Kertaus

K1. **a)** Alapaineiden pienin arvo on 55 ja suurin arvo 74, joten vaihteluväli on [55, 74].

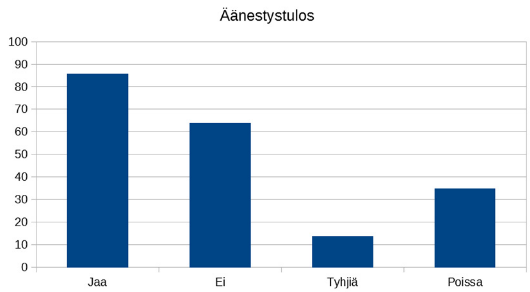
b) Alapaineiden keskiarvo on

$$\frac{2\cdot 55+65+67+68+70+71+74}{8}=\frac{525}{8}\approx 65{,}6.$$

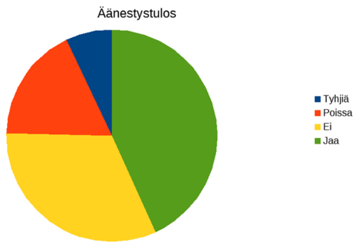
c) Alapaineiden keskihajonta on

$$\sqrt{\frac{2\cdot(55-\frac{525}{8})^2+(65-\frac{525}{8})^2+(67-\frac{525}{8})^2+\ldots+(74-\frac{525}{8})^2}{8}}\approx 6{,}63.$$

K2. **a)** Kirjoitetaan tiedot taulukkolaskentaohjelmaan. Piirretään ohjelmalla pylväskuvio.



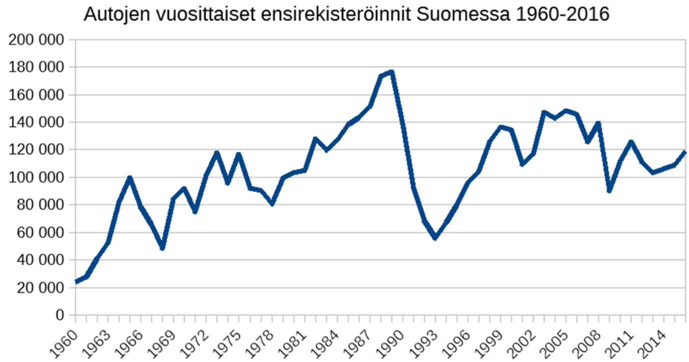
b) Piirretään ympyräkuvio, järjestetään osat suuruusjärjestykseen.



K3. **a)** Taulukkolaskentaohjelman avulla saadaan heittäjän A tulosten keskiarvoksi 78,61 m ja keskihajonnaksi 1,09 m sekä vastaavasti heittäjän B tulosten keskiarvoksi 81,54 m ja keskihajonnaksi 5,82 m.

b) Heittäjän A tulosten keskiarvo on pienempi kuin heittäjän B tulosten keskiarvo. Toisaalta heittäjän A tulosten keskihajonta 1,09 m on selvästi pienempi kuin heittäjän B tulosten keskihajonta 5,82 m. Heittäjän A voidaan siis arvioida olevan tasaisempi eli varmempi heittäjä omalla tasollaan.

K4. Piirretään ohjelmalla viivakuvio.

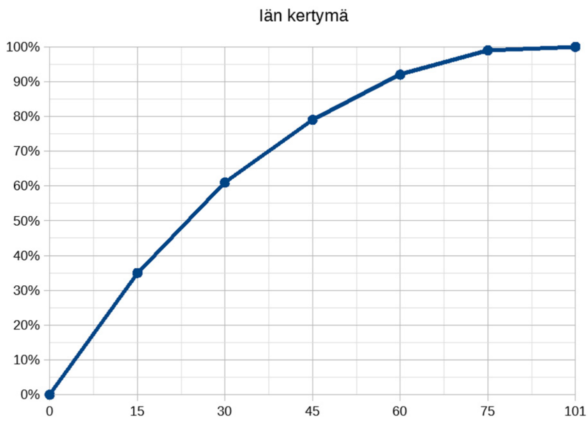


Vuosina 1980-89 vuosittaisten rekisteröintien määrä kasvoi noin 100 000:sta yli 170 000:een. Vuosina 1990-93 vuosittaisten rekisteröintien määrä romahti alle puoleen aiemmasta.

K5. Lasketaan luokkien todelliset ylärajat ja suhteelliset summafrekvenssit taulukkoon.
Luokan 0-14 vuotta todellinen yläraja on 15 vuotta, koska kaikki alle 15-vuotiaat kuuluvat luokkaan 0-14.
Luokkien todelliset ylärajat ovat siis 15, 30, 45, 60, 75 ja 101.
Lisätään piirtämistä varten ensimmäiselle riville ensimmäisen luokan todellinen alaraja 0 ja sitä vastaava suhteellinen summafrekvenssi 0 %.

Luokan todellinen yläraja	Suhteellinen frekvenssi	Suhteellinen summa-frekvenssi
0	0%	0%
15	35%	35%
30	26%	61%
45	18%	79%
60	13%	92%
75	7%	99%
101	1%	100%

Piirretään kertymäkuvaaja viivakuviona, jossa luokan ylärajan kohdalla on luokan suhteellinen summafrekvenssi.



a) Kertymäkuvaaja leikkaa 50 %:n vaakatason noin 24 vuoden kohdalla, joten mediaani-ikä oli noin 24 vuotta.

b) Kertymäkuvaaja leikkaa 75 %:n vaakatason noin 41 vuoden kohdalla, joten 75 % oli nuorempia kuin 41 vuotta.

K6. **a)** Palloja on yhteensä kahdeksan, joten

$$\text{P(punainen)} = \frac{5}{8} \approx 0{,}63.$$

b) Kun yksi punainen pallo on nostettu, jäljellä on seitsemän palloa, joista neljä on punaisia. Kertolaskusäännöllä saadaan

$$\text{P(kaksi punaista)} = \text{P(1. punainen ja 2. punainen)} = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{5}{14} \approx 0{,}36.$$

Toinen tapa:

Kahdeksasta pallosta voidaan valita kaksi $\binom{8}{2} = 28$ eri tavalla.

Viidestä punaisesta pallosta voidaan valita kaksi $\binom{5}{2} = 10$ eri tavalla.

Siispä nostettaessa kaksi palloa todennäköisyys, että molemmat ovat punaisia, on

$$\text{P(kaksi punaista)} = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{10}{28} = \frac{5}{14} \approx 0{,}36.$$

c) Neljästä pallosta sinisiä ja punaisia on yhtä monta täsmälleen siinä tapauksessa, että punaisia on kaksi ja sinisiä kaksi. Viidestä punaisesta pallosta voidaan valita kaksi $\binom{5}{2} = 10$ eri tavalla ja kolmesta sinisestä pallosta voidaan valita kaksi $\binom{3}{2} = 3$ eri tavalla.

Tuloperiaatteen mukaan kaksi punaista ja kaksi sinistä palloa voidaan siis valita 10 · 3 = 30 eri tavalla.

Kaikkiaan kahdeksasta pallosta voidaan valita neljä $\binom{8}{4} = 70$ eri tavalla. Niinpä

$$\text{P(kaksi punaista ja kaksi sinistä)} = \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{3}{2}}{\binom{8}{4}} = \frac{30}{70} = \frac{3}{7} \approx 0{,}43.$$

d) Tapahtuman ”saadaan ainakin yksi punainen” vastatapahtuma on ”ei saada yhtään punaista” eli ”saadaan kolme sinistä”. Tämän todennäköisyys saadaan kertolaskusäännöllä:

$$P(1.\text{ sininen ja }2.\text{ sininen ja }3.\text{ sininen}) = \frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{56}.$$

Kysytty todennäköisyys on siten

$$P(\text{ainakin yksi punainen}) = 1 - \frac{1}{56} = \frac{55}{56} \approx 0{,}98.$$

Toinen tapa:
Tapahtuman ”saadaan ainakin yksi punainen” vastatapahtuma on ”ei saada yhtään punaista” eli ”saadaan kolme sinistä”. Kolmesta sinisestä pallosta voidaan valita kolme vain yhdellä tavalla, ja kaikista kahdeksasta pallosta voidaan valita kolme $\binom{8}{3} = 56$ eri tavalla. Niinpä

$$P(\text{kaikki kolme sinisiä}) = \frac{\binom{3}{3}}{\binom{8}{3}} = \frac{1}{56}.$$

Kysytty todennäköisyys on siten

$$P(\text{ainakin yksi punainen}) = 1 - \frac{1}{56} = \frac{55}{56} \approx 0{,}98.$$

K7. **a)** Riippumattomien tapahtumien kertolaskusäännöllä tapahtuman ”molemmat lyövät juoksun” todennäköisyydeksi saadaan
P(A lyö juoksun ja B lyö juoksun)
= P(A lyö juoksun) · P(B lyö juoksun)
= 0,42 · 0,35 = 0,147 ≈ 0,15.

b) Tapahtuma ”vain toinen lyö juoksun” koostuu kahdesta erillisestä tapahtumasta: ”A lyö juoksun ja B ei” sekä ”B lyö juoksun ja A ei”. Riippumattomien tapahtumien kertolaskusäännön ja erillisten tapahtumien yhteenlaskusäännön avulla saadaan
P(vain toinen lyö juoksun)
= P(A lyö juoksun ja B ei tai B lyö juoksun ja A ei)
= 0,42 · (1 − 0,35) + 0,35 · (1 − 0,42)
= 0,476 ≈ 0,48.

c) Riippumattomien tapahtumien kertolaskusäännöllä saadaan tapahtuman "kumpikaan ei lyö juoksua" todennäköisyydeksi
P(kumpikaan ei lyö juoksua)
= P(A ei lyö juoksua ja B ei lyö juoksua)
$= (1 - 0{,}42) \cdot (1 - 0{,}35) = 0{,}377 \approx 0{,}38.$

d) Tapahtuman "ainakin toinen lyö juoksun" vastatapahtuma on "kumpikaan ei lyö juoksua", jonka todennäköisyys laskettiin c-kohdassa. Niinpä
P(ainakin toinen lyö juoksun) $= 1 - 0{,}377 = 0{,}623 \approx 0{,}62.$

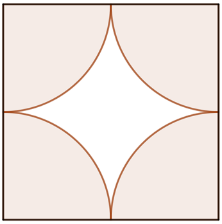
K8. **a)** Kaikki 13 kirjaa voivat olla keskenään 13! eri järjestyksessä. Kun matematiikan kirjat ovat vierekkäin, matematiikan kirjoista ensimmäinen voi olla hyllyssä ensimmäisenä, toisena, kolmantena tai neljäntenä:

MMMMMMMMMMRRR
RMMMMMMMMMMRR
RRMMMMMMMMMMR
RRRMMMMMMMMMM

Matematiikan kirjat voivat olla keskenään 10! eri järjestyksessä ja ruotsin kirjat jäljellä olevilla paikoilla 3! eri järjestyksessä. Kysytty todennäköisyys on siis $\dfrac{4 \cdot 10! \cdot 3!}{13!} = \dfrac{2}{143} = 0{,}013986... \approx 0{,}014.$

b) Matematiikan kirjojen keskinäinen järjestys on nyt määrätty, vaihtoehtoja ei ole kuin yksi. Kuten a-kohdassa, matematiikan kirjoista ensimmäinen voi olla neljällä eri paikalla ja ruotsin kirjat jäljellä olevilla paikoilla 3! eri järjestyksessä, joten kysytty todennäköisyys on
$$\frac{4 \cdot 1 \cdot 3!}{13!} = \frac{1}{259459200} = 3{,}854... \cdot 10^{-9} = 0{,}000000003854... \approx 0{,}0000000039.$$

K9. Piirretään neliö ja väritetään siitä suotuisa osa eli ne alueet, joissa pisteen etäisyys lähimmästä nurkasta on korkeintaan puolet neliön sivun pituudesta.



Suotuisa kuvion osa muodostuu neljästä ympyrän neljänneksestä.

Jos neliön sivun pituus on a, sen pinta-ala on a^2, ympyrän säde on $\frac{a}{2}$ ja ympyrän neljänneksen pinta-ala $\dfrac{\pi\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2}{4}$. Suotuisan osan pinta-ala on silloin $4\cdot\dfrac{\pi\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2}{4}=\pi\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2$.

Kysytty todennäköisyys on $\dfrac{\pi\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2}{a^2}=\dfrac{\pi}{4}=0,785398...\approx 0,79.$

K10. Vektorin $\overline{u} = a\overline{i} + b\overline{j}$ pituus on $\sqrt{a^2 + b^2}$. Pituus on enintään 4 täsmälleen silloin, kun pituuden neliö $a^2 + b^2 \leq 16$.

Esitetään kahden nopan heiton mahdolliset lopputulokset eli silmälukuparit (a, b) taulukkona ja merkitään taulukkoon silmälukuparin kohdalle saadun vektorin pituuden neliö $a^2 + b^2$.

6	37	40	45	52	61	72
5	26	29	34	41	50	61
4	17	20	25	32	41	52
3	10	13	18	25	34	45
2	5	8	13	20	29	40
1	2	5	10	17	26	37
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

Suotuisia silmälukupareja on taulukon mukaan kahdeksan. Yhteensä silmälukupareja on 36, joten kysytty todennäköisyys on
$\frac{8}{36} = \frac{2}{9} = 0,2222... \approx 0,22.$

K11. Kyse on toistokokeesta, jossa toistojen eli kahden arpakuution heittojen lukumäärä on kuusi. Lasketaan toiston onnistumisen eli tuloksen ”silmälukujen summa on vähintään 9” todennäköisyys yhdellä kahden arpakuution heitolla.

Esitetään kahden arpakuution heiton mahdolliset lopputulokset eli silmälukuparit taulukkona ja merkitään taulukkoon silmälukuparin kohdalle silmälukujen summa.

6	7	8	9	10	11	12
5	6	7	8	9	10	11
4	5	6	7	8	9	10
3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

Taulukon perusteella tapahtuman ”silmälukujen summa on vähintään 9” kannalta suotuisia silmälukupareja on 10. Yhteensä silmälukupareja on 36, joten toiston onnistumisen todennäköisyys on $\frac{10}{36}=\frac{5}{18}=0,2777...$

Todennäköisyys, että kolmessa heitoista silmälukujen summa on vähintään 9, saadaan toistokokeen kaavalla:

$$P(\text{kolme onnistumista})=\binom{6}{3}\left(\frac{5}{18}\right)^3\left(1-\frac{5}{18}\right)^3=\frac{1373125}{8503056}=0,161486...\approx 0,16.$$

K12. **a)** Oppilaita on yhteensä 24, joten yhteen ryhmään valitaan 12. Tämä voidaan tehdä $\binom{24}{12} = 2704156$ eri tavalla. Toisen ryhmän oppilaat tulee valittua samalla.

Pojat ovat samassa ryhmässä, kun yhteen ryhmään on valittu kaikki pojat ja lisäksi kaksi tyttöä.
Tämä voidaan tehdä $\binom{10}{10} \cdot \binom{14}{2} = 91$ eri tavalla.

Todennäköisyys, että kaikki pojat ovat samassa ryhmässä, on siis

$$\frac{\binom{10}{10}\binom{14}{2}}{\binom{24}{12}} = \frac{91}{2704156} = \frac{1}{29716} = 0,00003365... \approx 0,000034.$$

b) Ryhmissä on yhtä monta poikaa täsmälleen siinä tapauksessa, että toiseen on valittu 5 poikaa ja 7 tyttöä.
Tuloperiaatteen mukaan tämä voidaan tehdä
$\binom{10}{5}\binom{14}{7} = 252 \cdot 3432 = 864864$ eri tavalla.

Kysytty todennäköisyys on siis

$$\frac{\binom{10}{5} \cdot \binom{14}{7}}{\binom{24}{12}} = \frac{864864}{2704156} = \frac{2376}{7429} = 0,3198... \approx 0,32.$$

K13. **a)** Todennäköisyys voittaa 50 euron lahjakortti on $\frac{2}{100}=\frac{1}{50}=0{,}02$ ja

todennäköisyys voittaa 20 euron lahjakortti on $\frac{10}{100}=\frac{1}{10}=0{,}1.$

Todennäköisyys jäädä ilman voittoa on $\frac{100-2-10}{100}=\frac{22}{25}=0{,}88.$

Nettovoitto X saadaan, kun arvalla saadusta voitosta vähennetään arvasta maksettu hinta 5 euroa. Näin ollen

$\mathrm{P}(X=45)=\frac{1}{50},$

$\mathrm{P}(X=15)=\frac{1}{10}$ ja

$\mathrm{P}(X=-5)=\frac{22}{25}.$

Nettovoiton odotusarvo on

$\mathrm{E}(X)=\frac{1}{50}\cdot 45+\frac{1}{10}\cdot 15+\frac{22}{25}\cdot(-5)=-2$ euroa.

b) Nettovoiton keskihajonta on

$\mathrm{D}(X)=\sqrt{\frac{1}{50}\cdot(45-(-2))^2+\frac{1}{10}\cdot(15-(-2))^2+\frac{22}{25}\cdot((-5)-(-2))^2}=9$

euroa.

K14. Esitetään kahden nopan heiton mahdolliset lopputulokset eli silmälukuparit taulukkona ja merkitään taulukkoon silmälukuparin kohdalle silmälukujen summa eli satunnaismuuttujan X arvo.

6	7	8	9	10	11	12
5	6	7	8	9	10	11
4	5	6	7	8	9	10
3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

Satunnaismuuttujan X mahdolliset arvot ovat 2, 3, …, 12. Taulukon perusteella saadaan eri arvojen todennäköisyydet:

$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{36}=0,02777...\approx 0,028$$

$$\mathrm{P}(X=3)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}=0,05555...\approx 0,055$$

$$\mathrm{P}(X=4)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}=0,08333...\approx 0,083$$

$$\mathrm{P}(X=5)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}=0,11111...\approx 0,11$$

$$\mathrm{P}(X=6)=\frac{5}{36}=0,13888...\approx 0,14$$

$$\mathrm{P}(X=7)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}=0,16666...\approx 0,17$$

$$\mathrm{P}(X=8)=\frac{5}{36}=0,13888...\approx 0,14$$

$$\mathrm{P}(X=9)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}=0,11111...\approx 0,11$$

$$\mathrm{P}(X=10)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}=0,08333...\approx 0,083$$

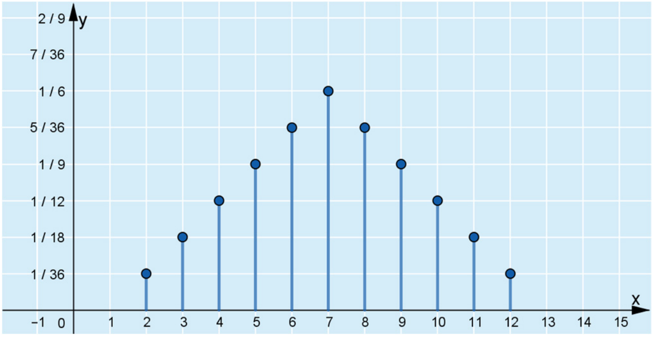
$$\mathrm{P}(X=11)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}=0,05555...\approx 0,055$$

$$\mathrm{P}(X=12)=\frac{1}{36}=0,02777...\approx 0,028$$

Tämä on satunnaismuuttujan X jakauma, joka voidaan esittää myös taulukkomuodossa:

x	$P(X=x)$
2	$\frac{1}{36}$
3	$\frac{1}{18}$
4	$\frac{1}{12}$
5	$\frac{1}{9}$
6	$\frac{5}{36}$
7	$\frac{1}{6}$
8	$\frac{5}{36}$
9	$\frac{1}{9}$
10	$\frac{1}{12}$
11	$\frac{1}{18}$
12	$\frac{1}{36}$

Piirretään pistetodennäköisyydet koordinaatistoon vastaavan arvon kohdalle:



K15. Kun taskussa olevista yhteensä neljästä kolikosta valitaan kaksi, nimellisarvojen summa voi olla 1,50 euroa, 2 euroa, 2,50 euroa tai 3 euroa. Lasketaan arvojen todennäköisyydet.

1) Summaksi saadaan 1,50 euroa, kun toinen valituista kolikoista on euron kolikko ja toinen 50 sentin kolikko. Tämän todennäköisyys on

$$\mathrm{P}(\text{summa on } 1{,}50 \text{ euroa}) = \frac{\binom{2}{1}\cdot\binom{1}{1}}{\binom{4}{2}} = \frac{2\cdot 1}{6} = \frac{1}{3} \approx 0{,}33.$$

Sama tulos saadaan kerto- ja yhteenlaskusäännön avulla laskemalla P(1. euron ja 2. 50 sentin kolikko, tai 1. 50 sentin ja toinen euron kolikko)

$$= \frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

2) Summaksi saadaan 2 euroa vain siinä tapauksessa, että molemmat valitut ovat euron kolikoita. Tämän todennäköisyys on

$$\mathrm{P}(\text{summa on } 2 \text{ euroa}) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{6} \approx 0{,}17.$$

Sama tulos saadaan kertolaskusäännön avulla laskemalla

$\mathrm{P}(1.\text{ euron ja toinen euron kolikko}) = \frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$

3) Summaksi saadaan 2,50 euroa, kun toinen valituista kolikoista on kahden euron kolikko ja toinen 50 sentin kolikko. Tämän todennäköisyys on

$$\mathrm{P}(\text{summa on } 2{,}50 \text{ euroa}) = \frac{\binom{1}{1}\cdot\binom{1}{1}}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{6} \approx 0{,}17.$$

Sama tulos saadaan kerto- ja yhteenlaskusäännön avulla laskemalla P(1. kahden euron ja 2. 50 sentin kolikko,

tai 1. 50 sentin ja toinen kahden euron kolikko) $= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$

4) Summaksi saadaan 3 euroa, kun toinen valituista kolikoista on kahden euron kolikko ja toinen euron kolikko. Tämän todennäköisyys on

$$\mathrm{P}(\text{summa on 3 euroa}) = \frac{\binom{1}{1}\cdot\binom{2}{1}}{\binom{4}{2}} = \frac{1\cdot 2}{6} = \frac{1}{3} \approx 0{,}33.$$

Sama tulos saadaan kerto- ja yhteenlaskusäännön avulla laskemalla
P(1. kahden euron ja 2. euron kolikko,
tai 1. euron ja toinen kahden euron kolikko) $= \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3} + \frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.

Summan odotusarvo on $\frac{1}{3}\cdot 1{,}50 + \frac{1}{6}\cdot 2 + \frac{1}{6}\cdot 2{,}50 + \frac{1}{3}\cdot 3 = 2{,}25$ euroa.

K16. **a)** Tilannetta voidaan ajatella toistokokeena, jossa toistoja on 5 ja onnistumisen todennäköisyys on 80 % = 0,80. Onnistumisten eli pidettyjen luentojen lukumäärä noudattaa binomijakaumaa, ja kunkin lukumäärän k = 0, 1, 2, …, 5 todennäköisyys saadaan ohjelman avulla jakaumasta Bin(5; 0,8) tai laskemalla binomitodennäköisyyden eli toistokokeen kaavalla

$$\mathrm{P}(k \text{ onnistumista}) = \binom{5}{k} 0{,}80^k (1-0{,}80)^{5-k}.$$

Todennäköisyys, että professori ehtii pitää kaikki viisi luentoa, on $0{,}80^5 = 0{,}32768 \approx 0{,}33 = 33\ \%$.

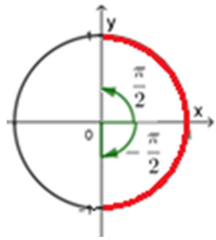
b) Tapahtuma ”vain yksi viidestä luennosta jää pitämättä” on sama kuin ”ehtii pitää vain neljä luentoa”, jonka todennäköisyys on

$$\binom{5}{1} \cdot 0{,}80^4 \cdot (1 - 0{,}8) = 0{,}4096 \approx 0{,}41 = 41\ \%.$$

c) Binomijakaumaa Bin(n, p) noudattavan satunnaismuuttujan odotusarvo on np. Koska luentojen lukumäärä noudattaa binomijakaumaa parametrein 5 ja 0,8, lukumäärän odotusarvo on $5 \cdot 0{,}80 = 4$.

K17. Funktio on tiheysfunktio, jos se toteuttaa kaksi ehtoa: 1) sen arvot ovat ei-negatiivisia ja 2) sen kuvaajan ja x-akselin väliin jäävän alueen pinta-ala on 1. Osoitetaan, että f toteuttaa nämä ehdot.

1) Riittää tutkia funktion arvoja välillä $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, koska sen ulkopuolella funktion f arvo on nolla. Kosini on yksikköympyrän kehäpisteen x-koordinaatti, joten kun $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, on $\cos x \geq 0$ ja siksi myös $f(x) = \frac{1}{2}\cos x \geq 0$. Ensimmäinen ehto siis toteutuu.

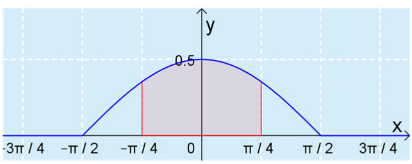


2) Funktion f kuvaajan ja x-akselin väliin jää alue vain välillä $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Kuten edellä todettiin, funktio f on ei-negatiivinen, joten alueen pinta-ala saadaan määrättynä integraalina

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\cos x\,dx = \Big/_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}\sin x\right) = \frac{1}{2}\cdot 1 - \frac{1}{2}\cdot(-1) = 1.$$

Siis funktio f toteuttaa toisenkin ehdon. Niinpä f on tiheysfunktio.

Kysytty todennäköisyys $P(-\frac{\pi}{4} \leq X \leq \frac{\pi}{4})$ on funktion f kuvaajan ja x-akselin väliin välillä $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ jäävän alueen pinta-ala.



Pinta-ala saadaan tiheysfunktion määrättynä integraalina kyseisellä välillä:

$$P\left(-\frac{\pi}{4} \leq X \leq \frac{\pi}{4}\right) = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\cos x\,dx = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,7071... \approx 0,71.$$

K18. Normitetaan X ja käytetään standardinormaalijakauman N(0, 1) kertymäfunktiolle Φ taulukoituja arvoja.

Koska $X \sim \mathrm{N}(8, 2)$, satunnaismuuttuja $Z = \dfrac{X-8}{2}$ noudattaa standardinormaalijakaumaa N(0, 1).

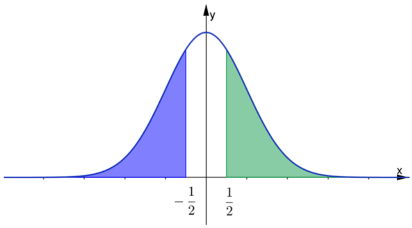
Lasketaan kysytty todennäköisyys Z:n kertymäfunktion Φ avulla:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}(7 \le X \le 10)\\
&= \mathrm{P}\left(\frac{7-8}{2} \le Z \le \frac{10-8}{2}\right)\\
&= \mathrm{P}(-\frac{1}{2} \le Z \le 1)\\
&= \mathrm{P}(Z \le 1) - \mathrm{P}(Z < -\frac{1}{2}).
\end{aligned}$$

$\mathrm{P}(Z \le 1) = \Phi(1)$ saadaan taulukosta: $\Phi(1) \approx 0{,}8413$.

Symmetrian avulla saadaan

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(Z < -\frac{1}{2}) &= \mathrm{P}(Z > \frac{1}{2})\\
&= 1 - \mathrm{P}(Z \le \frac{1}{2})\\
&= 1 - \Phi(\frac{1}{2})\\
&\approx 1 - 0{,}6915 = 0{,}3085
\end{aligned}$$



Niinpä $\mathrm{P}(7 \le X \le 10) \approx 0{,}8413 - 0{,}3085 = 0{,}5328 \approx 0{,}53$.

Myös ohjelman avulla saadaan $\mathrm{P}(7 \le X \le 10) \approx 0{,}5328$, kun $X \sim \mathrm{N}(8, 2)$.

K19. Olkoon X lentomatkan kesto minuutteina, jolloin $X \sim \mathrm{N}(144, 12)$.
Kysytty todennäköisyys on $\mathrm{P}(X \le 150)$.
Ohjelman avulla saadaan
$\mathrm{P}(X \le 150) \approx 0{,}6915 \approx 0{,}69$
eli todennäköisyys, että lento on perillä ennen kello 11:ä, on noin 0,69.

K20. Olkoon pistemäärää kuvaava satunnaismuuttuja X, jolloin
$X \sim \mathrm{N}(30{,}1;\ 11{,}2)$.
Etsitään luvut a (arvosanan 10 pisteraja) ja b (hyväksytyn eli arvosanan 5 pisteraja), joille $\mathrm{P}(X \geq a) = 0{,}1$ ja $\mathrm{P}(X < b) = 0{,}05$.

Ohjelman avulla saadaan $a \approx 44{,}453 \approx 44$ ja $b \approx 11{,}6776 \approx 12$.
Arvosanan 10 pisterajaksi pitäisi siis asettaa 44 pistettä ja arvosanan 5 pisterajaksi 12 pistettä.

Kokoavia tehtäviä

ILMAN TEKNISIÄ APUVÄLINEITÄ

1. **a)** Kirjoitetaan keskiarvolle lauseke x:n avulla ja ratkaistaan x yhtälöstä.

$$\begin{aligned}\frac{x+(x+e)+2x}{3} &= \pi \quad \|\cdot 3\\ 4x+e &= 3\pi\\ 4x &= 3\pi-e \quad \|:4\\ x &= \frac{3\pi-e}{4}\end{aligned}$$

b) Keskiarvo on ennen muutosta $\frac{a+b+c}{3}$ ja muutoksen jälkeen

$$\frac{(a+10)+(b+10)+(c+10)}{3}=\frac{a+b+c+30}{3}=\frac{a+b+c}{3}+10.$$

Keskiarvo siis kasvaa kymmenellä.

Mediaani on suuruusjärjestyksessä keskimmäinen luvuista a, b ja c. Kun jokaiseen lukuun lisätään 10, lukujen keskinäinen järjestys ei muutu. Keskimmäinen on siis sama kuin aiemmin, johon on lisätty 10, eli myös mediaani kasvaa 10:llä.

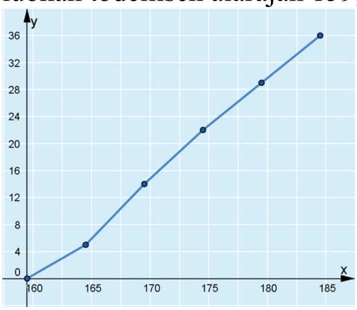
2. **a)** Valitaan luokiksi 160-164 cm, 165-169 cm, 170-174 cm, 175-179 cm ja 180-184 cm. Lasketaan, kuinka monta pituutta kuhunkin luokkaan kuuluu ja kirjoitetaan luokkien frekvenssit taulukkomuotoon.

Luokka	frekvenssi
160-164	5
165-169	9
170-174	8
175-179	7
180-184	7

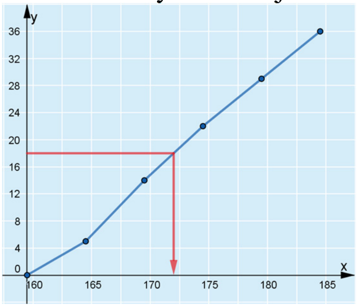
Lasketaan luokkien summafrekvenssit laskemalla yhteen luokan ja sitä edeltävien luokkien frekvenssit.

Luokka	frekvenssi	summafrekvenssi
160-164	5	5
165-169	9	14
170-174	8	22
175-179	7	29
180-184	7	36

b) Piirretään kertymäkuvaaja merkitsemällä summafrekvenssi luokan todellisen ylärajan kohdalle ja yhdistämällä pisteet. Luokkien todelliset ylärajat ovat 164,5; 169,5; 174,5; 179,5 ja 184,5 cm. Ensimmäisen luokan todellisen alarajan 159,5 kohdalle tulee frekvenssi 0.



Mediaanipituuden ylittää puolet oppilaista eli 18 ja alittaa myös 18 oppilasta. Kuvasta mediaani arvioidaan etsimällä se pituus, jonka kohdalla kertymäkuvaaja leikkaa vaakatason 18; tämä on noin 172 cm.

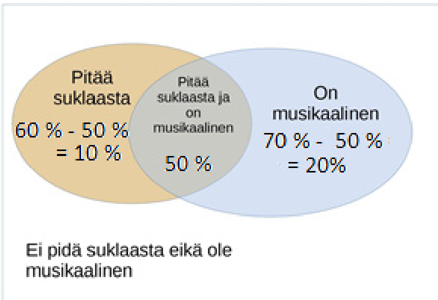


Oppilaita on yhteensä 36, joten mediaanipituus on pituusjärjestyksessä kahden keskimmäisen pituuden keskiarvo. Luokan pituusjärjestyksessä 18. ja 19. oppilaan pituudet ovat 170 ja 171 cm, joten aineiston todellinen mediaani on 170,5 cm. Kertymäkuvaajasta arvioitu mediaani on siis 1,5 cm suurempi kuin aineiston todellinen mediaani.

3. Hahmotellaan tilannetta kuvan avulla:

Niiden oppilaiden osuus, jotka pitävät suklaasta tai ovat musikaalisia, on 60 % + 70 % − 50 % = 80 %.
Niinpä niiden opiskelijoiden osuus, jotka eivät pidä suklaasta eivätkä ole musikaalisia, on
100 % − 80 % = 20 %. Todennäköisyys, että satunnaisesti valittu koulun oppilas ei pidä suklaasta eikä ole musikaalinen, on sama kuin näiden osuus kaikista oppilaista eli 20 % = 0,20.

TAI
Hahmotellaan tilannetta kuvan avulla:



Niiden oppilaiden osuus, jotka pitävät suklaasta tai ovat musikaalisia, on 10 % + 50 % + 20 % = 80 %.
Niinpä niiden opiskelijoiden osuus, jotka eivät pidä suklaasta eivätkä ole musikaalisia, on 100 % − 80 % = 20 %. Todennäköisyys, että satunnaisesti valittu koulun oppilas ei pidä suklaasta eikä ole musikaalinen, on sama kuin näiden osuus kaikista oppilaista eli
20 % = 0,20

4. **a)** $\dfrac{10!}{8!}=\dfrac{10\cdot 9\cdot \cancel{8}\cdot \cancel{7}\cdot \cancel{6}\cdot \cancel{5}\cdot \cancel{4}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot 1}{\cancel{8}\cdot \cancel{7}\cdot \cancel{6}\cdot \cancel{5}\cdot \cancel{4}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot 1}=90$

b) $\dfrac{11!}{12!}=\dfrac{11!}{12\cdot 11!}=\dfrac{1}{12}$

c) $\dfrac{8!}{5!\cdot 3!}=\dfrac{8\cdot 7\cdot \cancel{6}\cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!}\cdot \cancel{3\cdot 2}\cdot 1}=8\cdot 7=56$

d) $\dbinom{6}{4}=\dfrac{6!}{4!(6-4)!}=\dfrac{6\cdot 5\cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}\cdot 2!}=\dfrac{\overset{3}{\cancel{6}}\cdot 5}{\underset{1}{\cancel{2}}\cdot 1}=15$

5. Kaksinumeroisessa positiivisessa kokonaisluvussa ensimmäinen numero on jokin luvuista 1, 2, …, 9, ja toinen numero on jokin luvuista 0, 1, …, 9 ja jokainen näistä numeroista on yhtä todennäköinen.

Todennäköisyys, että ensimmäinen numero on 1 tai 2, on siis

$P(\text{ensimmäinen numero on 1 tai 2}) = \frac{2}{9} \cdot \frac{10}{10} = \frac{2}{9}$.

Vastaavasti $P(\text{toinen numero on 1 tai 2}) = \frac{9}{9} \cdot \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.

Lisäksi todennäköisyys, että sekä ensimmäinen että toinen numero on 1 tai 2, on $P(\text{ensimmäinen on 1 tai 2 ja toinen on 1 tai 2}) = \frac{2}{9} \cdot \frac{2}{10} = \frac{2}{45}$.

Niinpä $P(\text{ainakin toinen on 1 tai 2}) = \frac{2}{9} + \frac{1}{5} - \frac{2}{45} = \frac{17}{45}$.

Muita tapoja:

$P(\text{ainakin toinen on 1 tai 2}) = 1 - P(\text{kumpikaan ei ole 1 tai 2})$

$= 1 - \frac{7}{9} \cdot \frac{8}{10} = 1 - \frac{28}{45} = \frac{17}{45}$.

Sama tulos saadaan myös luettelemalla sopivat luvut. Kaksinumeroisia positiivisia kokonaislukuja ovat luvut 10, 11, …, 99, joita on 90. Ne luvut, joissa ainakin toinen numeroista on 1 tai 2, ovat
10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17,18, 19 (10 kpl)
20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29 (10 kpl)
31, 32, 41, 42, 51, 52, 61, 62, 71, 72, 81, 82, 91, 92 ($7 \cdot 2 = 14$ kpl)
Kyseisiä lukuja on yhteensä 34 kappaletta. Niinpä kysytty todennäköisyys on $\frac{34}{90} = \frac{17}{45}$.

6. Käytetään kannattavuuden mittarina odotusarvoa. Lasketaan odotusarvo kummassakin tilanteessa: siinä, jossa kilpailija vastaan ensin helppoon kysymykseen ja myös siinä, jossa hän vastaa ensin vaikeaan kysymykseen.

Olkoon X = kilpailijan voittama rahasumma, kun hän vastaa ensin helppoon kysymykseen. Muodostetaan satunnaismuuttujan X jakauma ja lasketaan sen odotusarvo.

x (euroa)	$\mathrm{P}(X = x)$
0 (vastaa väärin helppoon)	0,5
200 (vastaa oikein helppoon ja väärin vaikeaan	$0{,}5 \cdot 0{,}8 = 0{,}4$
1600 (vastaa oikein molempiin)	$0{,}5 \cdot 0{,}2 = 0{,}1$

Nyt $\mathrm{E}(X) = 0{,}5 \cdot 0 + 0{,}4 \cdot 200 + 0{,}1 \cdot 1600 = 240$.

Olkoon sitten Y = kilpailijan voittama rahasumma, kun hän vastaa ensin vaikeaan kysymykseen. Muodostetaan satunnaismuuttujan Y jakauma ja lasketaan sen odotusarvo.

y (euroa)	$\mathrm{P}(Y = y)$
0 (vastaa väärin vaikeaan)	0,8
1400 (vastaa oikein vaikeaan ja väärin helppoon	$0{,}2 \cdot 0{,}5 = 0{,}1$
1600 (vastaa oikein molempiin)	$0{,}2 \cdot 0{,}5 = 0{,}1$

Nyt $\mathrm{E}(Y) = 0{,}8 \cdot 0 + 0{,}1 \cdot 1400 + 0{,}1 \cdot 1600 = 300$.

Koska satunnaismuuttujan Y odotusarvo on suurempi, kilpailijan kannattaa siis vastata ensin vaikeaan kysymykseen.

7. C on lopullinen voittaja, jos
1) C voittaa seuraavat kolme peliä, tai
2) seuraavista kolmesta pelistä C voittaa kaksi ja A yhden, ja lisäksi seitsemännen pelin voittaa C.

Tapahtumat 1 ja 2 ovat erilliset. Koska pelaajat ovat yhtä taitavia, jokaisella on sama todennäköisyys voittaa peli:
$\mathrm{P(A\ voittaa\ pelin)} = \mathrm{P(B\ voittaa\ pelin)} = \mathrm{P(C\ voittaa\ pelin)} = \frac{1}{3}$, ja eri pelikierroksilla voitot eivät riipu toisistaan.

Tapahtuman 1 todennäköisyys on kertolaskusäännön mukaan $\left(\frac{1}{3}\right)^3$.
Tapahtuma 2 koostuu erillisistä tapahtumista, ACCC, CACC ja CCAC joista jokaisen todennäköisyys on $\left(\frac{1}{3}\right)^4$. Niinpä kysytty todennäköisyys on

$$\mathrm{P(C\ on\ lopullinen\ voittaja)} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{2}{27} = 0{,}074074... \approx 0{,}074.$$

8. Funktio on f tiheysfunktio, jos
1) sen arvot ovat ei-negativisia ja
2) sen kuvaajan ja x-akselin väliin jäävän alueen pinta-ala on 1.

1) Funktion lausekkeista nähdään, että ei-negatiivisuus toteutuu silloin kun $a \geq 0$.

2) Pinta-alaa muodostuu vain välillä $0 < x \leq e$. Etsitään sellainen ei-negatiivinen luku a, että $\int_0^e f(x)\mathrm{d}x = 1$.

$$\int_0^e f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x\,\mathrm{d}x + \int_1^e \frac{a}{x}\mathrm{d}x = \Big/_{\!0}^{1}\left(\frac{1}{2}x^2\right) + \Big/_{\!1}^{e}(a\ln x) = \frac{1}{2}\cdot 1 - 0 + a\underbrace{\ln e}_{=1} - a\underbrace{\ln 1}_{=0}) = \frac{1}{2} + a$$

$$\frac{1}{2} + a = 1$$
$$a = \frac{1}{2}$$

Koska luku $\frac{1}{2}$ täyttää ehdon $a \geq 0$, funktio f on tiheysfunktio silloin kun $a = \frac{1}{2}$.

Kertymäfunktio F saadaan integroimalla tiheysfunktiota f ja käyttämällä integroimisvakioiden määräämiseen tietoja $F(0) = 0$ ja $F(e) = 1$ sekä sitä, että F on jatkuva kaikkialla.

Integroidaan funktio $f(x) = \begin{cases} x, \text{ kun } 0 < x \leq 1 \\ \frac{\frac{1}{2}}{x}, \text{ kun } 1 < x \leq e \\ 0, \text{ muulloin} \end{cases} = \begin{cases} 0, \text{ kun } x \leq 0 \\ x, \text{ kun } 0 < x \leq 1 \\ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}, \text{ kun } 1 < x \leq e \\ 0, \text{ kun } x > e \end{cases}$

osissa.

$x < 0$: $\quad F(x) = \int 0\,\mathrm{d}x = C$

$0 < x < 1$: $\quad F(x) = \int x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 + D$

$1 < x < e$: $\quad F(x) = \int \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\ln x + E$

$x > e$: $\quad F(x) = \int 0\,\mathrm{d}x = G$

Koska $F(0) = 0$ ja funktio F on jatkuva, täytyy olla

$$\lim_{x\to 0-} F(x) = \lim_{x\to 0+} F(x) = 0:$$

$$\lim_{x\to 0-} F(x) = \lim_{x\to 0-} C = C, \text{ siis } C = 0$$

$$\lim_{x\to 0+} F(x) = \lim_{x\to 0+} (\frac{1}{2}x^2 + D) = D, \text{ siis } D = 0.$$

Koska $F(e) = 1$ ja funktio F on jatkuva, täytyy olla

$$\lim_{x\to e-} F(x) = \lim_{x\to e+} F(x) = 1:$$

$$\lim_{x\to e-} F(x) = \lim_{x\to e-} (\tfrac{1}{2}\ln x + E) = \tfrac{1}{2}\ln e + E = \tfrac{1}{2} + E, \text{ mistä } E = \tfrac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to e+} F(x) = \lim_{x\to e+} (G) = G, \text{ siis } G = 1.$$

Tarkistetaan vielä funktion F arvo ja jatkuvuus kohdassa $x = 1$ kun $C = 0$, $D = 0$, $E = \tfrac{1}{2}$ ja $G = 1$:

$$\lim_{x\to 1-} F(x) = \lim_{x\to 1-} (\tfrac{1}{2}x^2) = \tfrac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 1+} F(x) = \lim_{x\to 1+} (\tfrac{1}{2}\ln x + \tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}\underbrace{\ln 1}_{0} + \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}$$

Siis kertymäfunktio on $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x \le 0, \\ \frac{1}{2}x^2, & \text{kun } 0 < x \le 1, \\ \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{2}, & \text{kun } 1 < x \le e, \\ 1, & \text{kun } x > e. \end{cases}$

Kysytty todennäköisyys on kertymäfunktion avulla laskettuna

$$\mathrm{P}(-1 < X < 2) = P(-1 < X \le 2) = F(2) - F(-1) = \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2} - 0$$

$$= \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2} = 0{,}84657... \approx 0{,}85.$$

9. Kun yksi pallo on siirretty laatikosta A laatikkoon B, tapahtuman ”laatikosta B saadaan valkoinen pallo” todennäköisyys riippuu siitä, minkä värinen pallo siirrettiin. Jaetaan tapahtuma ”laatikosta B saadaan valkoinen pallo” siirretyn pallon värin mukaan kahteen erilliseen osaan:
1: siirretään valkoinen pallo ja saadaan valkoinen pallo, sekä
2: siirretään musta pallo ja saadaan valkoinen pallo.

Lasketaan kummankin todennäköisyys.

$$\text{P(siirretään valkoinen pallo ja saadaan valkoinen)} = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$$

$$\text{P(siirretään musta pallo ja saadaan valkoinen)} = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{8} = \frac{1}{5}$$

Koska tapahtumat ovat erillisiä, kysytty todennäköisyys on

$$\frac{3}{8} + \frac{1}{5} = \frac{23}{40} = 0{,}575 \approx 0{,}58.$$

10. Sellaisia kortteja, joissa ainakin yksi puoli on musta, on 40 + 50 = 90. Koska nostetulla kortilla on ainakin yksi musta puoli, on nostettu yksi näistä 90:stä. Jokaisen kortin todennäköisyys tulla nostetuksi on sama. Niinpä todennäköisyys, että nostetun kortin toinenkin puoli on musta, on todennäköisyys, että nostetuksi tuli yksi 40:stä kokonaan mustasta kortista eli

$$\frac{40}{90} = \frac{4}{9} = 0{,}4444... \approx 0{,}44.$$

Toinen tapa:
P(molemmat puolet mustia | toinen puoli on musta)

$$= \frac{\text{P(molemmat puolet on mustia ja toinen puoli on musta)}}{\text{P(toinen puoli on musta)}}$$

$$= \frac{\text{P(molemmat puolet on mustia)}}{\text{P(toinen puoli on musta)}}$$

$$= \frac{\frac{40}{150}}{\frac{90}{150}} = \frac{40}{90} = \frac{4}{9} = 0{,}4444... \approx 0{,}44.$$

APUVÄLINEET SALLITTU

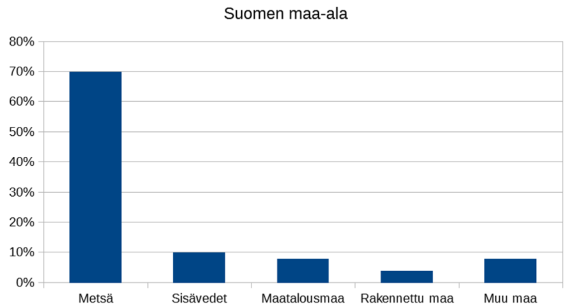
11. **a)** Kokeen teki kaikkiaan 37 + 40 + 25 = 102 osallistujaa. Koska jokaisessa ryhmässä arvosanojen summa on arvosanojen keskiarvo kerrottuna ryhmän koolla, saadaan kaikkien osallistuneiden keskiarvoksi $\frac{37\cdot 7{,}83+40\cdot 8{,}15+25\cdot 7{,}97}{102}=7{,}98980...\approx 7{,}99.$

b) Lasketaan arvosanojen keskiarvo taulukkolaskentaohjelmalla tai matematiikkaohjelmalla:
Keskiarvo on 7,57894… ≈ 7,58.

Lasketaan keskihajonta matematiikkaohjelmalla:
Keskihajonta on 1,46236… ≈ 1,46.

12. **a)** Kirjoitetaan tiedot taulukkolaskentaohjelmaan, järjestetään tiedot osuuden mukaan suuruusjärjestykseen ja piirretään ympyräkuvio.

b) Piirretään pylväskuvio. Pylväskuviota varten tietoja ei ole tarpeen järjestää suuruusjärjestykseen, vaan luokka ”muu” voi olla viimeisenä.



13. **a)** Tilannetta voidaan ajatella toistokokeena, jossa toistoja eli henkilöitä on 10 ja onnistumisen eli tapahtuman ”henkilö on puolueen kannattaja” todennäköisyys jokaisella toistolla on 23 % = 0,23. Onnistumisten eli kannattajien lukumäärä noudattaa binomijakaumaa Bin(10; 0,23). Ohjelman avulla saadaan P(kannattajia on 5) = 0,0439029… ≈ 0,044.

Sama tulos saadaan, kun kysytty todennäköisyys lasketaan toistokokeen kaavalla:

$$\mathrm{P}(\text{kannattajia on }5)=\binom{10}{5}\cdot 0{,}23^5\cdot(1-0{,}23)^{10-5}=252\cdot 0{,}23^5\cdot 0{,}77^5$$
$$=0{,}0439029...\approx 0{,}044.$$

b) Merkitään kannattajien lukumäärää 10 henkilön otoksessa satunnaismuuttujalla X. Kuten a-kohdassa, koska $X \sim$ Bin(10, 23), ohjelman avulla saadaan P($X \geq 8$) = 0,0002232… ≈ 0,00022.

Toinen tapa:
Toistokokeen kaavaa käyttäen saadaan erillisten tapahtumien yhteenlaskusäännön avulla
P($X \geq 8$) = P($X = 8$) + P($X = 9$) + P($X = 10$)

$$=\binom{10}{8}\cdot 0{,}23^8\cdot 0{,}77^2+\binom{10}{9}\cdot 0{,}23^9\cdot 0{,}77^1+\binom{10}{10}\cdot 0{,}23^8\cdot 0{,}77^0$$
$$=45\cdot 0{,}23^8\cdot 0{,}77^2+10\cdot 0{,}23^9\cdot 0{,}77+0{,}23^8$$
$$\approx 0{,}00022$$

c) Ohjelman avulla saadaan P($X \leq 1$) = 0,292115… ≈ 0,29.

Toinen tapa:
Toistokokeen kaavaa käyttäen saadaan erillisten tapahtumien yhteenlaskusäännön avulla
P($X \leq 1$) = P($X = 0$) + P($X = 1$)

$$=\binom{10}{0}\cdot 0{,}23^0\cdot 0{,}77^{10}+\binom{10}{1}\cdot 0{,}23^1\cdot 0{,}77^9$$
$$=0{,}77^{10}+10\cdot 0{,}23\cdot 0{,}77^9$$
$$\approx 0{,}29.$$

d) Ohjelman avulla saadaan P($X \geq 1$) = 0,926733… ≈ 0,93.

Toinen tapa: P($X \geq 1$) = 1 − P($X = 0$) = 1 − $0{,}77^{10}$ = 0,926733… ≈ 0,93.

14. Kahteen eri joukkueeseen jäsenet voidaan valita

$\binom{7}{3} \cdot \binom{4}{3} = 35 \cdot 4 = 140$ eri tavalla.

Kun joukkueet on valittu, lepäämään jäävä henkilö on myös määritetty.

Ajatellaan rantalentopallokentän puoliskoja nimillä A ja B. Kun ensin valitaan joukkue 1 puolelle A kaikkien 7 henkilön joukosta, ja toinen joukkue 2 puolelle B loppujen 4:n joukosta, niin toinen tapa saada nämä täsmälleen samat joukkueet toisiaan vastaan on valita ensin joukkue 2 puolelle A ja joukkue 1 puolelle B. Näin ollen erilaisten joukkueparien lukumäärässä 140 samat kaksi joukkuetta esiintyvät parina kaksi kertaa. Siis erilaisia kahden joukkueen ja yhden lepäävän pelaajan mahdollisuuksia on $\frac{140}{2} = 70$.

Jos yksi peli kestää puoli tuntia, 70 peliin menee 35 tuntia; niinpä pelaajat eivät ehdi käydä kaikkia vaihtoehtoja läpi vuorokauden eli 24 tunnin aikana.

15. **a)** Pelaaja voittaa 35 euroa todennäköisyydellä $\frac{1}{37}$ ja häviää yhden euron todennäköisyydellä $\frac{36}{37}$. Voiton odotusarvo on siis

$\frac{1}{37} \cdot 35 + \frac{36}{37} \cdot (-1) = -\frac{1}{37} = -0,027027... \approx -0,03$ euroa.

b) Pelaaja voittaa 11 euroa todennäköisyydellä $\frac{3}{37}$ ja häviää yhden euron todennäköisyydellä $1 - \frac{3}{37} = \frac{34}{37}$. Voiton odotusarvo on siis

$\frac{3}{37} \cdot 11 + \frac{34}{37} \cdot (-1) = -\frac{1}{37}$ euroa.

c) Pelaaja voittaa 1 euron todennäköisyydellä $\frac{18}{37}$ ja häviää yhden euron todennäköisyydellä $1 - \frac{18}{37} = \frac{19}{37}$. Voiton odotusarvo on siis

$\frac{18}{37} \cdot 1 + \frac{19}{37} \cdot (-1) = -\frac{1}{37}$ euroa.

16. Olkoon n turistien lukumäärä. Tapahtuman A = ”ainakin yksi turisti kuuluu veriryhmään O” vastatapahtuma on $\overline{A}$ = ”yksikään ryhmän turisteista ei kuulu veriryhmään O”. Tämän todennäköisyys on $P\left(\overline{A}\right)=(1-0,30)^n=0,70^n$, joten $P(A) = 1 - 0,70^n$.

Etsitään pienin luku n, jolle $P(A) > 995$ ‰ $= 0,995$ eli jolle $1 - 0,70^n > 0,995$, mistä saadaan epäyhtälö $0,70^n < 0,005$. Ratkaistaan ensin yhtälö $0,70^n = 0,005$ logaritmin avulla:

$$0,70^n = 0,005$$
$$n = \log_{0,7} 0,005$$
$$n \approx 14,85...$$

Mitä useampia turisteja ryhmässä on, sitä todennäköisempää on, että heistä ainakin yksi kuuluu veriryhmään O. Kun turisteja on 15 tai enemmän, todennäköisyys on yli 995 promillea.

17. **a)** Maalitaulun säde on $\frac{60}{2} = 30$ (cm), joten sen pinta-ala on $\pi \cdot 30^2 = 900\pi$ (cm^2).

Kymmenen pisteen alueen pinta-ala on $\frac{900\pi - \pi \cdot 20^2}{4} = 125\pi$, joten todennäköisyys, että heitto osuu 10 pisteen alueeseen, on $\frac{125\pi}{900\pi} = \frac{5}{36}$.

Tapahtuman "viidestä heitosta ainakin yksi osuu 10 pisteen alueeseen" vastatapahtuma on "yksikään viidestä heitosta ei osu 10 pisteen alueeseen", jonka todennäköisyys on
$\left(1 - \frac{5}{36}\right)^5 = \left(\frac{31}{36}\right)^5 = \frac{28629151}{60466176} = 0,47347...$ Todennäköisyys, että viidestä heitosta ainakin yksi osuu 10 pisteen alueeseen on siis
$1 - 0,47347\ldots = 0,5265\ldots \approx 0,53$.

b) Todennäköisyys, että heitto osuus 100 pisteen ympyrään, on
$\frac{\pi \cdot 10^2}{900\pi} = \frac{1}{9}$. Tilannetta voidaan ajatella toistokokeena, jossa toistoja eli heittoja on viisi ja onnistumisen todennäköisyys on $\frac{1}{9}$. Onnistumisten eli 100 pisteen ympyrään osumisten lukumäärä noudattaa binomijakaumaa $\text{Bin}(5, \frac{1}{9})$. Todennäköisyys, että onnistumisia tulee kolme, saadaan ohjelman avulla tai laskemalla
$\binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^3 \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right)^2 = \frac{640}{59049} = 0,010838... \approx 0,011.$

c) Kahdella heitolla saadaan yhteensä 100 pistettä kolmella eri yhdistelmällä: 80 + 20, 70 + 30 ja 60 + 40. Jokainen yhdistelmä voidaan saada kahdella eri tavalla, ensin suurempi ja sitten pienempi pistemäärä tai toisinpäin.

Pistemäärien 60, 70 ja 80 alueilla on sama pinta-ala
$\frac{\pi \cdot 20^2 - \pi \cdot 10^2}{3} = 100\pi$, joten näillä pistemäärillä on sama todennäköisyys $\frac{100\pi}{900\pi} = \frac{1}{9}$.

Siis $P(60)=P(70)=P(80)=\frac{1}{9}$.

Pistemäärien 20, 30 ja 40 alueilla on sama pinta-ala kuin pistemäärällä 10, joka laskettiin jo kohdassa a. Näiden pistemäärien todennäköisyydet ovat siis $P(20)=P(30)=P(40)=P(10)=\frac{5}{36}$.

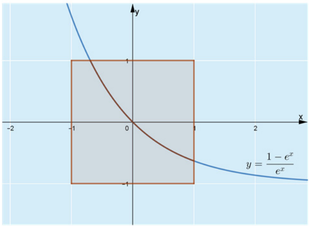
Erillisten tapahtumien yhteenlaskusäännöllä saadaan
P(kahdella heitolla 100)
= P(80 ja 20) + P(20 ja 80) + P(70 ja 30) + P(30 ja 70) + P(60 ja 40) + P(40 ja 60)

$$=\frac{1}{9}\cdot\frac{5}{36}+\frac{5}{36}\cdot\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\cdot\frac{5}{36}+\frac{5}{36}\cdot\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\cdot\frac{5}{36}+\frac{5}{36}\cdot\frac{1}{9}$$

$$=\frac{5}{54}=0{,}0925925...\approx 0{,}093.$$

18. **a)** Kaikkia alkeistapauksia vastaa suorakulmio, jossa $-1 \leq x \leq 1$ ja $-1 \leq y \leq 1$. Tämän suorakulmion pinta-ala on $2 \cdot 2 = 4$.

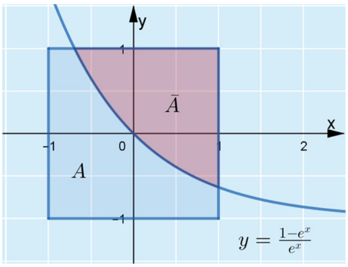
Tapahtumaa "$y = \dfrac{1-e^x}{e^x}$" vastaa se käyrän $y = \dfrac{1-e^x}{e^x}$ osa, joka jää suorakulmion alueelle.



Käyrän pinta-ala on nolla, joten tapahtuman $y = \dfrac{1-e^x}{e^x}$ todennäköisyys on nolla.

b) Tapahtumaa A = "$y \leq \dfrac{1-e^x}{e^x}$" vastaa suorakulmion se osa, joka jää käyrän $y = \dfrac{1-e^x}{e^x}$ alapuolelle.

Selvitetään ensin, missä käyrä $y = \dfrac{1-e^x}{e^x}$ leikkaa neliön yläreunan eli suoran $y = 1$:



$$\frac{1-e^x}{e^x} = 1 \quad \| \cdot e^x$$
$$1 - e^x = e^x$$
$$1 = 2e^x \quad \| : 2$$
$$e^x = \frac{1}{2}$$
$$x = \ln\frac{1}{2}$$

Haluttu alue muodostuu siis suorakulmiosta välillä $-2 \leq x \leq \ln\frac{1}{2}$ sekä käyrien $y = \dfrac{1-e^x}{e^x}$ ja $y = -1$ väliin jäävästä alueesta välillä $\ln\frac{1}{2} < x \leq 1$.

Sen sijaan tapahtuman A vastatapahtuma $\overline{A}$ muodostuu käyrien $y=\dfrac{1-e^x}{e^x}$ ja $y = 1$ väliin jäävästä alueesta välillä $\ln\frac{1}{2} \le x \le 1.$ Koska se saadaan laskettua kerralla, lasketaan tapahtumaa $\overline{A}$ vastaavan alueen pinta-ala.

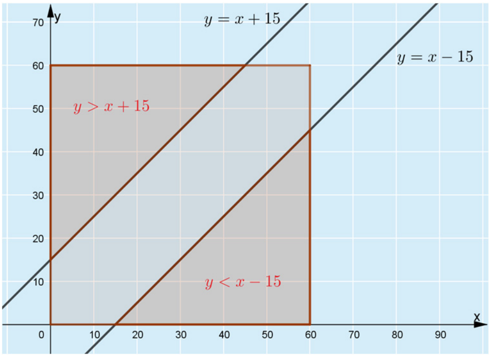
$$\int_{\ln\frac{1}{2}}^{1}\left(1-\frac{1-e^x}{e^x}\right)\mathrm{d}x=\int_{\ln\frac{1}{2}}^{1}\left(1-\frac{1}{e^x}+\frac{e^x}{e^x}\right)\mathrm{d}x=\int_{\ln\frac{1}{2}}^{1}(2-e^{-x})\,\mathrm{d}x=\Big/_{\ln\frac{1}{2}}^{1}\left(2x+e^{-x}\right)$$
$$=\tfrac{1}{e}-2\ln\tfrac{1}{2}$$

Näin ollen

$$\mathrm{P}(A)=\frac{4-\left(\frac{1}{e}-2\ln\frac{1}{2}\right)}{4}=1-\frac{1}{4e}+\frac{1}{2}\ln\tfrac{1}{2}\approx 0{,}56\,.$$

19. Merkitään x = henkilön A saapumisaika ja y = henkilön B saapumisaika minuutteina kello 9 jälkeen. Alkeistapauksia ovat siis lukuparit (x, y), joissa $0 \leq x \leq 60$ ja $0 \leq y \leq 60$. Kaikkia alkeistapauksia kuvaa neliö, jonka sivun pituus on 60 ja pinta-ala $60^2 = 3600$.

Tapahtuman ”A ja B ovat kahvilassa samaan aikaan” vastatapahtuma on ”A ja B eivät ole kahvilassa samaan aikaan”. Tämä tarkoittaa, että A saapuu yli 15 minuuttia myöhemmin kuin B tai vastaavasti B saapuu yli 15 minuuttia myöhemmin kuin A; siis $x > y + 15$ tai $y > x + 15$. Vastatapahtuman kannalta suotuisa osa kuviota koostuu kahdesta kolmiosta, joissa toisessa $x > y + 15$ eli $y < x - 15$ ja toisessa $y > x + 15$.



Kummankin kolmion kanta on 45 ja korkeus samoin 45, joten vastatapahtuman todennäköisyys on

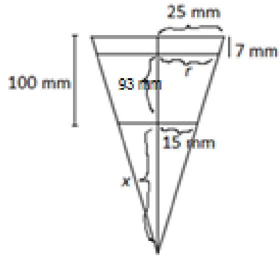
$$P(\text{A ja B eivät ole kahvilassa samaan aikaan}) = \frac{2 \cdot \frac{45 \cdot 45}{2}}{3600} = \frac{9}{16}.$$

Niinpä kysytty todennäköisyys on

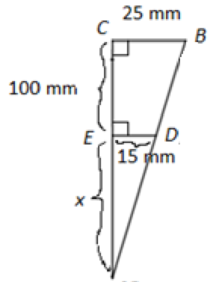
$$P(\text{A ja B ovat kahvilassa samaan aikaan}) = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}.$$

20. Selvitetään ensin se kahvimäärä, jolla kahvin pinta on 0,7 cm:n päässä mukin reunasta. Muki on katkaistun ympyräkartion muotoinen. Katkaistun kartion tilavuus saadaan vähentämällä kokonaisen kartion tilavuudesta katkaistun osan tilavuus.

Hahmotellaan siis poikkileikkauskuva tilanteesta ja täydennetään kartio kokonaiseksi.



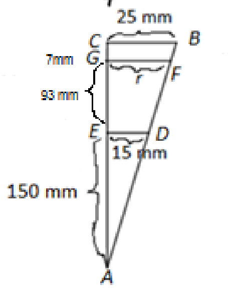
Merkitään mukin sädettä kahvin pinnan korkeudella kirjaimella r, sekä katkaistun osan korkeutta kirjaimella x.
Nyt kahvin tilavuus kuutiomillilitroina on
$\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot(93+x)-\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 15^2\cdot x.$
Ratkaistaan r ja x.



Kuvan kolmiot ABC ja ADE ovat kk-lauseen nojalla yhdenmuotoiset, sillä niissä on molemmissa suora kulma ja yhteinen kulma A. Vastinosien suhteista saadaan yhtälö
$\frac{100+x}{x}=\frac{25}{15}$, josta $x = 150$ (mm).

Samoin yhdenmuotoisten kolmioiden avulla voidaan ratkaista r.

$$\frac{r}{25}=\frac{93+150}{250}$$
$$r = 24{,}3\ (\text{mm})$$



Kahvin tilavuus, kun pinta yltää 7 mm päähän reunasta, on siis
$\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 24{,}3^2\cdot(93+150)-\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 15^2\cdot 150$
$=114918{,}49...\ \text{mm}^3 = 114{,}9...\ \text{cm}^3.$

Kahviautomaatin laskemaa kahvimäärää (kuutiosenttimetreinä) kuvaa satunnaismuuttuja $X \sim \mathrm{N}(\mu,\ 1)$. Tehtävänä on määrätä odotusarvo μ siten, että $\mathrm{P}(X > 114{,}9\ldots) = 0{,}005$, eli että $\mathrm{P}(X \le 114{,}9\ldots) = 0{,}995$.

Ratkaistaan ohjelman avulla numeerisesti yhtälö Normaalijakauma(x, 1, 114,9…) = 0,995, jolloin ratkaisuksi saadaan $x = 112{,}34\ldots \approx 112\ \text{cm}^3$. Keskiarvoksi tulee siis säätää noin 112 cm^3.