Kertaus

K1. **a)** Lukujen 7 ja −7 itseisarvo on 7.

b) $1-\sqrt{3}<0$, joten $\left|1-\sqrt{3}\right|=-\left(1-\sqrt{3}\right)=-1+\sqrt{3}=\sqrt{3}-1$.

K2. **a)** $|7-x|=3$

$7-x=3$ tai $7-x=-3$

$x=4$ $\quad$ $x=10$

b) $|4x-3|=|2x+3|$

$4x-3=2x+3$ tai $4x-3=-(2x+3)$

$2x=6 \quad \| :2$ $\qquad$ $6x=0 \quad \| :6$

$x=3$ $\qquad$ $x=0$

c) Minkään luvun itseisarvo ei ole negatiivinen luku, joten yhtälöllä ei ole ratkaisua.

K3. **a)** $|2x + 6| < 4$

$-4 < 2x + 6 < 4$

$-4 < 2x + 6$ ja $2x + 6 < 4$

$-2x < 10 \quad \| : (-2)$ $\qquad 2x < -2 \quad \| : 2$

$x > -5$ $\qquad x < -1$

Epäyhtälöt ovat yhtä aikaa voimassa, kun $-5 < x < -1$.

Tehtävän voi ratkaista myös kaksoisepäyhtälönä.

$$-4 < 2x + 6 < 4 \quad \| -6$$
$$-10 < 2x < -2 \quad \| : 2$$
$$-5 < x < -1$$

b) $|12 - 3x| \geq 9$

$12 - 3x \leq -9$ tai $12 - 3x \geq 9$

$-3x \leq -21 \quad \| : (-3)$ $\qquad -3x \geq -3 \quad \| : (-3)$

$x \geq 7$ $\qquad x \leq 1$

$x \leq 1$ tai $x \geq 7$

c) Luvun itseisarvo on aina ei-negatiivinen, joten se on aina suurempi kuin mitä tahansa negatiivinen luku. Epäyhtälön toteuttavat kaikki luvut.

K4. **a)** Luvun $x + 1$ etäisyys luvusta $5 - x$ on $|x + 1 - (5 - x)| = |2x - 4|$. Tämän tulee olla pienempi kuin 2.

$$
\begin{aligned}
&|2x - 4| < 2 \\
&-2 < 2x - 4 < 2 \quad || +4 \\
&2 < 2x < 6 \quad || : 2 \\
&1 < x < 3
\end{aligned}
$$

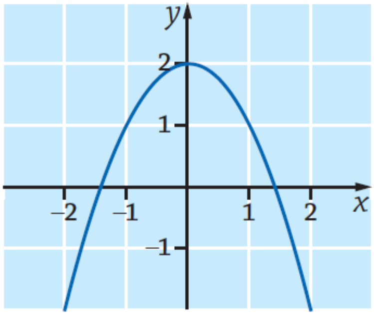
b) Koska itseisarvot ovat ei-negatiivisia, voidaan epäyhtälön $|x + 2| < |3 - x|$ molemmat puolet korottaa neliöön.

$$
\begin{aligned}
|x+2| &< |3-x| \\
(x+2)^2 &< (3-x)^2 \\
x^2 + 4x + 4 &< 9 - 6x + x^2 \\
10x &< 5 \quad ||:10 \\
x &< \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Epäyhtälö $|x + 2| < |3 - x|$ tarkoittaa, että luvun x etäisyys lukuun -2 tulee olla pienempi kuin lukuun 3.

Ratkaisu tarkoittaa, että tällaisia lukuja ovat ne luvut, jotka ovat pienempiä kuin $\frac{1}{2}$.

K5. **a)** Pisteen x-koordinaatin neliö on x^2. Lisätään siihen y-koordinaatti, jolloin saadaan summaksi 2. Pistejoukon yhtälö on siis $x^2 + y = 2$.

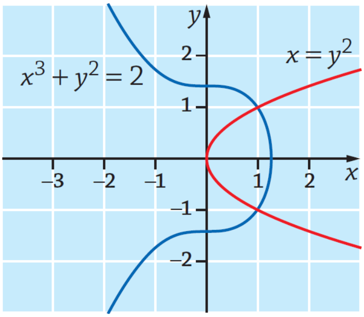


b) Piste on käyrällä, jos se toteuttaa käyrän yhtälön. Sijoitetaan pisteiden $(-2, 2)$ ja $(2, -2)$ koordinaatit yhtälöön $x^2 + y = 2$.

Piste $(-2, 2)$:	Piste $(2, -2)$:
$(-2)^2 + 2 = 2$	$2^2 + (-2) = 2$
$6 = 2$	$2 = 2$
epätosi	tosi

Piste $(-2, 2)$ ei ole käyrällä, piste $(2, -2)$ on.

K6.



Kuvan perusteella näyttäisi siltä, että käyrien yhteiset pisteet ovat (1, 1) ja (1, −1).

Varmistetaan tulos sijoittamalla pisteiden koordinaatit yhtälöihin.

Piste (1, 1):

$1^3 + 1^2 = 2$	$1 = 1^2$
$2 = 2$	$1 = 1$
tosi	tosi

Piste (1, 1) on molemmilla käyrillä.

Piste (1, −1):

$1^3 + (-1)^2 = 2$	$1 = (-1)^2$
$2 = 2$	$1 = 1$
tosi	tosi

Piste (1, −1) on molemmilla käyrillä.

Pisteet ovat molemmilla käyrillä, joten ne ovat käyrien yhteisiä pisteitä.

K7. Käyrän ja x-akselin leikkauspisteessä $y = 0$.

Sijoitetaan $y = 0$ käyrän yhtälöön $x^2 + 2xy + y = 4$.

$$x^2 + 2x \cdot 0 + 0 = 4$$
$$x^2 = 4$$
$$x = 2 \text{ tai } x = -2$$

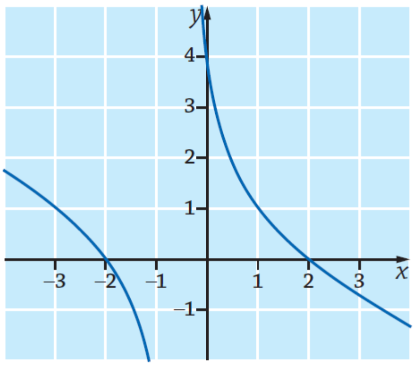
Käyrä leikkaa x-akselin pisteissä $(-2, 0)$ ja $(2, 0)$.

Käyrän ja y-akselin leikkauspisteessä $x = 0$.

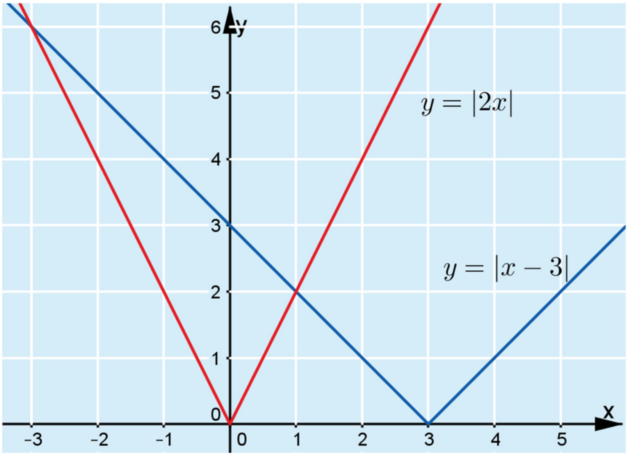
Sijoitetaan $x = 0$ käyrän yhtälöön $x^2 + 2xy + y = 4$.

$$0^2 + 2 \cdot 0 \cdot y + y = 4$$
$$y = 4$$

Käyrä leikkaa y-akselin pisteessä $(0, 4)$.



K8. **a)** Piirretään samaan koordinaatistoon sekä käyrän $y = |x - 3|$ että $y = |2x|$ kuvaajat.



Koska käyrät leikkaavat pisteissä (1, 2) ja (−3, 6), niin yhtälön $|x - 3| = |2x|$ ratkaisuja ovat $x \approx 1$ ja $x \approx -3$.

b) $|x - 3| = |2x|$

$x - 3 = 2x$	tai	$x - 3 = -(2x)$
$-x = 3 \quad \|\| : (-1)$		$3x = 3 \quad \|\| : 3$
$x = -3$		$x = 1$

K9. **a)** Suoran $y = 3x$ kulmakerroin on 3 ja suoran $3x - y + 1 = 0$, eli $y = 3x + 1$ kulmakerroin on myös 3, joten suorat ovat yhdensuuntaiset.

b) Kirjoitetaan suoran $3x + 4y = 0$ yhtälö ratkaistussa muodossa $y = -\frac{3}{4}x$, jolloin nähdään, että sen kulmakerroin on $-\frac{3}{4}$.

Suoran $y = -\frac{3}{4}x + 5$ kulmakerroin on myös $-\frac{3}{4}$., joten suorat ovat yhdensuuntaiset.

c) Kirjoitetaan suorien yhtälöt ratkaistuissa muodoissa.

$$\begin{aligned} 2x + y + 6 &= 0 \\ y &= -2x - 6 \end{aligned}$$

Kulmakerroin on −2.

$$\begin{aligned} x + 2y - 6 &= 0 \\ 2y &= -x + 6 \quad \|:2 \\ y &= -\frac{1}{2}x + 3 \end{aligned}$$

Kulmakerroin on $-\frac{1}{2}$.

Kulmakertoimet eivät ole samat, joten suorat eivät ole yhdensuuntaiset.
Kulmakertoimien tulo on $-2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$, joten suorat eivät ole kohtisuorassa toisiaan vastaan.

d) Suora $x + 3 = 0$, eli $x = -3$ on y-akselin suuntainen. Suora $y - 6 = 0$, eli $y = 6$ on x-akselin suuntainen. Suorat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

K10. **a)** Suoran yhtälö saadaan sijoittamalla kaavaan $y - y_0 = k(x - x_0)$ pisteeksi $(x_0, y_0) = (7, 3)$ ja $k = 2$.

$$\begin{aligned} y - 3 &= 2(x - 7) \\ y - 3 &= 2x - 14 \\ y &= 2x - 11 \end{aligned}$$

b) Suoran yhtälö saadaan sijoittamalla kaavaan $y - y_0 = k(x - x_0)$ pisteeksi $(x_0, y_0) = (7, 3)$ ja $k = -\frac{4}{7}$.

$$\begin{aligned} y - 3 &= -\frac{4}{7}(x - 7) \\ y - 3 &= -\frac{4}{7}x + 4 \\ y &= -\frac{4}{7}x + 7 \end{aligned}$$

c) x-akselin suuntaisen suoran, joka kulkee pisteen (7, 3) kautta, y-koordinaatti on aina 3, eli suoran yhtälö on $y = 3$.

d) Kun suuntakulma on 90°, niin suora on y-akselin suuntainen. y-akselin suuntaisen suoran, joka kulkee pisteen (7, 3) kautta, x-koordinaatti on aina 7, joten suoran yhtälö on $x = 7$.

K11. **a)** Suoran $8x - 2y + 3 = 0$ yhtälö ratkaistussa muodossa on $y = 4x + \frac{3}{2}$.
Jotta suorat olisivat yhdensuuntaiset, on kulmakertoimen oltava 4.

Sijoitetaan kaavaan $y - y_0 = k(x - x_0)$ pisteeksi $(x_0, y_0) = (3, -2)$ ja $k = 4$.

$$\begin{aligned} y - (-2) &= 4(x - 3) \\ y + 2 &= 4x - 12 \\ y &= 4x - 14 \end{aligned}$$

Piste (20, 50) on suoralla, jos se toteuttaa suoran yhtälön.

$$\begin{aligned} 4 \cdot 20 - 14 &= 50 \\ 66 &= 50 \end{aligned}$$

epätosi

Piste (20, 50) ei ole suoralla.

b) Suoran kulmakerroin $k = \frac{-3-1}{5-(-3)} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$ ja suora kulkee esimerkiksi pisteen $(x_0, y_0) = (-3, 1)$ kautta.

Näillä tiedoilla suoran yhtälöksi saadaan

$$\begin{aligned} y - 1 &= -\frac{1}{2}(x - (-3)) \\ y &= -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Suoran yhtälöstä nähdään, että se leikkaa y-akselin pisteessä $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$.

Ratkaistaan x-akselin leikkauspiste sijoittamalla yhtälöön $y = 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}x &= -\frac{1}{2} \qquad \| \cdot 2 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Saadaan piste $(-1, 0)$.

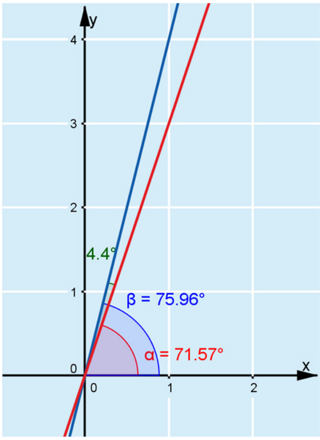
K12. Suorien suuntakulmat voidaan laskea suorien kulmakertoimien avulla.

$\tan \beta = 4$ $\qquad$ $\tan \alpha = 3$

$\beta = 75{,}96\ldots° \approx 76{,}0°$ $\qquad$ $\alpha = 71{,}56\ldots° \approx 71{,}6°.$

Suorien välinen kulma on suuntakulmien β ja α erotus.

$\beta - \alpha = 75{,}96\ldots° - 71{,}56\ldots° = 4{,}39\ldots° \approx 4{,}4°.$



K13. **a)** Sijoitetaan ympyrän keskipistemuotoiseen yhtälöön $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ sijoittamalla keskipiste $(x_0, y_0) = (-2, 5)$ ja säde $r = 7$.

$$(x - (-2))^2 + (y - 5)^2 = 7^2$$
$$(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 49$$

b) Keskipiste on $(-3, 2)$ ja säde $\sqrt{10}$.

K14. Ympyrän säde on sama kuin pisteen $(5, 2)$ etäisyys ympyrän keskipisteestä $(4, -2)$.

$$r = \sqrt{(4-5)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{17}$$

Ympyrän yhtälö on

$$(x - 4)^2 + (y - (-2))^2 = \sqrt{17}^2$$
$$(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 17.$$

Lasketaan pisteen $(8, -2)$ etäisyys ympyrän keskipisteestä

$$d = \sqrt{(4-8)^2 + (-2-(-2))^2} = \sqrt{16} < \sqrt{17}.$$

Koska etäisyys on pienempi kuin säde, piste on ympyrän sisäpuolella.

Pisteen $(3, 2)$ etäisyys keskipisteestä on $d = \sqrt{(4-3)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{17}$ eli sama kuin säde.

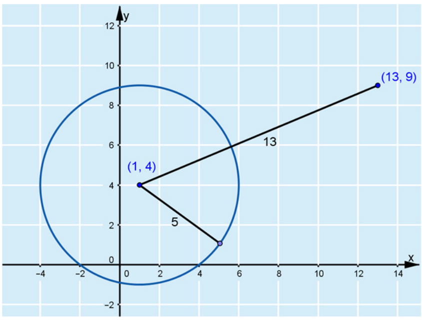
Piste on ympyrällä.

K15. Muokataan yhtälö keskipistemuotoon.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 4x - 10y + 20 &= 0 \\ x^2 + 4x + \_\_ + y^2 - 10y + \_\_ &= -20 \\ x^2 + 4x + \underline{4} + y^2 - 10y + \underline{25} &= -20 + 4 + 25 \\ (x + 2)^2 + (y - 5)^2 &= 9 \end{aligned}$$

Yhtälö esittää ympyrää, jonka keskipiste on $(-2, 5)$ ja säde $\sqrt{9} = 3$.

K16. Piirretään ympyrä teknisellä apuvälineellä. Pisteen etäisyys ympyrästä on pisteen ja ympyrän kehän välinen lyhin etäisyys. Selvitetään ympyrän keskipiste ja säde. Ympyrän keskipiste on (1, 4) ja säde. Piirretään jana ympyrän keskipisteestä pisteeseen (13, 9). Kysytty etäisyys on piirretyn janan pituus, josta vähennetään ympyrän säde, eli $13 - 5 = 8$.



Selvitetään ensin ympyrän $x^2 + y^2 - 2x - 8y - 8 = 0$ keskipiste ja säde muokkaamalla ympyrän yhtälö keskipistemuotoon.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2x - 8y - 8 &= 0 \\ x^2 - 2x + \_\_ + y^2 - 8y + \_\_ &= 8 \\ x^2 - 2x + \underline{1} + y^2 - 8y + \underline{16} &= 8 + 1 + 16 \\ (x - 1)^2 + (y - 4)^2 &= 25 \end{aligned}$$

Ympyrän keskipiste on (1, 4) ja säde $\sqrt{25} = 5$.

Lasketaan sitten pisteen (13, 9) etäisyys keskipisteestä (1, 4) ja vähennetään siitä säde 5.

$\sqrt{(13-1)^2 + (9-4)^2} - 5 = \sqrt{169} - 5 = 13 - 5 = 8$.

Kysytty etäisyys on 8.

K17. **a)** Paraabelin yhtälö $x^2 + 2x - y - 3 = 0$ voidaan kirjoittaa myös muodossa $y = x^2 + 2x - 3$. Koska x^2 kerroin on positiivinen, paraabeli aukeaa ylöspäin.

y-akselin leikkauspisteessä $x = 0$.
Sijoitetaan $x = 0$ paraabelin yhtälöön, jolloin
$y = 0^2 + 2 \cdot 0 - 3 = -3$.
Paraabeli leikkaa y-akselin pisteessä $(0, -3)$.

x-akselin leikkauspisteessä $y = 0$.

$$0 = x^2 + 2x - 3$$
$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2}$$
$$x = 1 \quad \text{tai} \quad x = -3$$

Paraabeli leikkaa x-akselin pisteissä $(1, 0)$ ja $(-3, 0)$

b) Ratkaistaan paraabelin yhtälö muuttujan x suhteen.

$$4y^2 - 6y + 2x = 0$$
$$2x = -4y^2 + 6y \quad \| :2$$
$$x = -2y^2 + 3y$$

Koska $-2y^2$ termin kerroin on negatiivinen, paraabeli aukeaa vasemmalle.

y-akselin leikkauspisteessä $x = 0$.
$$0 = -2y^2 + 3y$$
$$2y^2 - 3y = 0$$
$$y(2y - 3) = 0$$
$$y = 0 \text{ tai } 2y - 3 = 0$$
$$2y = 3 \quad \| :2$$
$$y = \frac{3}{2}$$

Paraabeli leikkaa y-akselin pisteissä $(0, 0)$ ja $(0, \frac{3}{2})$.

x-akselin leikkauspisteessä $y = 0$.
$x = -2 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 = 0$.

Paraabeli leikkaa x-akselin pisteessä $(0, 0)$.

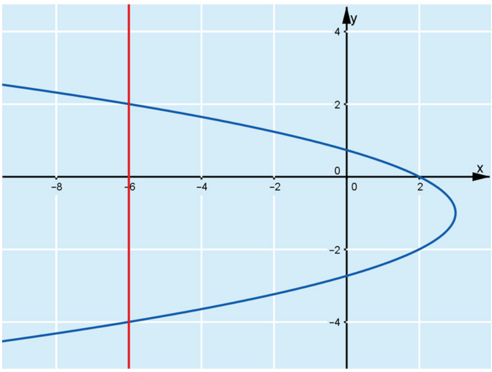
K18. **a)** Ratkaistaan yhtälöpari.

$$\begin{cases} x+6=0 \\ x=-y^2-2y+2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-6 \\ x=-y^2-2y+2 \end{cases}$$

$$-6=-y^2-2y+2$$
$$y^2+2y-8=0$$
$$y=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot1\cdot(-8)}}{2\cdot1}=\frac{-2\pm\sqrt{36}}{2}=\frac{-2\pm6}{2}$$
$$y=2 \quad \text{tai} \quad y=-4$$

Suoran kaikissa pisteissä $x=-6$, joten paraabelin ja suoran yhteiset pisteet ovat $(-6, 2)$ ja $(-6, -4)$.



b) Ratkaistaan yhtälöpari.

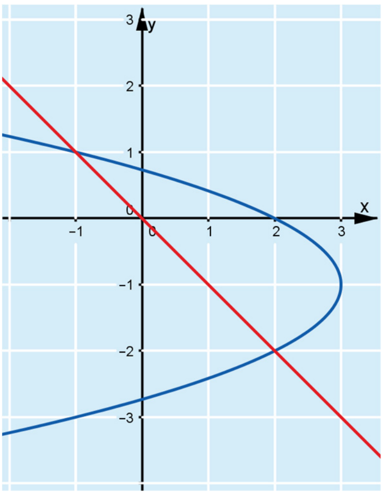
$$\begin{cases} x+y=0 \\ x=-y^2-2y+2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-y \\ x=-y^2-2y+2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -y &= -y^2-2y+2 \\ y^2+y-2 &= 0 \\ y &= \frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot(-2)}}{2\cdot 1} = \frac{-1\pm\sqrt{9}}{2} = \frac{-1\pm 3}{2} \\ y &= 1 \quad \text{tai} \quad y = -2 \end{aligned}$$

Kun $y = 1$, niin $x = -1$, joten yhteinen piste on $(-1, 1)$.

Kun $y = -2$, niin $x = -(-2) = 2$, joten yhteinen piste on $(2, -2)$.



K19. Koska paraabelin huippu on pisteessä (0, 2) ja johtosuora y-akselin suuntainen, sen yhtälö on huippumuodossa
$x - 0 = a(y - 2)^2$, eli $x = a(y - 2)^2$.

Sijoitetaan yhtälöön pisteen (−8, 0) koordinaatit.

$$-8 = a(0 - 2)^2$$
$$-8 = 4a \quad || : 4$$
$$a = -2$$

Paraabelin yhtälö on siis
$$x = -2(y - 2)^2$$
$$x = -2(y^2 - 4y + 4)$$
$$x = -2y^2 + 8y - 8.$$

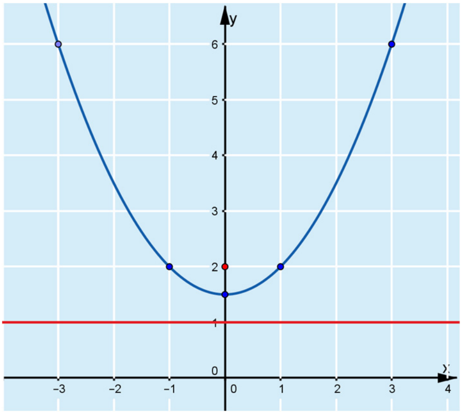
Tarkistetaan, onko piste (−2, 3) paraabelilla.

$$-2 = -2 \cdot 3^2 + 8 \cdot 3 - 8$$
$$-2 = -18 + 24 - 8$$
$$-2 = -2$$
tosi

Myös piste (−2, 3) on paraabelilla $x = -2y^2 + 8y - 8$.

K20. **a)** Paraabelin huippu on polttopisteen ja johtosuoran puolessa välissä eli pisteessä (0; 1,5). Kulkemalla polttopisteestä yhden ruudun sivulle, on myös johtosuorasta yhden yksikön päässä.

Hyödyntämällä Pythagoraan lausetta ja tietoa $3^2 + 4^2 = 5^2$, voi polttopisteestä etsiä pisteen, johon pääsee kulkeamalla kolme ruutua sivulle, neljä ylös. Silloin etäisyys on 5, joka on sama kuin etäisyys johtosuoralle. Näin saadaan paraabelilta viisi pistettä, joten sen voi hahmotella.



b) Tarkastellaan paraabelilla olevaa mielivaltaista pistettä (x, y). Lasketaan sen etäisyys pisteestä (0, 2) sekä suorasta $y = 1$. Lasketut etäisyydet ovat yhtä suuret, jolloin saadaan yhtälö. Etäisyydet ovat ei-negatiivisia, joten yhtälö voidaan korottaa puolittain neliöön.

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x-0)^2+(y-2)^2} &= |y-1| \\
\left(\sqrt{(x-0)^2+(y-2)^2}\right)^2 &= |y-1|^2 \\
(x-0)^2+(y-2)^2 &= (y-1)^2 \\
x^2+y^2-4y+4 &= y^2-2y+1 \\
-2y &= -x^2-3 \qquad \| :(-2) \\
y &= \frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Paraabelin yhtälö on $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}$.

Kokoavia tehtäviä

ILMAN TEKNISIÄ APUVÄLINEITÄ

1. A: Yhtälö on sellaisen ympyrän yhtälö, jonka keskipiste on (0, 0) ja säde 1. Oikea kuva on II.

B: Yhtälö on suoran $y = -x + 1$ yhtälö.
Oikea kuva on IV.

C: Yhtälö on alaspäin aukeavan paraabelin yhtälö $y = -x^2 + 1$.
Oikea kuva on I.

D: Yhtälö on vasemmalle aukeavan paraabelin yhtälö $x = -y^2 + 1$.
Oikea kuva on III.

2. **a)** Molempien suorien $y = 3x$ ja $3x - y + 1 = 0$, eli $y = 3x + 1$ kulmakerroin on 3, joten suorat ovat yhdensuuntaiset. Koska suorilla ei ole sama vakiotermi, kyseessä on eri suorat. Näin ollen suorat eivät leikkaa toisiaan.

b) Suoran $y = \frac{3}{2}x - 10$ kulmakerroin on $\frac{3}{2}$.

Kirjoitetaan suoran yhtälö $2x + 3y + 4 = 0$ ratkaistussa muodossa.

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 4 &= 0 \\ 3y &= -2x - 4 \quad \|:3 \\ y &= -\frac{2}{3}x - \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Kulmakerroin on $-\frac{2}{3}$.

Kulmakertoimien tulo on $-\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = -1$, joten suorat ovat kohtisuorassa.

Ratkaistaan suorien leikkauspiste.

Ratkaistaan leikkauspisteen y-koordinaatti sijoittamalla $x = 4$ suoran $2x + 3y + 4 = 0$ yhtälöön.

$$\begin{aligned} 2 \cdot 4 + 3y + 4 &= 0 \\ 8 + 3y + 4 &= 0 \\ 3y &= -12 \quad \|:3 \\ y &= -4 \end{aligned}$$

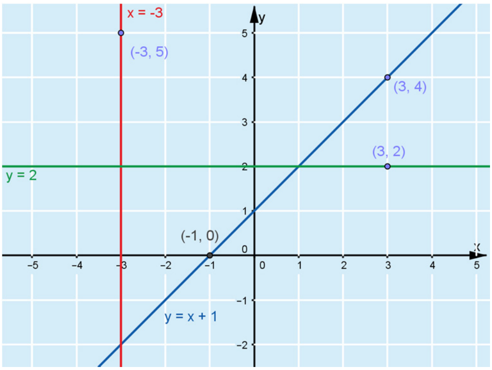
Suorat leikkaavat pisteessä $(4, -4)$.

3. **a)** Pisteiden (3, 4) ja (−1, 0) kautta kulkeva suoran kulmakerroin on
$k = \frac{0-4}{-1-3} = \frac{-4}{-4} = 1$ ja se kulkee pisteen $(x_0, y_0) = (3, 4)$ kautta.

Suoran yhtälö on
$y - 4 = 1(x - 3)$
$y = x + 1.$

Pisteen (−3, 5) kautta kulkevan y-akselin suuntaisen suoran yhtälö on
$x = -3.$

Pisteen (3, 2) kautta kulkevan x-akselin suuntaisen suoran yhtälö on
$y = 2.$



b) Koordinaattiakselien suuntaiset suorat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, joten kolmio on suorakulmainen ja suora kulma muodostuu suorien $x = -3$ ja $y = 2$ leikkauspisteeseen $(-3, 2)$.

Lasketaan suorien $y = x + 1$ ja $x = -3$ leikkauspiste sijoittamalla $x = -3$ suoran $y = x + 1$ yhtälöön.

$y = -3 + 1 = -2$

Kolmion toinen kärkipiste on $(-3, -2)$.

Ratkaistaan suorien $y = x + 1$ ja $y = 2$ leikkauspiste sijoittamalla $y = 2$ suoran $y = x + 1$ yhtälöön.

$2 = x + 1$
$x = 1$

Kolmion kolmas kärkipiste on $(1, 2)$.

Lasketaan kolmion sivujen pituudet.

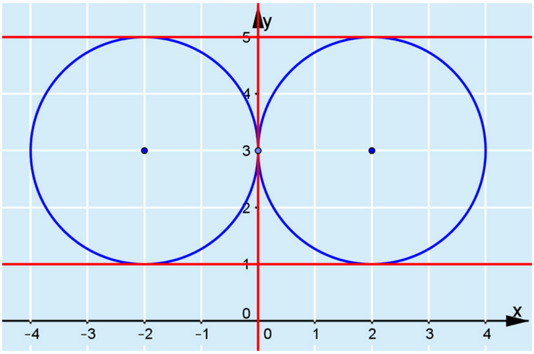
Pisteen $(-3, 2)$ etäisyys pisteestä $(-3, -2)$ saadaan y-koordinaattien erotuksena ja se on $|2 - (-2)| = |4| = 4$.

Pisteen $(-3, 2)$ etäisyys pisteestä $(1, 2)$ saadaan x-koordinaattien erotuksena ja se on $|-3 - 1| = |-4| = 4$.

Koska kolmio on suorakulmainen, sillä voi olla vain kaksi yhtä pitkää sivua, eli kateetit ovat yhtä pitkät.

Kolmio on tasakylkinen suorakulmainen kolmio.

4. Hahmotellaan tilanteesta kuva.



Ympyrän tangentin ovat yhdensuuntaiset, joten niiden etäisyys on ympyrän halkaisija. Ympyrän halkaisija on $5 - 1 = 4$, joten säde on 2. Ympyrän keskipiste on tangenttien $y = 5$ ja $y = 1$ puolivälissä, eli keskipisteen y−koordinaatti on 3.

Koska ympyrä sivuaa y-akselia, niin sen keskipiste on säteen etäisyydellä y-akselista, eli keskipisteen x −koordinaatti on 2 tai −2.

Keskipiste voi olla (2, 3) tai (−2, 3).

5. **a)** Suoran kulmakerroin on $k=\frac{0-4}{0-3}=\frac{4}{3}$ ja se kulkee origon kautta, eli vakiotermi $b = 0$.

Suoran yhtälö on $y=\frac{4}{3}x$.

b) Ympyrän säde on pisteen (3, 4) etäisyys origosta.

$$r=\sqrt{(4-0)^2+(3-0)^2}=\sqrt{25}=5$$

Ympyrän yhtälö on
$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 5^2$
$x^2 + y^2 = 25$.

c) Ylöspäin aukeavan paraabelin, jonka huippu on pisteessä (0, 0), yhtälö on
$y - 0 = a(x - 0)^2$
$y = ax^2$.

Sijoitetaan pisteen (3, 4) koordinaatit yhtälöön $y = ax^2$.

$4 = a \cdot 3^2$
$4 = 9a \quad || : 9$
$a=\frac{4}{9}$

Paraabelin yhtälö on $y=\frac{4}{9}x^2$.

6. Ympyrän keskipiste on halkaisijan keskipiste.

$$\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{8+2}{2}\right) = (1, 5)$$

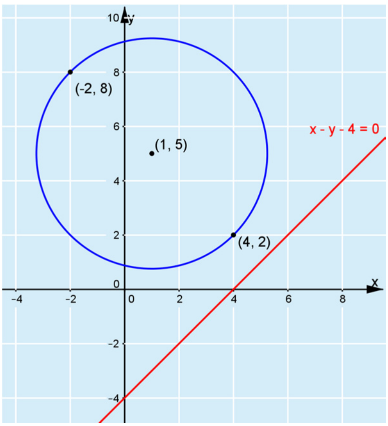
Säde on keskipisteen etäisyys kumpaan tahansa halkaisijan päätepisteeseen. Lasketaan keskipisteen etäisyys pisteestä (−2, 8).

$$r = \sqrt{(-2-1)^2 + (8-5)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$$

Ympyrän yhtälö on

$$(x - 1)^2 + (y - 5)^2 = \sqrt{18}^2$$
$$(x - 1)^2 + (y - 5)^2 = 18.$$

Hahmotellaan kuva tilanteesta. Suoran $x - y - 4 = 0$ yhtälö ratkaistussa muodossa on $y = x - 4$.



Lasketaan suoran $x - y - 4 = 0$ etäisyys keskipisteestä (1, 5).

$$\frac{|1\cdot1-1\cdot5-4|}{\sqrt{1^2+1^2}} \stackrel{\sqrt{2})}{=} \frac{|-8|}{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$$

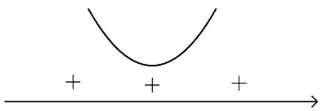
Koska suoran etäisyys ympyrän keskipisteestä on enemmän kuin säde ($\sqrt{18} = \sqrt{9\cdot2} = 3\sqrt{2}$), on suora ympyrän ulkopuolella.

Suoran etäisyys ympyrästä saadaan vähentämällä ympyrän säde keskipisteen etäisyydestä

$$4\sqrt{2} - \sqrt{18} = 4\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = \sqrt{2}.$$

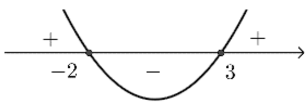
7. Merkitään etsittäviä lukuja kirjaimella x, jolloin saadaan epäyhtälö $|x^2 - x| > 6$, joka toteutuu, kun $x^2 - x < -6$ tai $x^2 - x > 6$. Ratkaistaan epäyhtälöt erikseen.

$$x^2 - x < -6$$
$$x^2 - x + 6 < 0$$
$$x^2 - x + 6 = 0$$
$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{-23}}{2}$$



Paraabelilla $y = x^2 - x + 6$ ei ole nollakohtia, joten ylöspäin aukeavana, se saa vain positiivia arvoja. Siis epäyhtälöllä $x^2 - x < -6$ ei ole ratkaisua.

$$x^2 - x > 6$$
$$x^2 - x - 6 > 0$$
$$x^2 - x - 6 = 0$$
$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$$
$$x = 3 \quad \text{tai} \quad x = -2$$



Epäyhtälön $x^2 - x > 6$ ratkaisut ovat $x < -2$ tai $x > 3$.

Lukujen, jotka ovat pienempiä kuin −2 tai suurempia kuin 3, etäisyys neliöstään on suurempi kuin 6.

8. Kirjoitetaan ympyrän yhtälö keskipistemuodossa.

$$
\begin{aligned}
x^2 + y^2 + 2x - 8y - 33 &= 0 \\
x^2 + 2x + \_\_ + y^2 - 8y + \_\_ &= 33 \\
x^2 + 2x + 1 + y^2 - 8y + 16 &= 33 + 1 + 16 \\
(x + 1)^2 + (y - 4)^2 &= 50
\end{aligned}
$$

Ympyrän keskipiste on $(-1, 4)$ ja säde $\sqrt{50}$.

Lasketaan pisteen $(4, -1)$ etäisyys keskipisteeseen

$$\sqrt{(4-(-1))^2 + (-1-4)^2} = \sqrt{50}$$

Etäisyys on sama kuin säde, joten piste on ympyrällä.

Keskipisteen $(-1, 4)$ ja sivuamispisteen $(4, -1)$ kautta kulkevan suoran kulmakerroin on $k = \frac{4-(-1)}{-1-4} = \frac{5}{-5} = -1$.

Koska tangentti on kohtisuorassa tätä suoraa vastaan, sen kulmakerroin on 1.

Tangentin yhtälö saadaan sijoittamalla kaavaan $y - y_0 = k(x - x_0)$ pisteeksi $(x_0, y_0) = (4, -1)$ ja $k = 1$.

$$
\begin{aligned}
y - (-1) &= 1(x - 4) \\
y + 1 &= x - 4 \\
y &= x - 5
\end{aligned}
$$

9. Pisteiden (−3, −4) ja (1, 1) kautta kulkevan suoran kulmakerroin $k=\frac{-4-1}{-3-1}=\frac{5}{4}$. Ympyrällä voi olla kaksi yhdensuuntaista tangenttia.

Tässä tapauksessa tangentit ovat muotoa $y=\frac{5}{4}x+b$ eli $5x - 4y + 4b = 0$.

Kirjoitetaan ympyrän yhtälö keskipistemuodossa.

$$
\begin{aligned}
x^2 + y^2 - 10x - 6y - 7 &= 0 \\
x^2 - 10x + \_\_ + y^2 - 6y + \_\_ &= 7 \\
x^2 - 10x + 25 + y^2 - 6y + 9 &= 7 + 25 + 9 \\
(x-5)^2 + (y-3)^2 &= 41
\end{aligned}
$$

Ympyrän keskipiste on (5, 3) ja säde $r=\sqrt{41}$.

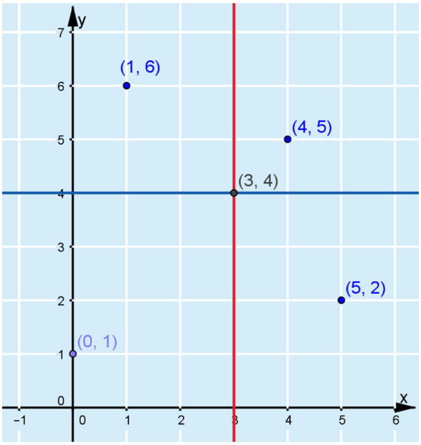
Ympyrän keskipisteen (5, 3) etäisyys tangentista $5x - 4y + 4b = 0$ on säde, joten

$$
\begin{aligned}
\frac{|5\cdot 5-4\cdot 3+4b|}{\sqrt{5^2+(-4)^2}} &= \sqrt{41} \\
\frac{|13+4b|}{\sqrt{41}} &= \sqrt{41} \quad \|\cdot\sqrt{41} \\
|13+4b| &= 41
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
13+4b &= 41 \qquad \text{tai} \qquad & 13+4b &= -41 \\
4b &= 28 \quad \|:4 & 4b &= -54 \quad \|:4 \\
b &= 7 & b &= -\frac{27}{2}.
\end{aligned}
$$

Tangenttien yhtälöt ovat $5x - 4y + 4 \cdot 7 = 0$, eli $5x - 4y + 28 = 0$ ja $5x - 4y + 4\cdot\left(-\frac{27}{2}\right) = 0$ eli $5x - 4y - 54 = 0$.

10. Esimerkiksi



Piste (x, y) on yhtä kaukana molemmista suorista $x = 3$ eli $x - 3 = 0$ ja $y = 4$, eli $y - 4 = 0$.

$$\frac{|1 \cdot x + 0 \cdot y - 3|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = \frac{|0 \cdot x + 1 \cdot y - 4|}{\sqrt{0^2 + 1^2}}$$

$$\frac{|x-3|}{\sqrt{1}} = \frac{|y-4|}{\sqrt{1}}$$

$$|x-3| = |y-4|$$

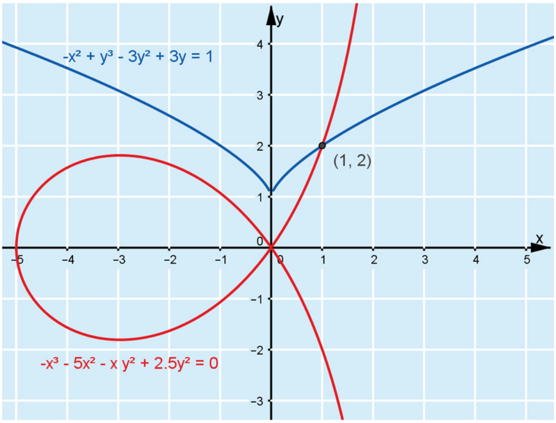
$$x - 3 = y - 4 \qquad \text{tai} \qquad x - 3 = -(y-4)$$

$$y = x + 1 \qquad\qquad y = -x + 7$$

Kaikista kysytyistä pisteistä muodostuvien suorien yhtälöt ovat $y = x + 1$ ja $y = -x + 7$.

APUVÄLINEET SALLITTU

11. Yhteinen piste näyttäisi olevan (1, 2).



Piste (1, 2) on molemmilla käyrillä, jos se toteuttaa molempien käyrien yhtälöt. Sijoitetaan yhteisen pisteen (1, 2) koordinaatit molempien käyrien yhtälöihin.

$$(y-1)^3 = x^2$$
$$(2-1)^3 = 1^2$$
$$1 = 1$$
tosi

$$y^2\left(\frac{5}{2}-x\right) = x^2(5+x)$$
$$2^2\left(\frac{5}{2}-1\right) = 1^2(5+1)$$
$$6 = 6$$
tosi

Piste on molemmilla käyrillä.

12. Suorien leikkauspiste saadaan yhtälöparin ratkaisuna.

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = 3x - 1 \end{cases}$$

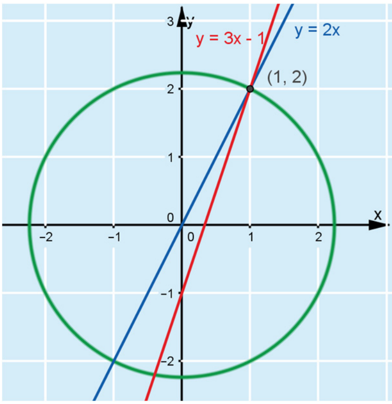
$x = 1$ ja $y = 2$, eli leikkauspiste on (1, 2).

Ympyrän $x^2 + y^2 = 5$ keskipiste on (0, 0) ja säde $r = \sqrt{5}$.

Lasketaan pisteen (1, 2) etäisyys pisteestä (0, 0).

$$\sqrt{(1-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{5}$$

Koska etäisyys on sama kuin säde, piste (1, 2) on ympyrällä.



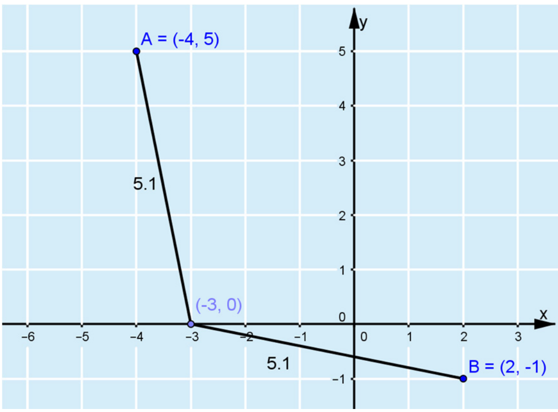
13. Kaikki x-akselin pisteet ovat muotoa $(x, 0)$. Lasketaan pisteen $(x, 0)$ etäisyys pisteisiin $A = (-4, 5)$ ja $B = (2, -1)$ Näiden etäisyyksien tulee olla yhtä suuret.

$$\sqrt{(x-(-4))^2+(0-5)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(0-(-1))^2}$$

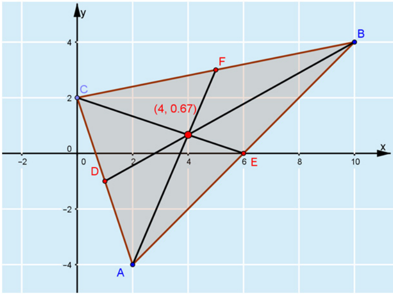
Koska yhtälön molemmat puolet ovat ei-negatiiviset, voidaan yhtälö korottaa puolittain neliöön.

$$\begin{aligned} x^2+8x+16+25 &= x^2-4x+4+1 \\ 12x &= -36 \quad \|:12 \\ x &= -3 \end{aligned}$$

Piste $(-3, 0)$ on yhtä etäällä pisteistä A ja B.



14. **a)** Piirretään kuva. Keskijana kulkee sivun keskipisteestä vastakkaiseen kärkeen. Merkitään kirjaimella D sivun AC keskipistettä, kirjaimella E sivun AB keskipistettä ja kirjaimella F sivun BC keskipistettä.



Määritetään keskijanojen leikkauspiste muodostamalla suorat EC ja DB ja määrittämällä niiden leikkauspiste.

Sivun AB keskipiste $E = \left(\frac{2+10}{2}, \frac{-4+4}{2}\right) = (6, 0)$.

Sivun AC keskipiste $D = \left(\frac{2+0}{2}, \frac{-4+2}{2}\right) = (1, -1)$.

Lasketaan suorien kulmakertoimet.

Janan EC suuntaisen suoran kulmakerroin $k = \frac{0-2}{6-0} = -\frac{1}{3}$.

Janan DB suuntaisen suoran kulmakerroin $k = \frac{-1-4}{1-10} = \frac{5}{9}$.

Vastaavien suorien yhtälöt.

$$y - 2 = -\frac{1}{3}(x-0) \qquad \text{ja} \qquad y-(-1) = \frac{5}{9}(x-1)$$

$$y = -\frac{1}{3}x + 2 \qquad\qquad y = \frac{5}{9}x - \frac{14}{9}$$

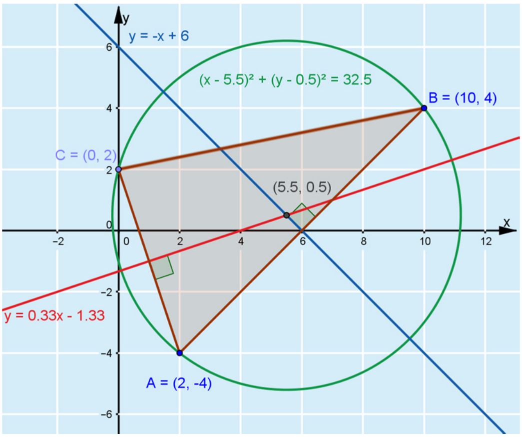
Ratkaistaan suorien leikkauspiste yhtälöparista.

$$\begin{cases} y = -\dfrac{1}{3}x + 2 \\ y = \dfrac{5}{9}x - \dfrac{14}{9} \end{cases}$$

$x = 4$ ja $y = \dfrac{2}{3}$.

Keskijanojen leikkauspiste on $\left(4, \dfrac{2}{3}\right)$.

b) Piirretään kuva. Kolmion ABC ympäri piirretyn ympyrän keskipiste on sivujen keskinormaalien leikkauspiste.



Sivun AC keskipiste on a-kohdan perusteella $D = (1, -1)$.

Sivun AC suuntaisen suoran kulmakerroin $k = \dfrac{-4-2}{2-0} = -3$, joten

keskinormaalin kulmakerroin $k = \dfrac{1}{3}$.

Näillä tiedoilla saadaan keskinormaalin yhtälö

$y - (-1) = \dfrac{1}{3}(x - 1)$ eli $y = \dfrac{1}{3}x - \dfrac{4}{3}$.

Sivun AB keskipiste on a-kohdan perusteella $E = (6, 0)$.

Sivun AB suuntaisen suoran kulmakerroin $k=\dfrac{-4-4}{2-10}=1$, joten keskinormaalin kulmakerroin $k=-1$.

Näillä tiedoilla saadaan keskinormaalin yhtälö
$y-0=-1(x-6)$ eli $y=-x+6$.

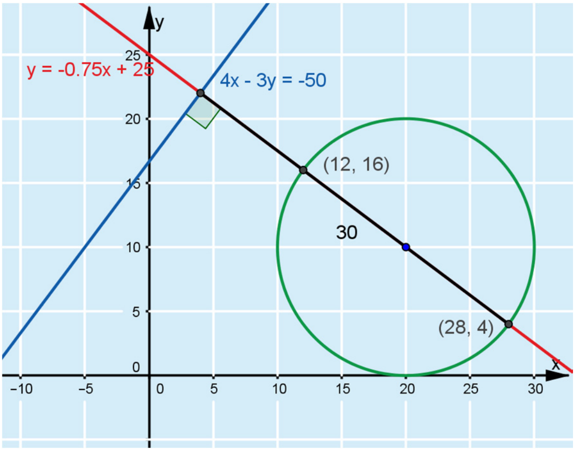
Keskinormaalien leikkauspiste voidaan ratkaista yhtälöparista.

$$\begin{cases} y=\dfrac{1}{3}x-\dfrac{4}{3} \\ y=-x+6 \end{cases}$$

$x=\dfrac{11}{2}=5\dfrac{1}{2}$ ja $y=\dfrac{1}{2}$.

Ympyrän keskipiste on $\left(5\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$.

15. Piirretään kuva.



Suurin etäisyys on pisteestä, joka on ympyrän keskipisteen kautta kulkevan suoran $4x - 3y + 50 = 0$ normaalin ja suoran $4x - 3y + 50 = 0$ leikkauspisteessä.

Kirjoitetaan ympyrän yhtälö keskipistemuodossa.

$$x^2 + y^2 - 40x - 20y + 400 = 0$$
$$(x - 20)^2 + (y - 10)^2 = 100$$

Ympyrän keskipiste on (20, 10) ja säde 10.

Suoran $4x - 3y + 50 = 0$, eli $y = \frac{4}{3}x + \frac{50}{3}$

kulmakerroin on $\frac{4}{3}$, joten sen normaalin kulmakerroin $-\frac{3}{4}$.

Normaali, joka kulkee ympyrän keskipisteen (20, 10) kautta on $y - 10 = -\frac{3}{4}(x - 20)$ eli $3x + 4y - 100 = 0$.

Normaalin $3x+4y-100=0$ ja ympyrän $(x-20)^2+(y-10)^2=100$ leikkauspisteet voidaan ratkaista yhtälöparista.

$$\begin{cases}3x+4y-100=0\\ x^2+y^2-40x-20y+400=0\end{cases}$$

$x=12$ ja $y=16$ tai
$x=28$ ja $y=4$

Leikkauspisteet ovat (12, 16) ja (28, 4).

Pisteen (12, 16) etäisyys suorasta $4x-3y+50=0$ on
$$\frac{|4\cdot 12-3\cdot 16+50|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=10\,.$$

Pisteen (28, 4) etäisyys suorasta $4x-3y+50=0$ on
$$\frac{|4\cdot 28-3\cdot 4+50|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=30\,.$$

Suurin etäisyys on pisteestä (28, 4), josta etäisyys suoraan on 30.

16. Kirjoitetaan ympyrän yhtälö keskipistemuodossa.

$$
\begin{aligned}
x^2 + y^2 + 2ax - 4y + 2a^2 + 3 &= 0 \\
x^2 + 2xa \underline{\qquad} + y^2 - 2 \cdot y \cdot 2 \underline{\qquad} &= -2a^2 - 3 \\
x^2 + 2xa + a^2 + y^2 - 4y + 4 &= -2a^2 - 3 + a^2 + 4 \\
(x + a)^2 + (y - 2)^2 &= 1 - a^2
\end{aligned}
$$

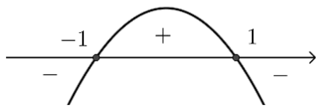
Yhtälö esittää ympyrää, kun $1 - a^2 > 0$.

Ratkaistaan epäyhtälö kuvaajan avulla.

Nollakohdat:

$$
\begin{aligned}
1 - a^2 &= 0 \\
a^2 &= 1 \\
a &= 1 \text{ tai } a = -1
\end{aligned}
$$

Kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli.



Epäyhtälön ratkaisu on $-1 < a < 1$.

Yhtälö esittää ympyrää, kun $-1 < a < 1$.

Ympyrä säde on $\sqrt{1-a^2}$. Ympyrän pinta-ala on

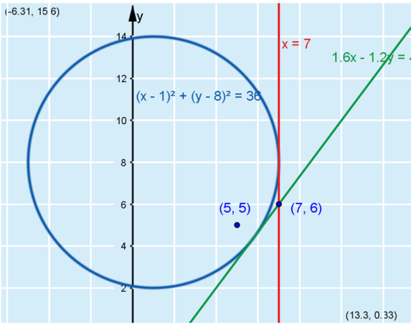
$$A = \pi r^2 = \pi\left(\sqrt{1-a^2}\right)^2 = \pi(1-a^2).$$

Ympyrän pinta-ala on suurin, kun $1 - a^2$ saa suurimman arvonsa. Tämä tapahtuu alaspäin aukeavan kuvaajaparaabelin huipussa.

Huippu on nollakohtien $a = -1$ ja $a = 1$ puolivälissä, eli kun $a = 0$.

Pinta-ala on suurin, kun $a = 0$.

17. Piirretään kuva a- ja b-kohdan tilanteista.



a) Kirjoitetaan ensin ympyrän yhtälö keskipistemuodossa.

$$x^2 + y^2 - 2x - 16y + 29 = 0$$
$$(x - 1)^2 + (y - 8)^2 = 36$$

Ympyrän keskipiste on (1, 8) ja säde 6.

Pisteen $A = (5, 5)$ etäisyys keskipisteestä (1, 8) on $\sqrt{(5-1)^2 + (5-8)^2} = \sqrt{25} = 5 < 6$, eli piste A on ympyrän sisällä. Sen kautta ei voi piirtää yhtään tangenttia ympyrälle.

b) Pisteen $A = (7, 6)$ etäisyys ympyrän keskipisteeseen $(1, 8)$ on $\sqrt{(7-1)^2+(6-8)^2} = \sqrt{40} > 6$ eli piste A on ympyrän ulkopuolella. Sen kautta voi piirtää kaksi tangenttia ympyrälle.

Tangentin, joka kulkee pisteen $(7, 6)$ kautta, ja joka ei ole pystysuora, yhtälö on muotoa $y - 6 = k(x - 7)$, eli $kx - y - 7k + 6 = 0$.

Tangentin etäisyys ympyrän keskipisteestä $(1, 8)$ on ympyrän säde 6.

Muodostetaan yhtälö, josta ratkaistaan k.

$$\frac{|k\cdot 1 - 1\cdot 8 - 7k + 6|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}} = 6$$

$$k = \frac{4}{3}$$

Tangentin yhtälö on

$$y - 6 = \frac{4}{3}(x-7)$$

$$y = \frac{4}{3}x - \frac{10}{3}.$$

Tämän lisäksi ympyrällä voi olla pystysuora tangentti. Koska tangentti kulkee pisteen $(7, 6)$ kautta, ainoa mahdollinen pystysuora tangentti on suora $x = 7$. Tämän suoran etäisyys keskipisteestä $(1, 8)$ on x-koordinaattien etäisyys $|7 - 1| = 6$, joka on sama kuin ympyrän säde. Suora $x = 7$ on siis ympyrän tangentti.

Pisteen $(0, 6)$ kautta kulkevat tangentit ovat $y = \frac{4}{3}x - \frac{10}{3}$ ja $x = 7$.

18. Suora on ympyrän sekantti, jos suoralla ja ympyrällä on kaksi leikkauspistettä.

Suoran ja ympyrän leikkauspisteet saadaan selville yhtälöparilla

$$\begin{cases} y = ax + 1 \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

$x = 0$ ja $y = 1$ tai $x = \dfrac{-2a}{1+a^2}$ ja $y = 1$.

Riippumatta vakion a arvosta suoralla ja ympyrällä on ainakin yksi leikkauspiste (0, 1). Jos myös $\dfrac{-2a}{1+a^2} = 0$, niin leikkauspisteitä on vain yksi.

$$\begin{aligned} \frac{-2a}{1+a^2} &= 0 \\ -2a &= 0 \\ a &= 0. \end{aligned}$$

Jos $a = 0$, on suora ympyrän tangentti, eikä sekantti. Suoraparven kaikki suorat eivät siis ole ympyrän sekantteja.

19. $x + ay - 2 = 0$:
Jos $a = 0$, niin kyseessä on suora $x = 2$.

Jos $a \neq 0$ suoran yhtälö voidaan kirjoittaa muodossa $y = -\frac{1}{a}x + \frac{2}{a}$.

Suoran kulmakerroin on $-\frac{1}{a}$.

$ax - y + 1 = 0$:
Jos $a = 0$, niin kyseessä on suora $y = 1$.

Jos $a \neq 0$ suoran yhtälö voidaan kirjoittaa muodossa $y = ax + 1$, josta kulmakerroin on a.

Jos $a = 0$, niin toinen suora on $x = 2$ ja toinen $y = 1$. Suorat ovat kohtisuorassa.

Jos $a \neq 0$, kulmakertoimien tulo $-\frac{1}{a} \cdot a = -1$, eli suorat ovat kohtisuorassa.

Suorat ovat siis kohtisuorassa kaikilla vakion a arvoilla.

Mikäli suorat rajaavat x-akselin kanssa kolmion, on kolmio aina suorakulmainen, koska suorat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

Suorat $x = 2$ ja $y = 1$ eivät voi rajata x-akselin kanssa kolmiota. Siis vakion a on oltava eri suuri kuin nolla.

Jos suorat leikkaavat x-akselilla, ei voi syntyä kolmiota, jonka yhtenä sivuna olisi x-akseli.

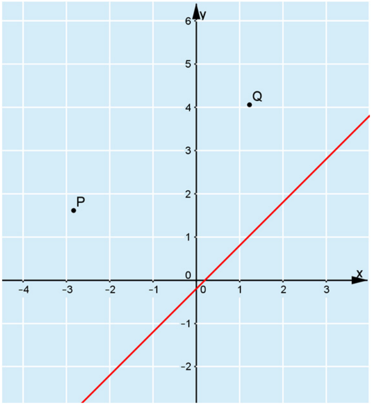
Suora $x + ay - 2 = 0$ leikkaa x-akselin pisteessä $(2, 0)$ ja

suora $ax - y + 1 = 0$ pisteessä $(-\frac{1}{a}, 0)$. Eli kolmiota ei synny, jos

$$-\frac{1}{a} = 2$$
$$a = -\frac{1}{2}.$$

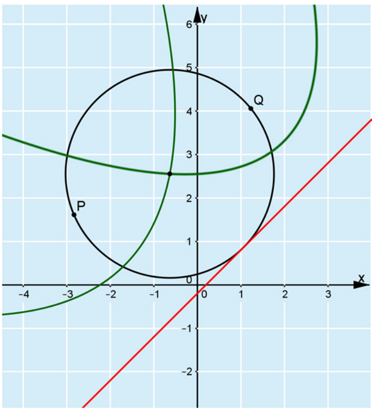
Suorat ja x-akseli rajaavat suorakulmaisen kolmion, jonka hypotenuusa on x-akselilla aina muulloin paitsi jos $a = 0$ tai $a = -\frac{1}{2}$.

20. Piirretään suora ja kaksi pistettä P ja Q samalle puolella suoraa.



Koska ympyrän tulee kulkea pisteiden P ja Q kautta ja sivuta suoraa, sen keskipisteen tulee olla yhtä etäällä pisteistä P ja Q sekä suorasta.

Paraabelin määritelmän mukaan paraabelilla ovat ne pisteet, jotka ovat yhtä etäällä sekä polttopisteestä että johtosuorasta. Piirretään siis kaksi paraabelia, joilla on molemmilla on piirretty suora johtosuorana ja toisella piste P ja toisella piste Q polttopisteenä.



Ensimmäisellä paraabelilla ovat ne pisteet, joiden etäisyys pisteestä P on sama kuin etäisyys suorasta. Toisella paraabelilla ovat ne pisteet, joiden etäisyys pisteestä Q on sama kuin etäisyys suorasta.

Paraabelien leikkauspiste on molemmilla paraabeleilla, joten sen etäisyys suorasta on sama kuin sen etäisyys pisteestä P ja pisteestä Q.

Piirretään ympyrä, jonka keskipiste on paraabelien leikkauspiste, ja joka kulkee pisteen P kautta.