Kertaus

K1. **a)** Polynomi $P(x) = 2x^3 - 12x^2 + 18x$ on jaollinen polynomilla $Q(x) = x - 3$, jos $x = 3$ on polynomin P nollakohta, eli $P(3) = 0$.
$P(3) = 2 \cdot 3^3 - 12 \cdot 3^2 + 18 \cdot 3 = 54 - 108 + 54 = 0.$

Polynomi P on jaollinen polynomilla Q.

b) Jaetaan polynomit P ja Q ensimmäisen asteen tekijöihin.
$P(x) = 2x^3 - 12x^2 + 18x = 2x(x^2 - 6x + 9) = 2x(x - 3)^2$
$Q(x) = 2x^2 - 6x = 2x(x - 3)$

Polynomi P on jaollinen polynomin P kummallakin tekijällä $2x$ ja $x - 3$, joten se on jaollinen polynomilla Q.

c) $Q(x) = 2x^2 + 6x = 2x(x + 3)$

Polynomi P ei ole jaollinen polynomin Q tekijällä $x + 3$, koska $P(-3) \neq 0$. Tällöin P ei ole jaollinen polynomilla Q.

K2. **a)** $$\frac{x^4 - 25x^2}{2x^3 - 10x^2} = \frac{x^2(x^2 - 25)}{2x^2(x-5)} = \frac{\cancel{x^2}\cancel{(x-5)}(x+5)}{2\cancel{x^2}\cancel{(x-5)}} = \frac{x+5}{2} = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

b) $$\frac{x^3 - x}{1-x} = \frac{x(x^2-1)}{1-x} = \frac{x\cancel{(x-1)}(x+1)}{-\cancel{(x-1)}} = -x(x+1) = -x^2 - x$$

c) $$\frac{x^3 - 4x^2 - 2x + 8}{x^2 - 2} = \frac{x^2(x-4) - 2(x-4)}{x^2 - 2} = \frac{(x-4)\cancel{(x^2-2)}}{\cancel{x^2-2}} = x - 4$$

K3. Jaetaan polynomi P polynomilla Q.

$$
\begin{array}{l}
(6x^3 - x^2 - 13x - 5) : (3x + 1) = 2x^2 - x - 4 \\
\underline{-(6x^3 + 2x^2 \qquad\qquad\quad)} \\
\qquad\quad -3x^2 - 13x - 5 \\
\qquad \underline{-(-3x^2 - x \qquad\quad)} \\
\qquad\qquad\qquad -12x - 5 \\
\qquad\qquad\quad -\underline{(-12x - 4)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad -1
\end{array}
$$

Jakoyhtälö on $6x^3 - x^2 - 13x - 5 = (3x + 1)(2x^2 - x - 4) - 1$

K4. Koska polynomi $2x^3 - x^2 - 7x + 6$ on jaollinen sekä binomilla $x - 1$ että binomilla $x + 2$, on se jaollinen niiden tulolla $(x - 1)(x + 2) = x^2 + x - 2$. Polynomi $2x^3 - x^2 - 7x + 6$ on kolmannen asteen polynomi, joten sillä voi olla vain yksi ensimmäisen asteen tekijä tekijän $x^2 + x - 2$ lisäksi. Tarvitaan yksi jakolasku.

$$
\begin{array}{l}
(2x^3 - x^2 \quad - 7x + 6) : (x^2 + x - 2) = 2x - 3 \\
\underline{-(2x^3 + 2x^2 - 4x \qquad)} \\
\qquad\quad -3x^2 - 3x + 6 \\
\qquad \underline{-(-3x^2 - 3x + 6)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Kolmas tekijä on $2x - 3$.

K5. Polynomi P on jaollinen polynomilla Q, jos ja vain jos se on jaollinen binomin Q tekijöillä.

$Q(x) = x^2 - 2 = (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$

Tulee siis olla $P(\sqrt{2}) = 0$ ja $P(-\sqrt{2}) = 0$.

$P(\sqrt{2}) = 2\cdot(\sqrt{2})^4 + q\cdot(\sqrt{2})^2 + 14 = 22 + 2q$

$P(-\sqrt{2}) = 2\cdot(-\sqrt{2})^4 + q\cdot(-\sqrt{2})^2 + 14 = 22 + 2q$

$$\begin{aligned} 22 + 2q &= 0 \\ q &= -11 \end{aligned}$$

K6. Koska $P(-7) = 0$, on $x + 7$ polynomin P tekijä.
Selvitetään toinen tekijä jakolaskulla.

$$\begin{array}{l}
(x^3 + x^2 - 40x + 14) : (x+7) = x^2 - 6x + 2 \\
\underline{-(x^3 + 7x^2)} \\
\quad -6x^2 - 40x \\
\quad \underline{-(-6x^2 - 42x)} \\
\qquad\qquad 2x + 14 \\
\qquad\quad \underline{-(2x+14)} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

$P(x) = x^3 + x^2 - 40x + 14 = (x+7)(x^2 - 6x + 2)$

$$\begin{aligned}
P(x) &= 0 \\
(x+7)\left(x^2 - 6x + 2\right) &= 0 \\
x &= \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4\cdot 1\cdot 2}}{2} \quad \text{tai} \quad x = -7 \\
&= \frac{6 \pm \sqrt{28}}{2} \\
&= \frac{6 \pm 2\sqrt{7}}{2} \\
&= 3 \pm \sqrt{7}
\end{aligned}$$

Yhtälön $P(x) = 0$ ratkaisu on $x = -7$, $x = 3 - \sqrt{7}$ tai $x = 3 + \sqrt{7}$

K7. **a)**

$$x^2 - 4x + 5 = 0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i$$

$x = 2 + i$ tai $x = 2 - i$

b)

$$x^3 + 9x = 0$$

$$x(x^2 + 9) = 0$$

$x^2 = -9$ tai $x = 0$

$$x = \pm\sqrt{-9} = \pm 3i$$

$x = 0$, $x = 3i$ tai $x = -3i$

c)

$$2x^3 - 6x^2 + 4x - 12 = 0$$

$$2x^2(x-3) + 4(x-3) = 0$$

$$(2x^2 + 4)(x - 3) = 0$$

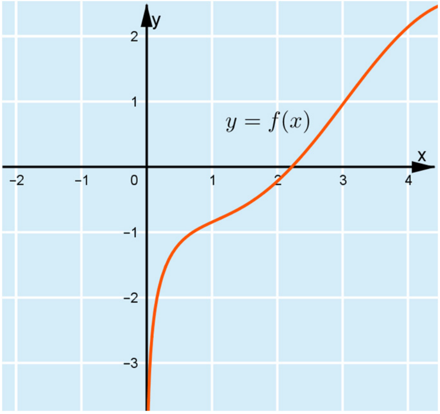
$2x^2 + 4 = 0$ tai $x - 3 = 0$

$x^2 = -2$ $\quad$ $x = 3$

$$x = \pm\sqrt{-2} = \pm\sqrt{2}i$$

$x = 3$, $x = \sqrt{2}i$ tai $x = -\sqrt{2}i$

K8. **a)** Kirjoitetaan yhtälö $\ln x = \sin x$ muotoon $\ln x - \sin x = 0$. Etsitään puolitusmenetelmällä funktion $f(x) = \ln x - \sin x$ nollakohta. Kuvaajan perusteella funktion ainoa nollakohta on välillä]2; 3[.



$f(x)$	väli	välin keskikohta
$f(2) \approx -0{,}22$		
$f(3) \approx 0{,}96$	]2, 3[	2,5
$f(2{,}5) \approx 0{,}32$	]2; 2,5[	2,25
$f(2{,}25) \approx 0{,}03$	]2; 2,25[	2,125
$f(2{,}125) \approx -0{,}1$	]2,125; 2,25[	2,1875
$f(2{,}1875) \approx -0{,}03$	]2,1875; 2,25[	2,21875
$f(2{,}21875) \approx -0{,}0004$	]2,21875; 2,25[	2,234375
$f(2{,}234375) \approx 0{,}02$	]2,21875; 2,234375[	2,2265625
$f(2{,}2265625) \approx 0{,}008$	]2,21875; 2,2265625[	2,22265625
$f(2{,}22265625) \approx 0{,}004$	]2,21875; 2,22265625[	

Funktion f nollakohta ja siten myös yhtälön ratkaisu on $x \approx 2{,}22$.

b)

$f(x)$	väli
$f(2) \approx -0{,}22$	
$f(3) \approx 0{,}96$	]2, 3[
$f(2{,}5) \approx 0{,}32$	]2; 2,5[
$f(2{,}2) \approx -0{,}02$	]2,2; 2,25[
$f(2{,}22) \approx 0{,}001$	]2,2; 2,22[
$f(2{,}215) \approx -0{,}004$	]2,215; 2,22[

$x \approx 2{,}22$

K9. **a)** Kirjoitetaan yhtälö muotoon $x^5 - x - 1 = 0$.
Tutkitaan jatkuvan funktion $f(x) = x^5 - x - 1$ kulkua derivaatan avulla.
$f'(x) = 5x^4 - 1$
$5x^4 \geq 5$, kun $x \geq 1$, joten $5x^4 - 1 > 0$, kun $x > 1$.
Koska $f'(x) > 0$ välillä $[1, 2]$, on funktio f tällä välillä kasvava ja sillä on korkeintaan yksi nollakohta.
$f(1) = -1 < 0$
$f(2) = 29 > 0$
Koska funktio f saa välin $[1, 2]$ päätepisteissä erimerkkiset arvot, on sillä Bolzanon lauseen mukaan välillä $]1, 2[$ vähintään yksi nollakohta.
Funktiolla f on siten täsmälleen yksi nollakohta ja siis yhtälöllä $x^5 - x = 1$ täsmälleen yksi ratkaisu välillä $[1, 2]$.

b) Newtonin menetelmän mukainen rekursiokaava funktion $f(x) = x^5 - x - 1$ nollakohdan etsimiselle on

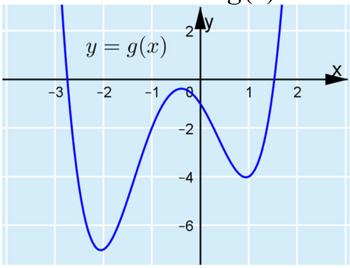
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$ missä $f'(x) = 5x^4 - 1$.

$x_0 = 1$

$$x_1 = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)} = 1,25$$

$x_2 = 1,17845\ldots$
$x_3 = 1,16753\ldots$
$x_4 = 1,16730\ldots \approx 1,167$

K10. Tehtävänä on ratkaista yhtälö $f(x) = 1$, eli $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 3x = 1$.
Kirjoitetaan yhtälö muotoon $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 3x - 1 = 0$.
Tutkitaan funktion $g(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 3x - 1$ nollakohtia.



Kuvan perusteella nollakohtia on kaksi. Toinen on lähellä kohtaa $x = 1$ ja toinen lähellä kohtaa $x = -3$.

Newtonin menetelmän mukainen rekursiokaava funktion g nollakohdan etsimiselle on

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)},\ \text{missä } g'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 6x - 3.$$

Käytetään alkuarvoa $x_0 = 1$
$x_1 = 5$
$x_2 = 3{,}729335\ldots$
$x_3 = 2{,}813267\ldots$
$x_4 = 2{,}179110\ldots$
$x_5 = 1{,}780262\ldots$
$x_6 = 1{,}583857\ldots$
$x_7 = 1{,}531678\ldots$
$x_8 = 1{,}528142\ldots$
$x_9 = 1{,}528126\ldots$
$x_{10} = 1{,}528126\ldots$

$x \approx 1{,}52813$

Käytetään alkuarvoa $x_0 = -3$
$x_1 = -2{,}794871\ldots$
$x_2 = -2{,}746012\ldots$
$x_3 = -2{,}743373\ldots$
$x_4 = -2{,}743365\ldots$

$x \approx -2{,}74337$

K11. Kirjoitetaan yhtälö muotoon $\cos x - 2x = 0$ ja tutkitaan jatkuvaa funktiota
$f(x) = \cos x - 2x$.
$f'(x) = \sin x - 2$

Koska $-1 \leq \sin x \leq 1$, niin $-3 \leq \sin x - 2 \leq -1$.
Funktion f derivaatta f' on kaikkialla negatiivinen, joten funktio f on vähenevä ja siten sillä on korkeintaan yksi nollakohta.

$f(0) = 1 > 0$
$f(1) = -1.45\ldots < 0$

Funktio f saa välin $[0, 1]$ päätepisteissä erimerkkiset arvot, joten sillä on Bolzanon lauseen mukaan vähintään yksi nollakohta välillä $]0, 1[$.
Funktiolla f on siis täsmälleen yksi nollakohta ja siten yhtälöllä $\cos x = 2x$ yksi ratkaisu.

Kirjoitetaan yhtälö kiintopistemenetelmää varten muotoon
$x = \frac{1}{2}\cos x$ ja merkitään $g(x) = \frac{1}{2}\cos x$.

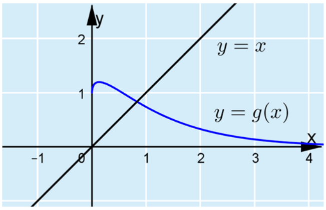
$x_0 = 1$
$x_1 = g(1) = 0{,}27015\ldots$
$x_2 = 0{,}48186\ldots$
$x_3 = 0{,}44306\ldots$
$x_4 = 0{,}45172\ldots$
$x_5 = 0{,}44984\ldots$
$x_6 = 0{,}45025\ldots$
$x_7 = 0{,}45016\ldots$
$x_8 = 0{,}45018\ldots$

$x \approx 0{,}4502$

K12. **a)** Kirjoitetaan yhtälö $\sqrt{x}+1=xe^x$ kiintopistemenetelmää varten muotoon

$x=\dfrac{\sqrt{x}+1}{e^x}$ ja merkitään $g(x)=\dfrac{\sqrt{x}+1}{e^x}$.

Piirretään kuva.



Kiintopiste näyttäisi olevan lähellä kohtaa $x = 1$.

$x_0 = 1$
$x_1 = g(1) = 0{,}735\ldots$
$x_2 = 0{,}890\ldots$
$x_3 = 0{,}798\ldots$
$x_4 = 0{,}852\ldots$
$x_5 = 0{,}820\ldots$
$x_5 = 0{,}839\ldots$
$x_6 = 0{,}827\ldots$
$x_7 = 0{,}834\ldots$

$x \approx 0{,}83$

b) Kirjoitetaan yhtälö muotoon $\sqrt{x}+1-xe^x=0$, merkitään $f(x)=\sqrt{x}+1-xe^x$ ja arvioidaan funktion f nollakohtaa Newtonin menetelmällä.

$x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, missä $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-e^x-xe^x$.

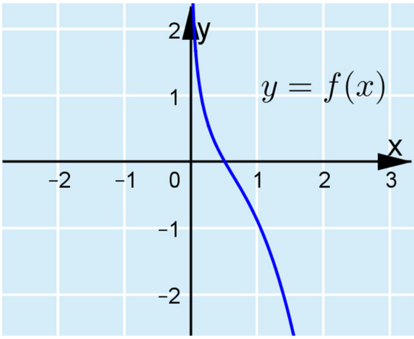
$x_0 = 1$
$x_1 = 0{,}854\ldots$
$x_2 = 0{,}832\ldots$
$x_3 = 0{,}832\ldots$

$x \approx 0{,}83$

K13. Käytetään Newtonin menetelmää funktion $f(x) = x - \ln x + \sin x - e^x$ nollakohdan etsimiseen.

Newtonin menetelmän mukainen lauseke on $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, missä

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} + \cos x - e^x.$$



Valitaan $x_0 = 0{,}5$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0{,}51346673\ldots$$

$x_2 = 0{,}51355961\ldots$
$x_3 = 0{,}51355961\ldots$

Funktion f nollakohta on $x \approx 0{,}5135596$.

K14. Luku $\sqrt{a}$, $a > 0$ on yhtälön $x^2 = a$ positiivinen ratkaisu.
Yhtälö $x^2 = a$ voidaan kirjoittaa muotoon $x^2 - a = 0$ ja arvioidaan funktion $f(x) = x^2 - a$ nollakohtaa Newtonin menetelmällä.
Newtonin menetelmän avulla muodostettu iterointikaava on

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{{x_n}^2 - a}{2x_n} = x_n - \frac{x_n}{2} + \frac{a}{2x_n} = \frac{x_n}{2} + \frac{a}{2x_n}.$$

K15. Funktion $f(x) = x^2 + 3x$ erotusosamäärän lauseke kohdassa $x = -1$ on

$$\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$$

h	$\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$
0,1	1,1
−0,1	0,9
0,01	1,01
−0,01	0,99
0,001	1,001
−0,001	0,999

Funktion derivaatta kohdassa $x = -1$ näyttäisi olevan noin 1.

Derivointikaavalla saadaan
$f'(x) = 2x + 3$
$f'(-1) = -2 + 3 = 1$.

K16. Funktion $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ keskeisdifferenssin lauseke kohdassa $x = 2$ on

$$\frac{f(2+h)-f(2-h)}{2h}$$

p	$h = 10^{-p}$	$\frac{f(2+h)-f(2-h)}{2h}$
1	$10^{-1} = 0{,}1$	−0,4137748… ≈−0,41377
2	0,01	−0,4121962… ≈−0,41220
3	0,001	−0,4121804… ≈−0,41218
4	0,0001	−0,4121803… ≈−0,41218
5	0,00001	−0,4121803… ≈−0,41218

K17. Koska f kasvaa lineaarisesti, sen kuvaaja välillä [1,9995; 2,0005] on likimain suora. Funktion derivaatta kohdassa $x = 2$ on kuvaajalle piirretyn tangentin kulmakerroin tässä kohdassa. Koska kuvaaja on kohdan $x = 2$ ympäristössä likimain suora, voidaan kulmakerroin määrittää funktion arvojen avulla:

$$k = \frac{f(2{,}0005)-f(2)}{2{,}0005-2} = \frac{3{,}7458664-3{,}7458053}{0{,}0005} = 0{,}1222.$$

$f'(2) \approx 0{,}1222$

K18. Funktion $f(x) = \cos x$ erotusosamäärän lauseke kohdassa $x = \frac{\pi}{4}$ on

$$\frac{f\left(\frac{\pi}{4}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{h}.$$

Vasemmanpuoleinen erotusosamäärä:

p	$h = 10^p$	$\frac{f\left(\frac{\pi}{4}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{h}$	absoluuttinen virhe $\frac{f\left(\frac{\pi}{4}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{h}-f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$
−6	-10^{-6}	−0,70710642763316…	$3{,}53\ldots \cdot 10^{-7}$
−7	-10^{-7}	−0,70710674537899…	$3{,}58\ldots \cdot 10^{-8}$
−8	-10^{-8}	−0,70710677313457…	$8{,}05\ldots \cdot 10^{-9}$

Tarkin, kun $p = -8$.

Oikeanpuoleinen erotusosamäärä:

p	$h = 10^p$	$\frac{f\left(\frac{\pi}{4}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{h}$	absoluuttinen virhe $\left\lvert\frac{f\left(\frac{\pi}{4}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{h}-f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\right\rvert$
−6	10^{-6}	−0,70710713473420…	$3{,}50\ldots \cdot 10^{-7}$
−7	10^{-7}	−0,70710681643326…	$3{,}52\ldots \cdot 10^{-8}$
−8	10^{-8}	−0,70710679533903…	$1{,}41\ldots \cdot 10^{-8}$

Tarkin, kun $p = -8$.

Keskeisdifferenssin lauseke kohdassa $x = \frac{\pi}{4}$ on

$$\frac{f(\frac{\pi}{4}+h)-f(\frac{\pi}{4}-h)}{2h}.$$

p	$h = 10^p$	$\frac{f\left(\frac{\pi}{4}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{4}-h\right)}{2h}$	absoluuttinen virhe $\left\lvert\frac{f\left(\frac{\pi}{4}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{4}-h\right)}{2h}-f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\right\rvert$
−6	10^{-6}	−0,7071067811836…	$2{,}86\ldots \cdot 10^{-12}$
−7	10^{-7}	−0,7071067809061…	$2{,}80\ldots \cdot 10^{-10}$
−8	10^{-8}	−0.7071067842368…	$3{,}05\ldots \cdot 10^{-9}$

Tarkin, kun $p = -6$.

K19.

n	alasumma	yläsumma
2	1.768	5.2219
10	3.065	3.7557
50	3.3369	3.4751
70	3.3566	3.4553
78	3.3616	3.4502
79	3.3622	3.4496

Pinta-ala on noin 3,4.

K20. **a)** Välin pituus on $4 - 1 = 3$. Koska osavälejä on 3, yhden osavälin pituus on 1. Osavälit ovat [1, 2], [2, 3] ja [3, 4].
Välien keskipisteet ovat $x_1 = 1{,}5$, $x_2 = 2{,}5$ ja $x_3 = 3{,}5$.
Arvio pinta-alalle on $1(f(1{,}5) + f(2{,}5) + f(3{,}5)) = 4{,}294... \approx 4{,}29$.

b) Välin pituus on $\frac{3}{6} = 0{,}5$.

Välien keskipisteet ovat $x_1 = 1{,}25$, $x_2 = 1{,}75$, $x_3 = 2{,}25$, $x_4 = 2{,}75$, $x_5 = 3{,}25$ ja $x_6 = 3{,}75$.

Arvio pinta-alalle on
$$0{,}5(f(1{,}25) + f(1{,}75) + f(2{,}25) + f(2{,}75) + f(3{,}25) + f(3{,}75))$$
$$= 4{,}263... \approx 4{,}26$$

K21. $\int_1^3 \frac{1}{x}\mathrm{d}x (= \underset{1}{\overset{3}{/}} \ln|x| = \ln 3 - \ln 1) = \ln 3$

Merkitään $f(x) = \frac{1}{x}$.
Välin [1, 3] pituus on 2. Koska jakovälejä on neljä, yhden jakovälin pituus on 0,5.

Arvio integraalille on
$$0{,}5\left(\frac{1}{2}\cdot f(1) + f(1{,}5) + f(2) + f(2{,}5) + \frac{1}{2}f(3)\right) = 1{,}1166666... \approx 1{,}11667$$

Määritetään suhteellinen virhe.
$$\frac{1{,}11667 - \ln 3}{\ln 3} = 0{,}0164...$$

Virhe on 1,6 %.

K22. Aika t on tunteja keskiyöstä. Puolisuunnikassääntöä varten tarvittava osavälin pituus on 3,00 tuntia.

$$\int_0^{24} f(t)\mathrm{d}t$$
$$\approx 3{,}00(\frac{1}{2}f(0{,}00) + f(3{,}00) + f(6{,}00) + f(9{,}00) + f(12{,}00) + f(15{,}00)$$
$$+ f(18{,}00) + f(21{,}00) + \frac{1}{2}f(24{,}00))$$
$$= 345{,}6$$

$$\frac{1}{24}\int_0^{24} f(t)\mathrm{d}t \approx \frac{1}{24}\cdot 345{,}6 = 14{,}4$$

Vuorokauden keskilämpötila on 14,4 °C.

K23. Välin [0, 4] pituus on 4. Osavälejä on neljä, joten yhden osavälin pituus on 1. Merkitään $f(x) = x^2$.

$$\int_0^4 x^2 \mathrm{d}x \approx \frac{1}{3}(f(0)+4f(1)+2f(2)+4f(3)+f(4)) = \frac{64}{3}$$

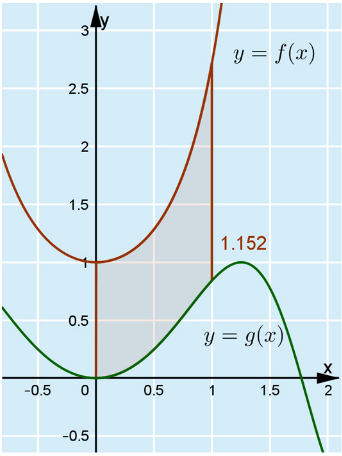
Lasketaan integraalin tarkka arvo.

$$\int_0^4 x^2 \mathrm{d}x \left(= \bigg/_0^4 \frac{1}{3}x^3 = \frac{1}{3}\cdot 4^3 - 0 \right) = \frac{64}{3}$$

Simpsonin sääntöä käytettäessä virhe on $E_n = -\dfrac{(b-a)^5 f^{(4)}(t)}{180n^4}$.

Simpsonin säännön virhe on 0, kun funktion f neljäs derivaatta $f^{(4)}(t)$ on 0. Jos funktio f on korkeintaan kolmannen asteen polynomifunktio, sen neljäs derivaatta on nolla.
Simpsonin sääntö integroi tarkasti korkeintaan kolmannen asteen polynomifunktiot.

K24. Piirretään kuva.



Alueen pinta-ala voidaan laskea integraalina

$$\int_0^1 |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left|e^{x^2} - \sin x^2\right| \mathrm{d}x.$$

Merkitään $h(x) = \left|e^{x^2} - \sin x^2\right|$

Arvioidaan alueen pinta-alaa käyttäen neljää osaväliä ja Simpsonin sääntöä.
Välin [0, 1] pituus on 1. Koska osavälejä on neljä, yhden osavälin pituus on 0,25.

$$\int_0^1 \left|e^{x^2} - \sin x^2\right| \mathrm{d}x$$
$$\approx \frac{0,25}{3}(h(0) + 4h(0,25) + 2h(0,5) + 4h(0,75) + h(1))$$
$$= 1,1537...$$

Pinta-ala on noin 1,15.

Kokoavia tehtäviä

ILMAN TEKNISIÄ APUVÄLINEITÄ

1. **a)** $\frac{2x^2+6x}{-3x-9}=\frac{2x(\cancel{x+3})}{-3(\cancel{x+3})}=-\frac{2}{3}x$

b) $\frac{3x^2-8x+4}{x-2}$

Jaetaan osoittaja tekijöihin nollakohtien avulla.

$$3x^2-8x+4=0$$

$$x=\frac{8\pm\sqrt{64-4\cdot3\cdot4}}{2\cdot3}=\frac{8\pm4}{6}$$

$$x=\frac{12}{6}=2 \quad \text{tai} \quad x=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

$$3x^2-8x+4=3(x-2)\left(x-\frac{2}{3}\right)=(x-2)\cdot3\left(x-\frac{2}{3}\right)=(x-2)(3x-2)$$

$$\frac{3x^2-8x+4}{x-2}=\frac{(\cancel{x-2})(3x-2)}{\cancel{x-2}}=3x-2$$

c) $\frac{-x^3+x^2+x-1}{x^2-1}=\frac{x^2(-x+1)-(-x+1)}{x^2-1}=\frac{(-x+1)(\cancel{x^2-1})}{\cancel{x^2-1}}=-x+1$

2. Suoritetaan jakolasku $\dfrac{2x^4+4x^3+x^2+2x-5}{2x+4}$ allekkain jakona.

$$
\begin{array}{l}
(2x^4+4x^3+x^2+2x-5):(2x+4)=x^3+\frac{1}{2}x \\
\underline{-(2x^4+4x^3 \qquad\qquad\qquad)} \\
\qquad\qquad\qquad x^2+2x-5 \\
\qquad\qquad \underline{-(\ x^2+2x \qquad)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad -5
\end{array}
$$

Saadaan jakoyhtälö

$$2x^4+4x^3+x^2+2x-5=(2x+4)(x^3+\frac{1}{2}x)-5$$

3. Polynomin $x^3-5x^2-17x+21$ vakiotermin 21 tekijät ovat ±1, ±3, ±7 ja ±21.

Yhtälön $x^3-5x^2-17x+21=0$ mahdollisia kokonaislukuratkaisuja ovat $x=\pm1$, $x=\pm3$, $x=\pm7$ ja $x=\pm21$.

Tutkitaan mitkä luvuista toteuttavat yhtälön.

$x=1$: $\quad 1^3-5\cdot1^2-17\cdot1+21=0$

$x=-1$: $\quad (-1)^3-5\cdot(-1)^2-17\cdot(-1)+21=32\neq0$

$x=3$: $\quad 3^3-5\cdot3^2-17\cdot3+21=-48\neq0$

$x=-3$: $\quad (-3)^3-5\cdot(-3)^2-17\cdot(-3)+21=0$

$x=7$: $\quad 7^3-5\cdot7^2-17\cdot7+21=0$

Kolmannen asteen yhtälöllä on korkeintaan kolme ratkaisua, jotka kaikki on nyt löydetty.
Yhtälön toteuttavat kokonaisluvut $x=-3$, $x=1$ ja $x=7$.

4. **a)**

$$x^3 = 4x$$
$$x^3 - 4x = 0$$
$$x(x^2 - 4) = 0$$
$$x = 0 \text{ tai } x^2 - 4 = 0$$
$$x = 2 \text{ tai } x = -2$$

Yhtälön ratkaisut ovat $x = -2$, $x = 0$ ja $x = 2$.

b)

$$4x^3 - 2x^2 + 6x - 3 = 0$$
$$2x^2(2x-1) + 3(2x-1) = 0$$
$$(2x-1)(2x^2+3) = 0$$
$$2x - 1 = 0 \quad \text{tai} \quad 2x^2 + 3 = 0$$
$$x = \frac{1}{2} \qquad x^2 = -\frac{2}{3}$$
$$x = -\sqrt{\frac{3}{2}}i \quad \text{tai} \quad x = \sqrt{\frac{3}{2}}i$$

Yhtälön ratkaisut ovat $x = -\sqrt{\frac{3}{2}}i$, $x = \sqrt{\frac{3}{2}}i$ ja $x = \frac{1}{2}$.

c) Polynomin $x^3 + 3x^2 - 22x - 24$ vakiotermin -24 tekijät ja samalla yhtälön $x^3 + 3x^2 - 22x - 24 = 0$ mahdolliset kokonaislukuratkaisut ovat ± 24, ± 12, ± 6, ± 4, ± 3, ± 2 ja ± 1.

Huomataan, että näistä yhtälön toteuttavat
$x = -1$: $(-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 - 22 \cdot (-1) - 24 = 0$
$x = 4$: $4^3 + 3 \cdot 4^2 - 22 \cdot 4 - 24 = 0$
$x = -6$: $(-6)^3 + 3 \cdot (-6)^2 - 22 \cdot (-6) - 24 = 0$

Yhtälö on kolmannen asteen polynomiyhtälö, joten sillä on korkeintaan kolme ratkaisua. Muita ratkaisuja ei siis voi olla. Yhtälön ratkaisut ovat $x = -6$, $x = -1$ ja $x = 4$.

5. Polynomi $P(x) = x^3 - qx + 15$ on jaollinen binomilla $2x + 5$, jos niillä on sama nollakohta, eli $x = -\frac{5}{2}$.

$$P\left(-\frac{5}{2}\right) = \left(-\frac{5}{2}\right)^3 - q \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) + 15 = -\frac{5}{8} + \frac{5q}{2}$$

$$-\frac{5}{8} + \frac{5q}{2} = 0$$

$$\frac{5q}{2} = \frac{5}{8} \quad \| \cdot \frac{2}{5}$$

$$q = \frac{1}{4}$$

Vakio q on $\frac{1}{4}$.

6. $P(x) = 3x^4 + ax^3 + bx^2 - 3x + 2$

Tiedetään, että $P(-1) = P(2) = 0$, eli $x = -1$ ja $x = 2$ ovat yhtälön $P(x) = 0$ ratkaisuja.

Selvitetään kertoimet a ja b, jotta voidaan selvittää muut ratkaisut.

$$\begin{aligned} P(-1) &= 3 \cdot (-1)^4 + a(-1)^3 + b(-1)^2 - 3 \cdot (-1) + 2 = 3 - a + b + 3 + 2 \\ &= -a + b + 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(2) &= 3 \cdot 2^4 + a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 2 = 48 + 8a + 4b - 6 + 2 \\ &= 8a + 4b + 44 \end{aligned}$$

Ratkaistaan yhtälöpari

$$\begin{cases} -a + b + 8 = 0 \quad \| \cdot(-4) \\ 8a + 4b + 44 = 0 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} 4a - 4b - 32 = 0 \\ 8a + 4b + 44 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 12a + 12 &= 0 \\ a &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 + b + 8 &= 0 \\ b &= -9 \end{aligned}$$

Näin ollen polynomin P lauseke on $P(x) = 3x^4 - x^3 - 9x^2 - 3x + 2$.

Ratkaistaan yhtälö $P(x) = 0$.

Koska $x = -1$ ja $x = 2$ ovat polynomin nollakohtia, polynomi P on jaollinen binomeilla $(x + 1)$ ja $(x - 2)$ sekä niiden tulolla $(x + 1)(x - 2) = x^2 - x - 2$.

$$
\begin{array}{l}
(3x^4 \quad - x^3 - 9x^2 - 3x + 2) : (x^2 - x - 2) = 3x^2 + 2x - 1 \\
\underline{-(3x^4 - 3x^3 - 6x^2 \qquad\qquad)} \\
\qquad\quad 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 \\
\qquad \underline{-(2x^3 - 2x^2 - 4x \qquad)} \\
\qquad\qquad\qquad -x^2 \quad + x \quad + 2 \\
\qquad\qquad \underline{-(-x^2 \quad + x \quad + 2)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$P(x) = (x^2 - x - 2)(3x^2 + 2x - 1)$

Yhtälön $P(x) = 0$ loput ratkaisut ovat polynomin $3x^2 + 2x - 1$ nollakohdat.

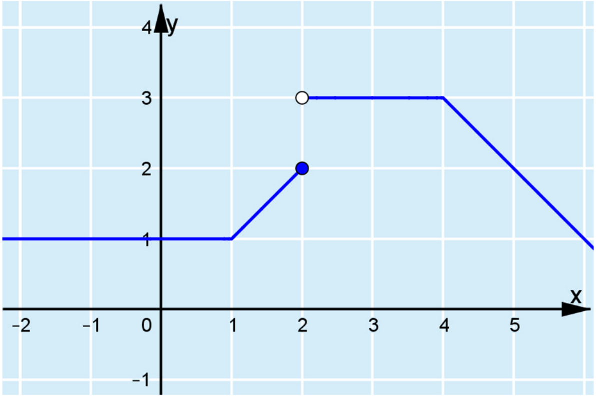
$$3x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)}}{2 \cdot 3} = \frac{-2 \pm 4}{6}$$

$$x = \frac{-6}{6} = -1 \quad \text{tai} \quad x = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Yhtälön $P(x) = 0$ ratkaisut ovat $x = -1$, $x = \frac{1}{3}$ ja $x = 2$.

7. Esimerkiksi:



8. Polynomi $P(x)$ on jaollinen ensimmäisen asteen polynomilla $ax + b$ jos polynomin $ax + b$ nollakohta $x = -\frac{b}{a}$ on myös polynomin $P(x)$ nollakohta, eli $P\left(-\frac{b}{a}\right) = 0.$

1. Laksetaan $P\left(-\frac{b}{a}\right).$

2. Jos tulos on 0, polynomi $P(x)$ on jaollinen ensimmäisen asteen polynomilla $ax + b$.
Muutoin polynomi $P(x)$ ei ole jaollinen polynomilla $ax + b$.

9. Keskeisdifferenssi funktiolle $p(x) = ax^2 + bx + c$ kohdassa x on

$$\begin{aligned}
&\frac{p(x+h)-p(x-h)}{2h}\\
&=\frac{a(x+h)^2+b(x+h)+c-(a(x-h)^2+b(x-h)+c)}{2h}\\
&=\frac{a(x^2+2xh+h^2)+bx+bh+c-(a(x^2-2xh+h^2)+bx-bh+c)}{2h}\\
&=\frac{4axh+2bh}{2h}\\
&=2ax+b
\end{aligned}$$

Väite on siis osoitettu.

10. **a)** Olkoon kolmannen asteen polynomi $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

$$\begin{aligned}\int_0^2 p(x)\mathrm{d}x &= \int_0^2 (ax^3 + bx^2 + cx + d)\mathrm{d}x \\ &= \Big/_0^2 \frac{a}{4}x^4 + \frac{b}{3}x^3 + \frac{c}{2}x^2 + dx \\ &= \frac{a}{4}\cdot 16 + \frac{b}{3}\cdot 8 + \frac{c}{2}\cdot 4 + d\cdot 2 - 0 \\ &= 4a + \frac{8}{3}b + 2c + 2d\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{3}[p(0) + 4p(1) + p(2)] \\ &= \frac{1}{3}(d + 4(a+b+c+d) + (8a + 4b + 2c + d)) \\ &= \frac{1}{3}(12a + 8b + 6c + 6d) \\ &= 4a + \frac{8}{3}b + 2c + 2d\end{aligned}$$

Väite on siis osoitettu.

b) $p(x) = x^3 + x^2 + x + 1$
$p(0) = 1$
$p(1) = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$
$p(2) = 8 + 4 + 2 + 1 = 15$

$$\int_0^2 (x^3 + x^2 + x + 1)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}(1 + 4\cdot 4 + 15) = \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3}$$

c) Jos $p(x) = x^4$, niin $\int_0^2 x^4\mathrm{d}x = \Big/_0^2 \frac{1}{5}x^5 = \frac{1}{5}\cdot 2^5 - 0 = \frac{32}{5}$.

Kaavan mukaan $\frac{1}{3}[p(0) + 4p(1) + p(2)] = \frac{1}{3}(0 + 4\cdot 1 + 16) = \frac{20}{3} \neq \frac{32}{5}$.

Kaava ei siis päde kaikille neljännen asteen polynomeille.

APUVÄLINEET SALLITTU

11. Koska polynomi $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ on jaollinen binomilla $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$, on se jaollinen myös binomin tekijöillä $x - 1$ ja $x + 1$. Polynomilla $P(x)$ on tällöin nollakohdat $x = 1$ ja $x = -1$, eli $P(1) = 0$ ja $P(-1) = 0$. Lisäksi $P(2) = 12$. Saadaan yhtälöryhmä:

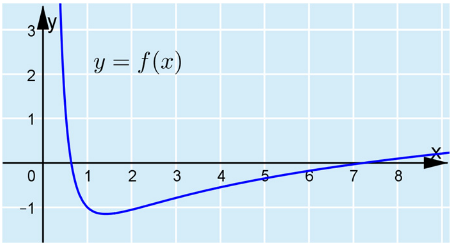
$$\begin{cases} P(1) = 0 \\ P(-1) = 0 \\ P(2) = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + a + b + c = 0 \\ -1 + a - b + c = 0 \\ 8 + 4a + 2b + c = 12 \end{cases}$$

$a = 2$, $b = -1$ ja $c = -2$

$P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$

12. Piirretään kuva.



$$f(x) = \ln x + \frac{1}{x^2} - 2$$
$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^3}$$

Valitaan alkuarvoksi $x_0 = 0{,}5$.

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0{,}593346\ldots$$

$x_2 = 0{,}633713\ldots$
$x_3 = 0{,}639115\ldots$
$x_4 = 0{,}639197\ldots$
$x_5 = 0{,}639197\ldots$

$x \approx 0{,}63920$

Valitaan toisen nollakohdan etsimistä varten alkuarvoksi $x_0 = 7$.

$x_1 = 7{,}245804\ldots$
$x_2 = 7{,}249799\ldots$
$x_3 = 7{,}249800\ldots$

$x \approx 7{,}24980$

Osoitetaan vielä, että ko. kohdat ovat funktion nollakohtia.
$f(0{,}639195) = 0{,}000013\ldots > 0$
$f(0{,}639205) = -0{,}000047\ldots < 0$

Bolzanon lauseen mukaan $x \approx 0{,}63920$ on nollakohdan viisidesimaalinen likiarvo.

$f(7{,}249795) = -7{,}61\ldots \cdot 10^{-7} < 0$
$f(7{,}249805) = 5{,}65\ldots \cdot 10^{-7} > 0$

Bolzanon lauseen mukaan $x \approx 7{,}24980$ on nollakohdan viisidesimaalinen likiarvo.

13. Kirjoitetaan kiintopistemenetelmää varten yhtälö $x^5 + 2x = 4$ muotoon $x = g(x)$.

$x^5 = 4 - 2x$

$x = \sqrt[5]{4-2x}$

Käytetään alkuarvoa $x_0 = 1{,}5$.

$x_1 = g(1{,}5) = 1$

$x_2 = g(1) = 1{,}14869835\ldots$

$x_3 = 1{,}11230193\ldots$

$x_4 = 1{,}12165437\ldots$

$x_5 = 1{,}11928088\ldots$

$x_6 = 1{,}11988514\ldots$

$x_7 = 1{,}11973143\ldots$

$x_8 = 1{,}11977054\ldots$

$x_9 = 1{,}11976059\ldots$

$x_{10} = 1{,}11976312\ldots$

$x_{11} = 1{,}11976247\ldots$

$x_{12} = 1{,}11976264\ldots$

$x_{13} = 1{,}11976260\ldots$

$x \approx 1{,}119763$

Yhtälöllä $x^5 + 2x = 4$ eli $x^5 + 2x - 4 = 0$ on muita ratkaisuja, jos funktiolla $f(x) = x^5 + 2x - 4$ on muita nollakohtia.

Tarkastellaan funktion f kulkua derivaatan avulla.

$f'(x) = 5x^4 + 2$

Funktion f derivaatta on kaikkialla positiivinen, joten funktio f on kasvava. Kasvavalla funktiolla on korkeintaan yksi nollakohta. Yhtälöllä ei siis ole muita ratkaisuja.

14. $f(x)=\sqrt{\cos x+2}$

Derivointikaavalla saadaan $f'(x)=-\dfrac{\sin x}{2\sqrt{\cos x+2}}$ ja

$f'(\pi)=-\dfrac{\sin \pi}{2\sqrt{\cos \pi+2}}=0$

a) Erotusosamäärän lauseke kohdassa $x=\pi$ on $\dfrac{f(\pi+h)-f(\pi)}{h}$.

h	$\dfrac{f(\pi+h)-f(\pi)}{h}$
0,1	0,0249480533...
−0,1	−0,0249480533...
0,01	0,0024999479...
−0,01	−0,0024999479...
0,001	0,0002499999...
−0,001	−0,0002499999...

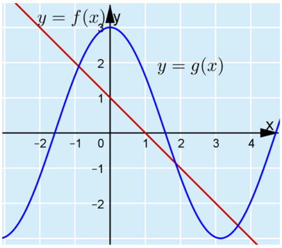
Arvio derivaatalle on 0, joka on sama kuin derivointikaavalla saatava arvo.

b) Keskeisdifferenssin lauseke kohdassa $x=\pi$ on $\dfrac{f(\pi+h)-f(\pi-h)}{2h}$.

h	$\dfrac{f(\pi+h)-f(\pi-h)}{2h}$
0,1	0
0,01	0
0,001	0

Arvio derivaatalle on 0, joka on sama kuin derivointikaavalla saatava arvo.

15. Piirretään funktioiden $f(x) = 1 - x$ ja $g(x) = 3 \cos x$ kuvaajat.



Kuvaajien leikkauspisteet voidaan ratkaista yhtälöstä

$$f(x) = g(x)$$
$$1 - x = 3\cos x$$
$$1 - x - 3\cos x = 0.$$

Merkitään $h(x) = 1 - x - 3\cos x$ ja käytetään Newtonin menetelmää funktion h nollakohtien etsimiseen.

$h'(x) = -1 + 3\sin x$

Tehdään ensimmäinen alkuarvaus $x_0 = -1$.

$$x_1 = x_0 - \frac{h(x_0)}{h'(x_0)} = -0{,}8924\ldots$$

$x_2 = -0{,}8894\ldots$
$x \approx -0{,}89$

Tehdään toinen alkuarvaus $x_0 = 2$
$x_1 = 1{,}8562\ldots$
$x_2 = 1{,}8623\ldots$
$x \approx 1{,}86$

Tehdään kolmas alkuarvaus $x_0 = 3{,}5$.
$x_1 = 3{,}6507\ldots$
$x_2 = 3{,}6380\ldots$
$x_3 = 3{,}6379\ldots$
$x \approx 3{,}64$

Lasketaan leikkauspisteiden x-koordinaatteja vastaavat y-koordinaattien arvot sijoittamalla x:n arvot funktion f lausekkeeseen.

$x \approx -0{,}89$, $y \approx 1{,}89$
$x \approx 1{,}86$, $y \approx -0{,}86$
$x \approx 3{,}64$, $y \approx -2{,}64$

Leikkauspisteet ovat $(-0{,}89; 1{,}89)$, $(1{,}86; -0{,}86)$ ja $(3{,}64; -2{,}64)$

16. **a)** Kirjoitetaan yhtälö $x = 4 - x^3$ muotoon $x = g(x)$ toisella tavalla.

$$\begin{aligned} x^3 &= 4 - x \\ x^2 \cdot x &= 4 - x \quad \| : x \neq 0 \\ x^2 &= \frac{4-x}{x} \\ x &= \pm\sqrt{\frac{4-x}{x}} \end{aligned}$$

Iteraatiokaava on $x_{n+1} = \sqrt{\dfrac{4-x_n}{x_n}}$.

b)

$$\begin{aligned} x &= 4 - x^3 \\ x^3 &= 4 - x \\ x^2 \cdot x &= 4 - x \quad \| : x^2 \neq 0 \\ x &= \frac{4-x}{x^2} \end{aligned}$$

Iteraatiokaava on $x_{n+1} = \dfrac{4-x_n}{{x_n}^2}$

c) $x_0 = 1$

$$x_1 = \sqrt{\frac{4-1}{1}} = \sqrt{3} = 1{,}7320... \approx 1{,}73$$

$$x_2 = \sqrt{\frac{4-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}} = 1{,}1442\ldots \approx 1{,}14$$

17. Nopeus v on matkan s muutosnopeus eli derivaatta, joten Annan koulumatkan pituus saadaan nopeuden integraalina, eli nopeusfunktion $v(t)$ alle jäävän alueen pinta-alana. Arvioidaan pinta-alaa puolisuunnikassäännöllä.

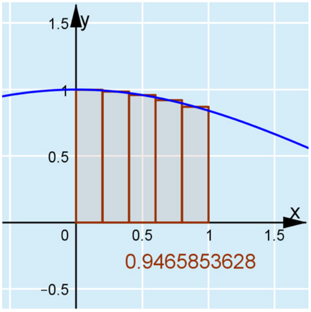
Yhden osavälin pituus on $5 \text{ min} = \frac{5}{60} \text{ h} = \frac{1}{12} \text{ h}$.

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{20} v(t)\,\mathrm{d}t \\ &\approx \frac{1}{12}\left(\frac{1}{2}v(0) + v(5) + v(10) + v(15) + \frac{1}{2}v(20)\right) \\ &= \frac{1}{12}\left(\frac{1}{2}\cdot 0 + 16 + 20 + 22 + \frac{1}{2}\cdot 18\right) \\ &= 5{,}583... \end{aligned}$$

Annan koulumatkan pituus on 5,6 km.

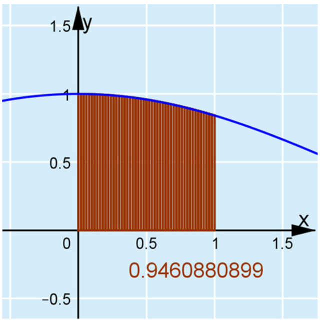
18. **a)** Välin [0, 1] pituus on yksi. Koska jakovälejä on viisi, yhden jakovälin pituus on $\frac{1}{5} = 0,2$.

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \approx 0,2(f(0,1) + f(0,3) + f(0,5) + f(0,7) + f(0,9))$$
$$= 0,94658... \approx 0,947$$



b) Kun jakovälejä on 50, yhden jakovälin pituus on $\frac{1}{50} = 0,02$.

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \approx 0,2(f(0,01) + f(0,03) + f(0,05) + ... + f(0,99))$$
$$= 0,94608... \approx 0,946$$



19. Merkitään $f(x) = \ln x$, $a = 1$ ja $b = 2$.

$f'(x) = \frac{1}{x}$

Kaarenpituus $\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$ välillä [1, 2] on

$\int_1^2 \sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\,dx = \int_1^2 \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\,dx.$

Määritetään integraalin arvo puolisuunnikassäännöllä.

Merkitään $g(x) = \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$.

Yhden osaväli pituus on $\frac{2-1}{4} = 0,25.$

$$\int_1^2 \sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\,dx \approx 0,25\left(\frac{1}{2}g(1) + g(1,25) + g(1,5) + g(1,75) + \frac{1}{2}g(2,0)\right)$$

$$= 1,2250875... \approx 1,225$$

Funktion $\ln x$ kuvaajan kaarenpituus välillä [1, 2] on 1,225.

20. Puolisuunnikassäännön virhe on $E_n = -\dfrac{(b-a)^3 f''(t)}{12n^2}$.

Nyt $f(x) = \sqrt{1+x^2}$, $a = 0$ ja $b = 1$ ja $0 < t < 1$.

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$
$$f''(x) = \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+1}}$$

Absoluuttinen virhe on

$$|E_n| = \left| -\frac{(1-0)^3 f''(t)}{12n^2} \right| = \frac{|f''(t)|}{12n^2}.$$

Koska $f''(x) = \dfrac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} > 0$ kaikilla x, niin

$$|E_n| = \frac{f''(t)}{12n^2}.$$

Välillä [0, 1] $f''(x)$ on suurin, kun nimittäjä $(x^2+1)\sqrt{x^2+1}$ on pienin, eli kun $x = 0$. Tällöin toisen derivaatan arvo ei varmasti ylitä arvoa

$$f''(0) = \frac{1}{(0^2+1)\sqrt{0^2+1}} = 1.$$

Absoluuttiselle virheelle saadaan yläraja $|E_n| \le \dfrac{1}{12n^2}$.

Ratkaistaan epäyhtälö

$$\frac{1}{12n^2} < 0{,}001$$
$$12n^2 > 1000$$
$$n^2 > \frac{250}{3}$$

Yhtälön $n^2 = \dfrac{250}{3}$ ratkaisut ovat $n = \pm 9{,}12\ldots$. Pienin positiivinen kokonaisluku, joka toteuttaa epäyhtälön on 10.
Osavälejä on siis oltava vähintään 10.

Yhden osavälin pituus on 0,1.

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x \approx 0{,}1\left(\frac{1}{2}f(0)+f(0{,}1)+f(0{,}2)+\ldots+f(0{,}9)+\frac{1}{2}f(1)\right)$$
$$=1{,}14838\ldots \approx 1{,}148$$

Määrätyn integraalin tarkka arvo on vähintään
1,14838… − 0,001 = 1,14738… ja enintään
1,14838… + 0,001 = 1,14938…

Tarkka arvo on siis välillä [1,147; 1,150].