

Kertaus

K1. a) $72 = 2 \cdot 36 = 2 \cdot 2 \cdot 18 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 9 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^2$

$$252 = 2 \cdot 126 = 2 \cdot 2 \cdot 63 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 21 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$$

$$\text{syt}(72, 252) = 2^2 \cdot 3^2 = 36$$

b) $252 = 72 \cdot 3 + 36$

$$72 = 36 \cdot 2$$

$$\text{syt}(72, 252) = 36$$

c) $\text{pym}(72, 252) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 = 72 \cdot 7 = (70 + 2) \cdot 7 = 490 + 14 = 504$

K2. a) $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$

$$41405 = 5 \cdot 7^2 \cdot 13^2$$

$$\text{syt}(1001, 41405) = 7 \cdot 13 = 91$$

b) $41405 = 1001 \cdot 41 + 364$

$$1001 = 364 \cdot 2 + 273$$

$$364 = 273 \cdot 1 + 91$$

$$273 = 91 \cdot 3$$

$$\text{syt}(1001, 41405) = 91$$

- K3.** Alkuluvut voidaan määrittää esimerkiksi Eratostheneen seullalla: Eliminoidaan (eli väritetään/vedetään yli) ensin luvulla 2 jaolliset kokonaisluvut. Jäljelle jääneistä luvuista pienin on 3, joka on siis alkuluku. Eliminoidaan sitten luvulla 3 jaolliset kokonaisluvut. Jäljellä olevista kokonaislukuista suurin 5, joka on siis alkuluku. Eliminoidaan sitten luvulla 5 jaolliset kokonaisluvut jne. Kun on suoritettu vastaava päättelyketju loppuun saakka, niin jäljelle jääneet värittämättömät luvut ovat kysytyjä alkulukuja:

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

Kysytyt luvut ovat 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43 ja 47.

K4. a) $\frac{143}{4} = \frac{120 + 20 + 3}{4} = 30 + 5 + \frac{3}{4} = 35 + \frac{3}{4}$

Jakoyhtälöksi saadaan

$$143 = 4 \cdot 35 + 3.$$

b) $\frac{1892}{3} = \frac{1800 + 90 + 2}{3} = 600 + 30 + \frac{2}{3} = 630 + \frac{2}{3}$

Jakoyhtälöksi saadaan

$$1892 = 3 \cdot 630 + 2.$$

$$\mathbf{K5.} \quad 7653 = 7000 + 630 + 21 + 2 = 7 \cdot 1000 + 7 \cdot 90 + 7 \cdot 3 + 2$$

Koska luku 2 ei ole jaollinen luvulla 7, luku 7653 ei ole jaollinen luvulla 7.

$\mathbf{K6.}$ a) Ratkaistaan ensin $\text{syt}(12, 45)$ Eukleideen algoritmeilla.

$$45 = 12 \cdot 3 + 9$$

$$12 = 9 \cdot 1 + 3$$

$$9 = 3 \cdot 3$$

$$\text{syt}(12, 45) = 3$$

Koska luku 3 on jaollinen luvulla $\text{syt}(12, 45) = 3$, on yhtälöllä kokonaislukuratkaisuja.

Ratkaistaan sitten jakojäännökset.

$$3 = 12 - 9 \cdot 1$$

$$9 = 45 - 12 \cdot 3$$

Esitetään yhtälö muodossa $\text{syt}(12, 45) = 12x + 45y$ jakojäännöksiä apuna käyttäen.

$$3 = 12 - 9 \cdot 1$$

$$3 = 12 - (45 - 12 \cdot 3) \cdot 1$$

$$3 = 12 + 45 \cdot (-1) + 12 \cdot 3$$

$$3 = 12 \cdot 4 + 45 \cdot (-1)$$

Siispä $x_0 = 4$ ja $y_0 = -1$ on yhtälön eräs ratkaisu.

Selvitetään vielä yhtälön yleinen ratkaisu.

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \frac{nb}{\text{syt}(a,b)} & y &= y_0 - \frac{na}{\text{syt}(a,b)} \\ x &= 4 + \frac{45n}{3} & y &= -1 - \frac{12n}{3} \quad , \text{ missä } n \in \mathbb{Z} . \\ x &= 4 + 15n & y &= -1 - 4n \end{aligned}$$

b) a-kohdassa ratkaistiin, että $\text{syt}(12, 45) = 3$.

Koska luku 120 on jaollinen luvulla $\text{syt}(12, 45) = 3$, on yhtälöllä kokonaislukuratkaisuja.

a-kohdassa saatiin

$$3 = 12 \cdot 4 + 45 \cdot (-1)$$

Kerrotaan tämä yhtälö puolittain luvulla 40, jolloin saadaan

$$120 = 12 \cdot 160 + 45 \cdot (-40).$$

Yhtälön $12x + 45y = 120$ eräs ratkaisu on siis $x_0 = 160$ ja $y_0 = -40$.

Selvitetään vielä yhtälön yleinen ratkaisu.

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \frac{nb}{\text{syt}(a,b)} & y &= y_0 - \frac{na}{\text{syt}(a,b)} \\ x &= 160 + \frac{45n}{3} & y &= -40 - \frac{12n}{3}, \text{ missä } n \in \mathbb{Z}. \\ x &= 160 + 15n & y &= -40 - 4n \end{aligned}$$

K7. Olkoon x aloittavien opiskelijoiden lukumäärä. Nyt tiedetään, että $800 \leq x \leq 1000$. Lisäksi tiedetään, että luvun x pitää olla jaollinen luvuilla 3, 7 ja 13, koska ilmoitetut osuudet ovat tarkkoja arvoja.

Voidaan siis kirjoittaa $x = 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot k$, missä k on kokonaisluku. Tästä saadaan $x = 273k$.

Jos $k = 1$, niin $x = 273 \cdot 1 = 273 < 800$ eli ei käy

Jos $k = 2$, niin $x = 273 \cdot 2 = 546 < 800$ eli ei käy

Jos $k = 3$, niin $x = 273 \cdot 3 = 819$, jolloin $800 \leq x \leq 1000$ eli kelpaa.

Jos $k = 4$, niin $x = 273 \cdot 4 = 1092 > 1000$ eli ei käy

Siispä opiskelijoiden määrän täytyy olla 819.

- K8.** a) Luvut 120 ja 156 ovat kongruentteja modulo 8 täsmälleen silloin, kun erotus $156 - 120$ on jaollinen luvulla 8.

$$156 - 120 = 36$$

Koska 36 ei ole jaollinen luvulla 8, niin luvut eivät ole kongruentteja modulo 8.

b) $204 - 172 = 32 = 8 \cdot 4$

Koska erotus $204 - 172$ on jaollinen luvulla 8, niin $172 \equiv 204 \pmod{8}$.

- K9.** a) Luku 21 on kongruentti kaikkien niiden lukujen kanssa, joilla on sen kanssa sama jakojäännös luvulla 6 jaettaessa.

$$21 = 6 \cdot 3 + 3$$

$$\text{Siis } 21 \equiv 3 \pmod{6}.$$

Pienin luonnollinen luku on siis 3.

b) $542 = 6 \cdot 90 + 2$

$$\text{Siis } 542 \equiv 2 \pmod{6}.$$

Pienin luonnollinen luku on 2.

- K10. a)** Ne luvut a , jotka ovat luvun 3 kanssa kongruenteja modulo 7, ovat muotoa $a = 3 + 7q$, jossa q on kokonaisluku.

Ratkaisuksi käy esimerkiksi luvut

$$3 + 7 \cdot 3 = 24,$$

$$3 + 7 \cdot 4 = 31 \text{ ja}$$

$$3 + 7 \cdot 5 = 38.$$

- b)** Ratkaisuksi käy esimerkiksi luvut

$$3 + 7 \cdot (-2) = -11,$$

$$3 + 7 \cdot (-3) = -18 \text{ ja}$$

$$3 + 7 \cdot (-4) = -25.$$

- K11. a)** Tiedetään, että $10 \equiv 1 \pmod{9}$.

Nyt saadaan

$$156 = 1 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 6 \equiv 1^2 + 5 \cdot 1 + 6 = 12 \equiv 3 \pmod{9}$$

$$764 = 7 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 4 \equiv 7 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 + 4 = 17 \equiv 8 \pmod{9}$$

$$34 = 3 \cdot 10 + 4 \equiv 3 \cdot 1 + 4 = 7 \pmod{9}$$

Täten

$$156 + 764 \cdot 34 \equiv 3 + 8 \cdot 7 = 3 + 56 = 59 \equiv 5 \pmod{9}$$

Jakojäännös luvulla 9 jaettaessa on 5.

- b)** $134 = 1 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 4 \equiv 1^2 + 3 \cdot 1 + 4 = 8 \equiv -1 \pmod{9}$

$$876 = 8 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 6 \equiv 8 \cdot 1^2 + 7 \cdot 1 + 6 = 21 \equiv 3 \pmod{9}$$

Täten

$$134^{1000} \cdot 876 \equiv (-1)^{1000} \cdot 3 = 1 \cdot 3 = 3 \pmod{9}$$

Jakojäännös luvulla 9 jaettaessa on 3.

- K12.** Vuodessa on 365 päivää

$$365 = 52 \cdot 7 + 1$$

365 päivää on 52 täyttä viikkoa ja yksi päivä. Laura täyttää yhden vuoden keskiviikkona.

- K13.** a) Nyt lämpötila on $-7\text{ }^{\circ}\text{C}$ eli yli $-15\text{ }^{\circ}\text{C}$. Siispä kaikki oppilaat ovat ulkona välitunnilla.
- b) Tilanteesta, jossa ulkolämpötila on alle $-15\text{ }^{\circ}\text{C}$, ei sanota koulun säännössä mitään eli tästä voi seurata, että kaikki oppilaat menevät tai eivät mene välitunnilla ulos. Nyt lämpötila on $-19\text{ }^{\circ}\text{C}$ eli alle $-15\text{ }^{\circ}\text{C}$ eli tilanteesta ei voida päätellä mitään.
- c) Tilanteesta, jossa ulkolämpötila on alle $-15\text{ }^{\circ}\text{C}$, ei sanota koulun säännössä mitään eli tästä voi myös seurata se, että kaikki oppilaat menevät välitunnilla ulos. Näin ollen ei voida päätellä mitään siitä, että kaikki oppilaat ovat ulkona välitunnilla.

- K14.** a) ”Jos kolmio on tasakylkinen, niin kolmio on suorakulmainen.”

Lause ei ole totta. Esimerkiksi kolmio, jonka kulmat ovat 20° , 20° ja 140° on tasakylkinen, muttei suorakulmainen.

- b) ”Jos kolmio on suorakulmainen, kolmiossa on 90 asteen kulma.”

Lause on tosi. Jos kolmio on suorakulmainen, niin yksi sen kulmista on suuruudeltaan 90 astetta.

- c) ”Jos kolmiossa on 90 asteen kulma, niin kolmio on suorakulmainen.”

Lause on tosi. Jos kolmion yhden kulman suuruus on 90 astetta, niin kolmio on suorakulmainen.

- d) ”Kolmio on suorakulmainen täsmälleen silloin, kun kolmiossa on 90 asteen kulma.”

Lause on tosi. Lauseiden B ja C välillä on voimassa implikaatio molempiin suuntiin b- ja c-kohtien perusteella. Siispä niiden välillä on voimassa myös ekvivalenssi.

- K15.** Kirjoitetaan ensin lauseet symbolikielelle. Olkoon
 $A = \text{”KeuPa voittaa”}$ ja
 $B = \text{”KeuPa nousee Liigaan”}$.

Nyt

$A \Rightarrow B = \text{”jos KeuPa voittaa, se nousee Liigaan”}$ ja
 $\neg A \vee B = \text{”KeuPa ei voita tai KeuPa nousee Liigaan”}$.

Tutkitaan lauseiden totuusarvoja totuustaulukon avulla.

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg A$	$\neg A \vee B$
1	1	1	0	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

Lauseiden totuusarvot ovat aina samat eli lauseet ovat keskenään ekvivalentit.

- K16.** Tutkitaan lauseen totuusarvoa totuustaulun avulla.

A	B	C	$A \vee C$	$B \Rightarrow (A \vee C)$	$A \wedge (B \Rightarrow (A \vee C))$
1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	0
0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0
0	0	0	0	1	0

Lause on tosi, kun A on tosi.

K17. a)

A	B	$A \wedge B$	$A \Rightarrow (A \wedge B)$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	0	1
0	0	0	1

Huomataan, että lause ei ole aina tosi eli implikaatio ei ole tautologia.

b)

A	B	$A \wedge B$	$(A \wedge B) \Rightarrow A$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	1

Huomataan, että lause on tosi kaikilla totuusarvoilla. Siispä implikaatio on tautologia.

c)

A	B	$A \vee B$	$A \Rightarrow (A \vee B)$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	1

Huomataan, että lause on tosi kaikilla totuusarvoilla. Siispä implikaatio on tautologia.

d)

A	B	$A \vee B$	$(A \vee B) \Rightarrow A$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	0
0	0	0	1

Huomataan, että lause ei ole aina tosi eli implikaatio ei ole tautologia.

K18. Kirjoitetaan ensin lauseet symbolikielelle. Merkitään

D = ”Dima on rehti”,

E = ”Elmo on rehti” ja

F = ”Fanni on rehti”

Tällöin

$D \wedge E \wedge F$ = ”Olemme kaikki rehtejä.”

$(D \wedge \neg E \wedge \neg F) \vee (\neg D \wedge E \wedge \neg F) \vee (\neg D \wedge \neg E \wedge F)$ = ”Täsmälleen yksi meistä on rehti.”

Tutkitaan lauseiden totuusarvoja totuustaulukolla.

			D :n väite	E :n väite
D	E	F	kaikki rehtejä	täsmälleen yksi rehti
1	1	1	1	0
1	1	0	0	0
1	0	1	0	0
1	0	0	0	1
0	1	1	0	0
0	1	0	0	1
0	0	1	0	1
0	0	0	0	0

Huomataan, että rivit, joilla henkilön ja hänen väitteensä totuusarvo on sama, ovat yllä väritetyt kolmanneksi alin ja alin rivi. Tämä vastaa tilannetta, jossa Dima ja Fanni ovat retkuja ja Elmo rehti ja tilannetta, jossa kaikki ovat retkuja.

K19. Osoitetaan väite vääräksi vastaesimerkin avulla.

Esimerkiksi, kun $x = 1$ ja $y = -1$, niin

$$|x + y| = |1 + (-1)| = 0 \text{ ja}$$

$$|x| + |y| = |1| + |-1| = 1 + 1 = 2$$

Siispä tällöin $|x + y| \neq |x| + |y|$.

Näin ollen yhtälö ei pidä paikkaansa kaikille reaali-luvuilla x ja y .

K20. *Oletus:* a on jaollinen luvulla b eli $a = kb$, missä $a, b, k \in \mathbb{Z}$.

Väite: a^2 on jaollinen luvulla b^2 eli $a^2 = nb^2$, missä $n \in \mathbb{Z}$.

Todistetaan väite.

Oletuksesta saadaan

$$a^2 = a \cdot a = kb \cdot kb = (k \cdot k) \cdot b^2,$$

missä $k \cdot k$ on kahden kokonaisluvun tulona kokonaisluku.

Siispä a^2 on jaollinen luvulla b^2 .

K21. *Oletukset:* $n \in \mathbb{Z}$ ja $7n + 9$ on parillinen.

Väite: n on pariton.

Todistetaan väite epäsuoraa todistusta käyttäen.

Jos väite on epätosi, niin n on parillinen eli $n = 2p$, missä $p \in \mathbb{Z}$.

Tästä seuraa

$$7n + 9 = 7 \cdot 2p + 9 = 7 \cdot 2p + 8 + 1 = 2(7p + 4) + 1,$$

missä $7p + 4$ on kokonaisluku, koska p on kokonaisluku.

Nyt $7n + 9$ olisi pariton luku. Tämä on ristiriidassa oletuksen ” $7n + 9$ on parillinen” kanssa. Siispä n ei voi olla parillinen ja sen tulee siis olla pariton.

K22. a) Väite pitää paikkansa. Todistetaan väite suoralla todistuksella.

Oletus: a , b ja c ovat jaollisia kuudella $a = 6m$, $b = 6n$ ja $c = 6l$, missä $n, m, l \in \mathbb{Z}$.

Väite: Lukujen a , b ja c keskiarvo on parillinen.

Todistetaan väite.

Oletuksesta saadaan lukujen keskiarvoksi

$$\frac{a + b + c}{3} = \frac{6n + 6m + 6l}{3} = \frac{6(n + m + l)}{3} = 2(n + m + l),$$

missä $n + m + l$ on kolmen kokonaisluvun summana kokonaisluku.

Siispä kolmen 6:lla jaollisen luvun keskiarvo on parillinen.

b) Väite ei pidä paikkansa.

Osoitetaan väite vääräksi vastaesimerkin avulla.

Esimerkiksi luku $18 = 9 \cdot 2$ on jaollinen luvulla 9. Kuitenkin nyt tämän luvun neliöjuuri $\sqrt{18} = 4,2426\dots$ ei ole kokonaisluku. Siispä se ei ole myöskään jaollinen luvulla 3.

K23. Halutaan siis osoittaa, että $4^1 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^n = \frac{1}{3}(4^{n+1} - 4)$ kun $n = 1, 2, 3, \dots$

Alkuaskel

Kun $n = 1$, summassa on vain yksi termi $4^1 = 4$.

$$\text{Tällöin } \frac{1}{3}(4^{1+1} - 4) = \frac{1}{3}(4^2 - 4) = \frac{1}{3}(16 - 4) = \frac{1}{3} \cdot 12 = 4$$

Väite on siis tosi, kun $n = 1$ eli alkuaskel on todistettu.

Induktioaskel

$$\text{Induktio-oletus: } 4^1 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^k = \frac{1}{3}(4^{k+1} - 4).$$

$$\text{Induktioväite: } 4^1 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^k + 4^{k+1} = \frac{1}{3}(4^{(k+1)+1} - 4)$$

Osoitetaan, että induktioväite seuraa induktio-oletuksesta.

$$\begin{aligned} & \underbrace{4^1 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^k}_{\substack{\text{induktio-oletus} \\ = \frac{1}{3}(4^{k+1} - 4)}} + 4^{k+1} \\ &= \frac{1}{3}(4^{k+1} - 4) + 4^{k+1} \\ &= \frac{1}{3} \cdot 4^{k+1} - \frac{1}{3} \cdot 4 + 4^{k+1} \\ &= \frac{4}{3} \cdot 4^{k+1} - \frac{1}{3} \cdot 4 \\ &= \frac{1}{3}(4 \cdot 4^{k+1} - 4) \quad \| a^n a^m = a^{n+m} \\ &= \frac{1}{3}(4^{(k+1)+1} - 4) \end{aligned}$$

Näin ollen induktioväite pätee.

Nyt sekä alkuaskel että induktioaskel on todistettu.

Induktioperiaatteen perusteella $4^1 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^n = \frac{1}{3}(4^{n+1} - 4)$, kaikilla $n = 1, 2, 3, \dots$

Kokoavia tehtäviä

ILMAN TEKNISIÄ APUVÄLINEITÄ

1. a) Päätely ei ole tehty oikein.

Jakolaskua $29 : 4$ vastaava jakoyhtälö olisi $29 = 4 \cdot 7 + 1$ eli jakojäännös olisi 1. Jakojäännös on aina jakajaa pienempi ei-negatiivinen kokonaisluku.

b) Päätely on tehty oikein.

Jakoyhtälössä $29 = 6 \cdot 4 + 5$ jakojäännös 5 on jakajaa pienempi ei-negatiivinen kokonaisluku.

c) Päätely on tehty oikein.

Jos $54 = 6 \cdot 9$, niin $54 : 6 = 9$ ja $54 : 9 = 6$. Sekä 6 että 9 ovat siis luvun 54 tekijöitä.

d) Päätely ei ole tehty oikein.

4,5 ei voi olla luvun 54 tekijä, sillä tekijöiden tulee olla kokonaislukuja. Tällöin myöskään 12 ei ole luvun 54 tekijä.

2. Luvut a ja b ovat kongruentteja modulo n , jos $a = b + nq$ jollakin kokonaisluvulla q . Näin ollen saadaan pareiksi:

A–II

B–III

C–I

3. a) Luvuilla 3 ja 8 ei ole yhteisiä tekijöitä. Luku 15120 on jaollinen sekä luvulla 3 että luvulla 8, jos se on jaollinen luvulla $3 \cdot 8 = 24$.

Selvitetään jaollisuus luvulla 24 laskemalla jakolasku $15120 : 24$ allekkain.

$$\begin{array}{r} 15120 : 24 = 630 \\ \underline{-144} \times x \\ 720 \\ \underline{-720} \\ 0 \end{array}$$

Jakolasku meni tasan eli luku 15120 on jaollinen luvulla 24 ja siten myös luvuilla 3 ja 8.

- b) Kirjoitetaan kertolaskuissa esiintyvien lukujen alkulukuhajotelmat.

$$\begin{aligned} 80 &= 2 \cdot 40 = 2 \cdot 2 \cdot 20 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 10 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 2^4 \cdot 5 \\ 315 &= 3 \cdot 105 = 3 \cdot 5 \cdot 21 = 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 7 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \\ 105 &= 5 \cdot 21 = 5 \cdot 3 \cdot 7 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \\ 240 &= 10 \cdot 24 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 12 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \end{aligned}$$

Nyt saadaan:

$$\begin{aligned} 80 \cdot 315 &= (2^4 \cdot 5) \cdot (3^2 \cdot 5 \cdot 7) = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \text{ ja} \\ 105 \cdot 240 &= (3 \cdot 5 \cdot 7) \cdot (2^4 \cdot 3 \cdot 5) = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7. \end{aligned}$$

Huomataan, että lukujen alkulukuhajotelmat ovat samat. Siispä luvut ovat yhtä suuret.

4. Jos $x + y = -7$, niin $y = -7 - x$.

Nyt saadaan vastauslukupareiksi esimerkiksi:

$$\text{Kun } x = 0, \text{ niin } y = -7 - 0 = -7.$$

$$\text{Kun } x = 1, \text{ niin } y = -7 - 1 = -8.$$

$$\text{Kun } x = -3, \text{ niin } y = -7 - (-3) = -7 + 3 = -4.$$

Esimerkiksi lukuparit $(0, -7)$, $(1, -8)$ ja $(-3, -4)$ kelpaavat yhtälön ratkaisuuksi.

5. a) Luku on jaollinen luvulla 3, jos sen numeroiden summa on jaollinen luvulla 3. Nyt numeroiden summaksi saadaan

$$\begin{aligned} 1 + 2 + n + 3 + 4 + n + 5 + 6 + 7 + n + 8 + 9 + n \\ = 45 + 4n \\ = 45 + 3n + n \\ = 3(15 + n) + n. \end{aligned}$$

Luku $3(15 + n)$ on jaollinen luvulla 3, joten $12n34n567n89n$ on jaollinen luvulla 3 täsmälleen silloin, kun n on jaollinen luvulla 3. Siispä $n = 0$, $n = 3$, $n = 6$ tai $n = 9$.

- b) Luku $12n34n567n89n$ on jaollinen luvulla 6 jos se on jaollinen sekä luvulla 3 että luvulla 2.

a-kohdan mukaan luku $12n34n567n89n$ on jaollinen luvulla 3, kun $n = 0$, $n = 3$, $n = 6$ tai $n = 9$. Lisäksi luku $12n34n567n89n$ on jaollinen luvulla 2 vain ja ainoastaan, jos sen viimeinen numero n on parillinen.

a-kohdan vastauksista parillisia ovat vain luvut, joissa $n = 0$ tai $n = 6$. Siispä luku $12n34n567n89n$ on jaollinen luvulla 6, kun $n = 0$ tai $n = 6$.

- c) Luku on jaollinen luvulla 9, jos sen numeroiden summa on jaollinen luvulla 9. Numeroiden summa on a-kohdan perusteella $45 + 4n$.

Luku 45 on jaollinen luvulla 9, joten luku $12n34n567n89n$ on jaollinen luvulla 9 täsmälleen silloin, kun $4n$ on jaollinen luvulla 9. Siispä $n = 0$ tai $n = 9$.

6. Osoitetaan väite vääräksi vastaesimerkin avulla. Olkoon $n = 5$. Tällöin

$$n^2 - n + 5 = 5^2 - 5 + 5 = 5^2 = 5 \cdot 5.$$

Nyt luku 5^2 ei ole alkuluku, koska se voidaan esittää kahden lukua 1 suuremman kokonaisluvun tulona. Näin ollen väite ei päde jokaiselle luonnolliselle luvulle n ja on siis väärä.

7. Tutkitaan luvun kongruenssia modulo 10.

$$843 = 84 \cdot 10 + 3 \text{ eli } 843 \equiv 3 \pmod{10}$$

$$3^2 = 9 = 1 \cdot 10 - 1 \text{ eli } 3^2 \equiv -1 \pmod{10}$$

Nyt

$$843^{1000} \equiv 3^{1000} \equiv (3^2)^{500} \equiv (-1)^{500} \equiv 1 \pmod{10}$$

Jakojäännös on siis 1.

8. Induktioperiaatteen perusteella riittää näyttää, että

1) $a_1 \equiv 1 \pmod{4}$

2) jos $a_n \equiv 1 \pmod{4}$, niin tästä seuraa, että myös $a_{n+1} \equiv 1 \pmod{4}$.

Alkuaskel

Lukujonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 1$ ja $1 \equiv 1 \pmod{4}$, joten alkuaskel on todistettu.

Induktioaskel

Induktio-oletus: $a_k \equiv 1 \pmod{4}$.

Induktioväite: $a_{k+1} \equiv 1 \pmod{4}$.

Lukujonon määritelmän perusteella

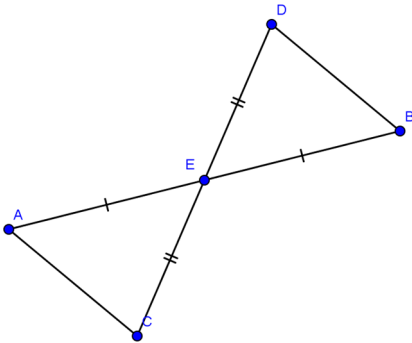
$$a_{k+1} = 3a_k + 2.$$

Induktio-oletuksen perusteella saadaan

$$3a_k + 2 \equiv 3 \cdot 1 + 2 = 5 \equiv 1 \pmod{4}.$$

Siispä $a_n \equiv 1 \pmod{4}$ kaikilla $n = 1, 2, 3, \dots$

9. Piirretään tilanteesta mallikuva.



Kolmiosta ACE ja BDE havaitaan:

1. sivut $AE = EB$, koska piste E on janan AB keskipiste.
2. $\sphericalangle AEC = \sphericalangle BED$ koska ne ovat toistensa ristikulmia.
3. sivut $CE = ED$, koska piste E on janan CD keskipiste.

sks-lauseen perusteella kolmiot ACE ja BDE ovat yhteneviä.

10. a) $F_1 = 1$
 $F_2 = 1$
 $F_3 = 1 + 1 = 2$
 $F_4 = 1 + 2 = 3$
 $F_5 = 2 + 3 = 5$
 $F_6 = 3 + 5 = 8$

b) Osoitetaan induktiolla, että kaava $F_{n-1} \cdot F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$ pätee kaikilla $n = 2, 3, 4, \dots$

Alkuaskel

Kun $n = 2$, on $F_{2-1} \cdot F_{2+1} - F_2^2 = F_1 \cdot F_3 - F_2^2 = 1 \cdot 2 - 1^2 = 2 - 1 = 1$ ja $(-1)^2 = 1$.

Alkuaskel pätee.

Induktioaskel

Induktio-oletus: $F_{k-1} \cdot F_{k+1} - F_k^2 = (-1)^k$

Induktioväite: $F_{(k+1)-1} \cdot F_{(k+1)+1} - F_{k+1}^2 = (-1)^{k+1}$ eli

$$F_k \cdot F_{k+2} - F_{k+1}^2 = (-1)^{k+1}$$

Osoitetaan, että induktio-oletuksesta seuraa induktioväite.

Kirjoitetaan Fibonaccin lukujonon määritelmän perusteella

$$F_{k+2} = F_{k+1} + F_k \text{ ja } F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$$

$$\begin{aligned} F_k \cdot F_{k+2} - F_{k+1}^2 &= F_k(F_{k+1} + F_k) - F_{k+1}^2 \\ &= F_k((F_k + F_{k-1}) + F_k) - (F_k + F_{k-1})^2 \\ &= F_k(2F_k + F_{k-1}) - (F_k + F_{k-1})^2 \\ &= 2F_k^2 + F_k \cdot F_{k-1} - F_k^2 - 2F_k \cdot F_{k-1} - F_{k-1}^2 \\ &= F_k^2 - F_{k-1}(F_k + F_{k-1}) \quad || F_k + F_{k-1} = F_{k+1} \\ &= -1 \cdot (F_{k-1} \cdot F_{k+1} - F_k^2) \quad || \text{induktio-oletus} \\ &= -1 \cdot (-1)^k \\ &= (-1)^{k+1} \end{aligned}$$

APUVÄLINEET SALLITTU

11. a) Viisinumeroinen luku $abcde$ voidaan esittää summana
 $a \cdot 10\,000 + b \cdot 1\,000 + c \cdot 100 + d \cdot 10 + e$,

Luvut 10 000, 1000, 100, 10 ja 1 eivät ole jaollisia luvulla 7, joten luku $abcde$ on jaollinen luvulla 7, vain jos jokainen kertoimista a , b , c , d ja e on jaollinen luvulla 7. Ainoat yksinumeroiset luvut, jotka ovat jaollisia luvulla 7, ovat 7 ja 0. Näin ei siis pystytty päättämään viidestä eri numerosta koostuvaa lukua.

Kirjoitetaan lukua $abcde$ vastaava summa toisella tavalla siten, että muodostetusta summasta pystytään tekemään päättely. Kymmeniä tuhansia ja tuhansia kuvaavat luvut $a \cdot 10\,000$ ja $b \cdot 1\,000$ voidaan kirjoittaa tulona $(a \cdot 10 + b) \cdot 1\,000$. Vastaavalla tavalla kymmeniä ja ykkösiä vastaavista luvuista saadaan tulo de .

$$(a \cdot 10 + b) \cdot 1\,000 + c \cdot 100 + d \cdot 10 + e = ab \cdot 1\,000 + c \cdot 100 + de$$

Nyt lukujen ab , c ja de tulee olla jaollisia luvulla 7.

Lisäksi haluttiin, että kaikki numerot a , b , c , d ja e olivat eri numeroita. Voidaan siis valita esimerkiksi $ab = 14$, $c = 7$ ja $de = 28$.

Luku 14728 on eräs ehdot täyttävä luku.

- b) Viisinumeroinen luku $abcde$ voidaan esittää esimerkiksi summana
 $ab \cdot 1\,000 + c \cdot 100 + de$,
missä ab on kaksinumeroinen luonnollinen luku, c on yksinumeroinen luonnollinen luku ja de on kaksinumeroinen luonnollinen luku.

Luku $abcde$ on jaollinen luvulla 17, jos jokainen summattavista $ab \cdot 1\,000$, $c \cdot 100$ ja de on jaollinen luvulla 17. Lisäksi haluttiin, että kaikki numerot a , b , c , d ja e olivat eri numeroita. Voidaan siis valita esimerkiksi $ab = 17$, $c = 0$ ja $de = 34$.

Luku 17034 on eräs ehdot toteuttava luku.

- 12.** Tehdään luvun 308 alkulukuhajotelma.
 $308 = 2 \cdot 154 = 2 \cdot 2 \cdot 77 = 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 11$

Luku 308 on siis jaollinen luvuilla

1,

2,

7,

11,

$2 \cdot 2 = 4$,

$2 \cdot 7 = 14$,

$2 \cdot 2 \cdot 7 = 28$,

$2 \cdot 11 = 22$,

$2 \cdot 2 \cdot 11 = 44$,

$7 \cdot 11 = 77$,

$2 \cdot 7 \cdot 11 = 154$ ja

308.

13. Selvitetään $\text{sy}(588, 420)$.

$$588 = 420 \cdot 1 + 168$$

$$420 = 168 \cdot 2 + 84$$

$$168 = 84 \cdot 2$$

$$\text{Siispä } \text{sy}(588, 420) = 84.$$

Ratkaistaan sitten jakojäännökset.

$$168 = 588 - 420 \cdot 1$$

$$84 = 420 - 168 \cdot 2$$

Esitetään $\text{sy}(588, 420)$ muodossa $588x + 420y$ jakojäännöksiä apuna käyttäen.

$$84 = 420 - 2 \cdot 168$$

$$84 = 420 - 2 \cdot (588 - 420 \cdot 1)$$

$$84 = -2 \cdot 588 + 3 \cdot 420$$

$$84 = 588 \cdot (-2) + 420 \cdot 3$$

14. a)

A	B	$A \square B$	$A \square (A \square B)$
1	1	0	1
1	0	1	0
0	1	0	0
0	0	0	0

b) Lause $A \square (A \square B)$ on tosi vain ja ainoastaan, kun A ja B ovat tosia. Täten se on ekvivalentti lauseen $A \wedge B$ kanssa.

15. Jos $k \equiv n + 23 \pmod{29}$, niin luvuilla k ja $n + 23$ on sama jakojäännös luvulla 29 jaettaessa.

G on 7. aakkonen eli $k = 7$.

Nyt saadaan $7 \equiv 7 + 29 = 36 = 13 + 23 \pmod{29}$.

Näin ollen $n + 23 = 36$, josta saadaan $n = 13$.

Ensimmäinen kirjain on M.

X on 24. aakkonen eli $k = 24$.

Nyt saadaan $24 = 1 + 23 \pmod{29}$.

Nyt $n = 1$, eli toinen ja kolmas kirjain on A.

F on 6. aakkonen, eli $k = 6$.

Nyt saadaan $6 \equiv 6 + 29 \equiv 35 \pmod{29}$.

Nyt $n = 12$, joten neljäs kirjain on siis L

C on 3. aakkonen eli $k = 3$.

Nyt saadaan $3 \equiv 3 + 29 \equiv 32 \pmod{29}$.

Nyt $n = 9$, joten viimeinen kirjain on I.

Purettu viesti on MAALI.

16. a) *Oletus:* a ja b ovat parittomia eli $a = 2n + 1$ ja $b = 2m + 1$, jossa $n, m \in \mathbb{Z}$.

Väite: $a + b$ on parillinen.

Todistus: Oletuksen avulla saadaan

$$a + b = 2n + 1 + 2m + 1 = 2n + 2m + 2 = 2(n + m + 1),$$

missä $n + m + 1$ on kokonaislukujen summana kokonaisluku.

Siispä $a + b$ on parillinen.

- b) *Oletus:* a ja b ovat parittomia eli $a = 2n + 1$ ja $b = 2m + 1$, jossa $n, m \in \mathbb{Z}$.

Väite: ab on pariton.

Todistus: Oletuksen avulla saadaan

$$ab = (2n + 1)(2m + 1) = 4nm + 2n + 2m + 1 = 2(2nm + n + m) + 1,$$

missä $2nm + n + m$ on kokonaisluku, koska n ja m ovat kokonaislukuja.

Siispä ab on pariton.

17. Luku a on jaollinen luvulla 6 täsmälleen silloin, kun se on jaollinen luvuilla 2 ja 3.

$$n^3 + 6n^2 - 7n = n(n-1)(n+7)$$

Luvut n ja $n - 1$ ovat peräkkäiset kokonaisluvut, joten toinen niistä on varmasti parillinen, jolloin luku $n^3 + 6n^2 - 7n$ on jaollinen luvulla 2.

Jos n tai $n - 1$ on kolmella jaollinen, on luku $n^3 + 6n^2 - 7n$ jaollinen luvulla 3.

Koska joka kolmas luku on kolmella jaollinen ja jos n tai $n - 1$ ei ole kolmella jaollinen, niin $n + 1$ on varmasti kolmella jaollinen.

Tällöin $n + 7 = (n + 1) + 6 = 3q + 6 = 3(q + 2)$ on kolmella jaollinen. Näin ollen jokin luvuista n , $n + 1$ tai $n + 7$ on kolmella jaollinen.

Luku $n^3 + 6n^2 - 7n$ on siis kuudella jaollinen.

TOISIN:

Kun luonnollinen luku n jaetaan luvulla 6, jakojäännös voi olla vain 0, 1, 2, 3, 4 tai 5. Tarkastellaan nämä eri vaihtoehdot erikseen korvaamalla n omalla jakojäännöksellään.

1) $n \equiv 0 \pmod{6}$:

$$n^3 + 6n^2 - 7n \equiv 0^3 + 6 \cdot 0^2 - 7 \cdot 0 \equiv 0 \pmod{6}$$

2) $n \equiv 1 \pmod{6}$:

$$n^3 + 6n^2 - 7n \equiv 1^3 + 6 \cdot 1^2 - 7 \cdot 1 \equiv 0 \pmod{6}$$

3) $n \equiv 2 \pmod{6}$:

$$n^3 + 6n^2 - 7n \equiv 2^3 + 6 \cdot 2^2 - 7 \cdot 2 \equiv 18 \equiv 0 \pmod{6}$$

4) $n \equiv 3 \pmod{6}$:

$$n^3 + 6n^2 - 7n \equiv 3^3 + 6 \cdot 3^2 - 7 \cdot 3 \equiv 60 \equiv 0 \pmod{6}$$

5) $n \equiv 4 \equiv -2 \pmod{6}$:

$$n^3 + 6n^2 - 7n \equiv (-2)^3 + 6 \cdot (-2)^2 - 7 \cdot (-2) \equiv 30 \equiv 0 \pmod{6}$$

6) $n \equiv 5 \equiv -1 \pmod{6}$:

$$n^3 + 6n^2 - 7n \equiv (-1)^3 + 6 \cdot (-1)^2 - 7 \cdot (-1) \equiv 12 \equiv 0 \pmod{6}$$

On siis osoitettu, että $n^3 + 6n^2 - 7n \equiv 0 \pmod{6}$ olipa n mikä tahansa luonnollinen luku. Näin ollen luku $n^3 + 6n^2 - 7n$ on jaollinen luvulla 6 aina, kun n on luonnollinen luku.

- 18. a)** Summa $n + (n + 1) + (n + 2) + \dots + (n + k)$ on aritmeettinen summa, sillä jokainen yhteenlaskettava on aina yhden suurempi kuin edellinen. Jonossa $a_1 = n$ ja $d = 1$ ja siinä on $k + 1$ yhteenlaskettavaa.
 $a_{k+1} = n + k$

Summa saadaan laskettua aritmeettisen summan kaavalla

$$S_{k+1} = (k+1) \frac{n + (n+k)}{2} = \frac{(k+1)(2n+k)}{2}.$$

Saadaan yhtälö $\frac{(k+1)(2n+k)}{2} = 1007$, josta
 $(k+1)(2n+k) = 2014$.

- b)** $2014 = 2 \cdot 1007 = 2 \cdot 19 \cdot 53$

Luvun 2014 alkutekijät ovat 2, 19 ja 53.

- c)** Yhtälön $(k+1)(2n+k) = 2014$ toteuttavat sellaiset positiiviset kokonaisluvut k ja n , joille $k+1$ ja $2n+k$ ovat luvun 2014 tekijät.

$k+1$	k	$2n+k$	n
1	0	2014	$2n+0 = 2014$ $n = 1007$
2	1	1007	503
19	18	106	44
53	52	38	-7
$2 \cdot 19 = 38$	37	53	8
$2 \cdot 53 = 106$	105	19	-43
$19 \cdot 53 = 1007$	1006	2	-502
$2 \cdot 19 \cdot 53 = 2014$	2013	1	-1006

Lukujen n ja k tulee olla positiivisia kokonaislukuja. a -kohdan yhtälön toteuttavat luvut $k=1$ ja $n=503$, $k=18$ ja $n=44$ sekä $k=37$ ja $n=8$.

19. Koska rekursiokaavassa jäsen lasketaan kahden edellisen perusteella, alkuaskeleessa täytyy tarkistaa, että kaava pätee kahdelle ensimmäiselle jäsenelle.

Alkuaskel

Kun $n = 1$, $a_1 = 5$ ja kun $n = 2$, $a_2 = 13$.

Kaavalla saadaan $a_1 = 2^1 + 3^1 = 2 + 3 = 5$ ja $a_2 = 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$.

Alkuaskel on osoitettu.

Induktioaskel

Induktio-oletus: $a_k = 2^k + 3^k$ ja $a_{k-1} = 2^{k-1} + 3^{k-1}$

Induktioväite: $a_{k+1} = 2^{k+1} + 3^{k+1}$

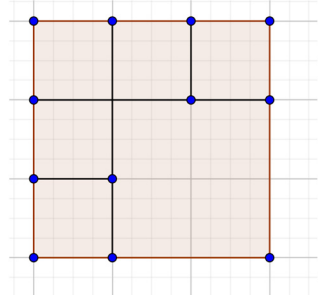
$$\begin{aligned}
 a_{k+1} &= 5a_k - 6a_{k-1} && \parallel \text{induktio-oletus} \\
 &= 5(2^k + 3^k) - 6(2^{k-1} + 3^{k-1}) \\
 &= 5 \cdot 2^k + 5 \cdot 3^k - 6 \cdot 2^{k-1} - 6 \cdot 3^{k-1} \\
 &= 5 \cdot 2^k + 5 \cdot 3^k - 3 \cdot 2 \cdot 2^{k-1} - 2 \cdot 3 \cdot 3^{k-1} \\
 &= 5 \cdot 2^k + 5 \cdot 3^k - 3 \cdot 2^k - 2 \cdot 3^k \\
 &= 2 \cdot 2^k + 3 \cdot 3^k \\
 &= 2^{k+1} + 3^{k+1}
 \end{aligned}$$

Siispä $a_n = 2^n + 3^n$ kaikilla $n \geq 1$.

20. a) Neliön saa jaettua kuuteen, seitsemään ja kahdeksaan neliöön seuraavilla tavoilla:

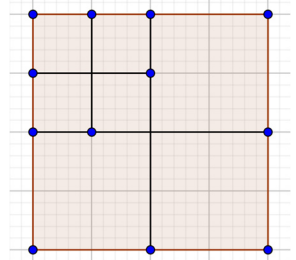
Kuuteen neliöön:

Jaetaan alkuperäisen neliön molemmat sivut kolmeen yhtä pitkään osioon. Piirretään näiden osioiden avulla neliön yhteen nurkkaan 2×2 -osion suuruinen neliö. Jäljellä oleva alue jakautuu viiteen 1×1 -osion suuruiseen neliöön.



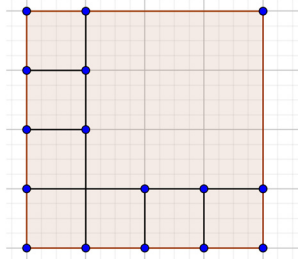
Seitsemään neliöön:

Jaetaan alkuperäisen neliön sivut kahteen yhtä pitkään osioon. Jaetaan tämän avulla neliö neljään yhtä suureen pienempään 1×1 -osion suuruiseen neliöön. Valitaan tämän jälkeen yksi näistä pienemmistä neliöistä ja jaetaan se samalla tekniikalla taas neljään pienempään neliöön.

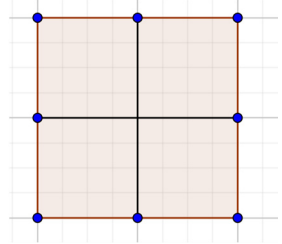


Kahdeksaan neliöön:

Jaetaan alkuperäisen neliön molemmat sivut neljään yhtä pitkään osioon. Piirretään näiden osioiden avulla neliön yhteen nurkkaan 3×3 -osion suuruinen neliö. Jäljellä oleva alue jakautuu seitsemään 1×1 -osion suuruiseen neliöön.



- b) Jos neliö on saatu jaettua n neliöön, niin näistä neliöistä voidaan valita yksi, joka edelleen jaetaan pienemmiksi neliöiksi.



Kun jakaminen tehdään kuvan tavalla, niin alkuperäisen neliön tilalle tulee nyt neljä pienempää neliötä. Neliöiden kokonaismäärä kasvaa siis kolmella. Täten neliöitä on tämän jälkeen kokonaisuudessaan $n + 3$ kappaletta. Jaakon havainto oli siis oikea.

- c) Maijan havainnon mukaan neliö saadaan jaettua kuuteen neliöön. Kun tähän yhdistetään Jaakon havainto, niin neliö saadaan jaettua myös $6 + 3 = 9$, $9 + 3 = 12$, $12 + 3 = 15$ jne. neliöön.

Vastaavasti Maijan havainnon mukaan neliö saadaan jaettua seitsemään neliöön. Jaakon havaintoa käyttäen neliö voidaan jakaa myös $7 + 3 = 10$, $10 + 3 = 13$, $13 + 3 = 16$ jne. neliöön.

Vastaavasti Maijan havainnon mukaan neliö saadaan jaettua kahdeksaan neliöön. Jaakon havaintoa käyttäen neliö voidaan jakaa myös $8 + 3 = 11$, $11 + 3 = 14$, $14 + 3 = 17$ jne. neliöön.

Yhdistämällä edelliset havainnot huomataan, että neliö voidaan jakaa aina 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17... pienempään neliöön. Neliö voidaan siis jakaa n :ään pienempään neliöön mille tahansa luvulle $n \geq 6$.