t + 1$.

$$r(0) = -0,2 \cdot 0 + 1 = 1$$

Säteen suuruus alussa on 1 m.

Vastaus: 1 m

b) Säteen suuruutta kuvaavan suoran kulmakerroin on $-0,2$, joten säteen suuruus pienenee nopeudella 0,2 m/vrk.

Vastaus: pienenee nopeudella 0,2 m/vrk

c) Funktion hetkellinen muutosnopeus ajanhetkellä t on yhtä suuri kuin derivaatan arvo kohdassa t eli $r'(t) = -0,2$. Hetkellinen muutosnopeus hetkellä t on $-0,2$ m/vrk.

Vastaus: $-0,2$ m/vrk

d) $r'(t) = -0,2$, joten $r'(1) = -0,2$

Vastaus: $-0,2$ m/vrk

e) Lumipallon tilavuus on $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(-0,2 \cdot 0 + 1)^3 = 4,188... \approx 4,2$

Vastaus: $4,2 \text{ m}^3$

- f) Lumipallon tilavuus ajanhetkellä t on $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(-0,2t+1)^3$.

Lumipallon tilavuuden hetkellinen muutosnopeus ajanhetkellä t on $V'(t)$.

Määritetään ohjelmalla derivaatta $V'(t)$ ja sen arvo ajanhetkellä $t = 1$.

$$V(t) := \frac{4}{3}\pi(-0,2t+1)^3$$

$$\rightarrow V(t) := \frac{4}{3}\pi\left(-\frac{1}{5}t+1\right)^3$$

$$V'(t)$$

$$\rightarrow \frac{1}{125}(-4t^2\pi + 40t\pi - 100\pi)$$

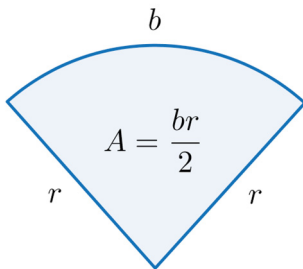
$$V'(1)$$

$$\rightarrow -\frac{64}{125}\pi$$

$$\approx$$

$$\approx -1.61$$

Vastaus: $-1,61 \text{ m}^3/\text{vrk}$

481B. Piirretään mallikuva.

Sektorin piirin pituus on $b + 2r$. Koska sektorin piiri on 1,00 m, saadaan yhtälö $b + 2r = 1$. Ratkaistaan yhtälöstä kaaren pituus b . Ratkaisuksi saadaan $b = 1 - 2r$.

Sektorin pinta-ala noudattaa funktiota

$$A(r) = \frac{br}{2} = \frac{(1-2r)r}{2} = \frac{1}{2}r - r^2.$$

Funktio A on toisen asteen polynomifunktio, jonka toisen asteen termi on negatiivinen. Funktion A kuvaaja on siis alaspäin aukeava paraabeli. Funktion A saa suurimman arvonsa huipussa. Huippuun piirretty tangentti on vaakasuora. Vaakasuoran suoran kulmakerroin on 0. Määritetään siis derivaatan nollakohta.

Derivoidaan funktio $A(r) = \frac{1}{2}r - r^2$.

$$A'(r) = \frac{1}{2} - 2r.$$

Määritetään derivaatan nollakohta yhtälöstä $A'(r) = 0$. Ratkaisuksi saadaan $r = 0,25$.

Pinta-ala on suurin, kun säde $r = 0,25$ m.

Vastaus: $r = 0,25$ m

482A. Funktion toinen derivaatta on $f''(x) = 6$, joten ensimmäinen derivaatta on oltava muotoa $f'(x) = 6x + a$, koska vakiotermi häviää derivoitaessa.

Koska $f'(1) = 8$, on

$$\begin{aligned} 6 \cdot 1 + a &= 8 \\ a &= 2 \end{aligned}$$

Derivaatta on siis $f'(x) = 6x + 2$.

Jotta polynomifunktion derivaatta olisi $6x + 2$, on funktion lausekkeen oltava muotoa $f(x) = 3x^2 + 2x + b$.

Koska $f(0) = 1$, on

$$\begin{aligned} 3 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 + b &= 1 \\ b &= 1 \end{aligned}$$

Funktio on siis $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$.

Vastaus: $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$

483A. Määritetään funktion $f(x) = -4x^4 + 2x - 2$ suurin arvo. Jos funktion suurin arvo on negatiivinen, ovat kaikki arvot negatiivisia.

Derivoidaan funktio.

$$f'(x) = -16x^3 + 2$$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat yhtälöstä $f'(x) = 0$.

$$\begin{aligned} -16x^3 + 2 &= 0 \\ -16x^3 &= -2 & \| :(-16) \\ x^3 &= \frac{1}{8} \\ x &= \sqrt[3]{\frac{1}{8}} \\ x &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Valitaan kohdat nollakohdan rajaamilta lukusuoran väleiltä ja lasketaan derivaatan f' arvot niissä. Laaditaan funktion f kulkukaavio ja merkitään siihen paikalliset ääriarvokohdat.

$$f'(0) = -16 \cdot 0^3 + 2 = 2 > 0$$

$$f'(1) = -16 \cdot 1^3 + 2 = -14 < 0$$

		$\frac{1}{2}$	
$f'(x)$	+		-
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$
	max		

Funktio f saavuttaa suurimman arvonsa kohdassa $x = \frac{1}{2}$. Lasketaan

funktion f arvo kohdassa $x = \frac{1}{2}$.

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 2 \cdot \frac{1}{2} - 2 = -\frac{5}{4}$$

Funktion f suurin arvo on negatiivinen, joten funktion f kaikki arvot ovat negatiivisia.

Vastaus: –

484B. Merkitään $f(x) = x^2 + 4$. Tangentin yhtälö on muotoa $y = kx + b$. Tangentin kulmakerroin on funktion f derivaatan arvo kohdassa $x = 3$.

$$f'(x) = 2x$$

$$f'(3) = 2 \cdot 3 = 6$$

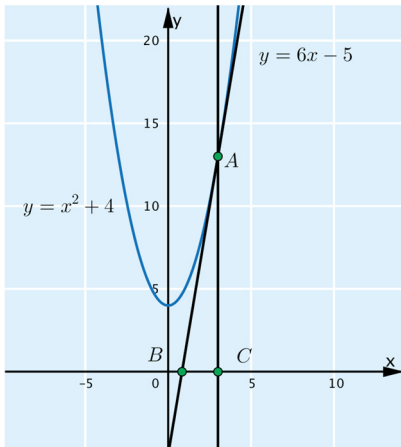
Tangentin yhtälö on muotoa $y = 6x + b$. Sijoitetaan pisteen $A = (3, 13)$ koordinaatit suoran yhtälöön ja ratkaistaan siitä vakiotermi b .

$$13 = 6 \cdot 3 + b$$

$$b = -5$$

Tangentin yhtälö on $y = 6x - 5$.

Piirretään mallikuva.



Ratkaistaan tangentin ja x -akselin leikkauskohta yhtälöstä $6x - 5 = 0$.

$$6x - 5 = 0$$

$$6x = 5 \quad \| :6$$

$$x = \frac{5}{6}$$

Muodostuva kolmio ABC on suorakulmainen, sen kanta BC on $3 - \frac{5}{6} = \frac{13}{6}$

ja korkeus AC 13. Kolmion ABC pinta-ala on $\frac{1}{2} \cdot \frac{13}{6} \cdot 13 = \frac{169}{12}$.

Vastaus: $\frac{169}{12}$

485B. Polynomifunktio $f(x) = -x^3 + 13,5x^2 - 41x + 50$ saa suljetulla välillä $[0, 10]$ suurimman arvonsa välin päätepisteissä tai välille kuuluvassa derivaatan nollakohdassa.

Funktion $f(x) = -x^3 + 13,5x^2 - 41x + 50$ derivaatta on
 $f'(x) = -3x^2 + 27x - 41$.

Ratkaistaan ohjelmalla derivaatan nollakohdat yhtälöstä $f'(x) = 0$.
 Ratkaisuksi saadaan $x = 1,9341\dots$ tai $x = 7,0658\dots$, jotka molemmat kuuluvat tarkasteltavalle välille.

Lasketaan ohjelmalla funktion f arvot derivaatan nollakohdissa ja välin päätepisteissä.

$$\begin{aligned} f(0) &= 50 \\ f(1,9341\dots) &= 13,9669\dots \approx 13,967 \\ f(7,0658\dots) &= 81,5330\dots \approx 81,533 \\ f(10) &= -10 \end{aligned}$$

Funktion suurin arvo välillä $[0, 10]$ on 81,533, kun $x \approx 7,066$.

Funktio kasvaa nopeimmin kohdassa, jossa derivaatan
 $f'(x) = -3x^2 + 27x - 41$ arvo on suurin.

Funktio f' on toisen asteen polynomifunktio, jonka toisen asteen termi on negatiivinen. Funktion f' kuvaaja on siis alaspäin aukeava paraabeli.

Funktio f' saa suurimman arvonsa paraabelin huipussa. Huippuun piirretty tangentti on vaakasuora. Vaakasuoran suoran kulmakerroin on 0.

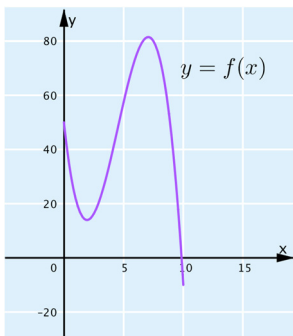
Määritetään siis funktion f' derivaatan f'' nollakohta.

Funktion $f'(x) = -3x^2 + 27x - 41$ derivaatta on $f''(x) = -6x + 27$.
 Lasketaan ohjelmalla derivaatan derivaatan f'' nollakohdat yhtälöstä $f''(x) = 0$.

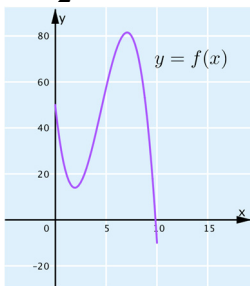
Ratkaisuksi saadaan $x = \frac{9}{2}$.

Funktion arvo kasvaa nopeimmin kohdassa $x = \frac{9}{2}$.

Piirretään funktion f kuvaaja.



Vastaus: suurin arvo: 81,533, kun $x = 7,066$, kasvaa nopeimmin, kun $x = \frac{9}{2}$.



486B. Merkitään aikaa tunteina kirjaimella t . Eerikan ja Iisakin etäisyys saadaan Pythagoraan lauseella. Alkutilanteessa Eerika on 3,0 km:n päässä risteyksestä ja Iisak 3,5 km:n päässä risteyksestä.

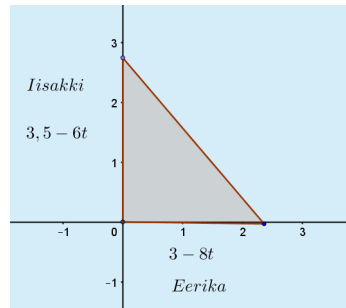
Eerika etenee nopeudella 8 km/h, joten hänen etäisyytensä t tunnin kulutta risteyksestä on $3,0 - 8t$.

Iisak etenee nopeudella 6,0 km/h, joten hänen etäisyytensä t tunnin kuluttua risteyksestä on $3,5 - 6t$.

Piirretään mallikuva.

Muodostetaan etäisyyden lauseke Pythagoraan lauseella:

$$e(t) = \sqrt{(3 - 8t)^2 + (3,5 - 6t)^2}.$$



Etäisyys on pienimmillään, kun juurettava $(3 - 8t)^2 + (3,5 - 6t)^2$ on pienimmillään.

Sievennetään lauseke $(3 - 8t)^2 + (3,5 - 6t)^2$ sopivalla ohjelmalla. Saadaan $100t^2 - 90t + 21,25$.

Lausekkeen $100t^2 - 90t + 21,25$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, joten se saavuttaa pienimmän arvonsa huipussaan.

Derivoidaan lauseke $100t^2 - 90t + 21,25$.

Derivaatta on $200t - 90$.

Lasketaan derivaatan nollakohta yhtälöstä $200t - 90 = 0$

Derivaatan nollakohta on $t = 0,45$.

Etäisyys on siis pienimmillään, kun aikaa on kulunut 0,45 h = 27 min.

Etäisyys on tällöin $e(0,45) = \sqrt{(3 - 8 \cdot 0,45)^2 + (3,5 - 6 \cdot 0,45)^2} = 1$.

Vastaus: 27 minuutin kuluttua, 1 km

487A. Derivoidaan funktio $f(x) = x^5 + 10x^2 - 3x$ kaksi kertaa.

$$f'(x) = 5x^4 + 20x - 3$$

$$f''(x) = 20x^3 + 20$$

Ratkaistaan yhtälö $20x^3 + 20 = 0$.

$$20x^3 + 20 = 0$$

$$20x^3 = -20$$

$$x^3 = -1$$

$$x = -1$$

Valitaan pisteet kohdan $x = -1$ molemmilta puolilta ja lasketaan funktion f'' arvot niissä.

$$f''(-2) = 20 \cdot (-2)^3 + 20 = -140 < 0$$

$$f''(0) = 20 \cdot 0^3 + 20 = 20 > 0$$

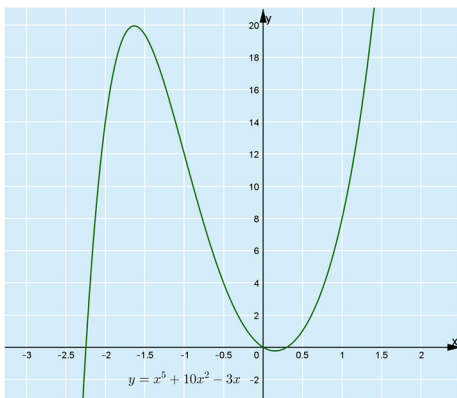
Funktion f'' arvot ovat eri merkkiset nollakohdan eri puolilla, joten kohta $x = -1$ on käännekohta.

Lasketaan pisteen y -koordinaatti.

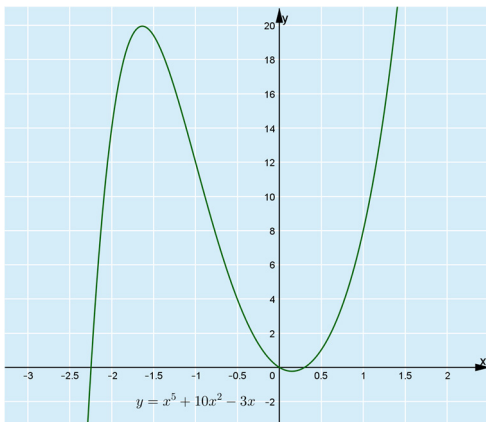
$$y = (-1)^5 + 10 \cdot (-1)^2 - 3 \cdot (-1) = 12$$

Käännepiste on piste $(-1, 12)$.

Piirretään kuvaaja.



Vastaus: $(-1, 12)$



488B. Sievennetään ohjelmalla funktion f lauseke.

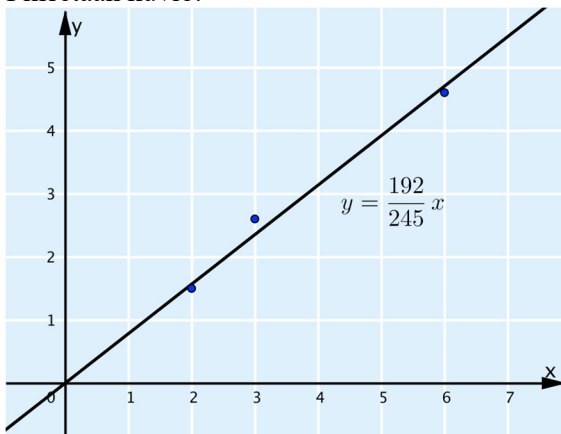
$$f(k) = (2k - 1,5)^2 + (3k - 2,6)^2 + (6k - 4,6)^2 = 49k^2 - 76,8k + 30,17$$

Funktio f on toisen asteen polynomifunktio, jonka toisen asteen termi on positiivinen. Funktio f kuvaaja on siis ylöspäin aukeava paraabeli. Funktio f saa pienimmän arvonsa huipussa. Huippuun piirretty tangentti on vaakasuora. Vaakasuoan suoran kulmakerroin on 0. Määritetään siis derivaatan nollakohta.

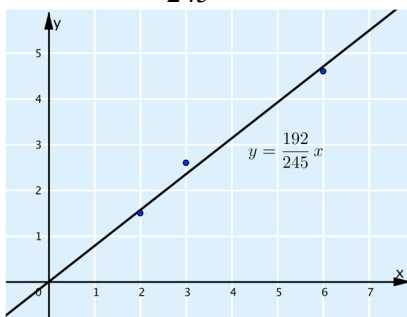
Funktion $f(k) = 49k^2 - 76,8k + 30,17$ derivaatta on $f'(k) = 98k - 76,8$. Lasketaan ohjelmalla derivaatan nollakohta yhtälöstä $f'(k) = 0$.

Ratkaisuksi saadaan $k = \frac{192}{245}$.

Piirretään kuvio.

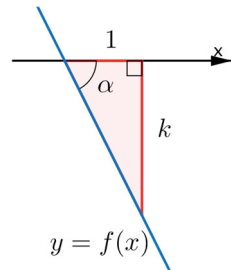


Vastaus: $k = \frac{192}{245}$,



489B. Käyrä $y = (x + 1)(x + 3)(x - 4)$ leikkaa x -akselin, kun $y = 0$. Määritetään ohjelmalla x -akselin leikkauskohdat yhtälöstä $(x + 1)(x + 3)(x - 4) = 0$. Ratkaisuksi saadaan $x = -3$, $x = -1$ tai $x = 4$. Keskimmäinen x -akselin leikkauskohta on $x = -1$.

Suoran ja x -akselin välisen leikkauspisteen teräväkulma α saadaan yhtälöstä $\tan \alpha = \frac{k}{1}$, jossa k on suoran kulmakerroin.



Määritetään keskimmäiseen x -akselin leikkauspisteeseen piirretyn tangentin kulmakerroin.

Merkitään $f(x) = (x + 1)(x + 3)(x - 4)$.
Sievennetään ohjelmalla funktion f lauseke.

$$f(x) = (x + 1)(x + 3)(x - 4) = x^3 - 13x - 12$$

Derivoidaan funktion f .

$$f'(x) = 3x^2 - 13$$

Lasketaan derivaatan arvo kohdassa $x = -1$.

$$f'(-1) = 3 \cdot 1^2 - 13 = -10$$

Tangentin kulmakerroin kohdassa $x = -1$ on -10 .

Ratkaistaan kysytty kulma tangentin avulla.

$$\begin{aligned}\tan \alpha &= \frac{-10}{1} \\ \alpha &= -84,289\dots^\circ \\ \alpha &\approx -84,3^\circ\end{aligned}$$

Vastaus: $-84,3^\circ$

490B. a) Käyrälle $y = -x^3 + x^2 + 3x$ piirretty tangentin kulmakerroin on lausekkeen $-x^3 + x^2 + 3x$ derivaatta. Merkitään $f(x) = -x^3 + x^2 + 3x$.

Derivoidaan funktio f .

$$f'(x) = -3x^2 + 2x + 3$$

Käyrän $y = -x^3 + x^2 + 3x$ tangentin kulmakerroin on suurin kohdassa, jossa derivaatan $f'(x) = -3x^2 + 2x + 3$ arvo on suurin.

Funktio f' on toisen asteen polynomifunktio, jonka toisen asteen termi on negatiivinen. Funktion f' kuvaaja on siis alaspäin aukeava paraabeli. Funktio f' saa suurimman arvonsa huipussa. Huippuun piirretty tangentti on vaakasuora. Vaakasuo­ran suoran kulmakerroin on 0. Määritetään siis derivaatan nollakohta.

Funktion $f'(x) = -3x^2 + 2x + 3$ derivaatta on $f''(x) = -6x + 2$. Lasketaan ohjelmalla derivaatan derivaatan nollakohdat yhtälöstä

$$f''(x) = 0. \text{ Ratkaisuksi saadaan } x = \frac{1}{3}.$$

Funktion f arvo kohdassa $x = \frac{1}{3}$ on $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{29}{27}$, joten tangentin kulmakerroin on suurin pisteessä $\left(\frac{1}{3}, \frac{29}{27}\right)$.

$$\text{Vastaus: } \left(\frac{1}{3}, \frac{29}{27}\right)$$

b) Tangentin kulmakerroin kohdassa $x = \frac{1}{3}$ on $f'\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{10}{3}$.

Tangentin yhtälö on muotoa $y = \frac{10}{3}x + b$. Sijoitetaan pisteen $\left(\frac{1}{3}, \frac{29}{27}\right)$ koordinaatit suoran yhtälöön ja ratkaistaan siitä ohjelmalla vakiotermi b .

$$\begin{aligned}\frac{29}{27} &= \frac{10}{3} \cdot \frac{1}{3} + b \\ b &= -\frac{1}{27}\end{aligned}$$

Tangentin yhtälö on $y = \frac{10}{3}x - \frac{1}{27}$.

Vastaus: $y = \frac{10}{3}x - \frac{1}{27}$

491B. Funktion $p(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3$ derivaatta on

$$p'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x + \frac{3}{16}x^2.$$

Funktion $p(x)$ derivaatta kohdassa $x = 0,5$ on $p'(0,5) = 0,421\dots$

Funktion f derivaatta kohdassa $x = 0,5$ on

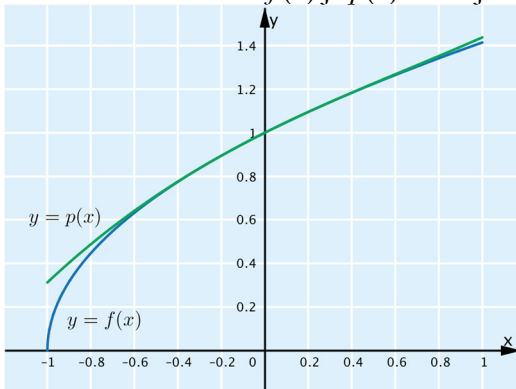
$$f'(0,5) = \frac{1}{2\sqrt{1+0,5}} = 0,408\dots$$

Lasketaan, kuinka monta prosenttia polynomifunktion p derivaatan arvo on funktion f derivaatan arvosta kohdassa $x = 0,5$.

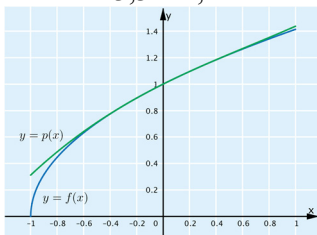
$$\frac{0,421\dots}{0,408\dots} = 1,03337\dots = 103,337\dots \%$$

Polynomifunktion p derivaatan arvo kohdassa $x = 0,5$ poikkeaa funktion f derivaatasta $103,337\dots \% - 100 \% = 3,337\dots \% \approx 3,34 \%$.

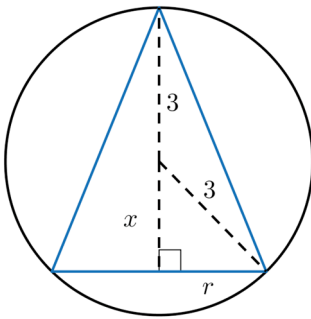
Piirretään funktioiden $f(x)$ ja $p(x)$ kuvaajat välillä $[-1, 1]$.



Vastaus: 3,34 %,



492B. Piirretään leikkauskuva pallosta ja kartiosta. Merkitään kuvaan kartion pohjan etäisyyttä pallon keskipisteestä kirjaimella x ja kartion pohjan sädettä kirjaimella r .



Kartion tilavuus on $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, kun r on pohjan säde ja h korkeus.

Muokataan tilavuuden lauseke sellaiseen muotoon, että siinä on vain yksi muuttuja. Tällöin kartion suurin tilavuus voidaan määrittää derivaatan avulla.

Kartion korkeus on $h = x + 3$.

Kartion pohjan säde r , kartion pohjan etäisyys pallon keskipisteestä x ja pallon säde 3 muodostavat suorakulmaisen kolmion. Muodostetaan Pythagoraan lauseen avulla yhtälö ja ratkaistaan siitä tilavuuden lausekkeessa esiintyvä r^2 .

$$\begin{aligned} r^2 + x^2 &= 3^2 \\ r^2 &= 9 - x^2 \end{aligned}$$

Sijoitetaan $h = x + 3$ ja $r^2 = 9 - x^2$ tilavuuden yhtälöön $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

$$V = \frac{1}{3}\pi(9 - x^2) \cdot (x + 3) = \frac{1}{3}\pi(-x^3 - 3x^2 + 9x + 27)$$

Kartion tilavuus noudattaa funktiota

$$V(x) = \frac{1}{3}\pi(-x^3 - 3x^2 + 9x + 27).$$

Kartion korkeus ei voi olla negatiivinen, joten $x + 3 \geq 0$ eli $x \geq -3$.

Kartion korkeus ei voi olla suurempi kuin pallon halkaisija, joten $x + 3 \leq 6$ eli $x \leq 3$. Koska funktio V on polynomifunktio, se saa suurimman arvonsa joko suljetulla välillä $[-3, 3]$ olevassa derivaatan nollakohdassa tai välin päätepisteessä.

Funktion V derivaatta on $V'(x) = \pi(-x^2 - 2x + 3)$. Määritetään derivaatan nollakohdat ohjelmalla yhtälöstä $V'(x) = 0$. Yhtälön ratkaisuksi saadaan $x = -3$ tai $x = 1$.

Lasketaan funktion V arvot välin päätepisteissä ja välille kuuluvassa derivaatan nollakohdassa.

$$V(-3) = 0$$

$$V(1) = \frac{32}{3}\pi = 33,510\dots \approx 33,51$$

$$V(3) = 0$$

Kartion suurin tilavuus on $\frac{32}{3}\pi \approx 33,51$.

Vastaus: $\frac{32}{3}\pi \approx 33,51$

12 TODENNÄKÖISYYSJAKAUMIA

ALOITA PERUSTEISTA

493A. a) Vaatekoon mahdollisia havaintoarvoja ovat esimerkiksi S, M, L tai 36, 42, 52. Tällaiset muuttujan arvot ovat diskreettejä.

Vastaus: diskreetti

b) Lämpötila-asteikko kylmä, viileä, lämmin, kuuma on diskreetti.

Vastaus: diskreetti

c) pH-asteikko on jatkuva, koska pH voi saada minkä tahansa arvon tietyltä väliltä.

Vastaus: jatkuva

d) Rasvapitoisuus, kun yksikkönä on grammaa per litra, on jatkuva, koska mittaustulos voi saada minkä tahansa arvon tietyltä väliltä.

Vastaus: jatkuva

e) Kyselyn vastaukset asteikolla 1,2,3,4,5 on diskreetti.

Vastaus: diskreetti

f) Kissan punnitustulos vaa'alla voi saada minkä tahansa arvon tietyltä väliltä, joten se on jatkuva.

Vastaus: jatkuva

494A. Heitetty tulitikkuaski jää raapaisupinta alaspäin todennäköisyydellä $p = 0,3$. Kun heitetään askia $n = 10$ kertaa ja halutaan laskea todennäköisyys sille, että aski jää $k = 5$ kertaa ylöspäin, on kysytty todennäköisyys $\binom{10}{5} \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^5 \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^{10-5} = \binom{10}{5} \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^5 \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^5$

Tilanne A ja todennäköisyys I kuuluvat siis yhteen.

Jos laatikossa on 30 valkoista ja 70 mustaa palloa, pallojen kokonaismäärä on $30 + 70 = 100$. Todennäköisyys sille, että satunnainen laatikosta otettu pallo on musta, on $p = \frac{7}{10}$. Todennäköisyys sille, että kymmenestä

nostetusta pallosta kaikki ovat mustia, on

$$\binom{10}{10} \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^{10-0} = \binom{10}{10} \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^{10},$$

kun nostettu pallo palautetaan laatikkoon ennen seuraavan pallon nostamista. Tilanne B ja todennäköisyys III kuuluvat siis yhteen.

Kolme kymmenestä arvasta on voittoarpoja, joten todennäköisyys sille, että arpa on voittoarpa, on $p = \frac{3}{10}$. Todennäköisyys sille, että kymmenen

arvan joukossa on täsmälleen kolme voittoarpaa, on

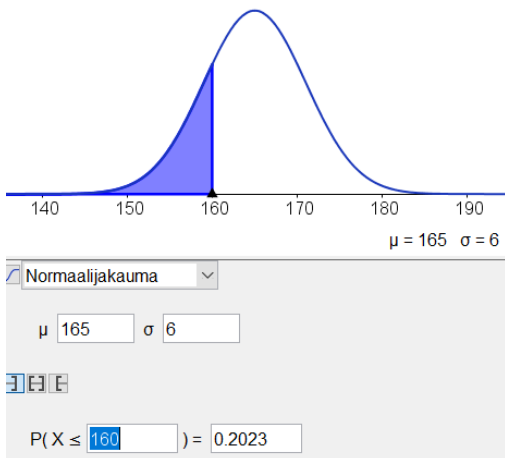
$$\binom{10}{3} \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^3 \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^7$$

Tilanne C ja todennäköisyys II kuuluvat siis yhteen.

Vastaus: A: I, B: III, C: II

495B. Satunnaismuuttuja X noudattaa normaalijakaumaa $N(165, 6)$.

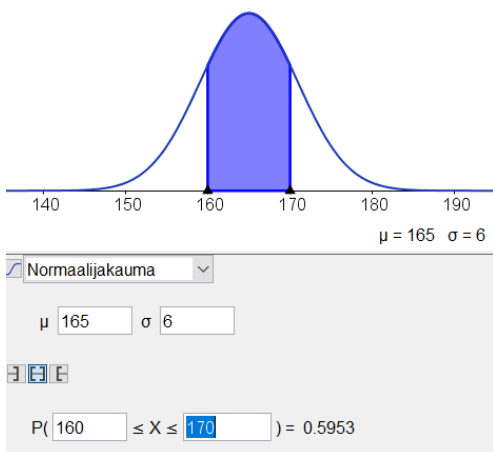
a) Määritetään kysytty todennäköisyys ohjelmalla.



$$P(X < 160) = 0,2023 \approx 0,20$$

Vastaus: 0,20

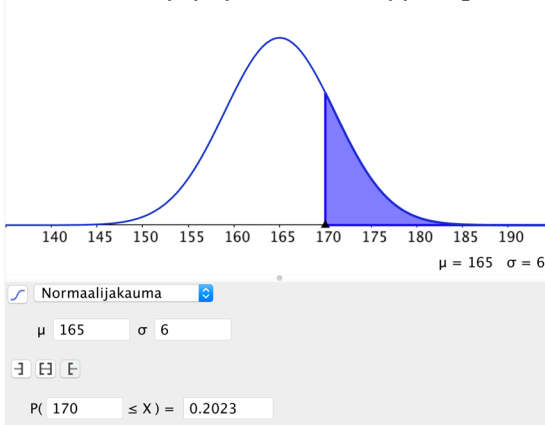
b) Määritetään kysytty todennäköisyys sopivalla ohjelmalla.



$$P(160 < X < 170) = 0,5953 \approx 0,60$$

Vastaus: 0,60

c) Määritetään kysytty todennäköisyys sopivalla ohjelmalla.



$$P(X > 170) = 0,2023 \approx 0,20$$

Vastaus: 0,20

496B. a) Lasketaan kertolaskusäännöllä todennäköisyys, että seuraavat viisi joulua ovat valkeita.

$$P(\text{seuraavat viisi joulua ovat valkeita}) = 0,67^5 = 0,135\dots \approx 0,14.$$

Vastaus: 0,14

b) Kyseessä on toistokoe, joten käytetään binomijakaumaa,

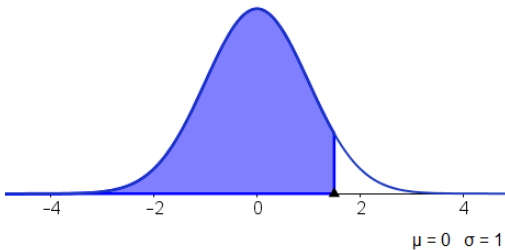
$$P(\text{tapahtuma } A \text{ tapahtuu täsmälleen } k \text{ kertaa}) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}.$$

Toistojen lukumäärä on $n = 5$, $k = 3$ ja todennäköisyys $p = 0,67$.

$$\begin{aligned} P(\text{viidestä joulusta kolme on valkeita}) &= \binom{5}{3} \cdot (0,67)^3 \cdot (1-0,67)^{5-3} \\ &= \binom{5}{3} \cdot (0,67)^3 \cdot (0,33)^2 \\ &= 0,327\dots \\ &\approx 0,33 \end{aligned}$$

Vastaus: 0,33

- 497B.** Satunnaismuuttuja Z noudattaa normitettua normaalijakaumaan. Normitetussa normaalijakaumassa keskiarvo on 0 ja keskihajonta 1.
- a) Määritetään kysytty todennäköisyys sopivalla ohjelmalla.



Normaalijakauma

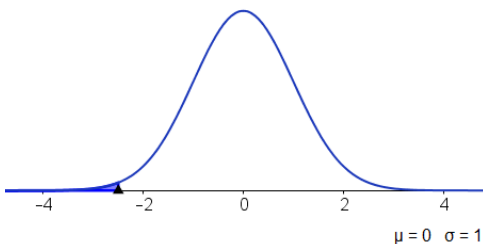
μ 0 σ 1

$P(X \leq 1.5) = 0.9332$

$$P(Z < 1,5) = 0,933... \approx 0,93$$

Vastaus: 0,93

- b) Määritetään kysytty todennäköisyys sopivalla ohjelmalla.



Normaalijakauma

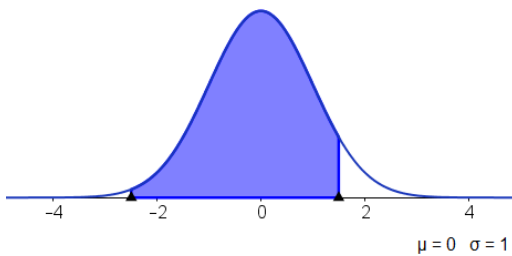
μ 0 σ 1

$P(X \leq -2.5) = 0.0062$

$$P(Z < -2,5) = 0,0062 \approx 0,006$$

Vastaus: 0,006

c) Määritetään kysytty todennäköisyys sopivalla ohjelmalla.



Normaalijakauma

μ 0 σ 1

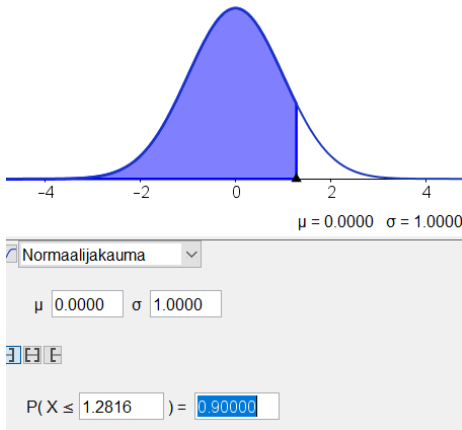
$P(-2.5 \leq X \leq 1.5) = 0.927$

$$P(-2,5 < Z < 1,5) = 0,927... \approx 0,93$$

Vastaus: 0,93

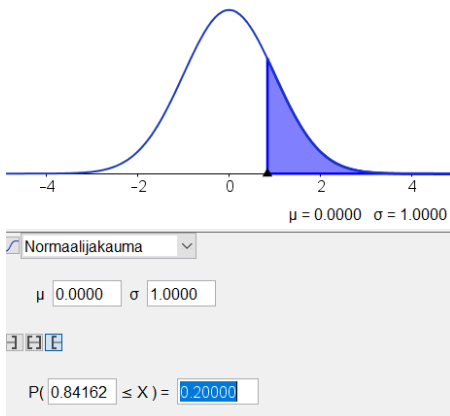
- 498B.** Satunnaismuuttuja noudattaa normitettua normaalijakaumaa $Z \sim N(0, 1)$.
- a) $P(Z < z) = 0,90$. Etsitään rajaa, jonka alapuolella on 90 % jakaumana pinta-alasta.

Sopivalla ohjelmalla saadaan tällaiseksi rajaksi $1,2816 \approx 1,28$.



Vastaus: $z = 1,28$

- b) $P(Z > z) = 0,20$. Etsitään rajaa, jonka yläpuolella on 20 % jakaumana pinta-alasta.
- Sopivalla ohjelmalla saadaan tällaiseksi rajaksi $0,8416 \approx 0,84$.



Vastaus: $z = 0,84$

- 499B. a)** Otoksesta saatu massojen keskiarvo on 141 marjaa neliömetrillä ja keskihajonta 50 marjaa. Otoksen koko on $n = 215$. Määritetään ohjelmalla marjojen määrän keskiarvon 95 %:n luottamusväli. Koska otoskoko on suuri, voidaan käyttää joko normaalijakaumaa tai t -jakaumaa. Käytetään tässä t -jakaumaa.

Keskiarvon T-Estimaatti

Luottamustaso 0.95

Otos

Keskiarvo 141

s 50

N 215

Tulos

Keskiarvon T-Estimaatti

Keskiarvo	141
s	50
S	3.41
N	215
df	214
Alaraja	134.2786
Yläaraja	147.7214
Väli	141 ± 6.7214

Keskiarvon 95 %: luottamusväli on [134,278...; 147,721...].

Pyöritys pitää luottamusvälissä tehdä kauemmas keskiarvosta, joten luottamusväli on yhden marjan tarkkuudella [134 marjaa; 148 marjaa].

Vastaus: [134 marjaa, 148 marjaa]

- b)** Virhemarginaali on luottamusvälin pituus jaettuna kahdella. Luottamusvälin pituus on $148 - 134 = 14$, joten virhemarginaali on $\frac{14}{2} = 7$ marjaa neliömetrillä.

Vastaus: 7 marjaa neliömetrillä

500B. Kyseessä on toistokoe, joten käytetään binomijakaumaa,

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}.$$

a) Toistojen lukumäärä on $n = 4$, $k = 2$ ja todennäköisyys $p = \frac{1}{2}$.

$$P(X = 2) = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{4-2} = \frac{6}{16} = 0,375$$

Vastaus: 0,375

b) Toistojen lukumäärä on $n = 20$, $k = 10$ ja todennäköisyys $p = \frac{1}{2}$.

$$P(X = 10) = \binom{20}{10} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{20-10} = 0,1761... \approx 0,176$$

Vastaus: 0,176

501B. Kyseessä on toistokoe, joten käytetään binomijakaumaa,

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}.$$

a) Toistojen lukumäärä on $n = 5$, $k = 2$ ja todennäköisyys $p = \frac{1}{6}$.

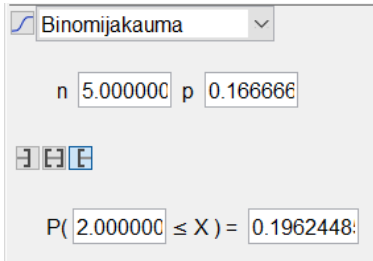
$$P(X = 2) = \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{5-2} = \frac{625}{3888} = 0,1607... \approx 0,161$$

Vastaus: 0,161

b) Toistojen lukumäärä on $n = 20$, $k = 2, 3, 4$ tai 5 ja todennäköisyys

$$p = \frac{1}{2}.$$

Ohjelma antaa todennäköisyydeksi $P(X \geq 2) = 0,1962... \approx 0,196$.



Binomijakauma

n 5.000000 p 0.166666

P(2.000000 ≤ X) = 0.1962448

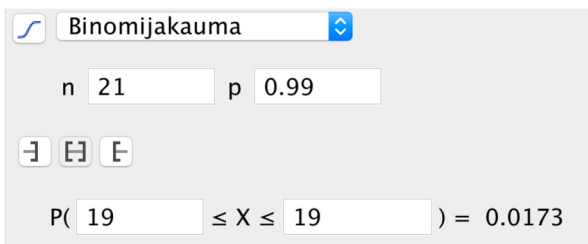
Vastaus: 0,196

502B. Kyseessä on toistokoe, joten käytetään binomijakaumaa, jossa toistojen lukumäärä on $n = 21$. Koska levyerässä on kaksi virheellistä, siinä on $21 - 2 = 19$ virheetöntä, joten $k = 19$ ja todennäköisyys $p = 0,99$.

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

$$P(X = 19) = \binom{21}{19} \cdot 0,99^{19} \cdot (1 - 0,99)^{21-19} = 0,0173... \approx 0,017$$

Todennäköisyys voidaan myös määrittää ohjelmalla.



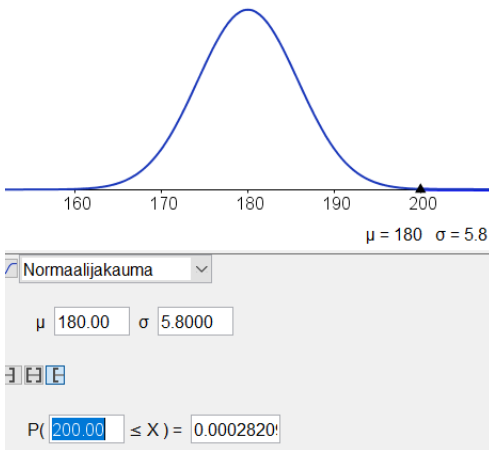
Binomijakauma

n 21 p 0.99

P(19 ≤ X ≤ 19) = 0.0173

Vastaus: 0,017

503B. Pituus X noudattaa normaalijakaumaa $N(180,0; 5,8)$. Määritetään kysytty todennäköisyys $P(X > 200)$ sopivalla ohjelmalla.



30-vuotiaista miehistä $0,000282 \dots \approx 0,00028 = 0,028 \%$ on yli kaksi metriä pitkiä.

Vastaus: 0,028 %

504B. Määritetään ohjelmalla puolueen A kannattajien 95 %:n luottamusväli, kun kannattajien osuus otoksesta on 96 ja otoskoko 500.

Suhteen Z-estimaatti

Luottamustaso 0.95

Otos

Onnistumiset 96

N 500

Tulos

Suhteen Z-estimaatti

Onnistumiset	96
N	500
S	0.0176145394
Alaraja	0.1574761371
Yläraja	0.2265238629
Väli	0.192 ± 0.0345238629

Puolueen A kannattajien osuus on [15,7 %; 22,7 %].

Määritetään ohjelmalla puolueen B kannattajien 95 %:n luottamusväli, kun kannattajien osuus otoksesta on 49 ja otoskoko 500.

Suhteen Z-estimaatti

Luottamustaso 0.95

Otos

Onnistumiset 49

N 500

Tulos

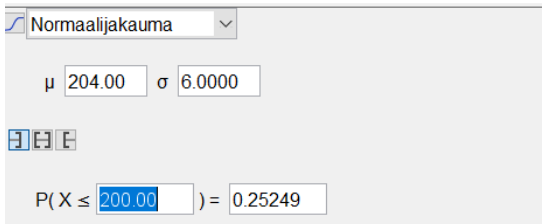
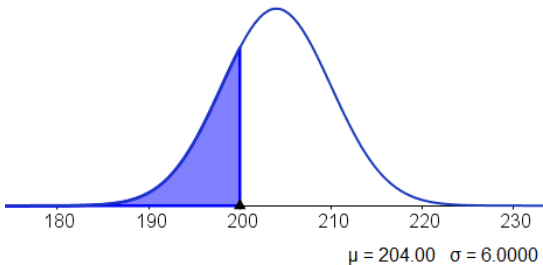
Suhteen Z-estimaatti

Onnistumiset	49
N	500
S	0.0132963153
Alaraja	0.0719397009
Yläraja	0.1240602991
Väli	0.098 ± 0.0260602991

Puolueen B kannattajien osuus on [7,1 %; 12,5 %].

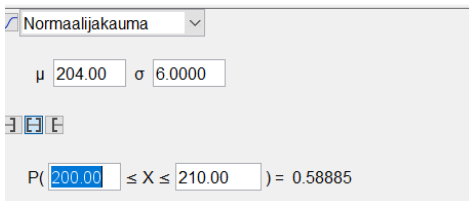
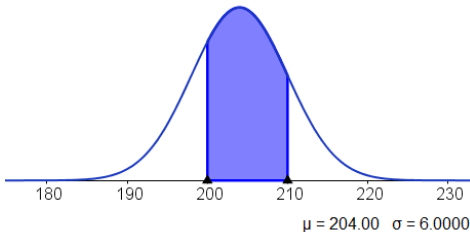
Vastaus: puolue A [15,7 %; 22,7 %], puolue B [7,1 %; 12,5 %]

505B. Massa X noudattaa normaalijakaumaa $N(204; 6)$. Määritetään kysytty todennäköisyys $P(X < 200)$ sopivalla ohjelmalla.



Pakkausten massoista $0,2524... \approx 0,252 = 25,2\%$ oli alle 200 g.

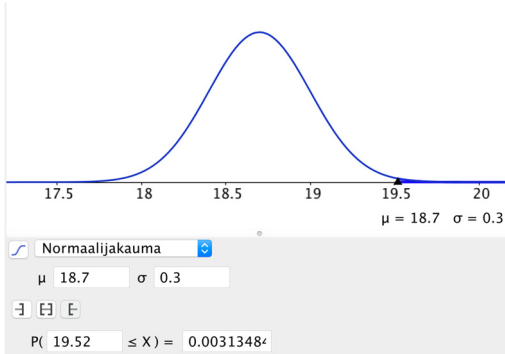
Määritetään kysytty todennäköisyys $P(200 < X < 210)$ sopivalla ohjelmalla.



Pakkausten massoista $0,5888... \approx 0,589 = 58,9\%$ oli välillä 200 g–210 g.

Vastaus: 25,2 prosentilla, 58,9 prosentilla

506B. Olkoon satunnaismuuttuja X kuulantyoöntäjän tulos. Tällöin $X \sim N(18,70; 0,30)$. Määritetään ohjelmalla todennäköisyys sille, että aiempien kilpailutulosten perusteella kuulantyoöntäjän tulos on vähintään yhtä hyvä kuin maailmanmestaruuskilpailuissa eli $P(X \geq 19,52)$.



Kuulantyoöntäjän tulos on aiempien kilpailutulosten perusteella vähintään yhtä hyvä kuin maailmanmestaruuskilpailussa saavutettu tulos todennäköisyydellä $0,00313\dots \approx 0,003$.

Vastaus: 0,003

- 507B. a)** Yhdessä nostossa tapahtuman A = ”kortti on hertta” todennäköisyys on $\frac{1}{4}$. Satunnaismuuttuja X = ”nostettujen herttojen lukumäärä” noudattaa binomijakaumaa, jossa toistojen lukumäärä on $n = 4$ ja todennäköisyys $p = \frac{1}{4}$.

Lasketaan satunnaismuuttujan X arvoja $k = 0, 1, 2, 3$ ja 4 vastaavat todennäköisyydet.

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

$$P(X = 0) = \binom{4}{0} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^0 \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{4-0} = \frac{81}{256} = 0,3164 \approx 0,316$$

$$P(X = 1) = \binom{4}{1} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^1 \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{4-1} = \frac{27}{64} = 0,4218... \approx 0,422$$

$$P(X = 2) = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{4-2} = \frac{27}{128} = 0,2109... \approx 0,211$$

$$P(X = 3) = \binom{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{4-3} = \frac{3}{64} = 0,04687... \approx 0,0469$$

$$P(X = 4) = \binom{4}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{4-4} = \frac{1}{256} = 0,003906... \approx 0,00391$$

Vastaus:

X	0	1	2	3	4
Todennäköisyys	0,316	0,422	0,211	0,0469	0,00391

- b)** Lasketaan odotusarvo sijoittamalla odotusarvon lausekkeeseen $n = 4$ ja $p = \frac{1}{4}$.

$$\mu = np = 4 \cdot \frac{1}{4} = 1$$

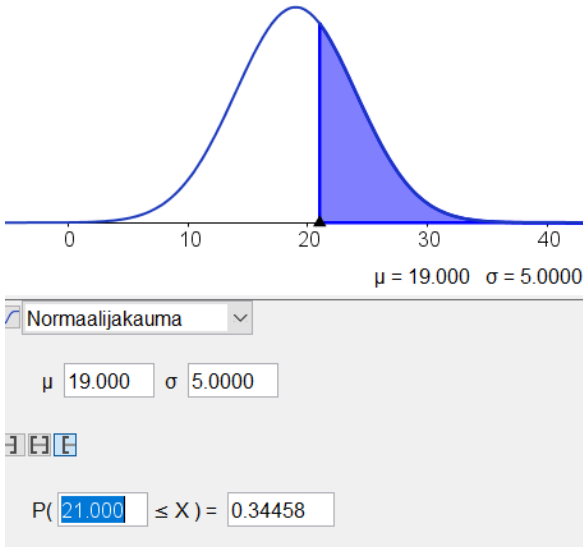
Lasketaan keskihajonta sijoittamalla keskihajonnan lausekkeeseen

$$n = 4 \text{ ja } p = \frac{1}{4}.$$

$$s = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right)} = 0,8660... \approx 0,866$$

Vastaus: $\mu = 1$ ja $s = 0,866$

- 508B. a)** Talitiaisen massa noudattaa normaalijakaumaa $N(19; 5)$. Lasketaan todennäköisyys, että tiaisen massa on vähintään 21 g. Sopivalla ohjelmalla todennäköisyydeksi saadaan $0,3445... = 34,45... \% \approx 34 \%$.



Satunnaisesti valitun tiaisen massa on vähintään 21 g 34 %:n todennäköisyydellä.

Vastaus: 34 %

- b)** Lasketaan 40 tiaisen otoksen keskiarvon keskivirhe. Otoskoko on $n = 40$ ja keskihajonta $s = 5$, joten keskiarvon keskivirhe on

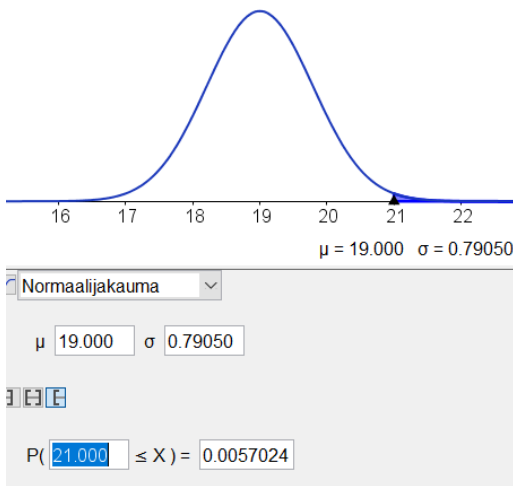
$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{5}{\sqrt{40}} = 0,790...$$

Keskiarvon keskivirhe on $0,790... \text{ g} \approx 0,79 \text{ g}$.

Vastaus: 0,79 g

- c) Otoksen keskiarvo noudattaa normaalijakaumaa, jonka odotusarvona on perusjoukon keskiarvo 19 g ja keskihajontana keskiarvon keskivirhe 0,790... g.

Lasketaan todennäköisyys, että 40 tiaisen otoksen keskimassa on vähintään 21 g. Sopivalla ohjelmalla todennäköisyydeksi saadaan $0,00570... = 0,570... \% \approx 0,57 \%$.



Satunnaisesti valitun 40 tiaisen massojen keskiarvo on vähintään 21 g 0,57 %:n todennäköisyydellä.

Vastaus: 0,57 %

VAHVISTA OSAAMISTA

509B. Lasketaan Alinan ja Bertan tulosten normitettut arvot.
Lukiossa A keskiarvo oli 72 pistettä ja keskihajonta 9,2 pistettä.

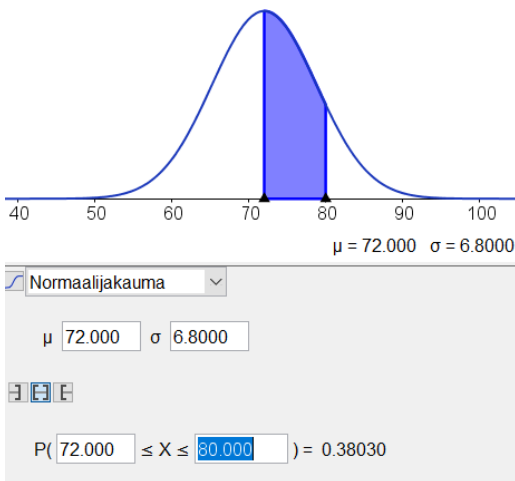
Alinan tuloksen normitettu arvo lukiossa A on $\frac{82-72}{9,2} = 1,0869\dots$

Lukiossa B keskiarvo oli 72 pistettä ja keskihajonta 6,8 pistettä.

Bertan tuloksen normitettu arvo lukiossa B on $\frac{80-72}{6,8} = 1,176\dots$

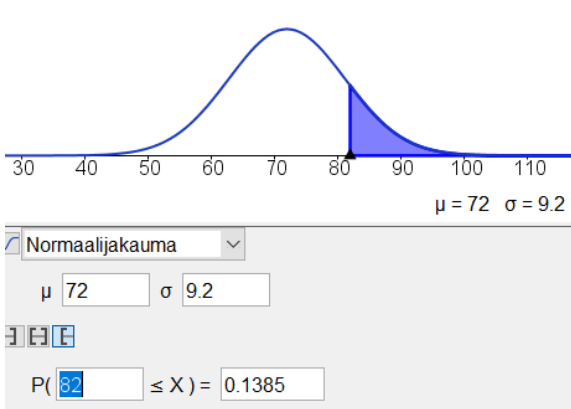
Koska Bertan normitettu arvo 1,176... on suurempi kuin Alinan 1,0869..., Bertta menestyi paremmin oman lukionsa tasoon verrattuna.

Niiden osuus lukion B opiskelijoista, jotka menestyivät kokeessa keskiarvoa paremmin mutta huonommin kuin Bertta, saadaan määrittämällä sopivalla ohjelmalla normaalijakauman avulla todennäköisyys $P(72 \leq X \leq 80) = 0,380\dots \approx 0,38 = 38\%$



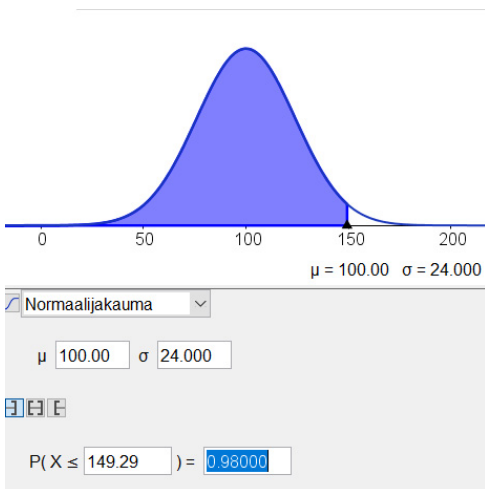
Niiden osuus lukion A opiskelijoista, jotka menestyivät kokeessa paremmin kuin Alina, saadaan määrittämällä sopivalla ohjelmalla normaalijakauman avulla todennäköisyys

$$P(X > 82) = 0,138... \approx 0,14 = 14 \%$$



Vastaus: Bertta, 38 %, 14 %

510B. Etsitään normaalijakaumalta $N(100, 24)$ raja, jonka alapuolella on 98 % jakauman pinta-alasta.

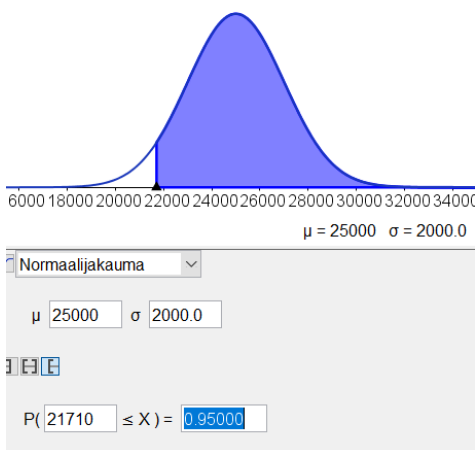


Ohjelmalla saadaan tällaiseksi rajaksi 149,29.... Koska 149 ei riitä, pyöristetään älykkyyssosamäärän arvoksi 150.

Vastaus: vähintään 150

511B. Mitä enemmän tulee ajokilometrejä, sitä pienemmäksi todennäköisyys muuttuu, että sytytystulppa kestää. Etsitään normaalijakaumalta $N(25\,000\text{ km}, 2000\text{ km})$ raja, jonka yläpuolella on 95 % jakauman pinta-alasta.

Sopivalla ohjelmalla saadaan tällaiseksi rajaksi $21\,710\text{ km} \approx 21\,700\text{ km}$. Joten $21\,700$ kilometrin jälkeen tulpan toimintavarmuus laskee alle 95 prosentin.



Vastaus: $21\,700\text{ km:n}$ jälkeen

512B. Sopivalla ohjelmalla saadaan kurssin A keskiarvoksi 7,147... ja keskihajonnaksi 1,893....

n	34
Keskiarvo	7.1471
σ	1.865
s	1.8931
Σx	243
Σx^2	1855
Min	4
Q1	6
Mediaani	7
Q3	8
Max	10

Kurssin A arvosana 6 on normitettuna $\frac{6 - 7,147...}{1,893...} = -0,605...$

Ohjelmalla saadaan kurssin B keskiarvoksi 8,684... ja keskihajonnaksi 1,335....

n	19
Keskiarvo	8.6842
σ	1.2999
s	1.3355
Σx	165
Σx^2	1465
Min	6
Q1	8
Mediaani	9
Q3	10
Max	10

Kurssin B arvosana 7 on normitettuna $\frac{7 - 8,684...}{1,335...} = -1,261...$

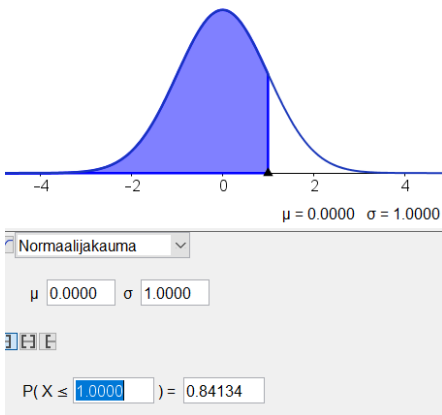
Koska kurssin A normitettu arvo pienemmän etäisyyden päässä keskiarvosta sen alapuolella, opiskelija menestyi kurssilla A paremmin suhteessa kurssitovereihinsä.

Vastaus: kurssissa A

513B. Kohdan A aika 2 h 15 min = 135 min on normitettuna $\frac{135-125}{10} = 1$.

Todennäköisyys $P(\text{korkeintaan 2 tuntia 15 minuuttia}) = P(Z \leq 1)$, joten A ja IV kuuluvat yhteen.

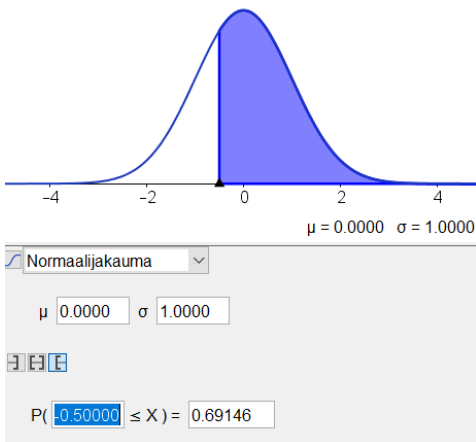
Ohjelmalla saadaan $P(Z \leq 1) = 0,841 \dots \approx 0,84$.



Kohdan B aika 2 h = 120 min on normitettuna $\frac{120-125}{10} = -0,5$.

Todennäköisyys $P(\text{vähintään kaksi tuntia}) = P(Z \geq -0,5)$, joten B ja II kuuluvat yhteen.

Ohjelmalla saadaan $P(Z \geq -0,5) = 0,691 \dots \approx 0,69$.

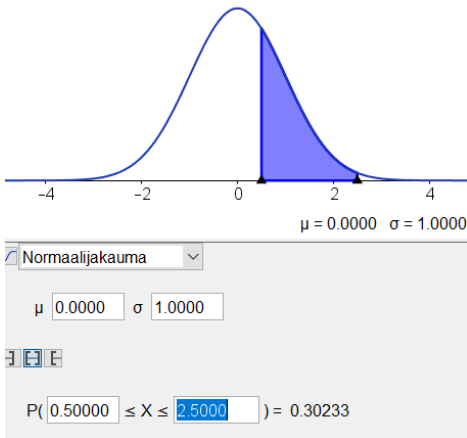


Kohdan C aika 2 h 10 min = 130 min on normitettuna $\frac{130-125}{10} = 0,5$.

Aika 2 h 30 min = 150 min on normitettuna $\frac{150-125}{10} = 2,5$.

Todennäköisyys $P(2 \text{ h } 10 \text{ min} - 2 \text{ h } 30 \text{ min}) = P(0,5 \leq Z \leq 2,5)$, joten C ja I kuuluvat yhteen.

Ohjelmalla saadaan $P(0,5 \leq Z \leq 2,5) = 0,302 \dots \approx 0,30$.

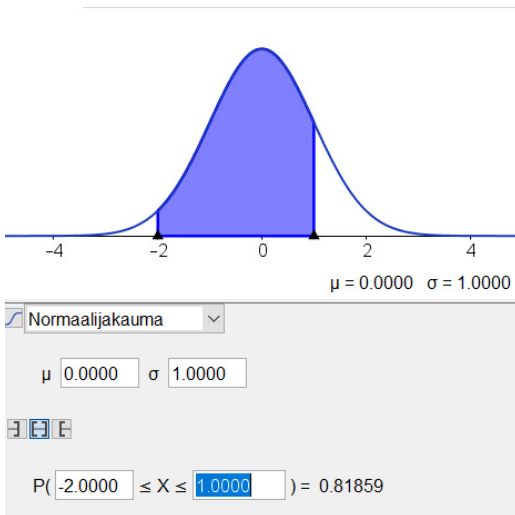


Kohdan D aika 1 h 45 min = 105 min on normitettuna $\frac{105-125}{10} = -2$.

Aika 2 h 15 min = 135 min on normitettuna $\frac{135-125}{10} = 1$.

Todennäköisyys $P(1 \text{ h } 45 \text{ min} - 2 \text{ h } 15 \text{ min}) = P(-2 \leq Z \leq 1)$, joten D ja III kuuluvat yhteen.

Ohjelmalla saadaan $P(-2 \leq Z \leq 1) = 0,818... \approx 0,82$.



Vastaus: A: IV ja 0,84, B: II ja 0,69, C: I ja 0,30, D: III ja 0,82

514B. Merkitään tapahtuma A = ainakin yhdellä heitolla tulee ykkönen, tällöin A :n vastatapahtuma on $\bar{A}$ = yhdelläkään heitolla ei tule ykköstä. Yhdessä heitossa ykkösen todennäköisyys on $\frac{1}{6}$ ja todennäköisyys, että ei tule ykköstä on $\frac{5}{6}$.

$$P(\bar{A}) = \left(\frac{5}{6}\right)^{10} = 0,161\dots, \text{ joten } P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{10} = 0,838\dots$$

Olkoon satunnaismuuttuja X pelissä yhdessä kierroksella saatu voitto. Muodostetaan satunnaismuuttujan X todennäköisyysjakauma.

Saatu voitto (mk)	Todennäköisyys
-2000	0,838...
10 000	0,161...

Satunnaismuuttujan X odotusarvo on

$$\begin{aligned}\mu &= 0,838\dots \cdot (-2000 \text{ mk}) + 0,161 \cdot 10\,000 \text{ mk} \\ &= -61,933 \text{ mk} \\ &\approx -61,93 \text{ mk}.\end{aligned}$$

Vastaus: -61,93 markkaa

515B. Lasketaan ohjelmalla 95 %:n luottamusväli virheellisten tuotteiden suhteelliselle osuudelle, kun virheellisten tuotteiden määrä on 20 ja otoskoko on 200.

Suhteen Z-estimaatti ▾

Luottamustaso 0.95

Otos

Onnistumiset 20

N 200

Tulos

Suhteen Z-estimaatti

Onnistumiset	20
N	200
S	0.0212132034
Alaraja	0.0584228853
Yläraja	0.1415771147
Väli	0.1 ± 0.0415771147

Luottamusväli on $[0,058422\dots; 0,141577\dots]$.

Lasketaan, kuinka monta virheellistä tuotetta on 10 000 kappaleen tuoteräissä 95 %:n todennäköisyydellä.

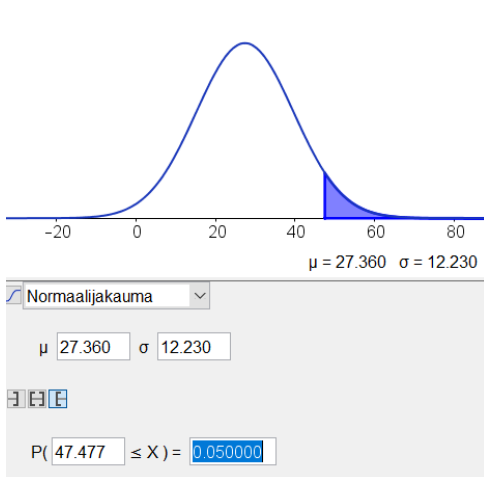
$$[0,058422\dots \cdot 10\,000; 0,141577\dots \cdot 10\,000] = [584,22\dots; 1415,77\dots]$$

Pyöritys pitää luottamusvälissä aina tehdä kauemmas keskiarvosta, joten luottamusväli on $[584, 1416]$.

Vastaus: $[584, 1416]$

516B. Olkoon satunnaismuuttuja X pistemäärä. Tällöin $X \sim N(27,36; 12,33)$.

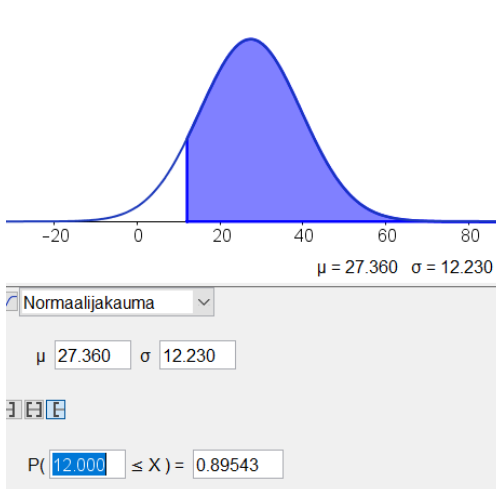
- a) Etsitään ohjelmalla raja, jonka yläpuolella on 5 % jakauman pinta-alasta.



Ohjelmalla saadaan tällaiseksi rajaksi 47,477.... Koska rajan yläpuolella pitää olla enintään 5 %, pyöristetään laudaturin rajaksi 48 pistettä.

Vastaus: 48 pistettä

- b) Lasketaan ohjelmalla, millä todennäköisyydellä muuttujan arvo on vähintään 12.



Ohjelmalla saadaan $P(X > 12) = 0,8954 \dots \approx 0,895 = 89,5 \%$.

Vastaus: 89,5 %

- 517B. a)** Määritetään luottamusväli Niinistön kannatukselle, kun suhteellinen osuus otoksessa on $p = 0,72$, otoskoko $n = 1363$ ja 95 %:n luottamusvälin kriittinen arvo on 1,96.

$$\begin{aligned} & \left[p - \text{kriittinen arvo} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + \text{kriittinen arvo} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right] \\ & \left[0,72 - 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,72 \cdot (1-0,72)}{1363}}; 0,72 + 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,72 \cdot (1-0,72)}{1363}} \right] \\ & = [0,72 - 0,0238...; 0,72 + 0,0238...] \\ & = [0,6961...; 0,7438...] \\ & \approx [69,6\%; 74,4\%] \end{aligned}$$

Luottamusvälin voi määrittää myös ohjelmalla.

Suhteen Z-estimaatti 

Luottamustaso 0.95

Otos

Onnistumiset 981.36

N 1363

Tulos

Suhteen Z-estimaatti

Onnistumiset	981.36
N	1363
S	0.0121617854
Alaraja	0.6961633386
Yläaraja	0.7438366614
Väli	0.72 ± 0.0238366614

Vastaus: [69,6 %; 74,4 %]

- b) Määritetään luottamusväli Haaviston kannatukselle, kun suhteellinen osuus otoksessa on $p = 0,11$, otoskoko $n = 1363$ ja 95 %:n luottamusvälin kriittinen arvo on 1,96.

$$\left[p - \text{kriittinen arvo} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + \text{kriittinen arvo} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right]$$

$$\left[0,11 - 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,11 \cdot (1-0,11)}{1363}}; 0,11 + 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,11 \cdot (1-0,11)}{1363}} \right]$$

$$= [0,11 - 0,01661...; 0,11 + 0,01661...]$$

$$= [0,0933...; 0,1266...]$$

$$\approx [9,3\%; 12,7\%]$$

Luottamusvälin voi määrittää myös ohjelmalla.

Suhteen Z-estimaatti 

Luottamustaso

Otos

Onnistumiset

N

Tulos

Suhteen Z-estimaatti

Onnistumiset	149.93
N	1363
S	0.0084750724
Alaraja	0.0933891633
Yläaraja	0.1266108367
Väli	0.11 ± 0.0166108367

Vastaus: [9,3 %; 12,7 %]

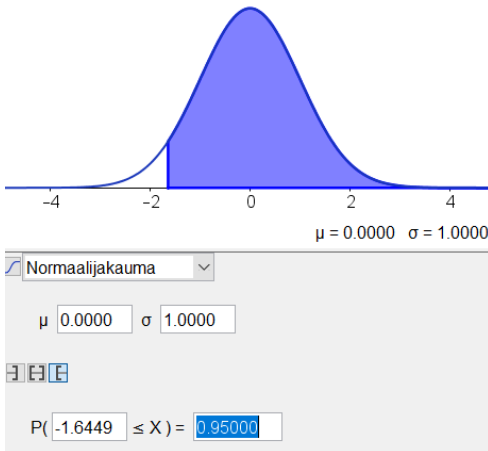
- c) Tutkimuksessa on ilmoitettu virhemarginaaliksi $\pm 1,9$ prosenttiyksikköä, joten Niinistön kannatuksen alaraja olisi silloin $72 \% - 1,9 \% = 70,1 \%$ ja yläraja $72 \% + 1,9 \% = 73,9 \%$.

Haaviston kannatuksen alaraja olisi $11 \% - 1,9 \% = 9,1 \%$ ja yläraja $11 \% + 1,9 \% = 12,9 \%$.

Rajat ovat prosenttiyksikön tarkkuudella samat kuin a-kohdassa.

Vastaus: Ne ovat prosenttiyksikön tarkkuudella samat.

- 518B.** Sopivalla ohjelmalla nähdään, että normitetussa normaalijakaumassa muuttujan arvon $z = -1,644\dots$ yläpuolella on 95 % pinta-alasta.



Muodostetaan arvon $z = -1,644\dots$, keskihajonnan $s = 8,0$ ja sokeripussin painon $x = 1000$ avulla yhtälö, josta ratkaistaan koneelle asetettava keskiarvo $\bar{x}$.

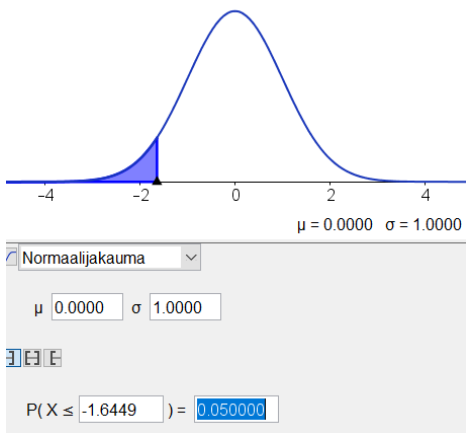
$$\frac{1000 - \bar{x}}{8,0} = -1,644\dots$$

Yhtälönratkaisutoiminnolla saadaan $\bar{x} = 10013,159\dots \approx 1013$.

Sokeripussin painoksi tulee asettaa koneeseen 1013 g.

Vastaus: 1013 g

519B. Sopivalla ohjelmalla nähdään, että normitetussa normaalijakaumassa muuttujan arvon $z = -1,644\dots$ alapuolella on alle 5 % pinta-alasta.



Muodostetaan arvon $z = -1,644\dots$, keskiarvon $\bar{x} = 80$ ja muuttujan arvon $x = 75$ avulla yhtälö, josta ratkaistaan keskihajonta s .

$$\frac{75 - 80}{s} = -1,644\dots$$

Yhtälönratkaisutoiminnolla saadaan $s = 3,039\dots \approx 3,04$.

Hajonta saa pintapainossa olla enintään $3,04 \text{ g/m}^2$.

Vastaus: $3,04 \text{ g/m}^2$

520B. a) Lasketaan 95 %:n luottamusväli autojen nopeuksien keskiarvolle, kun nopeuksien keskiarvo oli $\bar{x} = 97,75$ km/h, keskihajonta $s = 10,70$ km/h ja otoksen koko $n = 4190$. 95 %:n luottamusvälin kriittinen arvo on 1,96.

$$\begin{aligned} & \left[\bar{x} - \text{kriittinen arvo} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \text{kriittinen arvo} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \right] \\ &= \left[97,75 - 1,96 \cdot \frac{10,70}{\sqrt{4190}}; 97,75 + 1,96 \cdot \frac{10,70}{\sqrt{4190}} \right] \\ &= [97,75 - 0,323...; 97,75 + 0,323...] \\ &= [97,426...; 98,073...]. \end{aligned}$$

Pyöristys pitää luottamusvälissä aina tehdä kauemmas keskiarvosta, joten luottamusväli on kahden desimaalin tarkkuudella [97,42 km/h; 98,08 km/h].

Luottamusväli voidaan määrittää myös ohjelmalla.

Keskiarvon Z-estimaatti

Luottamustaso 0.95

Otos

Keskiarvo 97.75

σ 10.7

N 4190

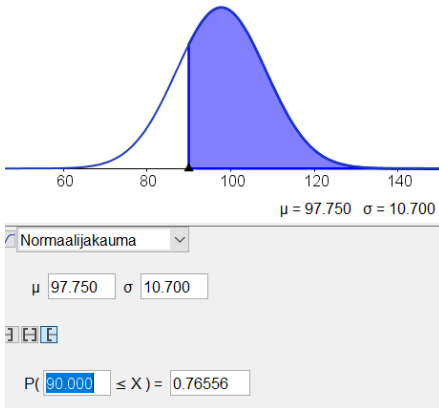
Tulos

Keskiarvon Z-estimaatti

Keskiarvo	97.75
σ	10.7
S	0.1653014892
N	4190
Alaraja	97.4260150345
Yläaraja	98.0739849655
Väli	97.75 ± 0.3239849655

Vastaus: [97,42 km/h; 98,08 km/h]

- b) Lasketaan sopivalla ohjelmalla kuinka monta prosenttia mittauskohdan ohittavista ajoneuvosta ylittää nopeuden 90 km/h. Todennäköisyys on $P(X \geq 90) = 0,765\dots$, joten 1000 ajoneuvosta $0,765\dots \cdot 1000 = 765,56\dots \approx 766$ ylittää nopeuden 90 km/h.



Vastaus: 766 ajoneuvoa

- 521B.** Tapahtuma ”tekee ainakin yhden maalin” on tapahtuman ”ei tee yhtäkään maalia” vastatapahtuma. Todennäköisyys, että rangaistuspotku ei mene maaliin on $1 - 0,80 = 0,20$. Todennäköisyys, että n :ssä rangaistuspotkussa ei tule yhtään maalia, on $0,20^n$, joten $P(\text{tekee ainakin yhden maalin}) = 1 - 0,20^n$. Koska todennäköisyys pitää olla yli 99 %, saadaan epäyhtälö $1 - 0,20^n > 0,99$.

Yhtälön ratkaisutoiminnolla saadaan ratkaisuksi $n > 2,861\dots$

Joten hänen on suoritettava rangaistuspotku vähintään 3 kertaa.

Vastaus: vähintään 3 kertaa

522B. Sopivalla ohjelmalla saadaan havaintoarvojen keskiarvoksi 99 ja keskihajonnaksi $0,653 \dots \approx 0,65$.

n	10
Keskiarvo	99
σ	0.6197
s	0.6532
Σx	990
Σx^2	98013.84
Min	98.4
Q1	98.5
Mediaani	98.75
Q3	99.2
Max	100.2

Koska otoskoko on pieni, määritetään luottamusväli t -jakaumalla.

Määritetään ohjelmalla 95 %:n luottamusväli ruuvien pituuksien keskiarvolle, kun pituuksien keskiarvo oli $\bar{x} = 99$, keskihajonta $s = 0,653 \dots$ ja otoksen koko $n = 10$.

Keskiarvon T-Estimaatti

Luottamustaso 0.95

Otos

Keskiarvo 99

s 0.6532

N 10

Tulos

Keskiarvon T-Estimaatti

Keskiarvo	99
s	0.6532
S	0.2065599768
N	10
df	9
Alaraja	98.532728869
Yläaraja	99.467271131
Väli	99 ± 0.467271131

95 %:n luottamusväli on $[98,532 \dots; 99,467 \dots]$.

Koska ilmoitettu pituus 100,0 mm ei kuulu 95 %:n luottamusvälille, on syytä epäillä tehtaan ilmoitusta.

Vastaus: On syytä epäillä tehtaan ilmoituksen luotettavuutta.

- 523B. a)** Sopivalla ohjelmalla saadaan havaintoarvojen keskiarvoksi $5,226...^{\circ}\text{C} \approx 5,2^{\circ}\text{C}$ ja keskihajonnaksi $0,983...^{\circ}\text{C} \approx 0,98^{\circ}\text{C}$. Pienin arvo on $3,7^{\circ}\text{C}$ ja suurin $6,9^{\circ}\text{C}$.

n	83
Keskiarvo	5.2265
σ	0.9777
s	0.9837
Σx	433.8
Σx^2	2346.6
Min	3.7
Q1	4.3
Mediaani	5.2
Q3	6
Max	6.9

Vastaus: $\bar{x} = 5,2^{\circ}\text{C}$, $s = 0,98^{\circ}\text{C}$, pienin $3,7^{\circ}\text{C}$, suurin $6,9^{\circ}\text{C}$

- b)** Määritetään ohjelmalla 95 %:n luottamusväli käyttämällä t -jakaumaa, kun otoksen keskiarvo oli $\bar{x} = 5,226...$, keskihajonta $s = 0,983...$ ja otoksen koko $n = 83$.

Keskiarvon T-Estimaatti 

Luottamustaso 0.95

Otos

Keskiarvo 5.2265
 s 0.9837
 N 83

Tulos

Keskiarvon T-Estimaatti

Keskiarvo	5.2265
s	0.9837
S	0.1079751026
N	83
df	82
Alaraja	5.0117031248
Yläaraja	5.4412968752
Väli	5.2265 ± 0.2147968752

95 %:n luottamusväli on $[5,011...; 5,441...]$

Huomataan, että havaintoaineiston pienin arvo $3,7$ astetta ja suurin arvo $6,9$ astetta eivät kuulu luottamusvälille, joten kaikki havaintoarvot eivät kuulu 95 %:n luottamusvälille.

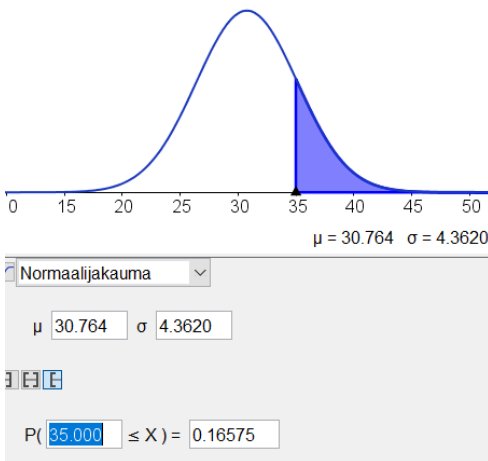
Vastaus: eivät kuulu

524B. a) Määritetään ohjelman avulla otoksen keskiarvo ja keskihajonta.

n	34
Keskiarvo	30.7647
σ	4.2981
s	4.3628
Σx	1046
Σx^2	32808
Min	19
Q1	29
Mediaani	32
Q3	34
Max	37

Otoksen keskiarvoksi saadaan $\bar{x} = 30,764\dots$ vuotta ja keskihajonnaksi $s = 4,362\dots$ vuotta.

Otoksen perusteella ensimmäistä kertaa isäksi tulemisen ikä noudattaa normaalijakaumaa $N(30,764\dots; 4,362\dots)$. Lasketaan todennäköisyys, että ikä on yli 35 vuotta.



Ohjelmalla todennäköisyydeksi saadaan $0,165\dots = 16,5\dots \% \approx 17 \%$.

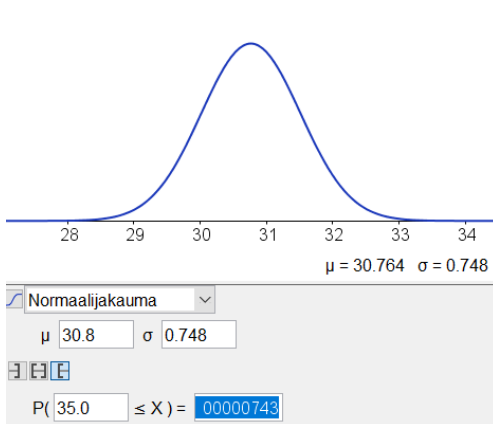
Todennäköisyys, että satunnainen suomalaisia on tullut ensimmäistä kertaa isäksi yli 35 vuotiaana, on 17 %.

Vastaus: 17 %

- b) Otoksen keskiarvo noudattaa normaalijakaumaa, jonka odotusarvona on perusjoukon keskiarvo 30,764... ja keskihajontana keskiarvon

$$\text{keskivirhe } s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{4,362...}{\sqrt{34}} = 0,748...$$

Lasketaan ohjelmalla todennäköisyys, että 20 isän otoksen ensimmäistä kertaa isäksituloikien keskiarvo on yli 35 vuotta.



Sopivalla ohjelmalla todennäköisyydeksi saadaan $0,00000000743 \approx 0,000000007$.

Satunnaisesti valitun 20 isän ensimmäistä kertaa isäksituloikien keskiarvo on yli 35 vuotta todennäköisyydellä 0,000000007.

Vastaus: 0,000000007

- c) Määritetään ohjelmalla 95 %:n luottamusväli käyttämällä t -jakaumaa, kun otoksen keskiarvo on $\bar{x} = 30,764...$ vuotta, keskihajonta $s = 4,362...$ vuotta ja otoskoko $n = 34$.

Keskiarvon T-Estimaatti

Luottamustaso 0.95

Otos

Keskiarvo 30.764

s 4.362

N 34

Tulos

Keskiarvon T-Estimaatti

Keskiarvo	30.764
s	4.362
S	0.7481
N	34
df	33
Alaraja	29.242
Yläraja	32.286
Väli	30.764 ± 1.522

95 %:n luottamusväli on [29,242... vuotta; 32,286... vuotta].

Pyöristys pitää luottamusvälissä aina tehdä kauemmas keskiarvosta, joten luottamusväli on [29 vuotta; 33 vuotta].

Vastaus: [29 vuotta; 33 vuotta]

SYVENNÄ YMMÄRRYSTÄ

525B. Tapahtuma ”ainakin kaksi itää” on tapahtuman ”yksi tai ei yhtään idä” vastatapahtuma. Todennäköisyys, että sipuli ei idä on $1 - 0,7 = 0,3$.

Todennäköisyys, että n :stä sipulista ei yksikään idä, on $0,3^n$.

Todennäköisyys, että n :stä sipulista täsmälleen yksi itää, on

$$P(X = 1) = \binom{n}{1} \cdot 0,7^1 \cdot (1 - 0,3)^{n-1} = n \cdot 0,7 \cdot 0,3^{n-1}, \text{ joten}$$

$$P(\text{ainakin kaksi itää}) = 1 - [0,3^n + n \cdot 0,7 \cdot 0,3^{n-1}].$$

Taulukoidaan todennäköisyyksiä n :n eri arvoilla:

	A	B	C
1	n	$P(\text{ainakin kaksi itää})$	
2	2	0,49	
3	3	0,784	
4	4	0,9163	
5	5	0,96922	
6	6	0,989065	
7	7	0,9962092	

Taulukosta huomataan, että on istutettava 7 sipulia, jotta niistä ainakin kaksi itäisi yli 99 % todennäköisyydellä.

Vastaus: vähintään 7 sipulia

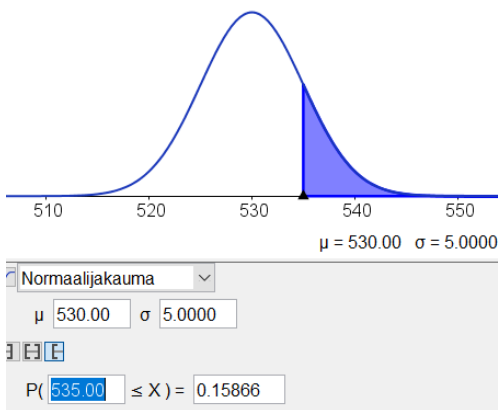
526B. Merkitään A = saapuu pysäköintialueelle klo 8.55 jälkeen ja B = saapuu pysäköintialueelle aikavälillä $]8.45; 8.55]$. Muutetaan kellonajat minuuteiksi vuorokauden alusta lähtien.

klo 8.45 vastaa 525 minuuttia

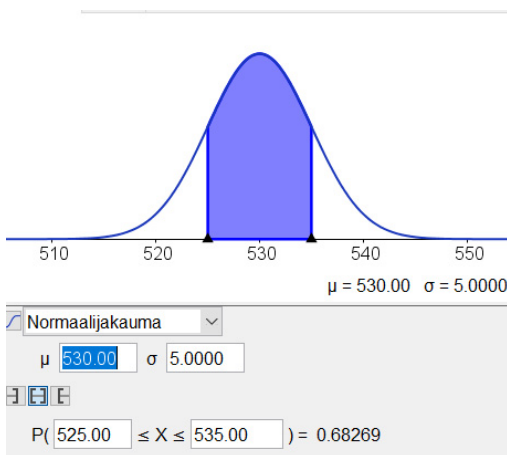
klo 8.50 vastaa 530 minuuttia

klo 8.55 vastaa 535 minuuttia

Ohjelmasta saadaan $P(A) = 0,158\dots$



Ohjelmasta saadaan $P(B) = 0,682\dots$

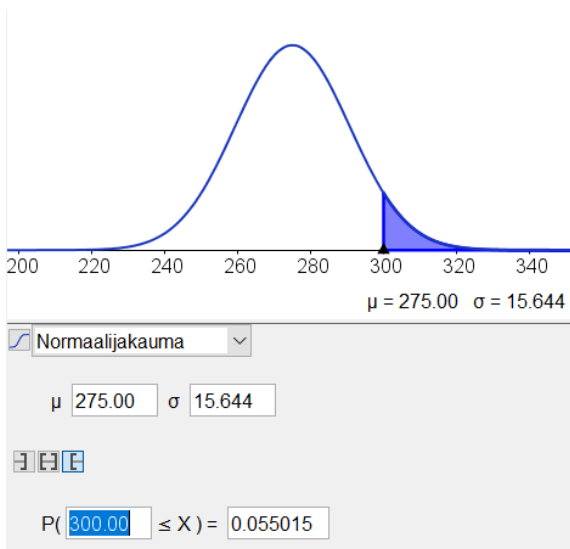


Henkilö saapuu työpaikalleen klo 9.00 jälkeen, jos hän saapuu pysäköintialueelle klo 8.55 jälkeen tai hän saapuu pysäköintialueelle välillä $[8.45; 8.55]$ silloin, kun kaikki pysäköintipaikat ovat varattuja. Paikat ovat varattuja todennäköisyydellä $1 - 0,65 = 0,35$, joten

$$\begin{aligned} P(\text{saapuu työpaikalleen klo 9.00 jälkeen}) \\ &= P(A) + 0,35 \cdot P(B) \\ &= 0,158\dots + 0,35 \cdot 0,682\dots \\ &= 0,397\dots \\ &= 0,40 \end{aligned}$$

Vastaus: 0,40

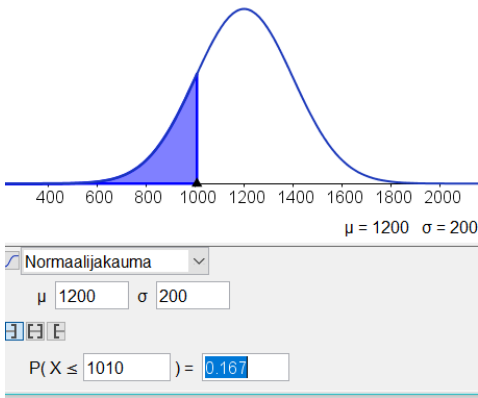
527B. Kyseessä on binomitodennäköisyys, jossa $n = 2500$ ja $p = 0,11$. Määritetään kysytty todennäköisyys normaalijakaumalla, jonka keskiarvo on $\bar{x} = np = 2500 \cdot 0,11 = 275$ ja keskihajonta $s = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{2500 \cdot 0,11 \cdot (1-0,11)} = 15,644\dots$



Todennäköisyys, että postimyyntiliikkeen 2 500 asiakkaasta vähintään 300 palauttaa tilaamansa tuotteen, on $0,0550\dots \approx 0,055$

Vastaus: 0,055

528B. Määritetään sopivalla ohjelmalla aikaraja, johon mennessä $\frac{50}{300} = 0,166\dots$ lamputa on sammunut. Rajaksi saadaan 1010 tuntia.



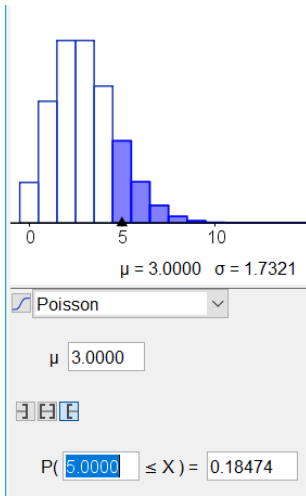
Koska lamput palavat 55 h viikossa, on vaihto tehtävä

$$\frac{1010}{55} = 18,353\dots \approx 18 \text{ viikon välein.}$$

Vastaus: 18 viikon välein

529B. Sovelletaan Poissonin jakaumaa $P(X = k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}$ odotusarvolla $\mu = 3$.

Määritetään tapahtuman ”ainakin 5 puhelua” todennäköisyys $P(X \geq 5)$ sopivalla ohjelmalla.



$$P(X \geq 5) = 0,184... \approx 0,18$$

Vastaus: 0,18

- 530B.** Havainnollistetaan heittotuloksia ja satunnaismuuttujan $|x - y|$ arvoja taulukon avulla.
Merkitään kaikki alkeistapaukset taulukkoon.

	1	2	Pisteluku x	5	6
Pisteluku y					
1	$ 1-1 = 0$	$ 2-1 = 1$	$ 3-1 = 2$	$ 4-1 = 3$	$ 5-1 = 4$
2	$ 1-2 = 1$	$ 2-2 = 0$	$ 3-2 = 1$	$ 4-2 = 2$	$ 5-2 = 3$
3	$ 1-3 = 2$	$ 2-3 = 1$	$ 3-3 = 0$	$ 4-3 = 1$	$ 5-3 = 2$
4	$ 1-4 = 3$	$ 2-4 = 2$	$ 3-4 = 1$	$ 4-4 = 0$	$ 5-4 = 1$
5	$ 1-5 = 4$	$ 2-5 = 3$	$ 3-5 = 2$	$ 4-5 = 1$	$ 5-5 = 0$
6	$ 1-6 = 5$	$ 2-6 = 4$	$ 3-6 = 3$	$ 4-6 = 2$	$ 5-6 = 1$

Lasketaan kaikkien alkeistapausten todennäköisyydet ja muodostetaan satunnaismuuttujan $|x - y|$ todennäköisyysjakauma.

$ x-y $	0	1	2	3	4	5
Todennäköisyys p	$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$	$\frac{10}{36} = \frac{5}{18}$	$\frac{8}{36} = \frac{2}{9}$	$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$	$\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$	$\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

Odotusarvo μ saadaan kertomalla jokainen satunnaismuuttujan $|x - y|$ arvo todennäköisyydellään p ja laskemalla tulot yhteen.

$$\begin{aligned}
 \mu &= 0 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{5}{18} + 2 \cdot \frac{2}{9} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{9} + 5 \cdot \frac{1}{18} \\
 &= 0 + \frac{5}{18} + \frac{4}{9} + \frac{3}{6} + \frac{4}{9} + \frac{5}{18} \\
 &= \frac{35}{18}
 \end{aligned}$$

Vastaus:

$ x-y $	0	1	2	3	4	5
p	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$

$$\mu = \frac{35}{18}$$

531B. Jos isompi jalokivi hiotaan ja se säilyy ehjänä, on kultasepän voitto $0,3 \cdot 12\,000 \text{ mk} - 1000 \text{ mk} = 2600 \text{ mk}$. Jos jalokivi tuhoutuu, kultaseppä menettää $12\,000 \text{ mk} + 1000 \text{ mk} = 13\,000 \text{ mk}$.

Muodostetaan todennäköisyysjakauma.

Saatu voitto (mk)	Todennäköisyys
2600	0,9
-13 000	0,1

Hionnan jälkeinen varallisuuden odotusarvo on
 $\mu = 2600 \text{ mk} \cdot 0,9 + (-13\,000 \text{ mk}) \cdot 0,1 = 1040 \text{ mk}$.

Jos pienempi jalokivi hiotaan ja se säilyy ehjänä, on kultasepän voitto $0,3 \cdot 6\,000 \text{ mk} - 800 \text{ mk} = 1000 \text{ mk}$. Jos jalokivi tuhoutuu, kultaseppä menettää $6000 \text{ mk} + 800 \text{ mk} = 6800 \text{ mk}$.

Muodostetaan todennäköisyysjakauma.

Saatu voitto (mk)	Todennäköisyys
1000	0,92
-6800	0,08

Hionnan jälkeinen kahden pienemmän jalokiven yhteenlasketun varallisuuden odotusarvo on
 $\mu = 2 \cdot [1000 \text{ mk} \cdot 0,92 + (-6800 \text{ mk}) \cdot 0,08] = 752 \text{ mk}$.

Yhden suuren jalokiven varallisuuden odotusarvo on suurempi kuin kahden pienen, joten kultasepällä kannattaa hioa yksi suuri jalokivi.

Vastaus: yksi suuri

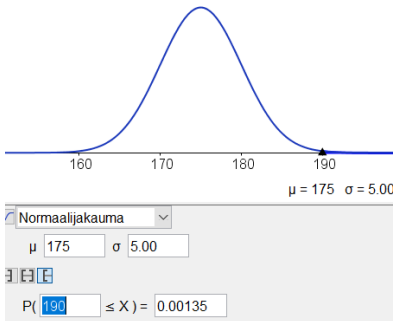
532B. Muodostetaan taulukko, jossa on syvyysluokkien todelliset alarajat, todelliset yläraja, luokkakeskukset ja niitä vastaavaat veden löytymisen todennäköisyydet. Tehtävässä ilmoitetaan, että laskutetaan jokaiselta alkavalta metriltä. Tällöin ensimmäinen todellinen alaraja laskutettavissa metrimäärissä on 5 m (jos poraus menee vähänkin yli 4 metrin, laskutetaan 5 metristä) ja todellinen yläraja 10 m (tasan 10 metrissä laskutetaan 10 m). Seuraava todellinen alaraja laskutettavissa metreissä on 11 m (jos menee vähänkin yli 10 m, laskutetaan 11 metristä) jne. Viimeiseen sarakkeeseen muodostetaan luokkakeskusten ja todennäköisyyksien tulo kerrottuna porauksen metrihinnalla 200 mk.

	A	B	C	D	E
1	Alkavan metrimäärän todellinen alaraja (m)	Alkavan metrimäärän todellinen yläraja (m)	Luokkakeskus h (m)	p	$200 \cdot p \cdot \text{luokkakeskus}$
2	5	10	7,5	0,04	60
3	11	20	15,5	0,06	186
4	21	30	25,5	0,1	510
5	31	40	35,5	0,15	1065
6	41	50	45,5	0,2	1820
7	51	60	55,5	0,3	3330
8	61	70	65,5	0,1	1310
9	71	80	75,5	0,05	755
10				Summa	9036

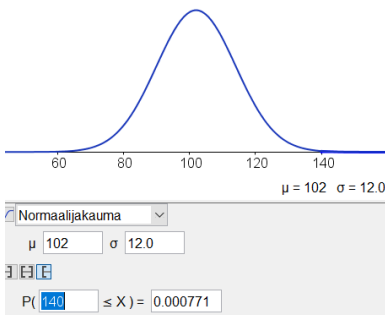
Viimeisen sarakkeen summasta nähdään, että onnistuneen porauksen hinnan odotusarvo on 9036 mk.

Vastaus: 9036 mk

533B. Sopivalla ohjelmalla saadaan $P(\text{pituus on yli } 190 \text{ cm}) = 0,00135\dots$



Sopivalla ohjelmalla saadaan $P(\text{älykkyyssosamäärä yli } 140) = 0,000771\dots$



$$P(\text{pituus on yli } 190 \text{ cm ja älykkyyssosamäärä yli } 140) \\ = 0,00135\dots \cdot 0,000771\dots = 0,00000104\dots$$

$$P(16\,500 \text{ ihmisestä ainakin yhden on yli } 190 \text{ cm ja älykkyyssosamäärä yli } 140) \\ = 1 - P(\text{ei yhdenkään}) \\ = 1 - (1 - 0,00000104\dots)^{16\,500} \\ = 0,0170\dots \\ \approx 0,017$$

Samalla päättelyllä kuin yllä ei voida laskea todennäköisyyttä, että ryhmässä on ainakin yksi henkilö, jonka pituus on yli 190 cm ja kengännumero vähintään 45, koska pituus ja kengännumero ovat toisistaan riippuvia.

Vastaus: 0,017, ei voida

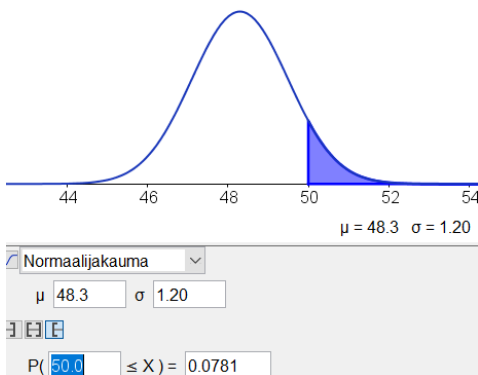
534B. Makeisten yhteispaino koostuu 23 makeisen painosta, jotka noudattavat normaalijakaumaa.

Yhteispainon keskiarvo on $23 \cdot 2,1 = 48,3$.

Yhteispainon keskihajonnan neliö $s^2 = 23 \cdot 0,25^2 = 1,4375$.

Yhteispainon keskihajonta on $s = \sqrt{1,4375} = 1,198\dots$

Määritetään todennäköisyys $P(X > 50)$ sopivalla ohjelmalla.



Todennäköisyys, että pussissa olevat makeiset yhteensä painavat yli 50 g, on $0,0781\dots \approx 0,078$.

Vastaus: 0,078

- 535B. a)** Määritetään ohjelmalla 99 %:n luottamusväli alkoholia käyttämättömien lukiolaisten osuudelle, kun suhteellinen osuus otoksessa on $p = 0,32$, otoskoko $n = 63$ ja 99 %:n luottamusvälin kriittinen arvo on 2,58.

$$\begin{aligned}
 & \left[p - \text{kriittinen arvo} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + \text{kriittinen arvo} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right] \\
 &= \left[0,32 - 2,58 \cdot \sqrt{\frac{0,32 \cdot (1-0,32)}{63}}; 0,32 + 2,58 \cdot \sqrt{\frac{0,32 \cdot (1-0,32)}{63}} \right] \\
 &= [0,32 - 0,151...; 0,32 + 0,151...] \\
 &= [0,168...; 0,471...] \\
 &= [16,8...\%; 47,1\%]
 \end{aligned}$$

Pyöritys pitää luottamusvälissä aina tehdä kauemmas keskiarvosta, joten alkoholia käyttämättömien lukiolaisten 99 %:n luottamusväli on [16 %, 48 %].

Luottamusväli voidaan määrittää myös ohjelmalla.

Suhteen Z-estimaatti 

Luottamustaso 0.99

Otos

Onnistumiset 20.16

N 63

Tulos

Suhteen Z-estimaatti

Onnistumiset	20.16
N	63
S	0.0587704709
Alaraja	0.1686172988
Yläaraja	0.4713827012
Väli	0.32 ± 0.1513827012

Vastaus: [16 %, 48 %]

- b)** Koska aiemmassa tutkimuksessa alkoholia käyttämättömien lukiolaisten osuus 27 % kuuluu a-kohdassa saadulle luottamusvälille, voidaan todeta, että uuden tutkimuksen tuloksen poikkeama aiemmasta ei ole merkitsevästi poikkeava.

Vastaus: ei ole

c) Virhemarginaali on puolet luottamusvälin pituudesta eli

$$\text{kriittinen arvo} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 2,58 \cdot \sqrt{\frac{0,32 \cdot (1-0,32)}{n}}.$$

Muodostetaan virhemarginaalin avulla yhtälö ja ratkaistaan siitä otoskoko n .

$$0,02 = 2,58 \cdot \sqrt{\frac{0,32 \cdot (1-0,32)}{n}}$$

Yhtälönratkaisutoiminnolla saadaan $n = 3621,081\dots$

Otoskoko pitää pyöristää ylöspäin, jotta virhemarginaali on 2 prosenttiyksikköä. Otoskoon pitäisi olla siis 3622.

Vastaus: 3622

536B. a) Havaintoarvojen keskiarvoksi saadaan $\bar{x} = 33,8$ cl ja keskihajonnaksi $0,912\dots\text{cl}$.

n	25
Keskiarvo	33.8
σ	0.8944
s	0.9129
Σx	845
Σx^2	28581
Min	32
Q1	33
Mediaani	34
Q3	34
Max	36

Määritetään ohjelmalla 99,9 %:n luottamusväli käyttämällä t -jakaumaa, kun otoksen keskiarvo oli $\bar{x} = 33,8$ cl, keskihajonta $s = 0,912\dots\text{cl}$ ja otoksen koko $n = 25$.

Keskiarvon T-Estimaatti

Luottamustaso 0.999
 Otos
 Keskiarvo 33.8
 s 0.9129
 N 25

Tulos

Keskiarvon T-Estimaatti

Keskiarvo	33.8
s	0.9129
S	0.18258
N	25
df	24
Alaraja	33.1161651201
Yläaraja	34.4838348799
Väli	33.8 ± 0.6838348799

99,9 %:n luottamusväli on $[33,116\dots\text{cl}; 34,483\dots\text{cl}]$.

Pyöristys pitää luottamusvälissä aina tehdä kauemmas keskiarvosta, joten luottamusväli on $[33,1\text{ cl}; 34,5\text{ cl}]$.

Vastaus: $[33,1\text{ cl}; 34,5\text{ cl}]$

- b) a-kohdan perusteella kone täyttää tölkkeihin keskimäärin 33,8 cl, joten jokaista täyttöä kohti tulee 33,8 cl – 33 cl = 0,8 cl ylimääräistä. Kone täyttää vuodessa miljoona tölkkiä, joten täyttövirhettä tulee yhteensä $1\,000\,000 \cdot 0,8 \text{ cl} = 800\,000 \text{ cl} = 8000 \text{ l}$. Koneen epätarkkuuden aiheuttama kustannus vuodessa on keskimäärin $8000 \cdot 1,00 \text{ €} = 8\,000 \text{ €}$.

Vastaus: 8000 €

- 537B. a) Havaintoarvojen keskiarvoksi saadaan $\bar{x} = 58,666\dots \text{ mg/l}$ ja keskihajonnaksi $s = 5,033\dots \text{ mg/l}$.

n	3
Keskiarvo	58.6667
σ	4.1096
s	5.0332
Σx	176
Σx^2	10376
Min	54
Q1	54
Mediaani	58
Q3	64
Max	64

Määritetään ohjelmalla 95 %:n luottamusväli käyttämällä t -jakaumaa, kun otoksen keskiarvo oli $\bar{x} = 58,666\dots \text{ mg/l}$, keskihajonta $s = 5,033\dots \text{ mg/l}$ ja otoksen koko $n = 3$.

Keskiarvon T-Estimaatti

Luottamustaso 0.95

Otos

Keskiarvo 58.6667

s 5.0332

N 3

Tulos

Keskiarvon T-Estimaatti

Keskiarvo	58.6667
s	5.0332
S	2.9059193749
N	3
df	2
Alaraja	46.1635380694
Yläaraja	71.1698619306
Väli	58.6667 ± 12.5031619306

Pyöristys pitää luottamusvälissä aina tehdä kauemmas keskiarvosta, joten luottamusväli on [46 mg/l; 72 mg/l].

Vastaus: [46 mg/l, 72 mg/l]

- b) Koska perusjoukon keskihajonta $s = 4$ mg/l tunnetaan, käytetään normaalijakaumaa.

Määritetään ohjelmalla 95 %:n luottamusväli käyttämällä normaalijakaumaa, kun otoksen keskiarvo oli $\bar{x} = 58,666\dots$ mg/l, keskihajonta $s = 4$ mg/l ja otoksen koko $n = 3$.

Keskiarvon Z-estimaatti

Luottamustaso 0.95

Otos

Keskiarvo 58.6667

σ 4

N 3

Tulos

Keskiarvon Z-estimaatti

Keskiarvo	58.6667
σ	4
S	2.3094010768
N	3
Alaraja	54.1403570637
Yläaraja	63.1930429363
Väli	58.6667 $\pm$ 4.5263429363

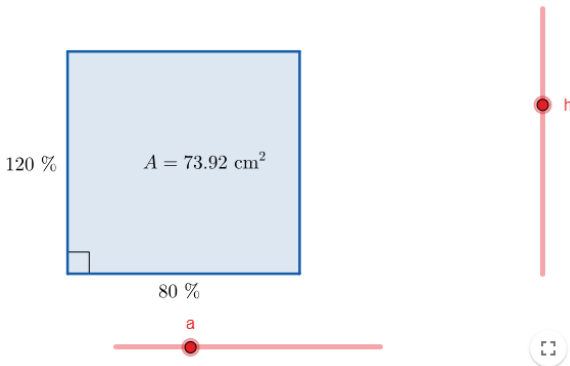
Pyöristys pitää luottamusvälissä aina tehdä kauemmas keskiarvosta, joten luottamusväli on [54 mg/l; 64 mg/l].

Vastaus: [54 mg/l; 64 mg/l]

KOKOAVIA TEHTÄVIÄ

YLIOPPILASKOKEEN A-OSAN OHJELMISTOT SALLITTU

- K1.** a) Pienennetään kannan pituutta 20 % ja kasvatetaan korkeutta 20 % appletin avulla.



Uudeksi pinta-alaksi saadaan $73,92 \text{ cm}^2$.

$$\frac{73,92}{77} = 0,96, \text{ joten uusi pinta-ala on } 96 \% \text{ vanhasta pinta-alasta.}$$

Pinta-ala siis pienenee $100 \% - 96 \% = 4 \%$.

Vastaus: 4 %

- b)** Uusi kanta on $100 \% - 20 \% = 80 \%$ vanhasta kannasta eli siihen nähden 0,8-kertainen. Uusi kanta on siis $0,8 \cdot 11 \text{ cm} = 8,8 \text{ cm}$.

Uusi korkeus on $100 \% + 20 \% = 120 \%$ vanhasta korkeudesta eli siihen nähden 1,2-kertainen. Uusi korkeus on siis $1,2 \cdot 7 \text{ cm} = 8,4 \text{ cm}$.

Suorakulmion alkuperäinen pinta-ala oli $11 \text{ cm} \cdot 7 \text{ cm} = 77 \text{ cm}^2$ ja uusi pinta-ala $8,8 \text{ cm} \cdot 8,4 \text{ cm} = 73,92 \text{ cm}^2$.

$$\frac{73,92}{77} = 0,96, \text{ joten uusi pinta-ala on } 96 \% \text{ vanhasta pinta-alasta.}$$

Pinta-ala siis pienenee $100 \% - 96 \% = 4 \%$.

Vastaus: 4 %

K2. Autojen kuukausimyyntin oletetaan kasvavan eksponentiaalisesti, joten sitä voidaan mallintaa eksponenttifunktiolla tai geometrisellä lukujonolla. Mallit A ja C ovat lineaarisia, joten vain mallit B ja D voivat olla oikeita.

Mallin B mukaan ensimmäisenä kuukautena myytyjen autojen määrä on $f(1) = 10\,000 \cdot 1,1^1 = 11\,000$, joten malli B on väärä.

Mallissa D ensimmäisenä kuukautena myytyjen autojen määrä on 10 000 ja toisena kuukautena myytyjen autojen määrä $a_2 = 10\,000 \cdot 1,1^{2-1} = 10\,000 \cdot 1,1 = 11\,000$, ja malli D on geometrinen lukujono, joten malli D on oikea.

Ensimmäisen puolen vuoden aikana myytyjen autojen määrä on geometrinen summa, jossa ensimmäinen yhteenlaskettava on $a_1 = 10\,000$, muutoskerroin $q = 1,1$ ja yhteenlaskettavien määrä $n = 6$. Lasketaan summa.

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q} = \frac{10\,000 \cdot (1 - 1,1^6)}{1 - 1,1} = 77\,156,1 \approx 77\,000$$

Ensimmäisen puolen vuoden aikana myydään mallin mukaan noin 77 000 autoa.

Vastaus: D, 77 000 autoa

- K3.** Kahden peräkkäisen sävelen taajuuksien suhde on vakio, joten taajuudet muodostavat geometrisen lukujonon, jonka jäsenet ovat taulukossa.

Sävel	c'	cis'	d'	dis'	e'	f'	fis'	g'	gis'	a'	ais'	h'	c''
Taajuus	f_0	$k f_0$	$k^2 f_0$	$k^3 f_0$	$k^4 f_0$	$k^5 f_0$	$k^6 f_0$	$k^7 f_0$	$k^8 f_0$	$k^9 f_0$	$k^{10} f_0$	$k^{11} f_0$	$k^{12} f_0$

c'' on lukujonon 13. jäsen ja on suuruudeltaan $2 \cdot c'$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä vakio (suhdeluku) k .

$$\begin{aligned}
 c'' &= 2 \cdot c' \\
 k^{12} \cdot f_0 &= 2 \cdot f_0 \quad || : f_0 \\
 k^{12} &= 2 \\
 k &= (\pm) \sqrt[12]{2} \\
 k &= 1,059463... \\
 k &\approx 1,05946
 \end{aligned}$$

Vastaus: $k = \sqrt[12]{2} \approx 1,059463$

- K4.**
- I** Lausekkeessa on pituusmittojen a ja b tulo, joka kerrotaan vakiolla π . Kahden pituusmitan tulo voi kuvata pinta-alaa.
 - II** Lausekkeessa on pituusmittojen a , b ja b tulo. Kolme pituusmitan tulo voi kuvata tilavuutta.
 - III** Lausekkeessa on pituusmitan c ja c tulo summattuna pituusmittojen a ja a tuloon. Tällöin lausekkeessa lasketaan yhteen pinta-alaa kuvaava mitta pinta-alaa kuvaavaan mittaan, jonka tulos voi kuvata pinta-alaa.
 - IV** Lausekkeessa on pituusmittojen a ja b summa. Kahden pituusmitan summa on pituusmitta, joten lauseke voi kuvata pituutta.
 - V** Lausekkeessa on pituusmittojen x , y ja z tulo, jonka tulos kuvaa tilavuutta. Tämä tulo on jaettu pituusmitalla h , jolloin tulos voi kuvata pinta-alaa.
 - VI** Lausekkeessa on pituusmittojen a , a ja a tulo, jonka tulos voi kuvata tilavuutta.
 - VII** Lausekkeessa on pituusmittojen r ja r tulo, jonka tulos kuvaa pinta-alaa. Pinta-alan neliöjuuri voi kuvata pituutta.

Vastaus: pituutta: IV, VII; pinta-alaa: I, III, V ja tilavuutta: II, VI

- K5. a)** Koska $(x + y)^2 = (x + y)(x + y) = x^2 + xy + xy + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$,
Annin tavassa sieventää binomin neliö häviää termi $2xy$.

Vastaus: $x^2 + 2xy + y^2$

- b)** Jos Annin sieventämä muoto on oikein, on oltava voimassa yhtäsuuruus lausekkeiden välillä. Tällöin

$$\begin{aligned}(x + y)^2 &= x^2 + y^2 \\ x^2 + 2xy + y^2 &= x^2 + y^2 \\ 2xy &= 0\end{aligned}$$

$2xy = 0$ vain silloin, kun joko $x = 0$ tai $y = 0$ tai molemmat ovat 0.

Kolme lukuparia, jotka toteuttavat vaaditun ehdon:

$(0, 0)$, $(0, 1)$ ja $(0, 2)$

Vastaus: esim. $(0, 0)$, $(0, 1)$ ja $(0, 2)$

K6. Merkitään kookospähkinöiden määrää kirjaimella n .
Ensimmäinen merimies ottaa puolet pähkinöistä ja puolikkaan pähkinän
eli $\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}$ kappaletta pähkinöitä.

Toinen merimies ottaa puolet jäljellä olevista pähkinöistä ja puolet puolikkaasta pähkinästä eli

$$\begin{aligned} & \left(n - \left(\frac{1}{2}n + \frac{1}{2} \right) \right) \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \left(\frac{1}{2}n - \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{4}n - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}n \end{aligned}$$

kappaletta pähkinöitä.

Kolmas ottaa jäljellä olevista pähkinöistä puolet ja puolikkaan pähkinän
eli

$$\begin{aligned} & \left(n - \left(\frac{1}{2}n + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{4}n \right) \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ &= \left(\frac{1}{2}n - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}n \right) \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ &= \left(\frac{1}{4}n - \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{8}n - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{8}n + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

kappaletta pähkinöitä.

Apinalle jää tällöin

$$\begin{aligned} & n - \left(\frac{1}{2}n + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{4}n - \left(\frac{1}{8}n + \frac{1}{4} \right) \\ &= \frac{1}{2}n - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}n - \frac{1}{8}n - \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{8}n - \frac{3}{4} \end{aligned}$$

kappaletta pähkinöitä.

Toisaalta apinan saama määrä oli 1 kappale. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä pähkinöiden määrä n .

$$\begin{aligned}\frac{1}{8}n - \frac{3}{4} &= 1 \\ \frac{1}{8}n &= \frac{7}{4} \quad || \cdot 8 \\ n &= 14\end{aligned}$$

Kookospähkinöitä oli 14 kappaletta.

Vastaus: 14 pähkinää

K7. Vuosi 2000 oli karkausvuosi, koska 2000 on 4:llä ja 400:lla jaollinen. Vuoden 2000 alusta vuoden 2100 alkuun on sata vuotta, joista 25 on karkausvuotta. Päivien määrä on $75 \cdot 365 + 25 \cdot 66 = 36\,525$, joka on 5217 viikkoa ja 6 päivää. Tällöin viikonpäivä siirtyy 6 päivällä. Koska 1.1.2000 oli lauantai, on 1.1.2100 on perjantai.

Vuoden 2100 alusta vuoden 2200 alkuun on sata vuotta, joista 24 on karkausvuotta, koska vuosi 2100 ei ole karkausvuosi. Päivien määrä on $76 \cdot 365 + 24 \cdot 366 = 36\,524$, joka on 5217 viikkoa ja 5 päivää. Tällöin viikonpäivä siirtyy 5 päivällä. Koska 1.1.2100 on perjantai, on 1.1.2200 keskiviikko.

Vuoden 2200 alusta vuoden 2300 alkuun on sata vuotta, joista 24 on karkausvuotta, koska vuosi 2200 ei ole karkausvuosi. Päivien määrä on $76 \cdot 365 + 24 \cdot 366 = 36\,524$, joka on 5217 viikkoa ja 5 päivää. Tällöin viikonpäivä siirtyy 5 päivällä. Koska 1.1.2200 on keskiviikko, on 1.1.2300 maanantai.

Vuoden 2300 alusta vuoden 2400 alkuun on sata vuotta, joista 24 on karkausvuotta, koska vuosi 2300 ei ole karkausvuosi. Päivien määrä on $76 \cdot 365 + 24 \cdot 366 = 36\,524$, joka on 5217 viikkoa ja 5 päivää. Tällöin viikonpäivä siirtyy 5 päivällä. Koska 1.1.2300 oli maanantai, on 1.1.2400 on lauantai.

Vastaus: 1.1.2400.

K8. Leivoksen pohjan säde oli aluksi $r_1 = \frac{6,0 \text{ cm}}{2} = 3,0 \text{ cm}$ ja lopuksi

$$r_1 = \frac{5,0 \text{ cm}}{2} = 2,5 \text{ cm}.$$

Leivoksen pohjan pinta-ala on aluksi

$$A_1 = \pi \cdot (3,0 \text{ cm})^2 = 28,274\dots \text{ cm}^2$$

ja lopuksi

$$A_2 = \pi \cdot (2,5 \text{ cm})^2 = 19,634\dots \text{ cm}^2.$$

Pinta-ala tulee siis $\frac{19,634\dots}{28,274\dots} = 0,694\dots$ -kertaiseksi.

Koska leivoksen korkeus ei muutu, niin leivoksen tilavuuskin tulee $0,694\dots$ -kertaiseksi.

Merkitään alkuperäistä tilavuutta kirjaimella V , jolloin uusi tilavuus on $0,694\dots V$.

Merkitään alkuperäistä myyntituloa kirjaimella a ja uutta myyntituloa kirjaimella x . Taulukoidaan tiedot.

Leivoksen tilavuus	Valmistettavien leivosten määrä
V	a
$0,694\dots V$	x

Valmistettavien leivosten määrä on kääntäen verrannollinen leivoksen tilavuuteen. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä uusi myyntitulo x .

$$\frac{1}{0,694\dots} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{a}$$

$$0,694\dots x = a \quad \parallel : 0,694\dots$$

$$x = 1,44a$$

Myytyjen leivosten määrä tulee $1,44$ kertaiseksi alkuperäiseen nähden. Jos myyntihinta pysyisi samana, myyntitulokin tulisi $1,44$ -kertaiseksi.

Otetaan vielä huomioon, että myyntihintaa alennetaan 20% . Koska $100 \% - 20 \% = 80 \%$, niin myyntihinta tulee $0,8$ -kertaiseksi. Lopullinen myyntitulo on siis $0,8 \cdot 1,44a = 1,152a$, joten myyntitulo nousee $115,2 \% - 100 \% = 15,2 \% \approx 15 \%$.

Vastaus: 15%

K9. Yhden paperikerroksen paksuus on $0,1 \text{ mm} = 0,01 \text{ cm}$ ja paperia tulee rullan molemmiin puolin.

Paperin paksuus on $12,0 \text{ cm} - 4,5 \text{ cm} = 7,5 \text{ cm}$, joten paperikerroksien määrä on $\frac{7,5 \text{ cm}}{2 \cdot 0,01 \text{ cm}} = 375$.

Paperin sisimmän kerroksen pituus on sellaisen ympyrän kehän pituus, jonka halkaisija on $4,5 \text{ cm}$. Tämä kehän pituus on $\pi \cdot 4,5 \text{ cm}$.

Toiseksi sisimmän kerroksen pituus on sellaisen ympyrän kehän pituus, jonka halkaisija on $4,5 \text{ cm} + 2 \cdot 0,01 \text{ cm}$. Tämä kehän pituus on $\pi \cdot (4,5 \text{ cm} + 0,02 \text{ cm}) = \pi \cdot 4,5 \text{ cm} + \pi \cdot 0,02 \text{ cm}$.

Vastaavasti kolmannen paperikerroksen pituus on $\pi \cdot 4,5 \text{ cm} + 2 \cdot \pi \cdot 0,02 \text{ cm}$.

Paperikerrosten pituudet muodostavat aritmeettisen lukujonon, jonka ensimmäinen jäsen on $a_1 = \pi \cdot 4,5 \text{ cm} = 14,137\dots \text{ cm}$ ja erotusluku $d = \pi \cdot 0,02 \text{ cm} = 0,0628\dots \text{ cm}$.

Paperin kokonaispituus on aritmeettinen summa, jonka yhteenlaskettavien määrä on $n = 375$, ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = 14,137\dots \text{ cm}$ ja viimeinen yhteenlaskettava $a_{375} = \pi \cdot 4,5 \text{ cm} + 374 \cdot \pi \cdot 0,02 \text{ cm} = 37,636\dots \text{ cm}$.

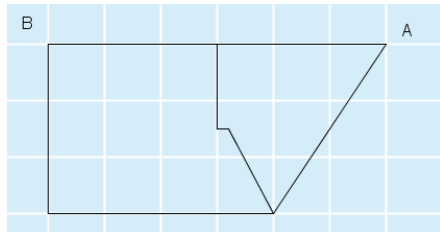
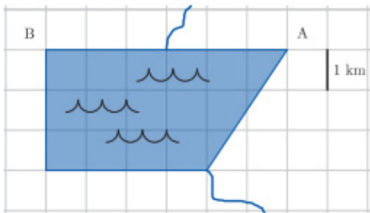
Lasketaan paperin kokonaispituus sijoittamalla aritmeettisen summan kaavaan yhteenlaskettavien määrä $n = 375$, ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = 14,137\dots \text{ cm}$ ja viimeinen yhteenlaskettava $a_{375} = 37,636\dots \text{ cm}$.

$$S_{375} = 375 \cdot \frac{14,137\dots \text{ cm} + 37,636\dots \text{ cm}}{2} = 9707,521\dots \text{ cm}$$

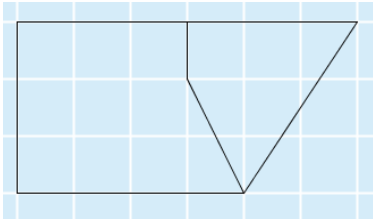
Rullassa on $9\,707,521\dots \text{ cm} = 90,707\dots \text{ m} \approx 90 \text{ m}$ paperia.

Vastaus: 90 m

- K10.** Piirretään kuvaan lain mukainen vesiraja. Jokien kohdalta vesiraja lähtee kulmanpuolittajan suuntaan, kunnes järven keskikohdalla raja kääntyy vaakasuuntaisten rantojen suuntaisesti yhdistäen kulmanpuolittajat.



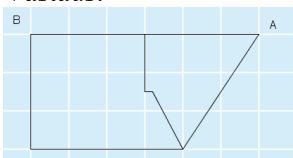
Koska vesialueen pinta-ala tulee arvioida yhden neliökilometrin tarkkuudella eli kuvassa yhden kokonaisen ruudun tarkkuudella, voidaan vesialueen keskellä oleva kulma oikaista arvioita varten siten, että vesialueita rajoittavat vain kulmanpuolittajat, jotka leikkaavat likimain ruudun kulmassa.



Ruutujen perusteella kylän B puolella on 9 kokonaista ruutua ja kolmio, jonka kanta on 1 ja korkeus 2. Kylän B vesialueen pinta-ala on tällöin likimain $9 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 10$ neliökilometriä.

Koko vesialue on puolisuunnikas, jonka pinta-ala on $\frac{6+4}{2} \cdot 3 = 15$ neliökilometriä, joten kylän A puolelle jää tällöin likimain $15 - 10 = 5$ neliökilometriä.

Vastaus:



, 10 km² ja 5 km²

K11. Taulukoidaan mahdollisia vastaavuuksia frekvenssien mukaan.

Kirjain tekstissä	Frekvenssi tekstissä	Mitä voisi vastata todellisuudessa?
A	8	I, T tai N
B	2	
J	10	A
N	3	
P	1	
R	6	I, T tai N
T	4	S tai E
U	3	L, O, K tai U
X	2	
Y	3	L, O, K tai U
Z	1	
Ö	5	N tai T

Huomataan, että kirjainta J esiintyy viestissä eniten, joten se vastaa ilmeisesti kirjainta A. Toiseksi eniten viestissä esiintyy kirjainta A, joten se vastaa kirjainta I, T tai N. Seuraavaksi eniten esiintyy kirjainta R, joka on tällöin myös jokin kirjaimista I, T tai N. Myös Ö-kirjaimella on muita jäljellä olevia kirjaimia enemmän, joten se voisi olla N tai T. Kokeillaan viidenteen sanaan eri vaihtoehtoja, koska siinä on lähinnä pelkästään näitä kirjaimia. Huomataan, että kolmanneksi viimeinen sana valinnoilla $A = T$, $R = I$, $J = A$ ja $X = N$ on TIIÖTAINA = TIISTAINA.

Viimeisessä sanassa on paljon näitä samoja kirjaimia, joten kokeillaan taulukossa listattuja vaihtoehtoja puuttuviin. tAtSITyISTA. Järkevä sana on KAKSITOISTA. Nyt tunnetaan:

Kirjain tekstissä	Mitä voisi vastata todellisuudessa?
A	T
B	
J	A
N	
P	
R	I
T	K
U	L tai U
X	L tai U
Y	O
Z	
Ö	S

Neljäs sana on nyt TAAKSn, joten N = E.

Toiseksi viimeinen sana on nyt KEuuO, joten U = L.

Viesti on nyt

ApExTTI SAAzbb TALON TAAKSE TIISTAINA KELLO
KAKSITOISTA:

Viimeisten puuttuvien kirjainten täytyy olla P = G, X = N, Z = P ja B = U.

Viesti on siis

AGENTTI SAAPUU TALON TAAKSE TIISTAINA KELLO
KAKSITOISTA.

Vastaus: AGENTTI SAAPUU TALON TAAKSE TIISTAINA KELLO
KAKSITOISTA.

YLIOPIILASKOKEEN B-OSAN OHJELMISTOT SALLITTU

- K12. a)** Nopan silmälukujen tilastolliset todennäköisyydet ovat yhtä suuret kuin niiden suhteelliset frekvenssit, jotka lasketaan jakamalla esiintymiskertojen määrä toistojen määrällä eli 102:lla.

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2	Silmäluku	1	2	3	4	5	6
3	Esiintymiskerrat	15	21	12	17	18	19
4	Tilastollinen todennäköisyys	0,147	0,206	0,118	0,167	0,176	0,186

Vastaus:

Silmäluku	1	2	3	4	5	6
Tilastollinen todennäköisyys	0,147	0,206	0,118	0,167	0,176	0,186

- b)** Tilastollisen todennäköisyyden poikkeama klassinen todennäköisyydestä lasketaan jakamalla tilastollinen todennäköisyys teoreettisella todennäköisyydellä ja selvittämällä kuinka paljon suhde on suurempi tai pienempi kuin 1. Jokaisen nopan silmäluvun klassinen todennäköisyys on $\frac{1}{6} = 0,1666\dots$

Poikkeama on alaspäin silloin, kun tilastollinen todennäköisyys on pienempi kuin klassinen todennäköisyys, ja ylöspäin, kun tilastollinen todennäköisyys on suurempi kuin klassinen todennäköisyys.

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2	Silmäluku	1	2	3	4	5	6
3	Esiintymiskerrat	15	21	12	17	18	19
4	Tilastollinen todennäköisyys	0,1471	0,2059	0,1176	0,1667	0,1765	0,1863
5	Klassinen todennäköisyys	0,1667	0,1667	0,1667	0,1667	0,1667	0,1667
6	Poikkeama	0,117647	0,235294	0,294118	0	0,058824	0,117647
7	Poikkeama prosenteissa	11,8	23,5	29,4	0,0	5,9	11,8
8							

Vastaus: 11,8 % pienempi, 23,5 % suurempi, 29,4 % pienempi, sama, 5,9 % suurempi ja 11,8 % suurempi

c) Lasketaan yhden heiton silmäluvun odotusarvo.

$$1 \cdot \frac{15}{102} + 2 \cdot \frac{21}{102} + 3 \cdot \frac{12}{102} + 4 \cdot \frac{17}{102} + 5 \cdot \frac{18}{102} + 6 \cdot \frac{19}{102} = \frac{365}{102} \approx 3,578...$$

Tuhannen heiton silmälukujen summa on yhden heiton silmäluvun odotusarvo tuhatkertaisena.

Tuhannen heiton silmälukujen summan odotusarvo on

$$\frac{365}{102} \cdot 1000 = 3578,4... \approx 3578.$$

Vastaavasti klassisen todennäköisyyden perusteella:

Yhden heiton silmäluvun odotusarvo on

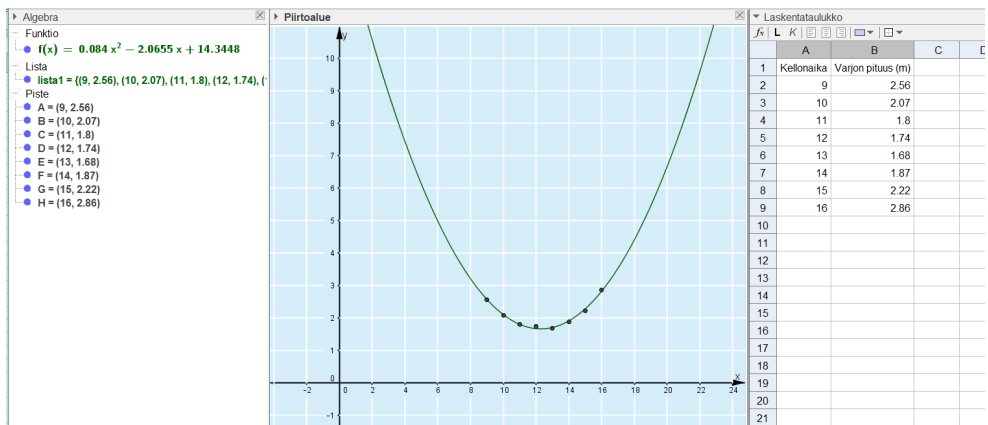
$$1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{2} = 3,5.$$

Tuhannen heiton silmälukujen summan odotusarvo on

$$1000 \cdot 3,5 = 3500.$$

Vastaus: 3578 ja 3500

K13. a) Sovitetaan toisen asteen polynomi aineistosta tehtyyn hajontakuviin.



Polynomiksi saadaan $f(x) = 0,0840x^2 - 2,0655x + 14,3448$.

Vastaus: $f(x) = 0,0840x^2 - 2,0655x + 14,3448$

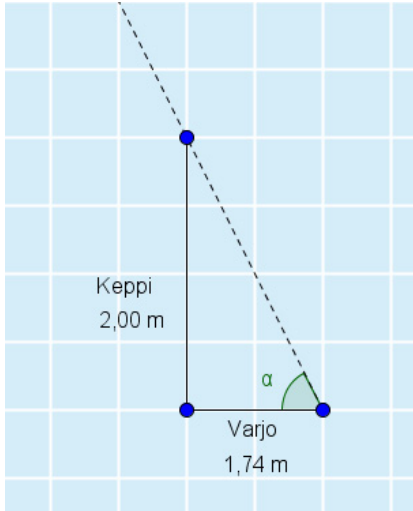
b) Lasketaan varjon pituus kello 7.

$$f(7) = 4,004\dots \approx 4,0 \text{ m.}$$

Vastaus: 4,0 m

c) Varjon pituus kello 12 on 1,74 m.

Varjo muodostaa kepin ja auringon säteen kanssa suorakulmaisen kolmion.



Lasketaan kulma α tangentin avulla.

$$\begin{aligned}\tan \alpha &= \frac{2,00}{1,74} \\ \alpha &= 48,976\dots^\circ \\ \alpha &\approx 49^\circ\end{aligned}$$

Aurinko paistaa 49° kulmassa maahan nähden.

Vastaus: 49°

- K14. a)** Säännön mukaan ympyrän pinta-ala on neliön pinta-ala, kun neliön sivun pituus on $\frac{8}{9}$ ympyrän halkaisijasta.

Ympyrän halkaisijaa $d = 5$ vastaavan neliön sivun pituus on $\frac{8}{9} \cdot 5 = \frac{40}{9}$.

Vastaavan neliön pinta-ala on $\left(\frac{40}{9}\right)^2 = \frac{1600}{81} = 19,753... \approx 19,75$.

Vastaus: $\frac{1600}{81} \approx 19,75$

- b)** Ympyrän säde on $r = \frac{5}{2} = 2,5$.

Lasketaan ympyrän pinta-ala.

$$A = \pi r^2 = \pi \cdot 2,5^2 = 19,634...$$

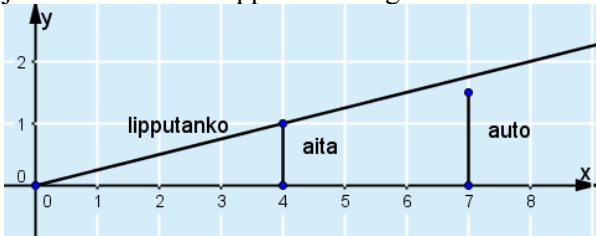
Kohdassa a laskettu pinta-ala on liian suuri. Lasketaan, kuinka monta prosenttia a-kohdassa laskettu pinta-ala on suurempi kuin ympyrän pinta-ala.

$$\frac{A_a}{A_b} = \frac{19,753...}{19,634...} = 1,00601... = 100,601... \%$$

Kohdassa a laskettu pinta-ala on $100,601... \% - 100 \% = 0,601... \% \approx 0,6 \%$ liian suuri.

Vastaus: 0,6 % liian suuri

- K15. a)** Piirretään tilanne koordinaatistoon siten, että ruudun sivun pituus on 1 m. Havainnollistetaan lipputankoa puolisuoralla, aitaa ja autoa janalla. Asetetaan lipputanko origoon.



Kuvan perusteella lipputanko ei osu autoon, koska lipputanko ei katkea.

Vastaus: ei voi

- b)** Jos lipputanko osuu autoon, pitäisi aidan huipun ja origon kautta kulkevan suoran kulkea myös pisteen $(7, y)$ kautta, jossa $y > \frac{3}{2}$. Muodostetaan origon ja aidan huipun $(4, 1)$ kautta kulkevan suoran yhtälö sopivalla ohjelmalla.

1	Suora[(0,0), (4,1)]
☐	$\rightarrow y = \frac{1}{4} x$

Lasketaan suoran pisteen y -koordinaatti, kun $x = 7$.

1	$k := \text{Suora}[(0,0), (4,1)]$
☒	$\rightarrow k : y = \frac{1}{4} x$
2	$\text{Sijoita}[k, x=7]$
☐	$\rightarrow y = \frac{7}{4}$

Koska $\frac{7}{4} = 1,75 > 1,5$, lipputanko jää auton yläpuolelle eikä siis osu autoon.

Vastaus: ei voi

K16. Koska tasasivuisen kolmion sivujen mitat muodostavat geometrisen jonon, myös pyörrealoen terälehtien pinta-alat muodostavat geometrisen lukujonon.

Lehtien sivujen pituuksien suhde on $k = \frac{3,8 \text{ cm}}{4,0 \text{ cm}} = 0,95$, joten lehtien pinta-alojen suhde on $k^2 = 0,95^2 = 0,9025$. Pinta-alojen suhde on myös geometrisen lukujonon suhdeluku q .

Lukujonon ensimmäinen jäsen on 4,0 cm sivun mitaltaan olevan tasasivuisen kolmion pinta-ala. Lasketaan uloimman lehden pinta-ala. Kaavakokoelman kaavan mukaan pinta-ala on

$$\frac{(4 \text{ cm})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 6,928... \text{ cm}^2.$$

Lasketaan lehtien muodostaman geometrisen lukujonon 15 ensimmäisen jäsenen summa.

$$S_{15} = 6,928... \text{ cm}^2 \cdot \frac{1 - 0,9025^{15}}{1 - 0,9025} = 55,806... \text{ cm}^2$$

Koska pyörrealoessa on 5 spiraalia, on lehti pinta-alaa yhteensä $5 \cdot 55,806... \text{ cm}^2 = 279,032... \text{ cm}^2 \approx 280 \text{ cm}^2$.

Vastaus: 280 cm²

K17. Pohjan säde on $r = \frac{52}{2}$ cm = 2,6 dm ja korkeus $h = 7,6$ dm.

Ympyrälieriön tilavuus on

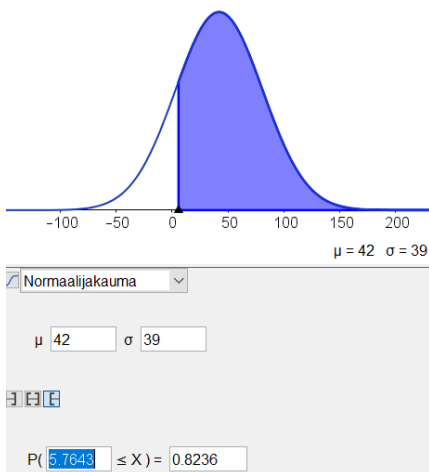
$$V = \pi r^2 h = \pi \cdot (2,6 \text{ dm})^2 \cdot 7,6 \text{ dm} = 161,402... \text{ dm}^3 = 161,402... \text{ l.}$$

Tilavuus vastaa $\frac{161,402...}{28} = 5,764...$ millimetrin sademäärää.

Sademäärä noudattaa jakaumaa $N(42, 39)$.

Sopivalla ohjelmalla saadaan todennäköisyys

$$P(X \geq 5,764...) = 0,8235... \approx 0,82.$$



Vastaus: 0,82

- K18. a)** Muodostetaan Newtonin painovoimalain avulla vetovoima etäisyyden funktiona sijoittamalla annetut tiedot lausekkeeseen.

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

$$m_1 = 50 \text{ kg}$$

$$m_2 = 70 \text{ kg}$$

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11}$$

$$F(r) = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{50 \cdot 70}{r^2}$$

$$F(r) = \frac{2,3345 \cdot 10^{-7}}{r^2}$$

Lasketaan voiman suuruus, kun Pihla ja Santeri ovat 10 metrin etäisyydellä toisistaan.

CAS	
1	$F(r) := 2.3345 \cdot 10^{-7} / r^2$
2	$\rightarrow F(r) := \frac{4669}{200000000000 r^2}$
3	$F(10)$
	$\rightarrow \frac{4669}{200000000000}$
	$\$2$
	$\approx 2.3345 \cdot 10^{-9}$

Muodostetaan kaksinkertaisen vetovoiman avulla yhtälö ja ratkaistaan se sopivalla ohjelmalla.

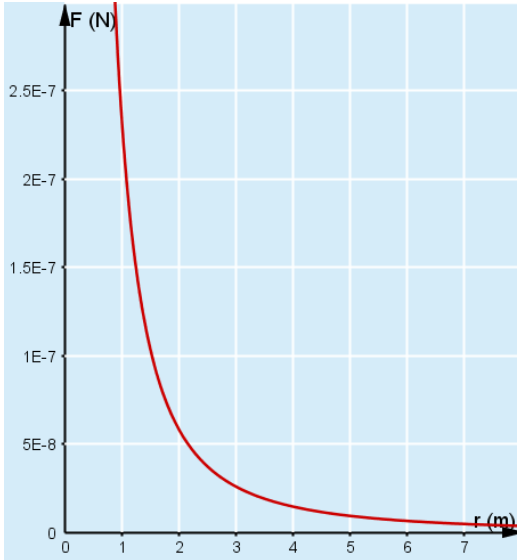
$$F(r) = 2 \cdot F(10)$$

1	$F(r) := 2.3345 \cdot 10^{-7} / r^2$
2	$\rightarrow F(r) := \frac{4669}{200000000000 r^2}$
3	Ratkaise[F(r)=2*F(10),r]
	$\rightarrow \{r = -5\sqrt{2}, r = 5\sqrt{2}\}$
	$\$2$
	$\approx \{r = -7.0710678119, r = 7.0710678119\}$

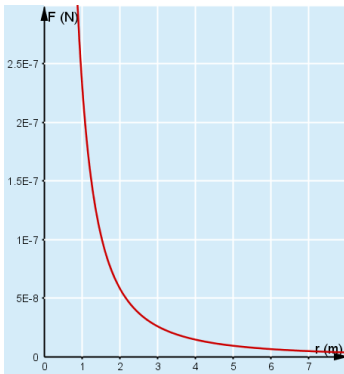
Etäisyys ei voi olla negatiivinen, joten Santerin ja Pihlan tulisi olla n. 7 metrin etäisyydellä.

Vastaus: 7 m

b) Piirretään a-kohdassa muodostetun funktion kuvaaja.

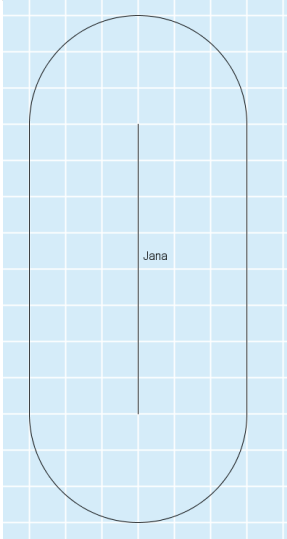


Vastaus:



- K19. a)** Käyrä muodostuu janan ympärille. Janan suuntaisesti molemmin puolin 3,0 cm:n etäisyydelle janaa muodostuvat uudet janat, sillä jokaisen uuden janan piste on 3,0 cm:n päässä alkuperäisestä janasta.

Janan päässä käyrä kaartuu puoliympyräksi, jonka säde on 3,0 cm, sillä puoliympyrän kaaren jokainen piste on 3,0 cm:n päässä janan päätepisteestä. Käyrä muodostaa juoksuradan muotoisen kuvion.



- b)** Ura koostuu kahdesta 8,0 cm mittaisesta janasta ja ympyrästä, jonka säde on 3,0 cm.

Uran pituus on $2 \cdot 8,0 \text{ cm} + 2\pi \cdot 3,0 \text{ cm} = 34,849\dots \text{ cm} \approx 35 \text{ cm}$.

Vastaus: 35 cm

- c)** Leppäkertulta kuluu matkaan
- $$\frac{34,849\dots \text{ cm}}{2,0 \text{ cm/s}} = 17,424\dots \text{ s} \approx 17 \text{ s}.$$

Vastaus: 17 s

K20. Pelaajan A todennäköisyys menettää x^3 markkaa on $\frac{1}{6}$ ja todennäköisyys

saada x markkaa on $\frac{5}{6}$. Näin ollen pelaajalle A voiton odotusarvo on

$$\frac{1}{6} \cdot (-x^3) + \frac{5}{6} \cdot x = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{5}{6}x.$$

Tutkitaan polynomifunktiota $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{5}{6}x$.

Tutkitaan sopivalla ohjelmalla, millä muuttujan x arvoilla funktion f arvot ovat positiivisia.

$$f(x) := -1/6 * x^3 + 5/6 * x$$

$$\rightarrow f(x) := -\frac{1}{6}x^3 + \frac{5}{6}x$$

$$\text{Ratkaise}(f(x) > 0)$$

$$\approx \{x < -2.2360679775, 0 < x < 2.2360679775\}$$

Funktion f arvo eli voiton odotusarvo on positiivinen, kun $x < -2,236\dots$ tai $0 < x < 2,236\dots$

Tutkitaan epäyhtälön avulla sopivalla ohjelmalla, millä muuttujan arvoilla funktion f derivaatta on positiivinen.

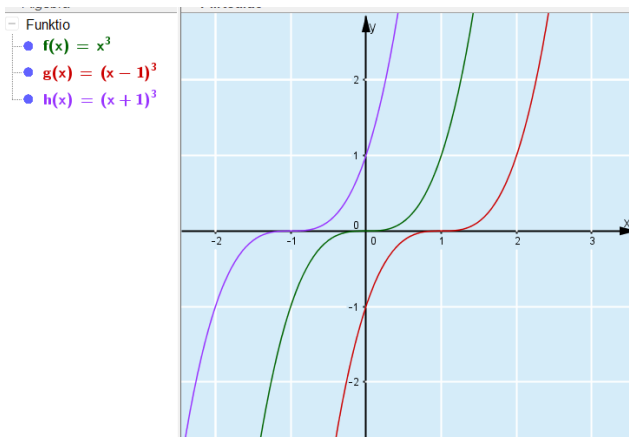
$$\text{Ratkaise}(f'(x) > 0)$$

$$\approx \{-1.290994448736 < x < 1.290994448736\}$$

Epäyhtälön ratkaisuksi saadaan $-1,290\dots < x < 1,290\dots$, joten funktio f saa suurimman arvonsa, kun $x = 1,291\dots \approx 1,29$.

Vastaus: $-2,24 < x < 2,24$ ja $x = 1,29$

K21. a) Piirretään funktioiden kuvaajat sopivalla ohjelmalla.

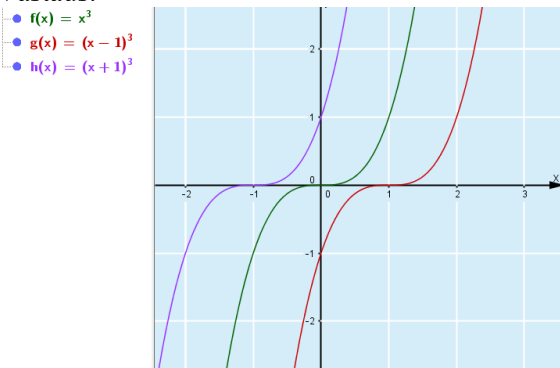


Funktiossa $g(x)$ vähennetään muuttujan x arvosta 1 verrattuna funktioon $f(x)$ ja kuvaaja siirtyy oikealle yhden yksikön.

Funktiossa $h(x)$ muuttujan x arvoon lisätään 1 verrattuna funktioon $f(x)$ ja kuvaaja siirtyy vasemmalla yhden yksikön.

Kaikki kolme kuvaajaa ovat yhdenmuotoisia, ja ne saadaan toisistaan siirtymällä sivusuunnassa.

Vastaus:



Kuvaajat ovat yhdenmuotoiset, ja ne saadaan toisistaan siirtymällä sivusuunnassa.

- b) Funktio i on samaa tyyppiä kuin a-kohdan funktio g . Näin ollen funktio i on yhdenmuotoinen a-kohdan funktion f kanssa, mutta nollakohta on siirtynyt oikealla 1000 yksikköä.

Vastaus: Funktio i on yhdenmuotoinen funktion f kanssa, mutta i on siirtynyt 1000 yksikköä oikealle funktion f kuvaajaan nähden.

- c) Paraabeli $y = x^2$ on origossa x -akselia sivuava paraabeli, joten sen ainoa nollakohta on $x = 0$.

Pyydetyn funktion nollakohta $x = -3$ on kolme yksikköä origon vasemmalla puolella, joten a-kohdan perusteella uuden paraabelin yhtälö on $y = (x + 3)^2$.

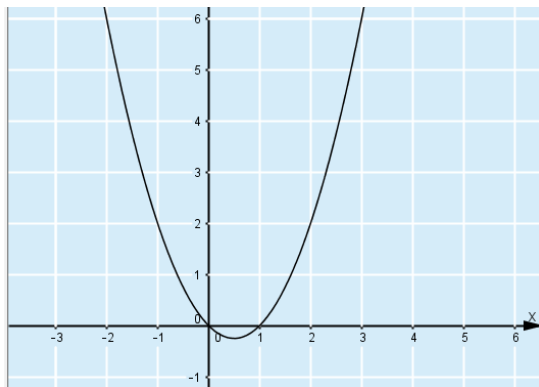
Funktiona:

$$f(x) = (x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

Vastaus: $f(x) = (x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$

d) Piirretään funktion kuvaaja.

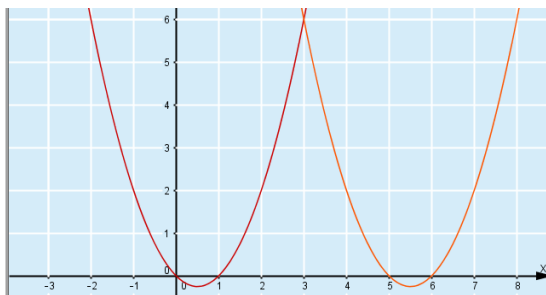
$$f(x) = x^2 - x$$



Koska paraabelia siirretään oikealla 5 askelta, tulee x -koordinaateista vähentää 5. Muodostetaan funktio $g(x) = f(x - 5)$ sopivalla ohjelmalla.

1	$f(x) := x^2 - x$
•	$\rightarrow f(x) := x^2 - x$
2	$g(x) := f(x-5)$
•	$\rightarrow g(x) := x^2 - 11x + 30$

• $f(x) = x^2 - x$
• $g(x) = x^2 - 11x + 30$



Pyydetty funktio on $g(x) = x^2 - 11x + 30$.

Vastaus: $g(x) = x^2 - 11x + 30$

K22. Merkitään pois leikattavan neliön sivun pituutta millimetreinä kirjaimella x .

Rasian pohja muodostuu pahvin keskelle jäävästä suorakulmiosta, jonka sivujen pituudet millimetreinä ovat $297 - 2x$ ja $210 - 2x$. Rasian korkeus on x .

Laatikon tilavuus on

$$V(x) = (297 - 2x)(210 - 2x)x = 4x^3 - 1014x^2 + 62\,370x.$$

Poisleikattavan neliön sivun pituus voi pienimmillään olla 0 mm ja suurimmillaan $\frac{210 \text{ mm}}{2} = 105 \text{ mm}$.

Määritetään funktion V suurin arvo suljetulla välillä $[0, 105]$. Polynomifunktio saa suljetulla välillä suurimman arvonsa välin päätepisteessä tai välille kuuluvassa derivaatan nollakohdassa.

Derivoidaan funktio V .

$$V'(x) = 12x^2 - 2028x + 62\,370$$

Lasketaan derivaatan nollakohdat sopivalla ohjelmalla yhtälöstä

$$V'(x) = 0.$$

$$12x^2 - 2028x + 62\,370 = 0$$

Ohjelmalla yhtälön ratkaisuiksi saadaan

$$x = 40,423\dots \text{ tai } x = 128,576\dots$$

Jälkimmäinen yhtälön ratkaisusta ei kuulu tarkasteltavalle välille, joten lasketaan funktion V arvot kohdissa $x = 0$, $x = 40,423\dots$ ja $x = 105$.

$$V(0) = 0$$

$$V(40,423\dots) = 1\,128\,495,104\dots$$

$$V(105) = 0$$

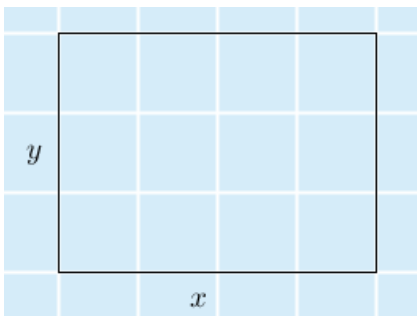
Funktio V saa suurimman arvonsa kohdassa
 $x = 40,423 \dots \text{ mm} \approx 40 \text{ mm} = 4,0 \text{ cm}$.

Funktion V suurin arvo on
 $V(40,423 \dots) = 1\,128\,495,104 \dots \text{ mm}^3$
 $\approx 1\,100\,000 \text{ mm}^3 = 1,1 \text{ dm}^3 = 1,1 \text{ litraa}$.

Rasian tilavuus voi suurimmillaan olla noin 1,1 litraa. Poisleikattavan
neliön sivun pituus on tällöin noin 4,0 cm.

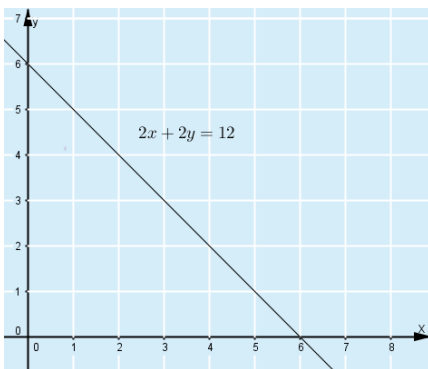
Vastaus: 1,1 litraa, 4,0 cm

K23. a) Havainnollistetaan tilannetta kuvalla.

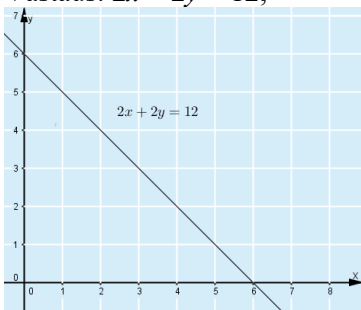


Piiri on 12, joten $2x + 2y = 12$.

Piirretään piirin avulla muodostettu yhtälö koordinaatistoon.



Vastaus: $2x + 2y = 12$,



- b) Ratkaistaan a-kohdan yhtälöstä muuttuja y , kun $x = 3,4$ sopivalla ohjelmalla.

CAS	
1	$s := 2x + 2y = 12$ → $s : 2x + 2y = 12$
2	Ratkaise[Sijoita[s, x=3.4],y] → $\left\{ y = \frac{13}{5} \right\}$
3	\$2 ≈ $\{y = 2.6\}$

Jos toinen sivu on 3,4 cm, niin toinen sivu on 2,6 cm.

Vastaus: 2,6 cm

- c) Jotta kuvio olisi suorakulmio, on molemmilla sivuilla oltava pituus. a-kohdan kuvaajasta nähdään, että toinen sivu on 0 cm, kun toinen sivu on 6 cm. Näin ollen sivun pituus on oltava alle 6 cm. Kokonaislukuilla ehto on: sivun pituus on korkeintaan 5 cm.

Vastaus: 5 cm

- d) Jos sivujen suhde on 1:3, niin $y = 3x$. Muodostetaan yhtälöpari a-kohdan yhtälön kanssa ja ratkaistaan se sopivalla ohjelmalla.

CAS	
1	$s := 2x + 2y = 12$ → $s : 2x + 2y = 12$
2	$l := y = 3x$ → $l : y = 3x$
3	Ratkaise[{s,l},{x,y}] → $\left\{ \left\{ x = \frac{3}{2}, y = \frac{9}{2} \right\} \right\}$
4	\$3 ≈ $\{x = 1.5, y = 4.5\}$

Sivujen pituudet ovat 1,5 cm ja 4,5 cm.

Vastaus: 1,5 cm ja 4,5 cm

e) Muodostetaan suorakulmion pinta-alan funktio.

$$A = xy$$

a-kohdan yhtälön perusteella:

$$2x + 2y = 12$$

$$y = 6 - x$$

Sijoitetaan pinta-ala lausekkeeseen muuttujan y tilalle yllä oleva lauseke.

$$A(x) = x(6 - x) = 6x - x^2$$

Pinta-alan lausekkeen kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, jonka suurin arvo on paraabelin huipun y -koordinaatti. Huipun x -koordinaatti on derivaatan nollakohta. Määritetään derivaatan nollakohta sopivalla ohjelmalla.

1	$A(x) := 6x - x^2$
●	→ $A(x) := -x^2 + 6x$
2	$A'(x)$
○	→ $-2x + 6$
3	Ratkaise[$A'(x)=0, x$]
○	→ $\{x = 3\}$

Jotta pinta-ala olisi mahdollisimman suuri, on sivun x oltava 3 ja silloin sivu $y = 6 - 3 = 3$. Sivujen pituudet tulee olla 3 cm ja 3 cm, jotta suorakulmion pinta-ala olisi mahdollisimman suuri.

Vastaus: 3 cm ja 3 cm

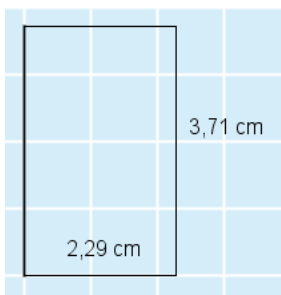
- f) Muodostetaan kultaisen suorakulmion sivujen suhteella yhtälö. Olkoon y lyhempi sivu.

$$\frac{y}{x} = \frac{x}{x+y}$$

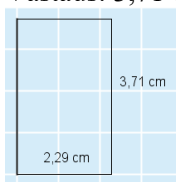
Muodostetaan a-kohdan yhtälön avulla yhtälöpari ja ratkaistaan se sopivalla ohjelmalla.

1	$s := 2x + 2y = 12$
☒	$\rightarrow s : 2x + 2y = 12$
2	$k := y/x = x/(x+y)$
☐	$\rightarrow k : \frac{y}{x} = \frac{x}{x+y}$
3	Ratkaise[{s,k},{x,y}]
☐	$\rightarrow \left\{ \left\{ x = -3\sqrt{5} - 3, y = 3\sqrt{5} + 9 \right\}, \left\{ x = 3\sqrt{5} - 3, y = -3\sqrt{5} + 9 \right\} \right\}$
4	\$3
☐	$\approx \left\{ \{x = -9.7082, y = 15.7082\}, \{x = 3.7082, y = 2.2918\} \right\}$

Kumpikaan sivun pituus ei voi olla negatiivinen, joten sivujen mitat kahden desimaalin tarkkuudella ovat 3,71 cm ja 2,29 cm.



Vastaus: 3,71 cm ja 2,29 cm,



- K24. a)** Suoraan verrannolliset suureet muuttuvat samassa suhteessa, joten niiden suhde on vakio k . Merkitään tyhjenemisnopeutta kirjaimella v . Nyt tyhjenemisnopeus on suoraan verrannollinen tyhjennysaukon halkaisijan toiseen potenssiin. Näin ollen on voimassa yhtälö $v = kd^2$.

Sijoitetaan annetut tiedot yhtälöön ja ratkaistaan vakio k .

$$v = kd^2 \quad || : d^2$$

$$k = \frac{v}{d^2}$$

$$k = \frac{13 \text{ l/min}}{(40 \text{ mm})^2}$$

$$k = 0,008125 \frac{\text{l/min}}{\text{mm}^2}$$

$$\text{Vastaus: } 0,008125 \frac{\text{l/min}}{\text{mm}^2}$$

- b)** Lasketaan a-kohdan lausekkeen ja b-kohdassa selvitetyn vakion k avulla tyhjenemisnopeus, kun suuaukon halkaisija on 38 mm.

$$v = 0,008125 \frac{\text{l/min}}{\text{mm}^2} \cdot (38 \text{ mm})^2 = 11,7325 \text{ l/min} \approx 12 \text{ l/min}$$

$$\text{Vastaus: } 12 \text{ l/min}$$

- c)** Altaasta poistuu vettä 11,7325 l/min. Näin ollen poistuneen veden tilavuus litroina ajan minuutteina funktiona on $V_p(x) = 11,7325x$.

$$\text{Vastaus: } V_p(x) = 11,7325x$$

- d)** Altaaseen lisätään vettä nopeudella 12,5 l/min. Näin ollen altaaseen lisätyn veden tilavuus litroina ajan minuutteina funktiona on $V_l(x) = 12,5x$.

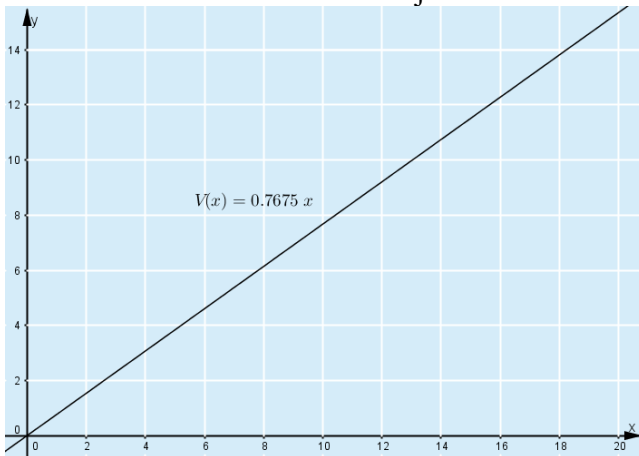
$$\text{Vastaus: } V_l(x) = 12,5x$$

- e) Altaassa olevan veden määrä on lisätyn veden määrän ja poistuvan veden määrän erotus.

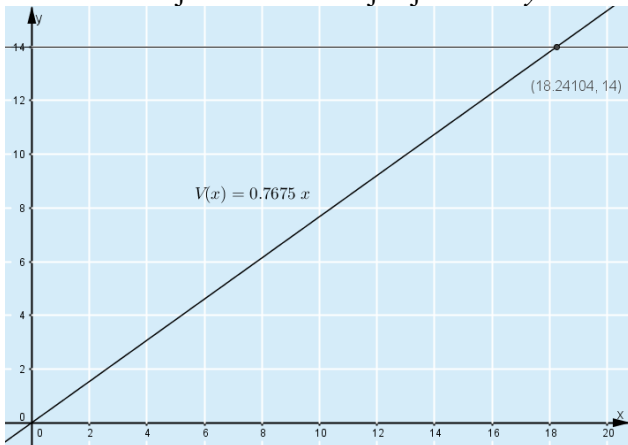
$$V(x) = V_l(x) - V_p(x)$$

$$V(x) = 12,5x - 11,7325x = 0,7675x$$

Piirretään f-kohdan funktion kuvaaja.



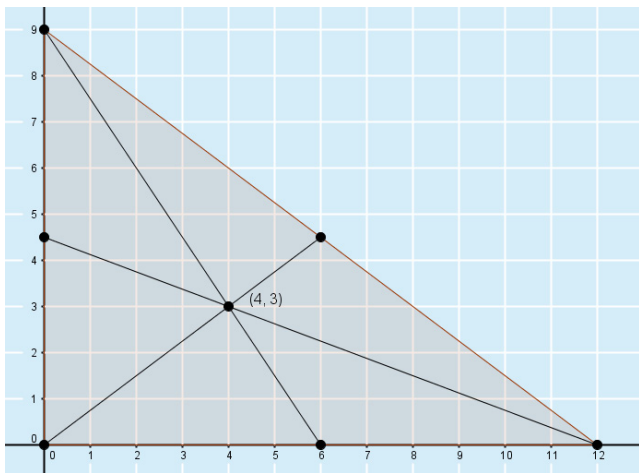
Etsitään kuvaajan avulla kuvaajan ja suoran $y = 14$ leikkauspiste.



Funktion $V(x)$ kuvaaja leikkaa suoran $y = 14$ pisteessä $(18,24; 14)$, joten 14 litran allas täyttyy n. 18 minuutin päästä.

Vastaus: $V(x) = 0,7675x$. Täyttyy 18 minuutissa.

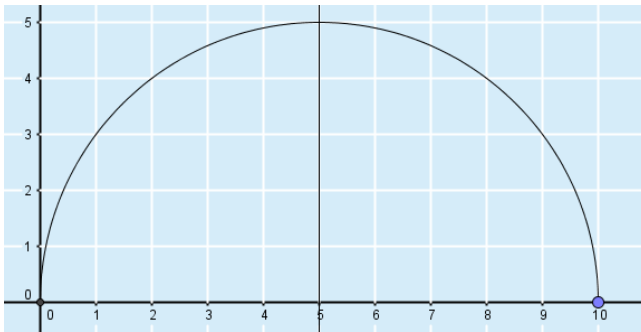
- K25.** a) Piirretään kuvaan kolmion keskijanat. Keskijana on kolmion kärjestä piirretty jana kärjen vastaisen sivun keskipisteeseen.



Ohjelman avulla havaitaan, että keskijanojen leikkauspiste on $(4,3)$, joten kolmion painopiste on $(4,3)$.

Vastaus: $(4,3)$

b) Piirretään puoliympyrälle symmetria-akseli.



Painopiste on symmetria-akselilla. Lasketaan painopisteen etäisyys halkaisijasta annetun kaavan avulla. Puoliympyrän säde on kuvan perusteella 5.

Etäisyys:

$$\frac{2 \cdot 5}{\frac{3\pi}{2}} = \frac{20}{3\pi}$$

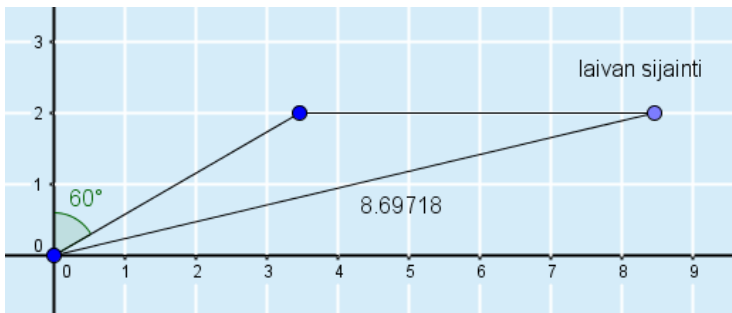
Painopiste on siis suoralla $y = \frac{20}{3\pi}$, koska halkaisija on x -akselilla.

Toisaalta painopiste on symmetria-akselilla, jonka yhtälö on $x = 5$.

Painopiste on näiden suorien leikkauspiste, joka on $\left(5, \frac{20}{3\pi}\right) \approx (5; 2,12)$.

Vastaus: $\left(5, \frac{20}{3\pi}\right) \approx (5; 2,12)$

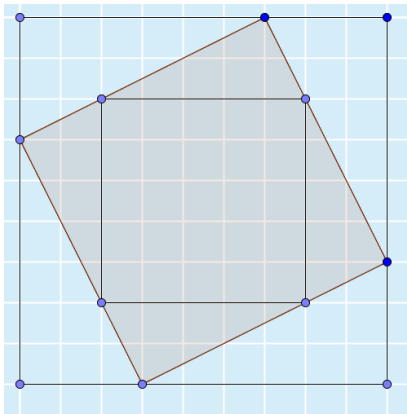
b) Ohjelman mittaus työkalun avulla etäisyydeksi saadaan 8,697... km.



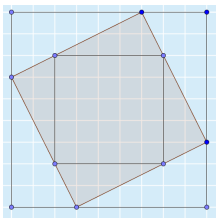
Laiva on n. 8,7 km päässä lähtöpisteestä.

Vastaus: 8,7 km

K27. a) Piirretään kuvion sisemmälle neliölle uudet jakopisteet ja piirretään kolmas neliö.



Vastaus:



- b)** Määritetään kaikkien kolmen neliön pinta-alat piirtämällä neliö monikulmiotyökalulla.

Pinta-alat ovat 81, 45 ja 25.

Vastaus: 81, 45 ja 25

- c)** Geometrisen lukujonon suhdeluku saadaan laskemalla kahden peräkkäisen jäsenen osamäärä.

$$q = \frac{45}{81} = \frac{5}{9}$$

Vastaus: $q = \frac{5}{9}$

- d)** Muodostetaan pinta-alojen geometrinen lukujono, kun $a_1 = 81$ ja $q = \frac{5}{9}$.

$$a_n = 81 \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^{n-1}$$

11. neliön pinta-ala on a_{11} .

$$a_{11} = 81 \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^{11-1} = 0,2268... \approx 0,23$$

Vastaus: 0,23

- e)** Lasketaan pyydetty pinta-alojen suhde.

$$\frac{a_{11}}{a_1} = \frac{81 \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^{10}}{81} = 0,00280... \approx 0,0028.$$

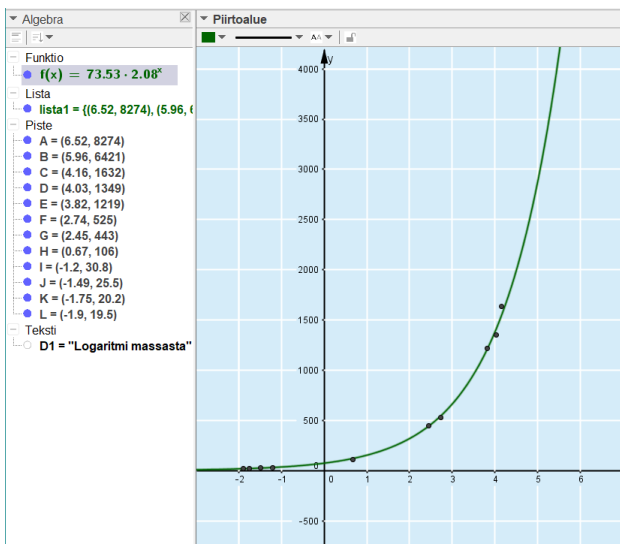
11. neliön pinta-ala on n. 0,28 % ensimmäisen neliön pinta-alasta.

Vastaus: 0,28 %

K28. a) Lasketaan massojen logaritmit omaan sarakkeeseensa.

	A	B	C	D
1	Eläin	Keskimääräinen massa (kg)	Keskimääräinen energian kul...	Logaritmi massasta
2	Nauta	679	8274	6.52
3	Nauta	388	6421	5.96
4	Ihminen, mies	64.1	1632	4.16
5	Ihminen, nainen	56.5	1349	4.03
6	Lammas	45.6	1219	3.82
7	Koira, uros	15.5	525	2.74
8	Koira, naaras	11.6	443	2.45
9	Kana	1.96	106	0.67
10	Kesykyhky	0.3	30.8	-1.2
11	Rotta, uros	0.23	25.5	-1.49
12	Rotta, naaras	0.17	20.2	-1.75
13	Turturikyhky	0.15	19.5	-1.9

b) Sovitetaan massan logaritmien (x -koordinaatti) ja energiankulutuksen (y -koordinaatti) muodostamaan hajontakuvion eksponentiaalinen malli.



Malli on kahden desimaalin tarkkuudella $f(x) = 73,53 \cdot 2,08^x$.

Vastaus: $f(x) = 73,53 \cdot 2,08^x$

- c) Lasketaan energiankulutus, kun kehon massa on 5 kg. Mallissa massasta on laskettu luonnollinen logaritmi, joten malliin sijoitetaan $\ln 5 = 1,609\dots$

$$f(\ln 5) = 238,963\dots \approx 240$$

Energian kulutus on likimain 240 kcal/vrk.

Vastaus: 240 kcal/vrk

- d) Norsun massa on $\frac{4000 \text{ kg}}{0,025 \text{ kg}} = 160\,000$ -kertainen hiiren massaan verrattuna.

Lasketaan mallin mukainen aineenvaihdunta norsulle sekä hiirelle, kuten c-kohdassa.

Norsu:

$$f(\ln 4000) = 73,53 \cdot 2,08^{\ln 4000} = 31\,944,094\dots$$

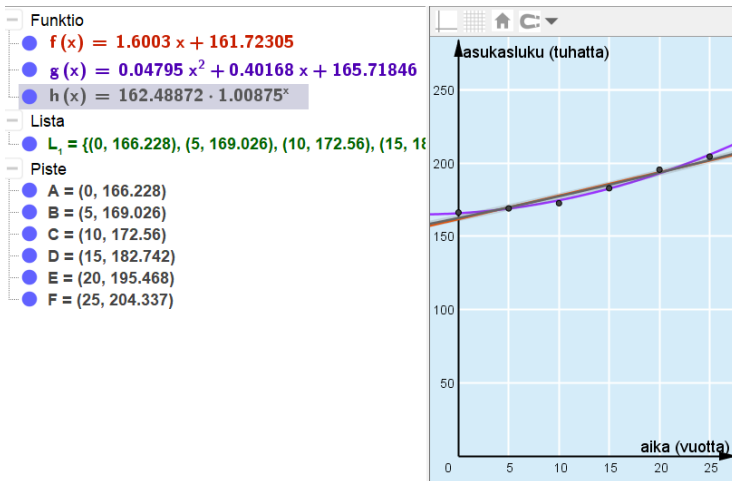
Hiiri:

$$f(\ln 0,025) = 73,53 \cdot 2,08^{\ln 0,025} = 4,933\dots$$

Norsun energiankulutus on $\frac{31944,094\dots}{4,933\dots} = 6474,479\dots \approx 6500$ -kertainen hiiren energiankulutukseen verrattuna.

Vastaus: 160 000-kertainen ja 6500-kertainen

K29. a) Funktioiden kertoimien helpottamiseksi muutetaan asukasluvut tuhansiksi asukkaiksi.



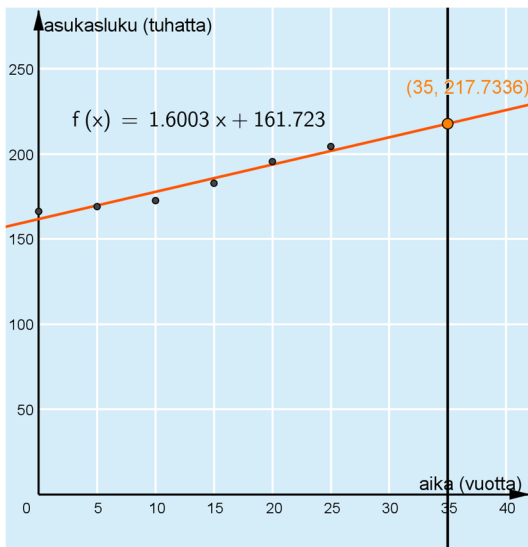
Sovittamalla aineistoon ensimmäisen asteen polynomifunktio sopivalla ohjelmalla yhtälöksi saadaan viiden desimaalin tarkkuudella $f(x) = 1,6003x + 161,72305$.

Sovittamalla aineistoon toisen asteen polynomifunktio sopivalla ohjelmalla malliksi saadaan viiden desimaalin tarkkuudella $g(x) = 0,04795x^2 + 0,40168x + 165,71846$.

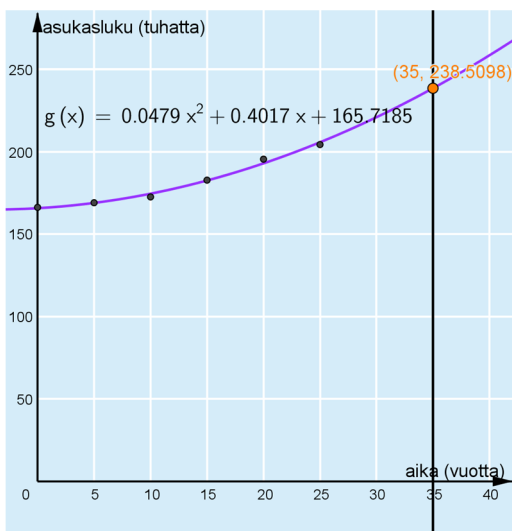
Sovittamalla eksponentiaalinen malli sopivalla ohjelmalla malliksi saadaan viiden desimaalin tarkkuudella $h(x) = 162,48872 \cdot 1,00875^x$.

Vastaus: $f(x) = 1,6003x + 161,72305$;
 $g(x) = 0,04795x^2 + 0,40168x + 165,71846$ ja
 $h(x) = 162,48872 \cdot 1,00875^x$

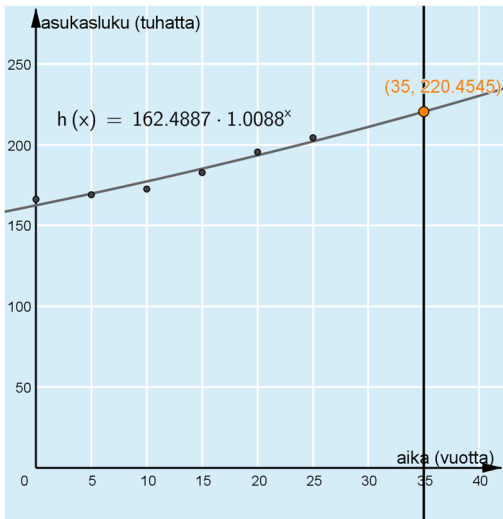
- b) Vuonna 2015 oli kulunut 35 vuotta vuodesta 1980, joten mallin ennustama asukasluku vuodelle 2015 on funktion kuvaajan ja suoran $x = 35$ leikkauspisteen y -koordinaatti. Etsitään leikkauspisteet ohjelman avulla.



Ennuste vuoden 2015 asukasluvuksi on 1. asteen polynomisen mallin mukaan 217,733... tuhatta.



Ennuste vuoden 2015 asukasluvuksi on 2. asteen polynomisen mallin mukaan 238,509... tuhatta.



Ennuste vuoden 2015 asukasluvuksi on eksponentiaalisen mallin mukaan 220,454... tuhatta.

Lasketaan, kuinka monta prosenttia kunkin mallin antama arvio poikkeaa todellisesta tuloksesta.

1. asteen polynomifunktio:

$$\frac{217,733...}{225,118} = 0,9671...$$

1. asteen polynomifunktion antama arvio on
100 % - 96,71... % = 3,28... % liian pieni.

2. asteen polynomifunktio:

$$\frac{238,509...}{225,118} = 1,0594...$$

2. asteen polynomifunktion antama arvio on
105,94... % - 100 % = 5,94... % liian suuri.

EkspONENTTIFUNKTIO:

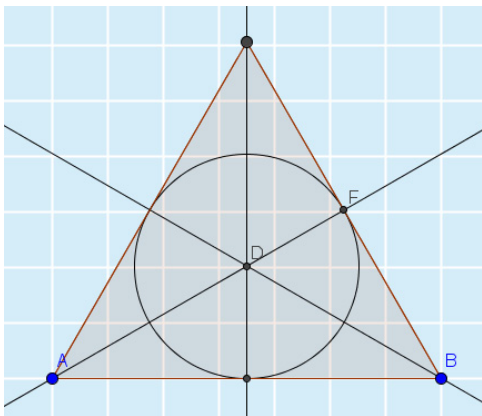
$$\frac{220,454\dots}{225,118} = 0,9792\dots$$

EkspONENTTIFUNKTION antama arvio on $100\% - 97,92\dots\% = 2,07\dots\%$ liian pieni.

Kahdella mallilla kolmesta arvio poikkeaa korkeintaan 4% , joten todennäköisyys, että arpomalla valittu arvio poikkiesi alle 4% , on $\frac{2}{3}$.

Vastaus: $\frac{2}{3}$

- K30.** Saarelle voi rakentaa, jos saaren muodostaman tasasivuisen kolmion sisään mahtuu ympyrä, jonka säde on 100 m. Tällöin saaren keskelle jää alue, joka on yli 100 metrin päässä mistä tahansa rannasta. Koska tasasivuinen kolmio on symmetrinen, suurimman sen sisään piirretyn ympyrän keskipiste on kolmion keskinormaalien leikkauspisteessä. Havainnollistetaan tilannetta kuvalla.



Ohjelmalla voidaan mitata ympyrän säteen ja kolmion sivun pituuden suhde ja määrittää tämän avulla saarelle mahtuvan ympyrän säteen suurin arvo.

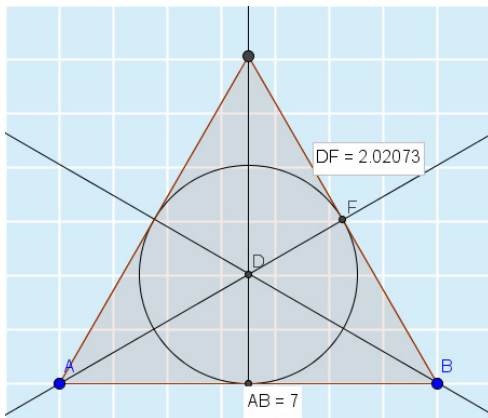
Lasketaan saaren muodostaman kolmion sivun pituus a . Pinta-ala on $5,00 \text{ ha} = 500 \text{ a} = 50\,000 \text{ m}^2$.

Taulukkokirjan kaavan avulla saadaan yhtälö

$$\frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 50\,000.$$

Sopivalla ohjelmalla saadaan kolmion sivun pituudeksi $339,808\dots \text{ m}$.

Kaikki tasasivuiset kolmiot ovat yhdenmuotoisia. Mitataan ohjelman avulla sisään piirretyn ympyrän säde, kun kolmion sivun pituus on 7.



100 m sivuisessa kolmiossa ympyrän säteen suhde on sama kuin yllä lasketussa, joten suurin mahdollinen säteen pituus kyseisellä saarella on siis

$$\frac{2,0207...}{7} \cdot 339,808... = 98,094.... \approx 98 \text{ metriä.}$$

Koska suurimman mahdollisen ympyrän säde on 98 m, ei saarella ole ainoatakaan pistettä, jonka etäisyys lähimmästä rannasta olisi yli 100 m. Saarelle ei siis saa rakentaa.

Vastaus: ei saa

- K31. a)** Lasketaan, kuinka moninkertaiseksi osakkeiden arvo muuttuu ensimmäisen vuoden aikana.

$$100 \% - 15,6 \% = 84,4 \% = 0,844$$

Lasketaan vastaavasti, kuinka moninkertaiseksi osakkeiden arvo muuttuu toisen vuoden aikana.

$$100 \% + 8,1 \% = 108,1 \% = 1,081$$

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä luku q , joka ilmaisee, kuinka moninkertaiseksi osakkeiden kurssi kolmannen vuoden aikana muuttuu.

$$1200 \cdot 0,844 \cdot 1,081 \cdot q = 1200$$

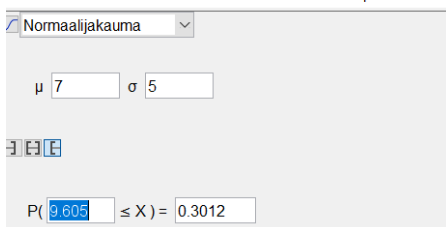
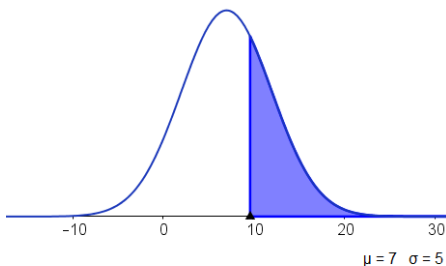
$$1094,8368q = 1200 \quad || :1094,8368$$

$$q = 1,096\dots$$

Osakkeiden kurssin tulisi kolmantena vuonna tulla 1,096...-kertaiseksi eli nousta $109,60\dots\% - 100 \% = 9,60\dots\% \approx 9,6 \%$.

Vastaus: 9,6 %

- b)** Kurssinousu noudattaa jakaumaa $N(7,0 \%; 5,0 \%)$. Sopivalla ohjelmalla saadaan todennäköisyydeksi $P(X \geq 9,60\dots\%) = 0,301\dots \approx 0,30$.



Vastaus: 0,30

- K32. a)** Syöttämällä ohjelmaan pistelista $(1, 15), (2, 57), (3, 179), (4, 453)$ ja $(5, 975)$ saadaan sovitustoiminnolla polynomifunktio $f(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5$.

Näin olleen lukujonon analyyttinen sääntö on $a_n = n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 4n + 5$.

Vastaus: $a_n = n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 4n + 5$

- b)** Lukujonon 10. jäsen on $a_{10} = 12\,345$.

Vastaus: $a_{10} = 12\,345$

- c) Lasketaan taulukkolaskentaohjelmalla lukujonon jäseniä. Lasketaan vierekkäiseen sarakkeeseen lukujonon jäsenien summa aina kyseiseen jäseneseen.

Jäsensarakkeessa (solu B2) on kaava
 $=A2^4+2*A2^3+3*A2^2+4*A2+5$.

Summasarakkeessa (solu C2) on kaava
 $=SUMMA(B\$2:B2)$.

Kopioidaan kaavoja alaspäin.

	A	B	C
1	n	Jäsen	Summa
2	1	15	15
3	2	57	72
4	3	179	251
5	4	453	704
6	5	975	1679
7	6	1865	3544
8	7	3267	6811
9	8	5349	12160
10	9	8303	20463
11	10	12345	32808
12	11	17715	50523
13	12	24677	75200
14	13	33519	108719
15	14	44553	153272
16	15	58115	211387
17	16	74565	285952
18	17	94287	380239
19	18	117689	497928
20	19	145203	643131
21	20	177285	820416
22	21	214415	1034831
23	22	257097	1291928
24	23	305859	1597787
25	24	361253	1959040
26	25	423855	2382895
27	26	494265	2877160
28	27	573107	3450267

Taulukkolaskentaohjelman avulla huomataan, että, kun $n = 25$, summa ylittää 2 000 000.

Vastaus: 25 jäsentä

- K33. a)** Merkitään pohjan sädettä kirjaimella r . Olkoon säteen yksikkö desimetri, sillä astian tilavuus on $1 \text{ l} = 1 \text{ dm}^3$.
Ympyrälieriön pohjan-alan lauseke on tällöin πr^2 .

Ympyrälieriön vaippa on suorakulmio, jonka toinen sivu on pohjan piiri ja toinen lieriön korkeus h .

Koska lieriön tilavuus $V = A_p \cdot h$, niin korkeus säteen avulla lausuttuna

$$\text{on } h = \frac{V}{A_p} = \frac{1 \text{ dm}^3}{\pi r^2}.$$

Pohjaympyrän kehän pituus on $2\pi r$, joten vaipan alan lauseke on

$$2\pi r \cdot \frac{1 \text{ dm}^3}{\pi r^2} = \frac{2}{r} \text{ dm}^3.$$

Vastaus: $A_{\text{pohja}} = \pi r^2$ ja $A_{\text{vaippa}} = \frac{2}{r}$, kun säde on desimetreinä

- b)** Muunnetaan materiaalien hinnat neliödesimetrien mukaisiksi hinnoiksi.

$$\text{Pohjamateriaali } 0,2 \text{ snt/cm}^2 = 20 \text{ snt/dm}^2$$

$$\text{Vaippamateriaali } 0,3 \text{ snt/cm}^2 = 30 \text{ snt/dm}^2$$

Astiaan kuluu rahaa sentteinä

$$2 \cdot \pi r^2 \cdot 20 + \frac{2}{r} \cdot 30 = 40\pi r^2 + \frac{60}{r}, \text{ kun säde } r \text{ on desimetreinä.}$$

Vastaus: $40\pi r^2 + \frac{60}{r}$, kun säde r on desimetreinä

c) Etsitään b-kohdan lausekkeen pienin arvo sopivan ohjelman avulla.

$f(r) = 40\pi r^2 + 60 / r$			
Väli	Pisteet		
Ominaisuus	Arvo		
Min	(0.6204 , 145.0793)		
Max	(1.2 , 230.9557)		
Nollakohta	Ei juuria		
0.2	$\leq x \leq$	1.2	

Havaitaan, että pienimmät kustannukset saadaan, kun pohjan säteen mitta on $0,620\dots \text{ dm} = 6,20\dots \text{ cm} \approx 6,2 \text{ cm}$. Kustannukset ovat tällöin $145,079\dots \text{ snt} \approx 145 \text{ snt} = 1,45 \text{ €}$.

Vastaus: 6,2 cm, 1,45 €

K34. Muodostetaan aritmeettisen jonon yleinen termi.

$$d = 12 - 10 = 2 \text{ ja } a_1 = 10$$

$$a_n = 10 + (n - 1) \cdot 2 = 10 + 2n - 2 = 8 + 2n$$

Muodostetaan geometrinen lukujonon yleinen termi.

$$q = \frac{21}{20} \text{ ja } b_1 = 2$$

$$b_n = 2 \cdot \left(\frac{21}{20}\right)^{n-1}$$

Muodostetaan epäyhtälö $b_n > a_n$ ja ratkaistaan se kokeilemalla. Sijoitetaan epäyhtälön molemmiin puoliin oleviin lausekkeisiin aina sama muuttujan n arvo ja verrataan jäsenien suuruuksia.

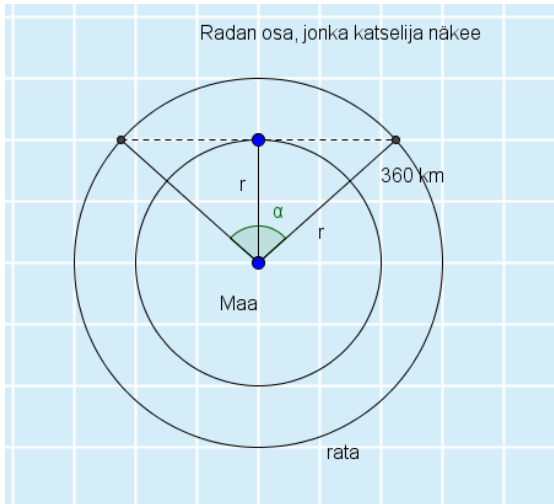
$$2 \cdot \left(\frac{21}{20}\right)^{n-1} > 8 + 2n$$

n	Arit	Geom	90	89	188	148,4496
1	10	2	91	90	188	153,7721
2	12	2,1	92	91	190	161,4607
3	14	2,205	93	92	192	169,5338
4	16	2,31525	94	93	194	178,0105
5	18	2,431013	95	94	196	186,911
6	20	2,552563	96	95	198	196,2565
7	22	2,680191	97	96	200	206,0694
8	24	2,814201	98	97	202	216,3728
9	26	2,954911	99	98	204	227,1915
10	28	3,102656	100	99	206	238,551
			101	100	208	250,4786

96. termi on ensimmäisen kerran suurempi geometrisessa jonossa kuin aritmeettisessä jonossa.

Vastaus: 96. termistä alkaen

- K35.** Merkitään nähdyn alueen kaarta vastaavaa keskuskulman puolikasta kirjaimella α . Maapallon säde on $r = \frac{40000 \text{ km}}{2\pi} = 6366,197\dots \text{ km}$. Havainnollistetaan tilannetta kuvalla.



Maan säteen ja katselualueen reuna muodostavat suorakulmaisen kolmion. Ratkaistaan kulma α kosinin avulla.

$$\cos \alpha = \frac{6366,197\dots}{6366,197\dots + 360}$$

$$\alpha = 18,830\dots^\circ$$

Nähtyä radan osaa vastaa kulma $2\alpha = 2 \cdot 18,830\dots^\circ = 37,660\dots^\circ$

Koska 360° koko ympyrää vastaa 92 minuutin kierros, niin nähtyä osaa vastaa $\frac{37,660\dots^\circ}{360^\circ} \cdot 92 \text{ min} = 9,624\dots \text{ min} \approx 9 \text{ min } 37 \text{ s}$ aikaa.

Vastaus: 9 min 37 s

- K36. a)** Lasketaan pääoman määrä vuosittain taulukkolaskennan avulla.
Talletettu pääoma on 2 500 000 €.
Nettokorkokanta on $1,80 \% \cdot 0,7 = 1,26 \%$.
Vuosittainen korkokerroin on $q = 1,0126$.

	A	B	C
1	Kokonaiset vuodet talletuksen aloittamisesta	Pääoma tilillä korkojen jälkeen (€)	Pääoma 50 000 €:n noston jälkeen
2	0	=2500000	
3	1	=B2*1,0126	=B3-50000
4	2	=B3*1,0126	=B4-50000
5	3	=B4*1,0126	=B5-50000
6	4	=B5*1,0126	=B6-50000
7	5	=B6*1,0126	=B7-50000
8	6	=B7*1,0126	=B8-50000
9	7	=B8*1,0126	=B9-50000
10	8	=B9*1,0126	=B10-50000
11	9	=B10*1,0126	=B11-50000
12	10	=B11*1,0126	=B12-50000

	A	B	C
1	Kokonaiset vuodet talletuksen aloittamisesta	Pääoma tilillä korkojen jälkeen (€)	Pääoma 50 000 €:n noston jälkeen
2	0	2500000,00	
3	1	2531500,00	2481500,00
4	2	2563396,90	2513396,90
5	3	2595695,70	2545695,70
6	4	2628401,47	2578401,47
7	5	2661519,33	2611519,33
8	6	2695054,47	2645054,47
9	7	2729012,16	2679012,16
10	8	2763397,71	2713397,71
11	9	2798216,52	2748216,52
12	10	2833474,05	2783474,05

Vastaus: 2 304 150,16 €

- b) Etsitään mahdollinen nostettava rahamäärä muuttamalla taulukkolaskennan solua, jossa on nostettava summa.

	A	B	C	D	E	F
	Kokonaiset vuodet talletuksen aloittamisesta	Pääoma tilillä korkojen jälkeen (€)	Pääoma 50 000 €:n noston jälkeen			
1						
2	0	=2500000			Korkokerroin	1,0126
3	1	=B2*\$F\$2	=B3-\$E\$4		Nostettava summa (€)	
4	2	=C3*\$F\$2	=B4-\$E\$4		22053,98	
5	3	=C4*\$F\$2	=B5-\$E\$4			
6	4	=C5*\$F\$2	=B6-\$E\$4			
7	5	=C6*\$F\$2	=B7-\$E\$4			
8	6	=C7*\$F\$2	=B8-\$E\$4			
9	7	=C8*\$F\$2	=B9-\$E\$4			
10	8	=C9*\$F\$2	=B10-\$E\$4			
11	9	=C10*\$F\$2	=B11-\$E\$4			
12	10	=C11*\$F\$2	=B12-\$E\$4			

	A	B	C	D	E	F
	Kokonaiset vuodet talletuksen aloittamisesta	Pääoma tilillä korkojen jälkeen (€)	Pääoma 50 000 €:n noston jälkeen			
1						
2	0	2500000,00			Korkokerroin	1,0126
3	1	2531500,00	2509446,02		Nostettava summa (€)	
4	2	2541065,04	2519011,06		22053,98	
5	3	2550750,60	2528696,62			
6	4	2560558,20	2538504,22			
7	5	2570489,37	2548435,39			
8	6	2580545,68	2558491,70			
9	7	2590728,69	2568674,71			
10	8	2601040,01	2578986,03			
11	9	2611481,26	2589427,28			
12	10	2622054,06	2600000,08			

Haarukoimalla sopivaa summa löydetään 22 053,98 € nostettava rahamäärä.

Vastaus: 22 053,98 €

- c) Jos talletuksen arvo pysyisi saman, tilillä tulisi olla 10 vuoden päästä $1,02^{10} = 1,218\dots$ -kertainen rahasumma.

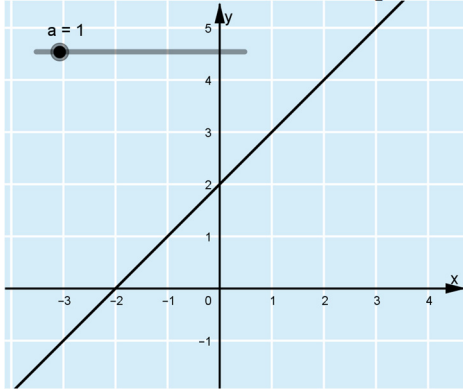
Tilillä tulisi olla

$1,02^{10} \cdot 2\,500\,000 \text{ €} = 3\,047\,486,049\dots \text{ €} \approx 3\,047\,468,05 \text{ €}$. Tilin saldo $2\,600\,000,08$ euroa on

$\frac{2\,600\,000,08 \text{ €}}{3\,047\,468,05 \text{ €}} = 0,8531\dots$ -kertainen suhteessa inflaation mukaiseen

reaaliarvoon. Reaaliarvon on tällöin laskenut $85,31\dots$ prosenttiin, joten reaaliarvo on laskenut $100\% - 85,31\dots\% = 14,68\dots\% \approx 14,7\%$.

Vastaus: pienenee $14,7\%$

K37. Havainnollistetaan tilannetta sopivalla ohjelmalla.

Havaitaan, että muodostuu suorakulmainen kolmio, jonka toinen kateetti on positiivisella y -akselilla ja toinen negatiivisella x -akselilla. Kateettien pituudet voidaan määrittää suoran ja akselien leikkauspisteiden avulla.

Lasketaan koordinaattiakselien leikkauspisteet.

$$\begin{aligned} y\text{-akseli, } x &= 0 \\ y &= a^2 \cdot 0 + a^2 + 1 = a^2 + 1 \end{aligned}$$

Suoran ja y -akselin leikkauspiste on $(0, a^2 + 1)$.

$$\begin{aligned} x\text{-akseli, } y &= 0 \\ 0 &= a^2 \cdot x + a^2 + 1 \\ 0 &= a^2 \cdot x + a^2 + 1 \\ -a^2 x &= a^2 + 1 && \parallel : (-a^2) \\ x &= -1 - \frac{1}{a^2} \end{aligned}$$

Suoran ja x -akselin leikkauspiste on $\left(-1 - \frac{1}{a^2}, 0\right)$.

Kolmion toisen kateetin pituus on suoran ja y -akselin leikkauspisteen y -koordinaatti eli $a^2 + 1$.

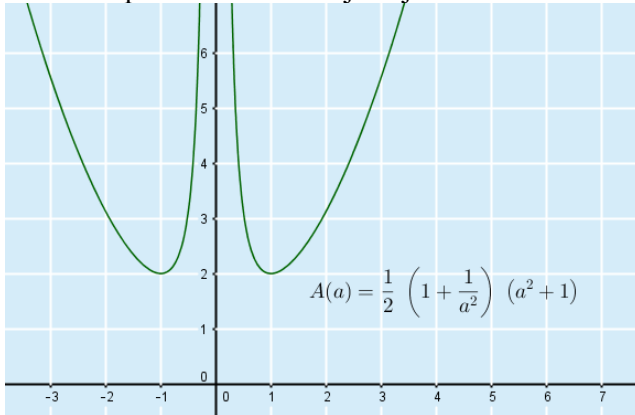
Toinen kateetti on suoran ja x -akselin leikkauspisteen etäisyys origosta eli

$$0 - \left(-1 - \frac{1}{a^2}\right) = 1 + \frac{1}{a^2}.$$

Kolmion pinta-ala a :n avulla ilmaistuna on

$$A(a) = \frac{1}{2} \cdot (a^2 + 1) \left(1 + \frac{1}{a^2} \right).$$

Tutkitaan pinta-alan ääriarvoja ohjelman avulla.



Lauseke näyttää saavan pienimmän arvonsa kohdissa $a = 1$ ja $a = -1$.

Etsitään funktion pienin arvo välillä $\frac{1}{2} \leq a \leq 5$ ohjelman valmiilla toiminnolla.

$A(a) = 1/2 (1 + 1/a^2) (a^2 + 1)$? ✂

Väli Pisteet

Ominaisuus	Arvo
Min	(1, 2)
Max	(5, 13.52)

0.5 ≤ x ≤ 5

Funktio saa pienimmän arvonsa, kun $a = 1$ ja funktion arvo eli kolmion pinta-ala on tällöin 2. Tällöin suora leikkaa x -akselin pisteessä

$$\left(-1 - \frac{1}{a^2}, 0 \right) = \left(-1 - \frac{1}{1^2}, 0 \right) = (-2, 0)$$

ja y -akselin pisteessä $(0, a^2 + 1) = (0, 1^2 + 1) = (0, 2)$.

Vastaus: $a = 1$, pinta-ala on 2, leikkaa x -akselin pisteessä $(-2, 0)$ ja y -akselin pisteessä $(0, 2)$

K38. TAPA 1:

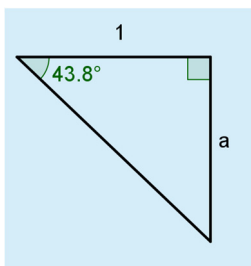
Merkitään trombin sijaintia pisteellä C .

Laskujen helpottamiseksi nimetään akselit toisin päin kuin tehtävänannossa: pohjoiseen osoittava akseli on y -akseli ja itään osoittava akseli on x -akseli. Tällöin pisteiden x - ja y -koordinaatit vaihtavat paikkaa.

Muodostetaan suorien AC ja BC yhtälöt, kun $A = (2\,549\,572, 6\,670\,801)$ ja $B = (2\,554\,955, 6\,670\,015)$.

Suoran AC ja positiivisen y -akselin välinen kulma on $133,8^\circ$ myötäpäivään. Kulma on yli 90° , joten suora AC on laskeva. Suoran AC ja positiivisen x -akselin välinen kulma on $133,8^\circ - 90^\circ = 43,8^\circ$.

Määritetään suoran AC kulmakerroin kuvion avulla.



Muodostetaan kuvan perusteella yhtälö ja ratkaistaan siitä pituus a .

$$\tan 43,8^\circ = \frac{a}{1}$$

$$a = 0,958\dots$$

Koska suora AC on laskeva, sen kulmakerroin on $k_{AC} = -a = -0,958\dots$

Suoran BC ja positiivisen y -akselin välinen kulma on $205,0^\circ$. Kulma on yli 180° , joten suora on nouseva. Suoran BC ja y -akselin välinen kulma on $205^\circ - 180^\circ = 25^\circ$, joten suoran BC ja x -akselin välinen kulma on $90^\circ - 25^\circ = 65^\circ$.

Suoran AC kulmakerroin on suoran ja x -akselin välisen kulman tangentin vastaluku. Toisin kuin suora AC , suora BC on nouseva, joten sen kulmakerroin on suoran BC ja x -akselin välisen kulman tangentti $k_{BC} = \tan 65^\circ = 2,144\dots$

Suoran AC kulmakerroin on $-0,958\dots$ ja suora kulkee pisteen $A = (2\,549\,572, 6\,670\,801)$ kautta. Sijoitetaan nämä tiedot yhtälöön $y = kx + b$ ja ratkaistaan vakiotermi b .

$$6\,670\,801 = -0,958\dots \cdot 2\,549\,572 + b$$

$$6\,670\,801 = -2\,444\,951,643\dots + b$$

$$b = 2\,444\,951,643\dots + 6\,670\,801$$

$$b = 9\,115\,752,643\dots$$

Suoran AC yhtälö on siis $y = -0,958\dots x + 9\,115\,752,643\dots$

Suoran BC kulmakerroin on $2,144\dots$ ja suora BC kulkee pisteen $(2\,554\,955, 6\,670\,015)$ kautta. Sijoitetaan nämä tiedot yhtälöön $y = kx + b$ ja ratkaistaan vakiotermi b .

$$6\,670\,015 = 2,144\dots \cdot 2\,554\,955 + b$$

$$6\,670\,015 = 5\,479\,118,679\dots + b$$

$$b = 6\,670\,015 - 5\,479\,118,679\dots$$

$$b = 1\,190\,896,320\dots$$

Suoran BC yhtälö on siis $y = 2,144\dots x + 1\,190\,896,320\dots$

Muodostetaan yhtälöpari ja ratkaistaan siitä suorien AC ja BC leikkauspisteen C koordinaatit.

$$\begin{cases} y = -0,958\dots x + 9\,115\,752,643\dots \\ y = 2,144\dots x + 1\,190\,896,320\dots \end{cases}$$

Sopivalla ohjelmalla saadaan leikkauspisteeksi $C = (2\,553\,544,930\dots, 6\,666\,991,096\dots)$

Koska koordinaattiakselit valittiin toisin päin kuin tehtävänannossa, tehtävänannon koordinaatistossa trombi on pisteessä $(6\,666\,991,096\dots; 2\,553\,544,930\dots) \approx (6\,666\,991, 2\,553\,545)$

TAPA 2:

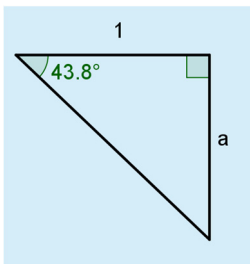
Merkitään trombin sijaintia pisteellä C .

Laskujen helpottamiseksi nimetään akselit toisin päin kuin tehtävänannossa: pohjoiseen osoittava akseli on y -akseli ja itään osoittava akseli on x -akseli. Tällöin pisteiden x - ja y -koordinaatit vaihtavat paikkaa.

Muodostetaan suorien AC ja BC yhtälöt, kun $A = (2\ 549\ 572, 6\ 670\ 801)$ ja $B = (2\ 554\ 955, 6\ 670\ 015)$.

Suoran AC ja positiivisen y -akselin välinen kulma on $133,8^\circ$ myötäpäivään. Kulma on yli 90° , joten suora AC on laskeva. Suoran AC ja positiivisen x -akselin välinen kulma on $133,8^\circ - 90^\circ = 43,8^\circ$.

Määritetään suoran AC kulmakerroin kuvion avulla.



Muodostetaan suorien yhtälöt sopivalla ohjelmalla ja ratkaistaan niiden leikkauspiste ohjelman avulla.

1	$a := \text{Suora}[(2549572, 6670801), y = \tan(-43.8^\circ)x]$
•	$\approx \mathbf{a : y = -x\ 0.9589655219629 + 2444951.643762 + 6670801}$
2	$b := \text{Suora}[(2554955, 6670015), y = \tan(65^\circ)x]$
•	$\approx \mathbf{b : y = x\ 2.144506920509 - 5479118.67909 + 6670015}$
3	Leikkauspiste[a, b]
○	$\approx \mathbf{\{(2553544.930639, 6666991.096496)\}}$

Vastaus: (6 666 991, 2 553 545)