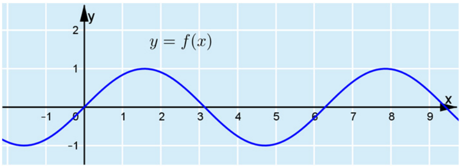
Kertaus

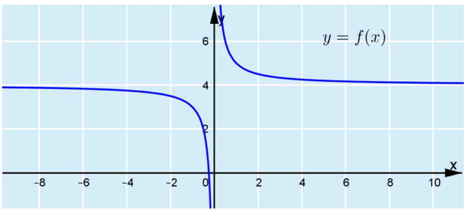
K1. A: III, B: I, C: II ja IV

Kuvaajat:

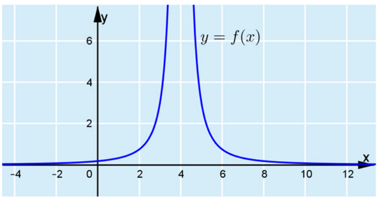
I



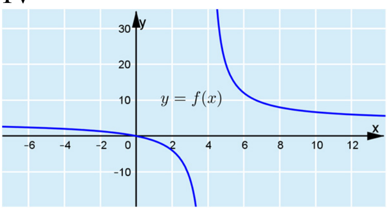
II



III

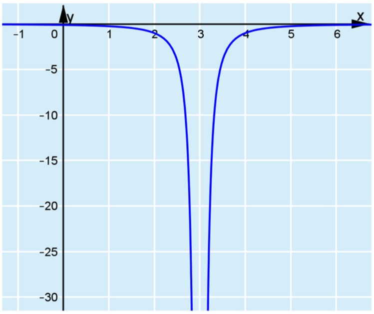


IV

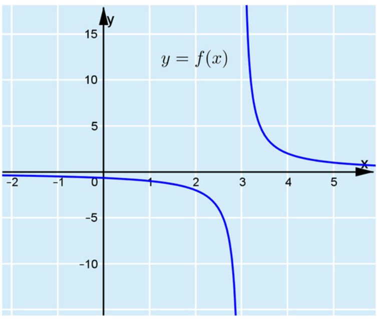


K2. **a)** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{-1}{(3-x)^2}$

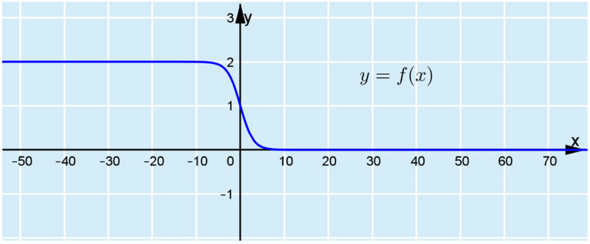
Nimittäjä $(3-x)^2$ on aina positiivinen ja lähestyy lukua 0, kun $x \to 3$. Tällöin $\dfrac{-1}{(3-x)^2}$ on aina negatiivinen ja sen arvo pienenee rajatta.



b) Kun $x \to 3$ oikealta, $x - 3$ on positiivinen ja lähestyy arvoa 0. Tällöin $\dfrac{2}{x-3} \to \infty$. Kun $x \to 3$ vasemmalta, $x - 3$ on negatiivinen ja lähestyy arvoa 0. Tällöin $\dfrac{2}{x-3} \to -\infty$. Funktiolla ei siis ole epäoleellista raja-arvoa kohdassa $x = 3$.

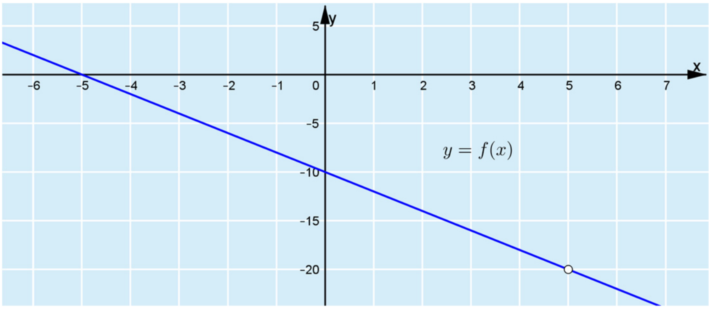


c) Kun muuttujan x arvo kasvaa rajatta, myös 2^x arvo kasvaa rajatta ja funktion $\frac{2}{1+2^x}$ arvo lähestyy lukua 0.
Kun muuttujan x arvo pienenee rajatta, 2^x arvo lähestyy nollaa ja funktion $\frac{2}{1+2^x}$ arvo lähestyy lukua 2.



K3. **a)**

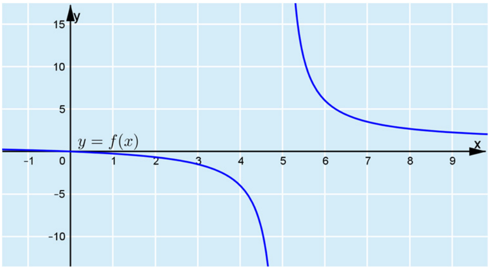
$$\frac{50-2x^2}{x-5} = \frac{2(25-x^2)}{x-5} = \frac{2(\cancel{5-x})(5+x)}{-(\cancel{5-x})} = -2(5+x) \xrightarrow[x\to]{} -2(5+5) = -20$$



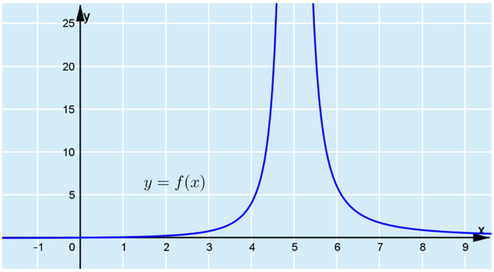
b) Kun $x \to 5+$, osoittaja x lähestyy lukua 5 ja nimittäjä $x - 5$ lukua 0 positiivisia arvoja saaden. Niinpä $\frac{x}{x-5} \xrightarrow[x\to 5+]{} \infty$.

Kun $x \to 5-$, osoittaja x lähestyy lukua 5 ja nimittäjä $x - 5$ lukua 0 negatiivisia arvoja saaden. Niinpä $\frac{x}{x-5} \xrightarrow[x\to 5-]{} -\infty$.

Funktiolla ei ole raja-arvoa, eikä epäoleellista raja-arvoa kohdassa $x = 5$.



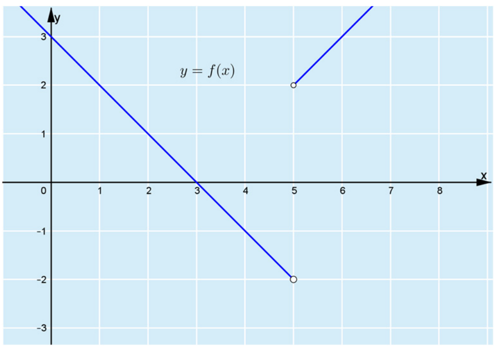
c) Kun $x \to 5$, osoittaja x lähestyy lukua 5 ja nimittäjä $(x-5)^2$ lukua 0 positiivisia arvoja saaden. Niinpä $\dfrac{x}{(x-5)^2} \xrightarrow[x\to 5]{} \infty$.



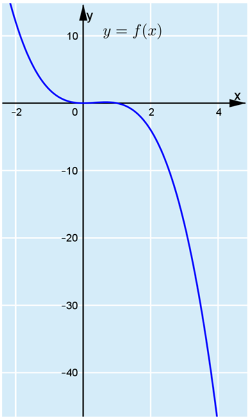
d)

$$\lim_{x\to 5-} f(x) = \lim_{x\to 5-} (3-x) = 3-5 = -2$$
$$\lim_{x\to 5+} f(x) = \lim_{x\to 5+} (x-3) = 5-3 = 2$$

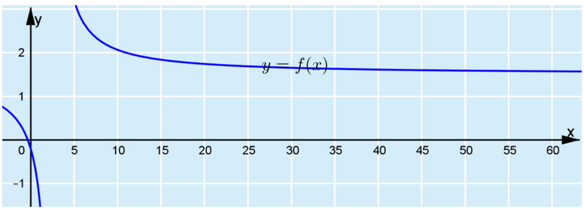
Funktiolla ei ole raja-arvoa, eikä epäoleellista raja-arvoa kohdassa $x = 5$.



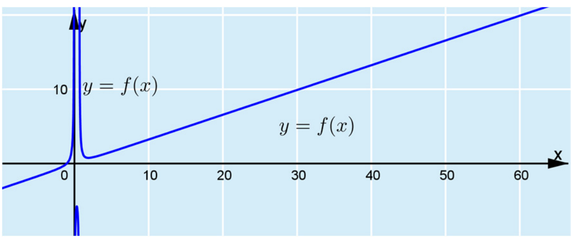
K4. **a)** $-x^3+x^2=x^3(-1+\frac{1}{x})\xrightarrow[x\to\infty]{}-\infty$



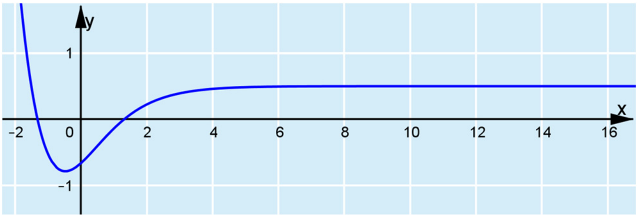
b) $\dfrac{3x+1}{2x-5}=\dfrac{x(3+\frac{1}{x})}{x(2-\frac{5}{x})}=\dfrac{3+\frac{1}{x}}{2-\frac{5}{x}}\xrightarrow[x\to\infty]{}\dfrac{3+0}{2-0}=\dfrac{3}{2}$



c) $\dfrac{x^3-x^2+2}{3x^2-2x}=\dfrac{x^2(x-1+\frac{2}{x^2})}{x^2(3-\frac{2}{x})}=\dfrac{x-1+\frac{2}{x^2}}{3-\frac{2}{x}}\xrightarrow[x\to\infty]{}\infty$



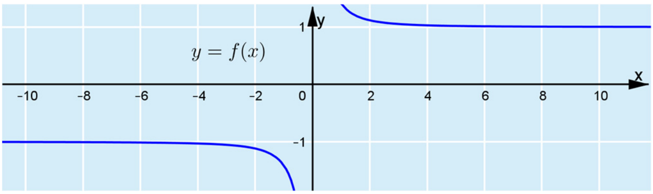
d) $$\frac{e^x+e^{-x}-4}{2e^x+1}=\frac{e^x(1+e^{-2x}-\frac{4}{e^x})}{e^x(2+\frac{1}{e^x})}=\frac{1+e^{-2x}-\frac{4}{e^x}}{2+\frac{1}{e^x}}\xrightarrow[x\to\infty]{}\frac{1+0-0}{2+0}=\frac{1}{2}$$



K5.

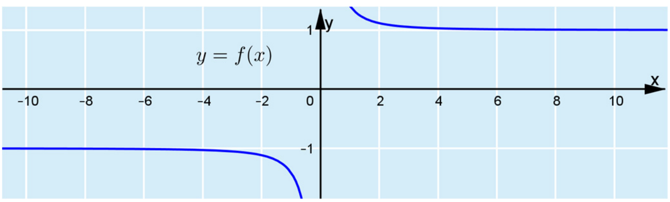
a)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\sqrt{1+0}=1$$



b)

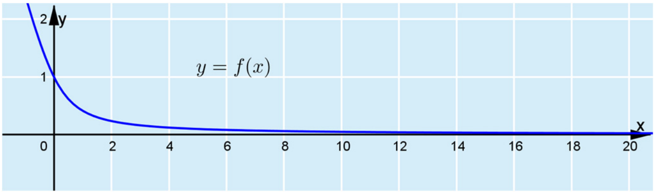
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=-\sqrt{1+0}=-1$$



c)

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$$



K6. **a)** $\dfrac{3-2n}{5n-4}=\dfrac{n(\frac{3}{n}-2)}{n(5-\frac{4}{n})}=\dfrac{\frac{3}{n}-2}{5-\frac{4}{n}}\xrightarrow[n\to\infty]{}\dfrac{0-2}{5-0}=-\dfrac{2}{5}$

b) $\dfrac{n}{n^2+2}=\dfrac{n^2(\frac{1}{n})}{n^2(1+\frac{2}{n^2})}=\dfrac{\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n^2}}\xrightarrow[n\to\infty]{}\dfrac{0}{1+0}=0$

c) $\dfrac{n^2+n+1}{2n}=\dfrac{n^2}{2n}+\dfrac{n}{2n}+\dfrac{1}{2n}=n+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2n}\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$

K7. Määritetään lukujonon raja-arvo.

$$\frac{n+1}{2n}=\frac{n}{2n}+\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{2}+0=\frac{1}{2}$$

$$a_{30}=\frac{30+1}{2\cdot 30}=\frac{31}{60}$$
$$\left|a_{30}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{31}{60}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{31}{60}-\frac{30}{60}\right|=\frac{1}{60}$$

$$\begin{aligned}\left|a_n-\frac{1}{2}\right|&<\frac{1}{100}\\ \left|\frac{n+1}{2n}-\frac{1}{2}\right|&<\frac{1}{100}\\ \left|\frac{n+1}{2n}-\frac{n}{2n}\right|&<\frac{1}{100}\\ \left|\frac{n+1-n}{2n}\right|&<\frac{1}{100}\\ \left|\frac{1}{2n}\right|&<\frac{1}{100}\ \| \, n>0\\ \frac{1}{2n}&<\frac{1}{100}\\ 2n&>100\\ n&>50\end{aligned}$$

Lukujonon jokaisen jäsenen etäisyys raja-arvosta on vähemmän kuin sadasosa luvusta $n = 51$ alkaen.

K8. **a)** $a_n = (-1)^n + 1$
$a_1 = (-1)^1 + 1 = 0$
$a_2 = (-1)^2 + 1 = 2$
$a_3 = (-1)^3 + 1 = 0$

Lukujonossa vuorottelevat luvut 0 ja 2, joten lukujono ei suppene vaan hajaantuu.

b) $a_n = 2^n \to \infty$, kun $n \to \infty$

Lukujonon jäsenet kasvavat rajatta, kun n kasvaa rajatta, joten lukujono hajaantuu.

c) $a_n = -n\cos\frac{1}{n}$

Kun n kasvaa rajatta $\frac{1}{n}$ lähestyy lukua 0 ja siten $\cos\frac{1}{n}$ lähestyy lukua $\cos 0 = 1$. Siten lauseke $-n\cos\frac{1}{n}$ pienenee rajatta, eikä lukujonolla ei ole raja-arvoa.

K9. **a)** $\frac{e^{n+1}}{\pi^n} = \frac{e^n \cdot e}{\pi^n} = (\frac{e}{\pi})^n \cdot e$

$\pi > e$, joten $0 < \frac{e}{\pi} < 1$. Tällöin $(\frac{e}{\pi})^n \cdot e \to 0 \cdot e = 0$, kun n kasvaa rajatta.

b)

$$a_1 = 2\sin x$$
$$a_2 = 2\sin^2 x = 2\sin x \cdot \sin x$$
$$a_3 = 2\sin^3 x = 2\sin^2 x \cdot \sin x$$

Lukujono näyttäisi olevan geometrinen lukujono. Lukujonossa $a_1 = 2\sin x$ ja $q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2\sin^{n+1} x}{2\sin^n x} = \sin^{n+1-n} x = \sin x$.

Geometrinen lukujono suppenee, kun $-1 < q \leq 1$.

Epäyhtälö $-1 < \sin x \leq 1$ toteutuu kaikilla muilla x:n arvoilla, paitsi kun $\sin x = -1$, eli kun $x = \frac{3\pi}{2} + n \cdot 2\pi$.

Lukujono suppenee, kun $x \neq \frac{3\pi}{2} + n \cdot 2\pi$.

K10. **a)** Suhdeluku $q=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$. Koska $-1<q<1$, lukujono suppenee.

$$S=\frac{a_1}{1-q}=\frac{12}{1-\frac{1}{2}}=\frac{12}{\frac{1}{2}}=24$$

b) Suhdeluku $q=\frac{18}{-36}=-\frac{1}{2}$. Koska $-1<q<1$, lukujono suppenee.

$$S=\frac{a_1}{1-q}=\frac{-36}{1-(-\frac{1}{2})}=\frac{-36}{\frac{3}{2}}=-24$$

c) Suhdeluku $q=-\frac{2}{3}$. Koska $-1<q<1$, lukujono suppenee.

$$S=\frac{a_1}{1-q}=\frac{5}{1-(-\frac{2}{3})}=\frac{5}{\frac{5}{3}}=3$$

K11. **a)** Sarja on geometrinen sarja, jonka suhdeluku $q=\frac{e}{\pi}$ ja $a_1=\pi$.

Koska $e<\pi$, $-1<q<1$ ja sarja suppenee.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\pi\cdot\left(\frac{e}{\pi}\right)^{n-1}=\frac{\pi}{1-\frac{e}{\pi}}=\frac{\pi}{\frac{\pi-e}{\pi}}=\frac{\pi^2}{\pi-e}$$

b) $0{,}272727\ldots=0{,}27+0{,}0027+0{,}000027+\ldots$

$$=\frac{27}{100}+\frac{27}{10000}+\frac{27}{1000000}+\ldots=27\cdot\left(\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^4}+\frac{1}{10^6}+\ldots\right)$$

Sarja on geometrinen sarja, jossa $a_1=\frac{27}{100}$ ja $q=\frac{1}{100}$.

$$S=\frac{\frac{27}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{27}{100}\cdot\frac{100}{99}=\frac{27}{99}$$

K12. **a)** Sarja on geometrinen sarja, jossa $q = (1 + x)^2$ ja $a_1 = 1$.
Sarja suppenee, kun $-1 < (1 + x)^2 < 1$, eli kun
$-1 < 1 + x < 1$, eli $-2 < x < 0$.

b) Kun sarja suppenee, $S = \dfrac{1}{1-(1+x)^2}$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-(1+x)^2} &= 2 \\
1 &= 2(1-(1+x)^2) \\
1 &= 2(1-1-2x-x^2) \\
1 &= -4x-2x^2 \\
2x^2+4x+1 &= 0 \\
x &= \frac{-4\pm\sqrt{16-4\cdot 2\cdot 1}}{2\cdot 2} = \frac{-4\pm\sqrt{8}}{4} = \frac{-4\pm 2\sqrt{2}}{4} = -1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

Sekä $x = -1+\dfrac{\sqrt{2}}{2} = -0,292...$ että $x = -1-\dfrac{\sqrt{2}}{2} = -1,707...$ kuuluvat välille $-2 < x < 0$, jolla tarkasteltava sarja suppenee. Niinpä yhtälön ratkaisu on $x = -1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ tai $x = -1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

K13. **a)** Sarja on geometrinen sarja, jonka suhdeluku $q = \dfrac{4}{3}$. Koska $q > 1$, sarja hajaantuu.

b) $a_1 = 1 + (-1)^1 = 0$
$a_2 = 1 + (-1)^2 = 2$
$a_3 = 1 + (-1)^3 = 0$

Lukujonossa vaihtelevat luvut 0 ja 2. Koska yhteenlaskettavien lukujen jonolla ei ole raja-arvoa, sarja hajaantuu.

c) $a_n = 1+\dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1+0 = 1$. Koska $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, sarja hajaantuu.

K14. a)

$$\int_1^\infty \frac{2}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{2}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty}\int_1^t 2x^{-2}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty}\Big/_1^t \frac{2}{-1}x^{-1}$$

$$= \lim_{t\to\infty}\Big/_1^t -\frac{2}{x} = \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{2}{t}+\frac{2}{1}\right) = -0+2 = 2$$

b) Funktio $\dfrac{1}{(x-1)^5}$ on rajoittamaton päätepisteen $x = 1$ läheisyydessä.

$$\int_0^1 \frac{1}{(x-1)^5}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{1}{(x-1)^5}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to 1}\int_0^t (x-1)^{-5}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to 1}\Big/_0^t \frac{1}{-4}(x-1)^{-4}$$

$$= \lim_{t\to 1}\Big/_0^t -\frac{1}{4(x-1)^4} = \lim_{t\to 1}\left(-\frac{1}{4(x-1)^4}+\frac{1}{4\cdot(-1)^4}\right) = -\infty$$

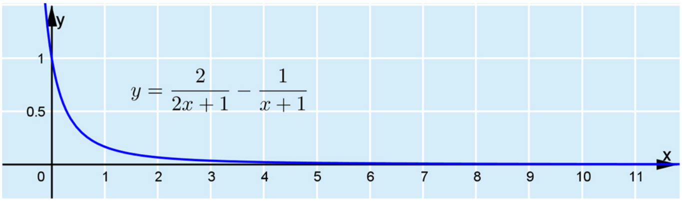
c)

$$\int_0^\infty \frac{x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{1}{2}\cdot 2x\cdot(x^2+1)^{-2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{t\to\infty}\Big/_0^t \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{-1}(x^2+1)^{-1} = \lim_{t\to\infty}\Big/_0^t -\frac{1}{2(x^2+1)}$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{2(t^2+1)}+\frac{1}{2}\right) = -0+\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

K15. Piirretään kuva.



Määritetään x-akselin leikkauspiste.

$$\begin{aligned}
\frac{2}{2x+1} - \frac{1}{x+1} &= 0 \\
\frac{2}{2x+1} &= \frac{1}{x+1} \quad \| x > 0 \\
2(x+1) &= 2x+1 \\
2x+2 &= 2x+1 \\
2 &= 1
\end{aligned}$$

Kuvaaja ei leikkaa x-akselia ja $\frac{2}{2x+1} - \frac{1}{x+1} > 0$, joten alueen pinta-ala on $\int_0^\infty (\frac{2}{2x+1} - \frac{1}{x+1})\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty (\frac{2}{2x+1} - \frac{1}{x+1})\mathrm{d}x &= \lim_{t\to\infty} \int_0^t (\frac{2}{2x+1} - \frac{1}{x+1})\mathrm{d}x \\
&= \lim_{t\to\infty} \Big/_0^t (\ln(2x+1) - \ln(x+1)) \\
&= \lim_{t\to\infty} \Big/_0^t \ln\frac{2x+1}{x+1} \\
&= \lim_{t\to\infty} (\ln\frac{2t+1}{t+1} - \ln 1) \\
&= \lim_{t\to\infty} (\ln\frac{2+\frac{1}{t}}{1+\frac{1}{t}} - 0) \\
&= \ln\frac{2+0}{1+0} = \ln 2
\end{aligned}$$

Pinta-ala on ln 2.

K16. Tilavuus on

$$\lim_{t\to 0}\pi\int_t^2\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^2 dx = \lim_{t\to 0}\pi\int_t^2\left(x^{-\frac{1}{4}}\right)^2 dx$$

$$= \lim_{t\to 0}\pi\int_t^2 x^{-\frac{1}{2}}dx = \lim_{t\to 0}\pi\Big/_{t}^{2} 2x^{\frac{1}{2}}$$

$$= \lim_{t\to 0}\pi\Big/_{t}^{2} 2\sqrt{x} = \lim_{t\to 0}\pi(2\sqrt{2}-2\sqrt{t})$$

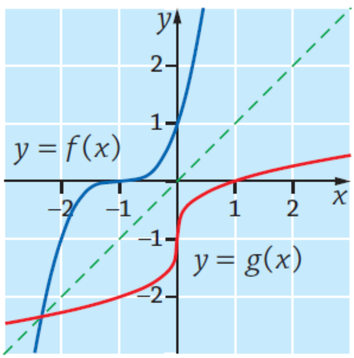
$$= \pi(2\sqrt{2}-2\sqrt{0}) = 2\sqrt{2}\pi$$

K17. **a)** Koska $f(3) = 1$, niin $g(1) = 3$.
Arvoa $g(2)$ ei voi määrittää, sillä ei tiedetä kohtaa, jossa f saa arvon 2.
Koska $f(2) = 3$, niin $g(3) = 2$.

b) $f(g(1)) = 1$
$g(f(4)) = 4$

K18. **a)** $f(0) = 1$, jonka perusteella $g(1) = 0$.
Koska $f(-1) = 0$, niin $g(0) = -1$.
Vastaavasti, koska $f(-2) = -1$, niin $g(-1) = -2$.

b)



K19. Funktiolla on käänteisfunktio, jos se on monotoninen.
Funktio f on määritelty, kun $2x + 4 \geq 0$, eli kun $x \geq -2$ ja derivoituva, kun $x > -2$.

$$f'(x) = \frac{1}{2}(2x+4)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2x+4}}$$

Derivaatta on positiivinen, kun $x > -2$, joten funktio f on kasvava ja siten sillä on käänteisfunktio.

$$\begin{aligned}
y &= \sqrt{2x+4} \quad || \; y \geq 0 \text{ ja } x \geq -2 \\
y^2 &= 2x+4 \\
2x &= y^2 - 4 \\
x &= \frac{y^2-4}{2} \\
x &= \frac{1}{2}y^2 - 2
\end{aligned}$$

Käänteisfunktio on $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2.$

Funktion f määrittelyjoukko on $x \geq -2$. Funktion f arvojoukko on $[0, \infty[$, sillä $f(-2) = 0$, f on kasvava ja jatkuva, ja $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{2x+4} = \infty.$

Käänteisfunktion f^{-1} määrittelyjoukko on funktion f arvojoukko $x \geq 0$ ja arvojoukko funktion f määrittelyjoukko $[-2, \infty[$.

K20. **a)** $f(-2, 3) = -2 \cdot 3 + 1 = -6 + 1 = -5$

Piste $(-2, 3, 5)$ ei ole funktion kuvaajalla, koska $f(-2, 3) \neq 5$.

b)

$$D_x(xy+1) = y$$
$$D_y(xy+1) = x$$
$$f'_x(-2,3) = 3$$
$$f'_y(-2,3) = -2$$

c) $f(x, y) = 4$, eli

$$xy + 1 = 4$$
$$xy = 3$$

Esimerkiksi piste $(1, 3)$ toteuttaa yhtälön.

K21. **a)** $1 - x^2 - y^2 = -1$

$$-x^2 - y^2 = -2$$
$$x^2 + y^2 = 2$$

Funktio saa arvon -1 ympyrän $x^2 + y^2 = 2$ pisteissä.

b)

$$D_x(1 - x^2 - y^2) = -2x$$
$$D_y(1 - x^2 - y^2) = -2y$$
$$f'_x(4,1) = -2 \cdot 4 = -8$$
$$f'_y(4,1) = -2 \cdot 1 = -2$$

K22. $f(x, y) = 3 + x^2 - y$

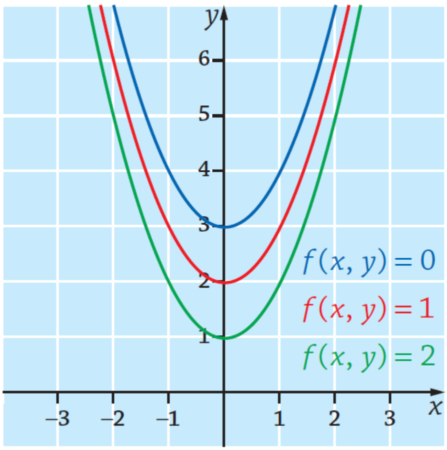
Tasa-arvokäyrille

$3 + x^2 - y = c$

$y = x^2 + 3 - c$

Tasa-arvokäyrät ovat ylöspäin aukeavia paraabelejä, esimerkiksi

$y = x^2 + 3$ ($c = 0$)
$y = x^2 + 2$ ($c = -1$) ja
$y = x^2 + 1$ ($c = -2$).



Kokoavia tehtäviä

ILMAN TEKNISIÄ APUVÄLINEITÄ

1. **a)** $\lim_{x\to 3} f(x) = 2$

b) $\lim_{x\to 5} f(x) = -\infty$

c) $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \frac{1}{2}$ (tangentin kulmakerroin kohdassa $x = 2$)

d) $\lim_{x\to 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3}$ ei ole olemassa, sillä erotusosamäärän toispuoleiset raja-arvot ovat erisuuret.

e) $\lim_{x\to 9} \frac{f(x)-f(9)}{x-9}$ ei ole olemassa, sillä funktio f ei ole kohdassa $x = 9$ jatkuva eikä siksi voi myöskään olla derivoituva.

f) $\lim_{x\to 11} \frac{f(x)-f(11)}{x-11} = 0$ (tangentin kulmakerroin kohdassa $x = 11$)

2. **a)** $f(0, 1) = 0^2 + 3 \cdot 0 \cdot 1 + 4 \cdot 1 - 5 = 4 - 5 = -1$

Piste (0, 1, 2) ei ole funktion f kuvaajalla, koska $f(0, 1) \neq 2$.

b) $D_x(x^2 + 3xy + 4y - 5) = 2x + 3y$

$D_y(x^2 + 3xy + 4y - 5) = 3x + 4$

$f_x{}'(4,-1) = 2 \cdot 4 + 3 \cdot (-1) = 8 - 3 = 5$

$f_y{}'(4,-1) = 3 \cdot 4 + 4 = 12 + 4 = 16$

3. **a)** Sarja on lukujen loputon summa ja lukujono on jono lukuja.

b) Lukujono suppenee, kun sen yleisellä jäsenellä on äärellinen raja-arvo. Sarja suppenee, kun sen osasummalla on äärellinen raja-arvo.

Suppeneva lukujono on esimerkiksi geometrinen lukujono $1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \ldots$ eli $a_n = (\frac{1}{10})^{n-1}$. Tällöin $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Suppeneva sarja on esimerkiksi $1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \ldots$, joka on geometrinen sarja, jossa $a_1 = 1$ ja $q = \frac{1}{10}$. Koska $-1 < q < 1$, sarja suppenee ja summa on $\frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1}{\frac{9}{10}} = \frac{10}{9} = 1\frac{1}{9}$.

c) Epäoleellinen integraali suppenee, jos sen määrittelyssä käytettävillä määrätyillä integraalilla on äärellinen raja-arvo.

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to 0}\int_t^1 x^{-2}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to 0} \Big/_t^1 (-x^{-1}) = \lim_{t\to 0} \Big/_t^1 (-\frac{1}{x}) = \lim_{t\to 0}(-\frac{1}{1}+\frac{1}{t}) = \infty$$

Integraali ei suppene.

4. **a)** $$\frac{3e^x+2}{2e^x+3} = \frac{e^x(3+\frac{2}{e^x})}{e^x(2+\frac{3}{e^x})} = \frac{3+\frac{2}{e^x}}{2+\frac{3}{e^x}} \xrightarrow[x\to\infty]{} \frac{3+0}{2+0} = \frac{3}{2}$$

b) $$\frac{3e^x+2}{2e^x+3} \xrightarrow[x\to-\infty]{} \frac{3\cdot 0+2}{2\cdot 0+3} = \frac{2}{3}$$

5. **a)**

$$a_n = \frac{n^2 \cdot n!}{(n+2)!} = \frac{n^2 \cdot n \cdot \cancel{(n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}}{(n+2)\cdot(n+1)\cdot n \cdot \cancel{(n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}}$$

$$= \frac{n^2}{(n+2)(n+1)} = \frac{n^2}{n^2+3n+2}$$

$$= \frac{n^2 \cdot 1}{n^2(1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2})} = \frac{1}{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{1+0+0} = 1$$

b)

$$a_n = n - \sqrt{n^2-3n} = \frac{(n-\sqrt{n^2-3n})(n+\sqrt{n^2-3n})}{n+\sqrt{n^2-3n}}$$

$$= \frac{n^2-(n^2-3n)}{n+\sqrt{n^2-3n}} = \frac{3n}{n+\sqrt{n^2(1-\frac{3}{n})}}$$

$$= \frac{3n}{n+\underbrace{|n|}_{n>0}\sqrt{1-\frac{3}{n}}} = \frac{3n}{n(1+\sqrt{1-\frac{3}{n}})}$$

$$= \frac{3}{1+\sqrt{1-\frac{3}{n}}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{3}{1+\sqrt{1-0}} = \frac{3}{2}$$

6. $$a_n - 2 = \frac{2n-2}{n+1} - 2 = \frac{2n-2}{n+1} - \frac{2(n+1)}{n+1} = \frac{2n-2-2n-2}{n+1} = -\frac{4}{n+1}$$

Kun $n \geq 1$, $n + 1 > 0$ ja $-\frac{4}{n+1} < 0$.

Koska erotus $a_n - 2$ on negatiivinen, $a_n < 2$ kaikille termeille.

$$\begin{aligned}a_{n+1} - a_n &= \frac{2(n+1)-2}{(n+1)+1} - \frac{2n-2}{n+1} = \frac{2n+2-2}{n+2} - \frac{2n-2}{n+1} = \frac{2n}{n+2} - \frac{2n-2}{n+1}\\ &= \frac{2n(n+1)-(2n-2)(n+2)}{(n+2)(n+1)}\\ &= \frac{2n^2+2n-(2n^2+4n-2n-4)}{(n+2)(n+1)}\\ &= \frac{8n+4}{(n+2)(n+1)}\end{aligned}$$

Kun $n \geq 1$, $a_{n+1} - a_n > 0$, joten $a_{n+1} > a_n$ kaikille termeille.

$$a_1 = \frac{2n-2}{n+1} = \frac{n(2-\frac{2}{n})}{n(1+\frac{1}{n})} = \frac{2-\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2-0}{1+0} = 2$$

7. $$S_n = \ln\frac{1}{2} + \ln\frac{2}{3} + \ln\frac{3}{4} + \ldots + \ln\frac{n-1}{n} + \ln\frac{n}{n+1}$$

$$= \ln 1 \underbrace{-\ln 2 + \ln 2}_{0} \underbrace{-\ln 3 + \ln 3}_{0} \underbrace{-\ln 4 + \ldots + \ln(n-1)}_{0} \underbrace{-\ln n + \ln n}_{0} - \ln(n+1)$$

$$= \ln 1 - \ln(n+1)$$

$$= -\ln(n+1)$$

$$-\ln(n+1) \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$$

Sarja ei suppene.

8. $f(x)=\begin{cases} ae^{-3x}, \text{ kun } x \geq 0 \\ 0, \text{ kun } x < 0 \end{cases}$

Tulee olla $f(x) \geq 0$, joten $a \geq 0$.

Lisäksi tulee olla $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$.

$$\begin{aligned}
\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x &= \int\limits_{-\infty}^{0} 0\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{\infty} ae^{-3x}\mathrm{d}x = 0 + \lim_{t\to\infty}\int\limits_{0}^{t} ae^{-3x}\mathrm{d}x \\
&= \lim_{t\to\infty} \Big/_{0}^{t} -\frac{1}{3}ae^{-3x} = \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{3}ae^{-3t} + \frac{1}{3}ae^{-3\cdot 0}\right) \\
&= \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{a}{3e^{3t}} + \frac{1}{3}a\right) = 0 + \frac{1}{3}a = \frac{a}{3}
\end{aligned}$$

$$\frac{a}{3} = 1$$
$$a = 3$$

$f(x)=\begin{cases} 3e^{-3x}, \text{ kun } x \geq 0 \\ 0, \text{ kun } x < 0 \end{cases}$

Kun $x < 0$, kertymä on 0.
Kun $x \geq 0$, $\int\limits_{0}^{s} 3e^{-3x}\mathrm{d}x = \Big/_{0}^{s} -e^{-3x} = -e^{-3s} + e^{-3\cdot 0} = -e^{-3s} + 1 = 1 - e^{-3s}$.

Kertymäfunktio on
$F(x)=\begin{cases} 0, x < 0 \\ 1-e^{-3x}, x \geq 0 \end{cases}$.

$P(X \geq t) = 1 - F(t) = 1 - (1 - e^{-3t}) = e^{-3t}$, kun $t \geq 0$.

9. **a)** Funktio g on jatkuva kohdassa $x = 0$, jos $g(0) = \lim_{x\to 0} g(x)$.

$g(0) = 0 \cdot f(0) = 0$

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0}(\underbrace{x}_{\to 0} \cdot \underbrace{f(x)}_{2\le f(x)\le 5}) = 0$$

Funktio g on jatkuva kohdassa $x = 0$.

Funktio g on derivoituva kohdassa $x = 0$, jos raja-arvo $\lim_{x\to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0}$ on olemassa.

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{xf(x)-0\cdot f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{xf(x)}{x} = \lim_{x\to 0} f(x)$$

Funktion f raja-arvon olemassaolosta kohdassa $x = 0$ ei tiedetä mitään, joten funktion g derivoituvuudesta kohdassa $x = 0$ ei voida sanoa mitään.

b) $g(0) = 0^2 \cdot f(0) = 0$

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0}(\underbrace{x^2}_{\to 0} \cdot \underbrace{f(x)}_{2\le f(x)\le 5}) = 0$$

Funktio g on jatkuva kohdassa $x = 0$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2\cdot f(x)-0^2\cdot f(0)}{x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2\cdot f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} x\cdot f(x) \overset{\text{a kohta}}{=} 0\end{aligned}$$

Funktio g on derivoituva kohdassa $x = 0$.

10. Tiedetään, että $1 + a_2 + a_3 + \ldots = 10$. Koska sarja on geometrinen, voidaan kirjoittaa $1+a_2+a_3+\ldots=1+q+q^2+\ldots=\frac{a_1}{1-q}=\frac{1}{1-q}$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-q}&=10 \quad \| \, q\neq 1\\ 1&=10-10q\\ q&=\frac{9}{10}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lg a_1+\lg a_2+\lg a_3+\ldots+\lg a_{100}&=\lg 1+\lg q+\lg q^2+\ldots+\lg q^{99}\\ &=0+\lg q+2\lg q+3\lg q+\ldots+99\lg q\\ &=\lg q\cdot(1+2+3+\ldots+99)\end{aligned}$$

Summa $1 + 2 + 3 + \ldots + 99$ on aritmeettinen summa, jossa on 99 jäsentä.

$$1+2+3+\ldots+99=99\cdot\frac{1+99}{2}=99\cdot 50=4950$$

$$\begin{aligned}&\lg a_1+\lg a_2+\lg a_3+\ldots+\lg a_{100}\\ &=\lg q\cdot(1+2+3+\ldots+99)\\ &=\lg\frac{9}{10}\cdot 4950\\ &=(\lg 9-\lg 10)\cdot 4950\\ &=(\lg 9-1)\cdot 4950\\ &=4950(2\lg 3-1)\end{aligned}$$

APUVÄLINEET SALLITTU

11. **a)**

aika	**viikossa edetty matka (m)**
1. viikko	10
2. viikko	$10 \cdot 0{,}95$
3. viikko	$10 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}95 = 10 \cdot 0{,}95^2$
…	
n. viikko	$10 \cdot 0{,}95^{n-1}$

Matkat muodostavat geometrisen lukujonon, jossa $a_1 = 10$ ja $q = 0{,}95$.

Ensimmäisen puolen vuoden aikana kaivettu matka:

$10 + 10 \cdot 0{,}95 + 10 \cdot 0{,}95^2 + \ldots + 10 \cdot 0{,}95^{25}$

$$= 10 \cdot \frac{1-0{,}95^{26}}{1-0{,}95} = 147{,}29\ldots$$

Robotti on edennyt noin 150 metriä.

b) Sarja $10 + 10 \cdot 0{,}95 + 10 \cdot 0{,}95^2 + \ldots$ on geometrinen sarja, joka suppenee, koska $-1 < q < 1$.

Tällöin $S = \dfrac{10}{1-0{,}95} = 200$.

Tunnelin pituus lähestyy lukua 200 m.

c)

$$\begin{aligned}
10 \cdot \frac{1-0{,}95^n}{1-0{,}95} &= 100 \\
\frac{1-0{,}95^{26}}{0{,}05} &= 10 \\
1-0{,}95^n &= 0{,}5 \\
0{,}95^n &= 0{,}5 \\
n &= \log_{0{,}95} 0{,}5 = 13{,}51\ldots
\end{aligned}$$

Robotilta menee kaivamiseen 14 viikkoa.

12. Funktio f on jatkuva väleillä $x < 2$ ja $x > 2$. Tarkastellaan jatkuvuutta kohdassa $x = 2$.

$$f(2) = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2-} (ax + \frac{4}{9}) = 2a + \frac{4}{9}$$

$$\lim_{x\to 2+} f(x) = \lim_{x\to 2-} (\frac{x}{x+1}) = \frac{2}{3}$$

Funktio on jatkuva kohdassa $x = 2$, kun

$$\begin{aligned} 2a + \frac{4}{9} &= \frac{2}{3} \\ 2a &= \frac{2}{9} \\ a &= \frac{1}{9} \end{aligned}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}x + \frac{4}{9}, \text{ kun } x < 2 \\ \frac{x}{x+1}, \text{ kun } x \geq 2 \end{cases}.$$

Funktio f on derivoituva väleillä $x < 2$ ja $x > 2$. Tarkastellaan derivoituvuutta kohdassa $x = 2$.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 2-} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} &= \lim_{x\to 2-} \frac{\frac{1}{9}x + \frac{4}{9} - \frac{2}{3}}{x-2} = \lim_{x\to 2-} \frac{\frac{1}{9}x - \frac{2}{9}}{x-2} \\ &= \lim_{x\to 2-} \frac{1}{9} \cdot \frac{x-2}{x-2} = \lim_{x\to 2-} \frac{1}{9} = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 2+} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} &= \lim_{x\to 2+} \frac{\frac{x}{x+1} - \frac{2}{3}}{x-2} = \lim_{x\to 2+} \frac{\frac{3x - 2(x+1)}{3(x+1)}}{x-2} \\ &= \lim_{x\to 2+} \frac{\cancel{x-2}}{3(x+1)(\cancel{x-2})} = \lim_{x\to 2+} \frac{1}{3x+3} = \frac{1}{6+3} = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

Erotusosamäärällä on raja-arvo kohdassa $x = 2$, joten funktio f on derivoituva kohdassa $x = 2$. Funktio f on derivoituva kaikkialla.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x(1+\frac{1}{x})}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=\frac{1}{1+0}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty}(\frac{1}{9}x+\frac{4}{9})=-\infty$$

13. **a)** Päättely on virheellinen: lukujonon suppenemisesta ei voi päätellä sarjan suppenemista. Päättely on epätosi.

Jos sarja suppenee, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

Nyt $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})=1-0=1\neq 0$.

b) Päättely on virheellinen: funktion kasvavuus ja jatkuvuus eivät riitä takaamaan, että funktio olisi kertymäfunktio.

Jotta funktio f voisi olla satunnaismuuttujan kertymäfunktio, tulee olla $f(x)\leq 1$. Koska $f(1)=e^1=e>1$, f ei voi olla kertymäfunktio.

c) Päättely on oikein: Rajatta kasvavan funktion f arvo on suurempi kuin 100 jostakin muuttujan x arvosta c alkaen. Niinpä tällaiselle funktiolle pätee

$$\begin{aligned}\int_0^\infty f(x)\mathrm{d}x&=\lim_{t\to\infty}\int_0^t f(x)\mathrm{d}x=\lim_{t\to\infty}\left(\int_0^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^t f(x)\mathrm{d}x\right)\\&\geq\lim_{t\to\infty}\left(\int_0^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^t 100\mathrm{d}x\right)=\lim_{t\to\infty}\left(\int_0^c f(x)\mathrm{d}x+100(t-c)\right)=\infty.\end{aligned}$$

Funktion x^2 epäoleellisen integraalin hajaantumisen voi todeta myös laskemalla:

$$\int_0^\infty x^2\mathrm{d}x=\lim_{t\to\infty}\int_0^t x^2\mathrm{d}x=\lim_{t\to\infty}\Big/_0^t\frac{1}{3}x^3=\lim_{t\to\infty}(\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{3}\cdot 0^3)=\lim_{t\to\infty}(\frac{1}{3}t^3)=\infty.$$

14.

$$x^4 \le \frac{1}{x^4} \quad \| \cdot x^4 \ne 0$$

$$x^{18} \le 1$$

$$-1 \le x \le 1,\ x \ne 0$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^4}, \text{ kun } x < -1 \\ x^4, \text{ kun } -1 \le x \le 1 \\ \dfrac{1}{x^4}, \text{ kun } x > 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{-1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{1}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^4}\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} x^4\mathrm{d}x + \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^4}\mathrm{d}x \\
&= \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{-1} \frac{1}{x^4}\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} x^4\mathrm{d}x + \lim_{t\to\infty} \int_{1}^{t} \frac{1}{x^4}\mathrm{d}x \\
&= \lim_{t\to-\infty} \Big/_{t}^{-1} -\frac{1}{3x^3} + \Big/_{-1}^{1} \frac{1}{5}x^5 + \lim_{t\to\infty} \Big/_{1}^{t} -\frac{1}{3x^3} \\
&= \lim_{t\to-\infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3t^3}\right) + \left(\frac{1}{5} - \left(-\frac{1}{5}\right)\right) + \lim_{t\to\infty} \left(-\frac{1}{3t^3} + \frac{1}{3}\right) \\
&= \left(\frac{1}{3} + 0\right) + \frac{2}{5} + \left(0 + \frac{1}{3}\right) \\
&= \frac{16}{15}
\end{aligned}$$

15. **a)** $f(0)=\dfrac{|0|-1}{0-1}=1$

$$\lim_{x\to 0-}\frac{|x|-1}{x-1}=\frac{0-1}{0-1}=1$$

Funktio f on jatkuva kohdassa $x = 0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{|x|-1}{x-1}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{|x|-1}{x-1}-\frac{x-1}{x-1}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{|x|-1-x+1}{x-1}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|-x}{x(x-1)}$$

$$\lim_{x\to 0-}\frac{|x|-x}{x(x-1)}=\lim_{x\to 0-}\frac{-x-x}{x(x-1)}=\lim_{x\to 0-}\frac{-2x}{x(x-1)}=\lim_{x\to 0-}\frac{-2}{x-1}=\frac{-2}{0-1}=2$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{|x|-x}{x(x-1)}=\lim_{x\to 0+}\frac{x-x}{x(x-1)}=\lim_{x\to 0+}\frac{0}{x(x-1)}=0$$

Funktio f ei ole derivoituva kohdassa x =0.

b) Funktiota f ei ole määritelty kohdassa $x = 1$, joten sen jatkuvuutta ja derivoituvuutta ei voida tarkastella tässä kohdassa.

16. **a)** $f(x) = \ln x + x + 1$, $x > 0$

$f'(x) = \dfrac{1}{x} + 1$

Kun $x > 0$, $f'(x) > 0$, joten f on kasvava ja sillä on käänteisfunktio.

b) $f(x) = 2$

$\ln x + x + 1 = 2$

$\ln x + x = 1$

Huomataan, että kun $x = 1$, $\ln 1 + 1 = 0 + 1 = 1$.

Koska $f(1) = 2$, $g(2) = 1$.

$$g'(2)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{\frac{1}{1}+1}=\frac{1}{2}$$

c) Käänteisfunktion g kuvaaja saadaan peilaamalla funktion f kuvaaja suoran $y = x$ suhteen. Kuvaajat leikkaavat siksi toisensa pisteissä, joissa ne leikkaavat suoran $y = x$. Etsitään ne funktion f kuvaajalla olevat pisteet, joiden x ja y koordinaatit ovat samat, eli ratkaistaan yhtälö $f(x) = x$.

$$\begin{aligned} \ln x + x + 1 &= x \\ \ln x &= -1 \\ x &= e^{-1} \\ x &= \frac{1}{e} \end{aligned}$$

Pisteessä $(\frac{1}{e}, \frac{1}{e})$.

d) Kuvaajien välinen kulma on sama kuin leikkauspisteeseen piirrettyjen tangenttien välinen kulma. Tangenttien välinen kulma saadaan laskettua kulmakertoimien eli derivaatan arvojen avulla.

$$f'(\frac{1}{e}) = e + 1$$

$$g'(\frac{1}{e}) = \frac{1}{f'(\frac{1}{e})} = \frac{1}{e+1}$$

$$\tan \alpha = \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \right|$$

$$\tan \alpha = \left| \frac{e + 1 - \frac{1}{e+1}}{1 + (e+1) \cdot \frac{1}{e+1}} \right|$$

$$\alpha = 59{,}89...^\circ$$

Kuvaajien välinen kulma on 59,9°.

17. Poikkileikkauskäyrän yhtälö on $f(x, 1) = e^{-x^2} \cdot 1 = e^{-x^2}$.

$$f_x'(x,1) = -2x \cdot e^{-x^2}$$

$$f_x'(1,1) = -2 \cdot 1 \cdot e^{-1^2} = -2e^{-1} = -\frac{2}{e}$$

Tangentti on tasossa $y = 1$, joten sen y-akselin suuntainen komponentti eli kantavektorin $\overline{j}$ kerroin on 0.

Tangentin kulmakerroin $-\frac{2}{e}$ ilmoittaa, kuinka paljon z-koordinaatti muuttuu, kun x-koordinaatti kasvaa yhdellä. Eräs suuntavektori on $\overline{i} - \frac{2}{e}\overline{k}$.

18. **a)** $f'(x) = \begin{cases} x, 0 \le x < 1 \\ 1, 1 \le x < 2 \\ -x+3, 2 \le x \le 4 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + C, 0 \le x < 1 \\ x + D, 1 \le x \le 2 \\ -\frac{1}{2}x^2 + 3x + E, 2 < x \le 4 \end{cases}$

Koska $f(0) = 0$, $C = 0$.

Funktion tulee olla jatkuva kohdassa $x = 1$, joten

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1+} f(x) = f(1)$$

$$f(1) = 1 + D$$

$$\lim_{x \to 1+} f(x) = 1 + D$$

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = \frac{1}{2}$$

$$1 + D = \frac{1}{2}$$

$$D = -\frac{1}{2}$$

Funktion f tulee olla jatkuva kohdassa $x = 2$.

$$\lim_{x \to 2-} f(x) = \lim_{x \to 2+} f(x) = f(2)$$
$$f(2) = 2 - \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$$
$$\lim_{x \to 2+} f(x) = 4 + E$$
$$\lim_{x \to 2-} f(x) = 1\frac{1}{2}$$
$$4 + E = 1\frac{1}{2}$$
$$E = -2\frac{1}{2}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2, 0 \le x < 1 \\ x - \frac{1}{2}, 1 \le x \le 2 \\ -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 2\frac{1}{2}, 2 < x \le 4 \end{cases}$$

c) Suurin ja pienin arvo saavutetaan derivaatan nollakohdissa tai välin päätepisteissä.

$f(0) = 0$

$f(4) = 1\frac{1}{2}$

Derivaatan nollakohdat ovat $x = 0$ ja $x = 3$.

$f(3) = 2$

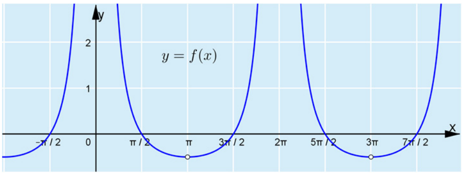
Suurin arvo on 2 ja pienin 0.

19. Sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \cos^k x$ on geometrinen sarja, jossa $a_1 = \cos^1 x = \cos x$ ja suhdeluku $q = \cos x$.

Kun $x \neq n\pi$, $-1 < \cos x < 1$ ja sarja suppenee, joten sen summa on reaaliluku kaikissa määrittelyjoukon pisteissä.

Tällöin $\sum_{k=1}^{\infty} \cos^k x = \dfrac{\cos x}{1-\cos x}$.

$f(x) = \dfrac{\cos x}{1-\cos x}$, $x \neq n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$



Kun $x \to \pi + n \cdot 2\pi$, niin $\cos x \to -1$.
Siten $\lim\limits_{x \to \pi + n2\pi} f(x) = \lim\limits_{x \to \pi + n2\pi} \dfrac{\cos x}{1-\cos x} = \dfrac{-1}{1-(-1)} = -\dfrac{1}{2}$.

Näissä pisteissä funktiolla f siis on raja-arvo, ja funktio voidaan laajentaa näissä pisteissä jatkuvaksi määrittelemällä sen arvoksi $-\dfrac{1}{2}$.

Kun $x \to n \cdot 2\pi$, niin $\cos x \to 1$. Siten $\lim\limits_{x \to n2\pi} f(x) = \lim\limits_{x \to n2\pi} \dfrac{\cos x}{1-\cos x} = \infty$.
Näissä pisteissä funktiolla f ei ole raja-arvoa, eikä funktiota f siksi voida laajentaa näissä pisteissä edes jatkuvaksi funktioksi.

Funktiota ei voida laajentaa derivoituvaksi koko $\mathbb{R}$:ssa.

20. **a)** Valitaan esimerkiksi $a_n = \dfrac{1}{n\pi}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Tällöin $a_n = \dfrac{1}{n\pi} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ja $f(a_n) = \sin\dfrac{1}{a_n} = \underbrace{\sin n\pi}_{=0 \text{ kaikilla } n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$

b) Valitaan esimerkiksi $a_n = \dfrac{1}{t + n\cdot 2\pi}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Tällöin $\dfrac{1}{t + n\cdot 2\pi} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ja $\sin(\dfrac{1}{a_n}) = \sin(t + n\cdot 2\pi) = \sin t$

jokaiselle n sinifunktion jaksollisuuden perusteella.

Niinpä $f(a_n) = \sin(\dfrac{1}{a_n}) = \sin t \xrightarrow[n\to\infty]{} \sin t.$