Kertaus

K1. **a)**

$$\lim_{x\to-3}\frac{2x^2-18}{x+3}=\lim_{x\to-3}\frac{2(x^2-9)}{x+3}=\lim_{x\to-3}\frac{2(x-3)\cancel{(x+3)}}{\cancel{(x+3)}}$$
$$=\lim_{x\to-3}(2x-6)=2\cdot(-3)-6=-12$$

b) $$\lim_{x\to-3}\frac{2x+6}{x-3}=\frac{2\cdot(-3)+6}{-3-3}=\frac{0}{-6}=0$$

K2. **a)** $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-8}{x-2}, & \text{kun } x<2\\ 10-x, & \text{kun } x>2\end{cases}$$

$$\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2+}(10-x)=10-2=8$$

b) $$f(x)=\frac{3x^2-9x+6}{x-2},\ x\neq2$$

$$\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2+}\frac{3x^2-9x+6}{x-2}=\lim_{x\to2+}\frac{3\cancel{(x-2)}(x-1)}{\cancel{(x-2)}}$$
$$=\lim_{x\to2+}(3x-3)=3\cdot2-3=3$$

K3. **a)** Epätosi

Funktion raja-arvo voi olla myös eri suuri kuin funktion arvo kohdassa a. Funktiolla ei edes tarvitse olla arvoa kohdassa a, vaikka sillä olisi raja-arvo tässä kohdassa.

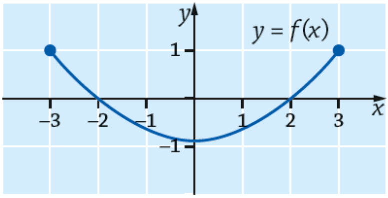
b) Epätosi

Toispuoliset raja-arvot voivat olla eri suuret. Silloin funktiolla ei ole raja-arvoa kohdassa tarkastelukohdassa.

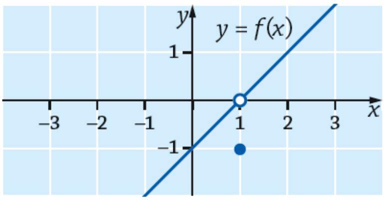
c) Tosi

Jos funktiolla on raja-arvo, täytyy toispuolisten raja-arvojen olla yhtä suuret.

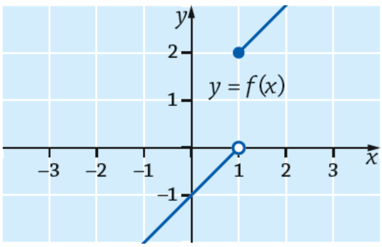
K4. **a)** Esimerkiksi:



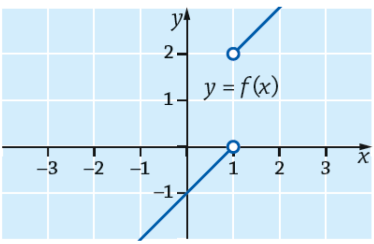
b) Esimerkiksi:



c) Esimerkiksi:



d) Esimerkiksi:



K5. **a)** Lasketaan funktion arvo ja toispuoliset raja-arvot kohdassa $x = 2$.

$f(2) = -1$

$$\lim_{x\to 2-}(0{,}5x^2 - 1) = 0{,}5\cdot 2^2 - 1 = 1$$
$$\lim_{x\to 2+}(0{,}5x^2 - 1) = 0{,}5\cdot 2^2 - 1 = 1$$

Funktion raja-arvo kohdassa $x = 2$ on 1.

Funktio ei ole jatkuva kohdassa $x = 2$, koska funktion arvo ja raja-arvo ovat eri suuret.

b) $f(2) = -0{,}5\cdot 2^2 + 2\cdot 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2-}(0{,}5x^2 - 1) = 0{,}5\cdot 2^2 - 1 = 1$$
$$\lim_{x\to 2+} f(x) = \lim_{x\to 2+}(-0{,}5x^2 + 2x - \frac{3}{2}) = -0{,}5\cdot 2^2 + 2\cdot 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

Funktiolla ei ole raja-arvoa kohdassa $x = 2$.

Funktio ei ole jatkuva kohdassa $x = 2$.

c) $f(2) = 0{,}5 \cdot 2^2 - 1 = 1$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}(0{,}5x^2 - 1) = 0{,}5\cdot 2^2 - 1 = 1$$

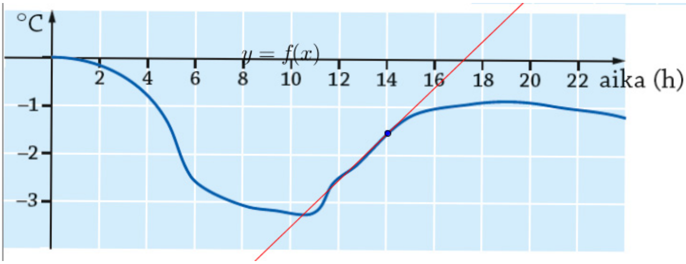
Funktion arvo ja raja-arvo ovat samat, joten funktio on jatkuva kohdassa $x = 2$.

d) Jatkuvuutta kohdassa $x = 2$ ei voida tutkia, koska funktio ei ole määritelty tässä kohdassa.

K6. **a)** Koska funktio on jatkuva kohdassa $x = 1$, raja-arvo on $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$.

b) Raja-arvosta ei voida sanoa mitään. Raja-arvo voi olla olemassa, tai sitä ei ole olemassa.

K7. **a)**



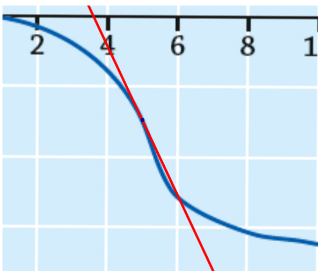
Muutosnopeus on tangentin kulmakerroin kohdassa t =14.
Piirretään tangentti kohtaan t = 14. Määritetään tangentille kulmakerroin.

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1,5}{3} = 0,5$$

Lämpötilan muutos ajanhetkellä t = 14 oli noin 0,5 °C/h.

b) Lämpötila laskee hetkellisesti nopeimmin kohdassa, jossa tangentti on jyrkin laskeva. Piirretään kuvaajalle tangentti kohtaan, jossa kuvaaja laskee jyrkimmin.

Piirretään tangentti kohtaan t = 5.



Määritetään tangentille kulmakerroin.

$$k = \frac{-2}{2} = -1$$

Lämpötila laski hetkellisesti nopeimmin klo 5. Tällöin lämpötilan muutosnopeus on noin –1 °C/h.

K8. Määritetään funktion $h(x) = x^2 - 2x + 1$ erotusosamäärän raja-arvo kohdassa $x = 3$.

$$h'(3) = \lim_{x \to 3} \frac{h(x) - h(3)}{x-3} = \lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 2x + 1 - (3^2 - 2 \cdot 3 + 1)}{x-3} = \lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 2x + 1 - 4}{x-3}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x-3} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 3} \frac{(\cancel{x-3})(x+1)}{\cancel{x-3}} = \lim_{x \to 3}(x+1) = 3 + 1 = 4$$

K9. $$f(x) = -2x^3 + 1 - \frac{6}{x} + \frac{3}{x^2} = -2x^3 + 1 - 6x^{-1} + 3x^{-2},\ x \neq 0$$

a) Muodostetaan derivaattafunktio.

$$f'(x) = -2 \cdot 3x^2 + 0 - 6 \cdot (-1)x^{-2} + 3 \cdot (-2)x^{-3}$$
$$= -6x^2 + 6x^{-2} - 6x^{-3}$$
$$= -6x^2 + \frac{6}{x^2} - \frac{6}{x^3}$$

b) Funktion derivaatta kohdassa $x = 3$ on

$$f'(3) = -6 \cdot 3^2 + \frac{6}{3^2} - \frac{6}{3^3}$$
$$= -6 \cdot 9 + \frac{6}{9} - \frac{6}{27} = -53\frac{5}{9}$$

K10. Derivoidaan funktio $h(x) = \dfrac{3x-2}{x^2+1}$

$$h'(x) = \frac{3(x^2+1) - (3x-2) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{3x^2 + 3 - 6x^2 + 4x}{(x^2+1)^2} = \frac{-3x^2 + 4x + 3}{(x^2+1)^2}$$

Lasketaan derivaatat kohdissa $x = 2$ ja $x = 3$.

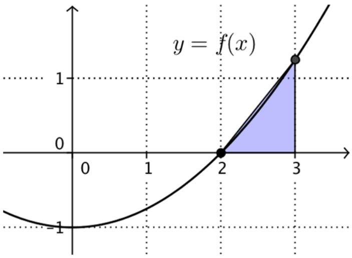
$$h'(2) = \frac{-3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 3}{(2^2+1)^2} = \frac{-12+11}{25} = -\frac{1}{25}$$

$$h'(3) = \frac{-3 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 + 3}{(3^2+1)^2} = \frac{-27+15}{100} = -\frac{12}{100}^{(4} = -\frac{3}{25}$$

Koska $-\dfrac{3}{25} < -\dfrac{1}{25}$, niin kohtaan $x = 3$ piirretty tangentti laskee jyrkemmin.

K11. **a)** Funktion $f(x)=\frac{1}{4}x^2-1$ keskimääräinen muutosnopeus välillä [2, 3] on

$$\frac{f(3)-f(2)}{3-2}=\frac{\frac{1}{4}\cdot 3^2-1-(\frac{1}{4}\cdot 2^2-1)}{3-2}=\frac{9}{4}-1-1+1=\frac{5}{4}=1\frac{1}{4}$$

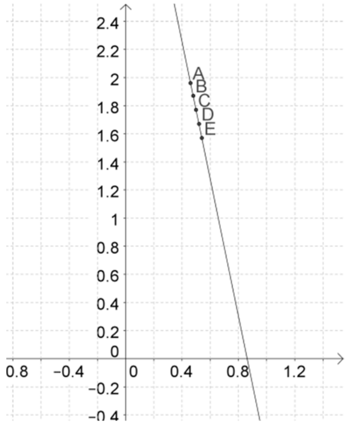


b) Hetkellinen muutosnopeus erotusosamäärän raja-arvona.

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{4}x^2-1-(\frac{1}{4}\cdot 2^2-1)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{4}x^2-1}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{4}(x^2-4)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{4}\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}}=\frac{1}{4}(2+2)=1$$

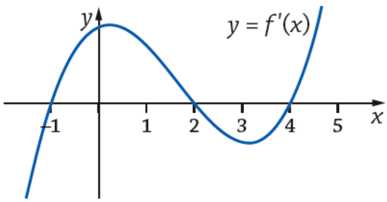
K12. Kun piirretään pisteet koordinaatistoon, havaitaan, että ne sijaitsevat likimain samalla suoralla. Tällöin korkeuden muutosnopeus eli kappaleen nopeus v voidaan laskea esimerkiksi hetkien 0,48 s ja 0,52 s välillä. Merkitään t on aika ja h on korkeus.



$$v = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{1,67 - 1,87}{0,52 - 0,48} = \frac{-0,20}{0,04} = -\frac{20}{4} = -5$$

Kappaleen nopeus ajan hetkellä t = 0,50 s on noin 5 m/s alaspäin.

K13.



Hahmotellaan derivaatan kuvaajan avulla funktion kulkukaavio.

	-1	2	4	
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	↘	↗	↘	↗

Paikallinen maksimikohta on $x = 2$ ja paikalliset minimikohdat ovat $x = -1$ ja $x = 4$.

K14. **a)** $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 72x + 8$

Tutkitaan funktion kulkua kulkukaavion avulla.

Lasketaan derivaatan nollakohdat.

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 72$$

$6x^2 - 6x - 72 = 0$
$x = -3$ tai $x = 4$

Tehdään kulkukaavio:

		-3		4	
$f'(x)$	$+$		$-$		$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

Funktiolla on paikallinen maksimiarvo
$f(-3) = 2 \cdot (-3)^3 - 3 \cdot (-3)^2 - 72 \cdot (-3) = 143$ ja
paikallinen minimiarvo $f(4) = 2 \cdot 4^3 - 3 \cdot 4^2 - 72 \cdot 4 = -200$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x + 1}, x \neq -1$

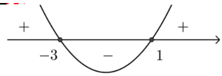
$$f'(x) = \frac{2x(x+1) - (x^2+3) \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{2x^2 + 2x - x^2 - 3}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2},\ x \neq -1$$

Koska derivaatan lausekkeen nimittäjä on positiivinen, kun $x \neq -1$, se ei vaikuta derivaatan merkkiin.

$x^2 + 2x - 3 = 0$
$x = 1$ tai $x = -3$

Tehdään kulkukaavio:

		-3		-1		1	
$x^2 + 2x - 3$	$+$		$-$		$-$		$+$
$f'(x)$	$+$		$-$		$-$		$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$



Funktiolla on paikallinen maksimiarvo $f(-3) = \frac{(-3)^2 + 3}{-3+1} = \frac{12}{-2} = -6$ ja

paikallinen minimiarvo $f(1) = \frac{1^2 + 3}{1+1} = \frac{4}{2} = 2.$

K15. Jatkuva funktio $f(x) = x^5 - 20x^2$ saa suurimman ja pienimmän arvonsa suljetulla välillä joko välin päätepisteissä tai välille [–1, 3] kuuluvissa derivaatan nollakohdissa.

Välin päätepisteet:

$f(-1) = (-1)^5 - 20 \cdot (-1)^2 = -1 - 20 = -21$

$f(3) = 3^5 - 20 \cdot 3^2 = 243 - 180 = 63$

Derivaatan nollakohdat:

$f'(x) = 5x^4 - 20 \cdot 2x = 5x^4 - 40x = 5x(x^3 - 8)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 5x(x^3 - 8) &= 0 \\ 5x = 0 \text{ tai } x^3 - 8 &= 0 \\ x = 0 \qquad\qquad x &= 2 \end{aligned}$$

Molemmat derivaatan nollakohdat kuuluvat suljetulle välille.
Sijoitetaan x:n arvot alkuperäiseen funktioon.

$f(0) = 0^5 - 20 \cdot 0^2 = 0$

$f(2) = 2^5 - 20 \cdot 2^2 = 32 - 80 = -48$

Välin päätepisteissä ja derivaatan nollakohdissa saaduista funktion arvoista valitaan suurin ja pienin arvo.

Suurin arvo on $f(3) = 63$ ja pienin arvo on $f(2) = -48$.

Tutkitaan funktion kulkua koko reaalilukujoukossa kulkukaavion avulla.

		0		2	
$5x$	$-$		$+$		$+$
$x^3 - 8$	$-$		$-$		$+$
$f'(x)$	$+$		$-$		$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

Funktion arvo pienenee, kun muuttuja x pienenee kohdan $x = 0$ vasemmalla puolella. Esimerkiksi kohdassa $x = -2$ funktion arvo $f(-2) = -112$ on pienempi kuin paikallinen minimiarvo $f(2) = -48$, joten funktio saa minimiarvoaan pienempiä arvoja. Vastaavasti funktion arvo kasvaa, kun muuttujan arvo kasvaa kohdan $x = 2$ oikealla puolella.

Esimerkiksi $f(4) = 704$ on maksimiarvoa $f(3) = 63$ suurempi. Funktiolla ei ole pienintä eikä suurinta arvoa.

Välillä [–1, 3] funktion suurin arvo on $f(3) = 63$ ja pienin arvo on $f(2) = –48$. Funktiolla f ei ole suurinta eikä pienintä arvoa.

K16. Funktio $f(x) = 27x^5 - 90x^4 + 80x^3$ on monotoninen, jos se on kasvava tai vähenevä eli sen derivaatta on kaikilla x:n arvoilla positiivinen tai negatiivinen. Derivaatta voi olla nolla yksittäisissä kohdissa.

Derivoidaan funktio f.

$$f'(x) = 27 \cdot 5x^4 - 90 \cdot 4x^3 + 80 \cdot 3x^2 = 135x^4 - 360x^3 + 240x^2$$

$$f'(x) = 0$$
$$135x^4 - 360x^3 + 240x^2 = 0$$
$$5x^2(27x^2 - 72x + 48) = 0$$
$$5x^2 = 0 \text{ tai } 27x^2 - 72x + 48 = 0$$
$$x = 0 \qquad\qquad x = \frac{4}{3}$$

Lauseke $5x^2 \geq 0$ kaikilla muuttuja x arvoilla, joten derivaatan merkkiin vaikuttaa vain lausekkeen $27x^2 - 72x + 48$ merkki.
Lausekkeen $27x^2 - 72x + 48$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, jolla on vain yksi nollakohta, joten myös $27x^2 - 72x + 48 \geq 0$ kaikilla muuttujan x arvoilla.

Koska derivaatta on positiivinen lukuun ottamatta yksittäisiä kohtia $x = 0$ ja $x = \frac{4}{3}$, joissa derivaatta on nolla, on funktio kaikkialla kasvava ja siten monotoninen.

K17. Funktio $f(x) = 3x^5 + 2x^3 + 2$ on polynomifunktio ja siten jatkuva koko reaalilukujoukossa.

Koska $f(-1) = -3 < 0$ ja $f(0) = 2 > 0$, on välillä $]-1, 0[$ Bolzanon lauseen mukaan ainakin yksi nollakohta.

Tarkastellaan funktion f kulkua sen derivaatan avulla.
$f'(x) = 15x^4 + 6x^2$

Parilliset potenssit x^2 ja x^4 ovat aina positiivisia, paitsi kohdassa $x = 0$ ne saavat arvon nolla. Tällöin $15x^4 + 6x^2 \geq 0$ kaikilla muuttujan x arvoilla eli derivaatta on aina ei-negatiivinen. Tällä perusteella funktio f on kasvava kaikkialla.

Kasvavalla, jatkuvalla funktiolla voi olla korkeintaan yksi nollakohta.

Funktiolla f on siis täsmälleen yksi nollakohta.

Kokoavia tehtäviä

ILMAN TEKNISIÄ APUVÄLINEITÄ

1. **a)** Funktion $f(x)=\frac{x^2-1}{x+1}$ määrittelyehto on $x+1\neq 0$, eli $x\neq -1$.

Ratkaistaan funktion nollakohdat.

$$f(x)=0$$

$$\frac{x^2-1}{x+1}=0, \text{ kun}$$

$$x^2-1=0$$

$$x^2=1$$

$$x=\pm 1$$

Määrittelyehdon toteuttaa vain $x=1$.

Vastaus: Määrittelyehto on $x\neq -1$ ja nollakohta $x=1$.

b) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}\geq 0$, määrittelyehto $x\neq 0$ ja $x\neq 1$.

$$^{x-1)}\frac{1}{x}+{}^{x)}\frac{1}{x-1}\geq 0$$

$$\frac{x-1}{x(x-1)}+\frac{x}{x(x-1)}\geq 0$$

$$\frac{2x-1}{x(x-1)}\geq 0$$

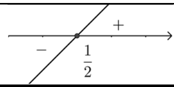
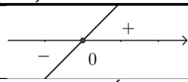
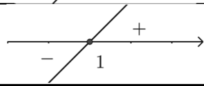
Nollakohta:

$$\frac{2x-1}{x(x-1)}=0, \text{ kun}$$

$$2x-1=0$$

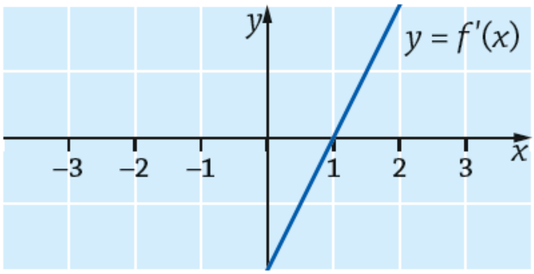
$$x=\frac{1}{2}.$$

Tehdään merkkikaavio.

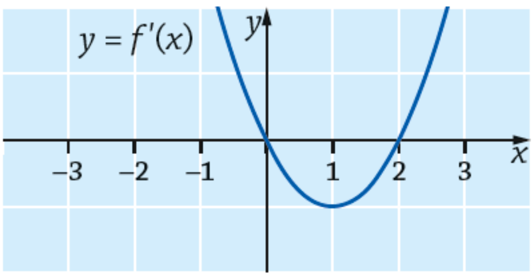
	0	$\frac{1}{2}$	1		
$2x-1$	$-$	$-$	$+$	$+$	
x	$-$	$+$	$+$	$+$	
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$+$	
osamäärä	$-$	$+$	$-$	$+$	

$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}\geq 0$, kun $0<x\leq \frac{1}{2}$ tai $x>1$

2. **a)**



b)



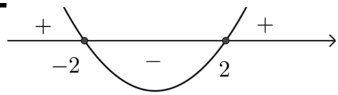
3. **a)** Tutkitaan funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x$ kulkua kulkukaavion avulla.

$f'(x) = x^2 - 4$

Derivaatan nollakohdat.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ x^2 - 4 &= 0 \\ x^2 &= 4 \\ x &= \pm 2 \end{aligned}$$

	-2	2	
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$



Funktio on kasvava väleillä $]-\infty, -2]$ ja $[2, \infty[$ ja vähenevä välillä $[-2, 2]$.

b) Funktiolla f on paikallinen maksimiarvo

$$f(-2) = \frac{1}{3}\cdot(-2)^3 - 4\cdot(-2) = -\frac{8}{3} + 8 = -\frac{8}{3} + \frac{24}{3} = \frac{16}{3}$$

ja paikallinen minimiarvo

$$f(2) = \frac{1}{3}\cdot 2^3 - 4\cdot 2 = \frac{8}{3} - 8 = \frac{8}{3} - \frac{24}{3} = -\frac{16}{3}.$$

4. **a)** $f(x)=x^3-\frac{1}{x^3},\ x\neq 0.$

Lasketaan *x*-akselin leikkauspisteet eli funktion *f* nollakohdat.

$$x^3-\frac{1}{x^3}=0$$

$$\frac{x^6}{x^3}-\frac{1}{x^3}=0$$

$$\frac{x^6-1}{x^3}=0$$

$$x^6-1=0$$

$$x^6=1 \quad \|\sqrt[6]{\ }$$

$$x=\pm 1$$

Leikkauspisteet ovat (−1, 0) ja (1, 0).

b) Määritetään kuvaajan ja *x*-akselin leikkauspisteisiin asetettujen tangenttisuorien yhtälöt.
Tangentin kulmakerroin on derivaatan arvo sivuamispisteessä.

$$f(x)=x^3-\frac{1}{x^3}=x^3-x^{-3}$$

$$f'(x)=3x^2-(-3)x^{-4}=3x^2+\frac{3}{x^4}$$

$$f'(-1)=3\cdot(-1)^2+\frac{3}{(-1)^4}=6=k_1$$

$$f'(1)=3\cdot 1^2+\frac{3}{1^4}=6=k_2$$

Pisteen (−1, 0) kautta kulkevan tangentin yhtälö:

$$y-y_0=k(x-x_0)$$

$$y-0=6(x-(-1))$$

$$y=6(x+1)$$

$$y=6x+6$$

Pisteen (1, 0) kautta kulkevan tangentin yhtälö:

$$y-0=6(x-1)$$
$$y=6x-6$$

5. **a)** Tosi

Bolzanon lauseen perusteella funktiolla on ainakin yksi nollakohta välillä]1, 2[. Koska f' on kasvava voi nollakohtia olla enintään yksi, joten funktiolla f' on täsmälleen yksi nollakohta.

b) Tosi

Koska f' on kasvava ja $f'(2) > 0$, on derivaatta positiivinen kun $x > 2$. Funktio on kasvava kun $x \geq 2$, joten $f(3) < f(4)$.

c) Tosi

Koska derivaattafunktion merkki vaihtuu negatiivisesta positiiviseksi jossakin välin kohdassa, on funktiolla tässä kohdassa paikallinen minimi. Funktio on vähenevä ennen tätä kohtaa ja kasvava sen jälkeen, joten funktio saavuttaa pienimmän arvonsa tässä kohdassa.

6. Funktion $f(x)=x^4-x^3$ arvojen laskeminen ilman apuvälineitä on työlästä, joten pyritään selvittämään suuruusjärjestys funktion kulkua tutkimalla.

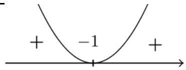
Laaditaan funktion kulkukaavio derivaatan avulla.
$f'(x)=4x^3-3x^2$

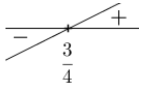
Määritetään derivaatan nollakohdat.

$$\begin{aligned} f'(x)&=0 \\ 4x^3-3x^2&=0 \\ x^2(4x-3)&=0 \\ x^2&=0 \text{ tai } 4x-3=0 \\ x&=0 \qquad\qquad x=\frac{3}{4} \end{aligned}$$

Tehdään kulkukaavio.

		0	$\frac{3}{4}$
x^2	$+$	$+$	$+$
$4x-3$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$





Koska $\frac{6}{5}=\frac{12}{10}=1,2$, niin tarkastellaan väliä $x \geq \frac{3}{4}$. Tällä välillä funktio f on kasvava. Koska $1,2345 > \frac{6}{5}$ on $f(1,2345) > f(\frac{6}{5})$.

7. **a)** Funktiolla on raja-arvo kohdassa $x = -1$, jos sen vasemman- ja oikean puoleiset raja-arvot ovat yhtä suuret.

$$f(x) = \begin{cases} ax+1, & \text{kun } x < -1 \\ x^2-4, & \text{kun } x > -1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -1-} (ax+1) = a(-1)+1 = -a+1$$

$$\lim_{x \to -1+} (x^2-4) = (-1)^2 - 4 = -3$$

Toispuolisten raja-arvojen tulee olla yhtä suuret.

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -1-} (ax+1) &= \lim_{x \to -1+} (x^2-4) \\ -a+1 &= -3 \\ a &= 4 \end{aligned}$$

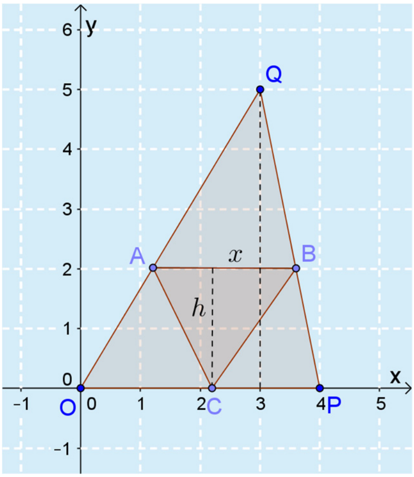
b)

$$f(x)=\frac{2x+a}{x+1},\ x\neq -1$$

Jotta funktiolla olisi raja-arvo kohdassa $x = -1$, pitää nimittäjän nollakohdan $x = -1$ olla myös osoittajan nollakohta, jotta lauseke $x + 1$ voitaisiin supistaa pois nimittäjästä.

$$\begin{aligned}2\cdot(-1)+a&=0\\ a&=2\end{aligned}$$

8.



Kolmion OPQ kannan pituus on pisteiden O ja P etäisyys 4, ja korkeus on Pisteen Q ja x-akselin etäisyys 5.

Merkitään $AB = x$ ja h = kolmion ABC korkeus.

Kolmiot OPQ ja ABQ ovat yhdenmuotoisia, sillä kulmat QOP ja QAB ovat samankohtaisia kulmia ja $AB \parallel OC$, joten kulmat QOP ja QAB ovat yhtä suuria ja kulma AQB on molemmissa sama.

Yhdenmuotoisuuden perusteella saadaan näistä kahdesta kolmiosta muodostettua verranto.

$$\frac{x}{4}=\frac{5-h}{5}$$
$$5x=4(5-h)$$
$$5x=20-4h$$
$$4h=20-5x$$
$$h=\frac{20-5x}{4}$$

Kolmion ABC pinta-alaa kuvaava funktio on

$$A(x)=\frac{x\cdot h}{2}=\frac{x\left(\frac{20-5x}{4}\right)}{2}=\frac{20x-5x^2}{4}:2=\frac{5}{2}x-\frac{5}{8}x^2,\ 0\le x\le 4.$$

Ratkaistaan funktion A suurin arvo tutkimalla sen kulkua.

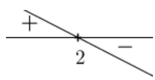
$$A'(x)=\frac{5}{2}-\frac{5}{8}\cdot 2x=\frac{5}{2}-\frac{5}{4}x$$

$A'(x)=0$, kun

$$\frac{5}{2}-\frac{5}{4}x=0 \quad \|\cdot 4$$
$$10-5x=0$$
$$x=2$$

Tehdään kulkukaavio.

		2	
$A'(x)$	+		–
$A(x)$	↗		↘



Pinta-ala saa suurimman arvonsa, kun sivun AB pituus x on 2.

9. **a)** Muutetaan epäyhtälö muotoon $f(x) \le 0$.

$$\frac{2x}{x^2+2} \le 1$$

$$\frac{2x}{x^2+2} - {}^{x^2+2)}1 \le 0,$$

$$\frac{-x^2+2x-2}{x^2+2} \le 0$$

Funktion $f(x) = \dfrac{-x^2+2x-2}{x^2+2}$ lausekkeen osoittaja on aina negatiivinen, koska
$-x^2 + 2x - 2 = -x^2 + 2x - 1 - 1 = -(x - 1)^2 - 1 -((x - 1)^2 + 1) < 0.$

Nimittäjä $x^2 + 2$ on aina positiivinen, joten funktion lauseke saa vain negatiivisia arvoja ja siten epäyhtälö on aina tosi.

b) $x^6 + 2 > 2x^4$
$x^6 - 2x^4 + 2 > 0$, joten tutkitaan funktiota
$f(x) = x^6 - 2x^4 + 2$

Tutkitaan funktion f kulkua derivaatan avulla.

$f'(x) = 6x^5 - 8x^3 = 2x^3(3x^2 - 4)$

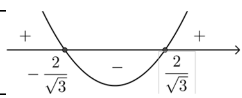
Derivaatan nollakohdat ovat

$x = 0$ ja $x = \pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Tehdään kulkukaavio.

$-\frac{2}{\sqrt{3}}$ 0 $\frac{2}{\sqrt{3}}$

$3x^2 - 4$	+	−	−	+
$2x^3$	−	−	+	+
$f'(x)$	−	+	−	+
$f(x)$	↘	↗	↘	↗



Lasketaan funktion paikalliset minimiarvot.

$f(-\frac{2}{\sqrt{3}})=\frac{22}{27}>0$ ja

$$f(\frac{2}{\sqrt{3}})=(\frac{2}{\sqrt{3}})^6-2(\frac{2}{\sqrt{3}})^4+2=\frac{64}{27}-\frac{32}{9}+2=\frac{64-96+54}{27}$$

$$=\frac{114-96}{27}=\frac{22}{27}>0$$

Koska minimiarvot ovat positiivisia, ja funktio on jatkuva, saa funktio vain positiivisia arvoja. Vastaava epäyhtälö on siten aina tosi, kuten myös alkuperäinenkin.

10. Käyrät $y = x^4$ ja $y = -x^2$ kulkevat origon kautta ja funktion f kuvaaja kulkee käyrien välissä, joten $f(0) = 0$.

Funktion f erotusosamäärä kohdassa 0 on

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{f(x)}{x}.$$

Kuvan mukaan kaikilla x (ainakin nollan läheisyydessä) on voimassa $-x^2 \le f(x) \le x^4$.

Kun $x > 0$, jakamalla edellisen kaksoisepäyhtälön jokainen jäsen luvulla x saadaan erotusosamäärälle arvio

$$\frac{-x^2}{x}\le\frac{f(x)}{x}\le\frac{x^4}{x}$$

$$-x\le\frac{f(x)}{x}\le x^3.$$

Koska sekä $-x$ että x^3 lähestyvät nollaa, kun x lähestyy nollaa positiiviselta puolelta, niin myös välissä oleva erotusosamäärä lähestyy nollaa.

Kun $x < 0$, epäyhtälömerkit kääntyvät vastakkaisiksi, kun kaksoisepäyhtälön jokainen jäsen jaetaan luvulla x. Erotusosamäärälle saadaan arvio

$$\frac{-x^2}{x} \geq \frac{f(x)}{x} \geq \frac{x^4}{x}$$
$$-x \geq \frac{f(x)}{x} \geq x^3.$$

Tästä voidaan päätellä, että erotusosamäärä lähestyy nollaa, kun x lähestyy nollaa negatiiviselta puolelta.

Siis $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ eli $f'(0) = 0$.

APUVÄLINEET SALLITTU

11. Opiskelija on ensin muodostanut derivaattafunktion ja laskenut sen nollakohdat. Tämän jälkeen hän on laskenut funktion arvot derivaatan nollakohdissa. Tuloksen perusteella hän on päätellyt, että kohdassa $x = 0$ on paikallinen maksimi ja kohdassa $x = 4$ paikallinen minimi, ilmeisesti funktion arvoja vertaamalla. Opiskelija ei ole kuitenkaan varmistanut derivaatan merkkiä tarkastelemalla, että ovatko kohdat ylipäätään ääriarvokohtia ja jos ovat, niin onko kyseessä maksimi vai minimi.

Korjaus:
Derivaattafunktion $f'(x) = 12x^3 - 48x^2 = 12x^2(x - 4)$ merkkiin vaikuttaa vain tekijän $x - 4$ merkki, koska $12x^2 \geq 0$ kaikilla x:n arvoilla.

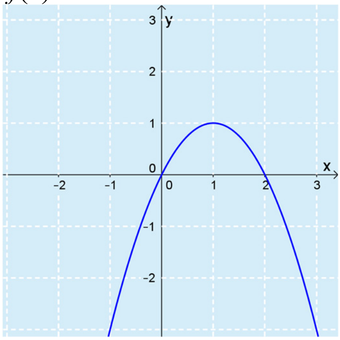
		0	4
$x - 4$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	↘	↘	↗

Kohta $x = 4$ on paikallinen minimikohta kulkukaavion perustella.

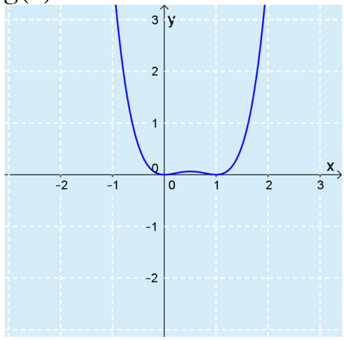
Vastaus: Funktiolla on paikallinen minimiarvo $f(4) = -256$.

12. Tarkastellaan funktioiden kulkua piirtämällä kuvaajat.

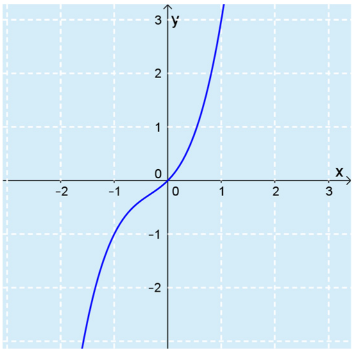
$f(x) = -x^2 + 2x$



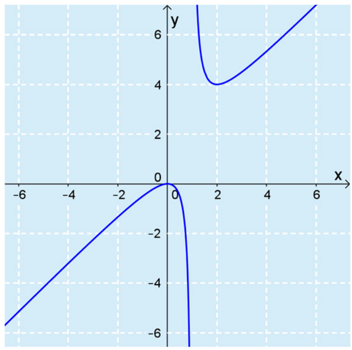
$g(x) = x^4 - 2x^3 + x^2$



$h(x) = x^3 + x^2 + x$



$p(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$



Vastaus: f: C ja D, g: B, C ja D, h: A ja C, p: mikään ei sovi.

13. **a)** Lasketaan funktion raja-arvo kohdassa $x = 5$.

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 121, & \text{kun } x < 5 \\ \dfrac{x^3 + x^2}{x^4 - x^2}, & \text{kun } x > 5 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 5-} f(x) = \lim_{x \to 5-} (x^3 - 121) = 4$$

$$\lim_{x \to 5+} f(x) = \lim_{x \to 5+} \frac{x^3 + x^2}{x^4 - x^2} = \frac{1}{4}$$

Toispuoliset raja-arvot eivät ole yhtä suuret. Funktiolla ei ole raja-arvoa kohdassa $x = 5$, joten sitä ei saada jatkuvaksi tässä kohdassa.

b) $f(x)=\dfrac{x-5}{50-2x^2}$

$\lim\limits_{x\to 5} f(x)=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-5}{50-2x^2}=-\dfrac{1}{20}$

Jotta funktio olisi jatkuva, tulee funktion arvon kohdassa $x = 5$ olla sama kuin sen raja-arvo. Valitaan $f(5)=-\dfrac{1}{20}$.

14. Tutkitaan funktion $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{3}{2}x^2+6$ kulkua kulkukaavion avulla.

Derivoidaan funktio.

$f'(x) = x^2 - 3x$

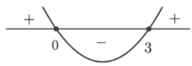
Derivaatan nollakohdat:

$x^2 - 3x = 0$

$x = 0$ ja $x = 3$.

Tehdään kulkukaavio.

	0		3	
$f'(x)$	+	–	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$



Funktio f on jatkuva funktio ja se on kasvava väleillä $]-\infty, 0]$ ja $[3, \infty[$ sekä vähenevä välillä $[0, 3]$. Näistä jokaisella välillä voi olla korkeintaan yksi nollakohta.

Lasketaan funktion ääriarvot.

Maksimiarvo $f(0) = 6$.

Minimiarvo $f(3) = \dfrac{3}{2}$.

Koska $f(0)$ ja $f(3)$ ovat positiivisia, ei välillä $0 \le x \le 3$ ole nollakohtaa. Koska funktio on kasvava, kun $x \ge 3$, ja $f(3) > 0$ ei funktiolla voi olla nollakohtaa kun $x \ge 3$.

Koska $f(-2) = -\frac{8}{3} < 0$ ja $f(0) = 6 > 0$ on funktiolla f Bolzanon lauseen mukaan ainakin yksi nollakohta välillä $]-2, 0[$. Koska funktio f on kasvava, kun $x \leq 0$, on funktiolla täsmälleen yksi nollakohta tällä välillä.

Funktiolla on täsmälleen yksi nollakohta.

15. Muutosnopeuden ilmoittaa derivaattafunktion arvo. Derivoidaan funktiot f ja g.

$$f(x) = \frac{2}{1-x},\ x \neq 1$$

$$f'(x) = \frac{0 \cdot (1-x) - 2 \cdot (-1)}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2},\ x \neq 1$$

$$g(x) = 2x$$

$$g'(x) = 2$$

Tutkitaan, milloin funktion f muutosnopeus on suurempi kuin funktion g muutosnopeus.

$$f'(x) > g'(x)$$

$$\frac{2}{(1-x)^2} > 2$$

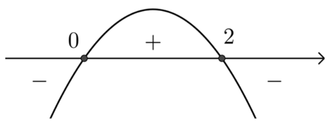
$$\frac{2}{(1-x)^2} - 2 > 0$$

$$\frac{4x - 2x^2}{(1-x)^2} > 0$$

Lausekkeen nimittäjä $(1-x)^2 > 0$, kun $x \neq 1$. Rationaalilausekkeen merkki riippuu vain osoittajan $4x - 2x^2$ merkistä.
Lasketaan nollakohdat:

$$4x - 2x^2 = 0$$

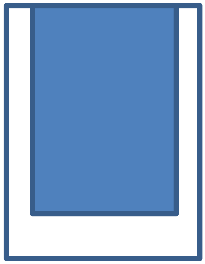
$$x = 0 \text{ tai } x = 2$$



Päätellään lausekkeen merkki kuvaajasta.

$\frac{4x-2x^2}{(1-x)^2}>0$ eli $f'(x)>g'(x)$, kun $0<x<2$ ja $x\neq 1$.

16. Kuvan leveys on $x-5-5=x-10$.
Kuvan korkeus on $y-15$.



Kuvan pinta-ala on $A=(x-10)(y-15)$

Ratkaistaan toinen muuttuja y, kun tiedetään,
että julisteen pinta-alan tulee olla 1 m^2 = 10 000 cm^2.

Koko julisteen pinta-ala on $x \cdot y$.

$$x\cdot y=10\,000$$
$$y=\frac{10\,000}{x}, x\neq 0$$

Sijoitetaan y:n arvo pinta-alan lausekkeeseen.

$$\begin{aligned}A(x)&=(x-10)(y-15)\\&=(x-10)(\frac{10000}{x}-15)\\&=10150-15x-\frac{100000}{x}\\&=10150-15x-100000x^{-1},\ x>0\end{aligned}$$

Määritetään pinta-alafunktion A suurin arvo.

Tutkitaan pinta-alafunktiota kulkukaavion avulla.

$$A'(x)=-15+100000x^{-2},\ x>0$$
$$A'(x)=0$$
$$x=\pm\sqrt{\frac{20000}{3}}=\pm\frac{100\sqrt{6}}{3}\approx 81{,}65$$

Tehdään kulkukaavio testikohtien avulla.
$A(1) = \ldots > 0$, $A(82) = \ldots < 0$

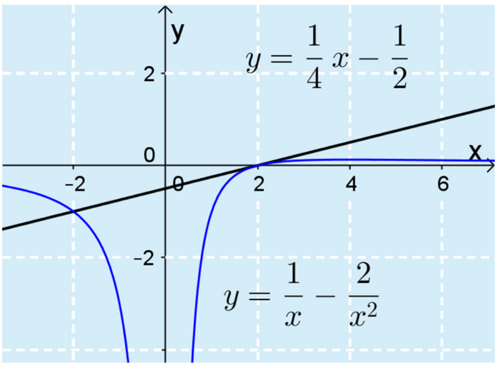
		0		$\frac{100\sqrt{6}}{3}$	
$A'(x)$			$+$		$-$
$A(x)$			$\nearrow$		$\searrow$

Pinta-alafunktio saa suurimman arvonsa, kun leveys $x = \frac{100\sqrt{6}}{3} \approx 81,65$.

Tällöin $y = \frac{10\,000}{\frac{100\sqrt{6}}{3}} = 50\sqrt{6} \approx 122,47$.

Julisteen leveys on 82 cm ja korkeus 122 cm.

17. Piirretään kuvaaja.



Suora $x - 4y - 2 = 0$ eli $y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$ kulkee käyrän $y = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}$ yläpuolella, kun

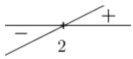
$$\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}>\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}$$
$$\frac{x^3-2x^2-4x+8}{x^2}>0$$
$$\frac{(x^2-4)(x-2)}{x^2}>0$$

Lausekkeen nimittäjä x^2 on aina positiivinen, kun $x \neq 0$, joten lausekkeen merkkiin vaikuttaa vain osoittajan merkki.
Lasketaan nollakohdat:

$$(x^2-4)(x-2)=0$$
$$x^2-4=0 \text{ tai } x-2=0$$
$$x=\pm 2 \qquad\qquad x=2$$

Tehdään merkkikaavio.

		-2	2
x^2-4	$+$	$-$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$+$
$\frac{(x^2-4)(x-2)}{x^2}$	$-$	$+$	$+$



$\frac{(x^2-4)(x-2)}{x^2}>0$ eli $\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}>\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}$, kun $x>-2$ ja $x \neq 2$.
Suoran ja käyrän leikkauskohdat ovat $x = -2$ ja $x = 2$. Vastaavat y-koordinaatit ovat $y=\frac{1}{4}\cdot(-2)-\frac{1}{2}=-1$ ja $y=\frac{1}{4}\cdot 2-\frac{1}{2}=0$.
Leikkauspisteet ovat $(-2, -1)$ ja $(2, 0)$.

Pisteessä $(2, 0)$ suora on käyrän tangentti eli suora ja käyrä sivuavat toisiaan tässä pisteessä. Pisteessä $(-2, -1)$ käyrä ja suora leikkaavat toisensa.

18. Kolmannen asteen polynomifunktio voidaan kirjoittaa muodossa $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$.

Sijoitetaan tunnetut arvot funktion lausekkeeseen.

$f(-1) = -a + b - c + d = 3$
$f(1) = a + b + c + d = -1$

Lisäksi tiedetään, että funktiolla f on paikalliset ääriarvokohdat $x = -1$ ja $x = 1$. Paikalliset ääriarvokohdat ovat derivaattafunktion nollakohtia eli $f'(1) = 0$ ja $f'(-1) = 0$.

Derivaattafunktio on $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

$f'(1) = 3a + 2b + c = 0$
$f'(-1) = 3a - 2b + c = 0$

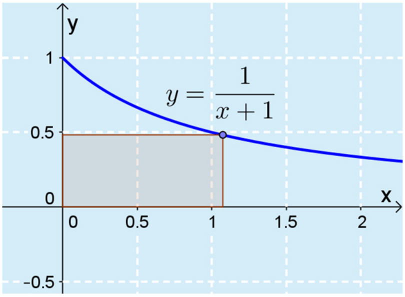
Ratkaistaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} -a + b - c + d = 3 \\ a + b + c + d = -1 \\ 3a + 2b + c = 0 \\ 3a - 2b + c = 0 \end{cases}$$

josta saadaan
$a = 1$, $b = 0$, $c = -3$ ja $d = 1$.

Funktion lauseke on $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

19. Piirretään kuva.



Käyrällä olevan pisteen koordinaatit ovat $(x, \frac{1}{x+1})$.

Suorakulmion toisen sivun leveys on x ja korkeus $\frac{1}{x+1}$, $x > 0$.

Lasketaan suorakulmion piiri.

$$p = {}^{x+1)} 2x + 2 \cdot \frac{1}{x+1} = \frac{2x(x+1)+2}{x+1} = \frac{2x^2+2x+2}{x+1} = \frac{2(x^2+x+1)}{x+1}$$

Lasketaan suorakulmion pinta-ala.

$$A = x \cdot \frac{1}{x+1}$$

Määritetään piirin ja pinta-alan suhde.

$$f(x) = \frac{p}{A} = \frac{\frac{2(x^2+x+1)}{x+1}}{\frac{x}{x+1}} = \frac{2(x^2+x+1)}{\cancel{x+1}} \cdot \frac{\cancel{x+1}}{x} = 2x + 2 + \frac{2}{x}$$

Tutkitaan funktion f kulkua kulkukaavion avulla.

$$f'(x) = 2 - \frac{2}{x^2} = \frac{2x^2-2}{x^2} = 0$$

Derivaattafunktion lausekkeen nimittäjä on aina positiivinen, kun $x > 0$.
Riittää tutkia osoittajan merkkiä.

$$2x^2-2=0$$
$$x=\pm 1$$

Tehdään kulkukaavio.

		0	1
$2x^2-2$		$-$	
$f'(x)$		$-$	$+$
$f(x)$		↘	↗

Kulkukaavion perusteella $f(1)$ on pienin arvo.

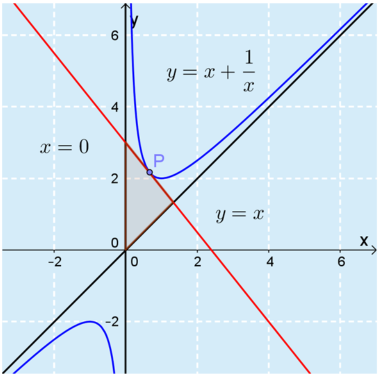
$f(1)=2\cdot 1+2+\dfrac{2}{1}=6$.

Piirin ja pinta-alan ja suhde on 6, eli 6 : 1.

20. **a)** Koska lauseketta $y=x+\dfrac{1}{x}$ ei ole määritelty kun $x = 0$, ei sillä ja suoralla $x = 0$ voi olla yhteisiä pisteitä.

Yhtälö $x+\dfrac{1}{x}=x$ yksinkertaistuu yhtälöksi $\dfrac{1}{x}=0$, joka on epätosi kaikilla luvuilla. Käyrä ei siis voi leikata kumpaakaan asymptooteistaan.

b) Piirretään kuva.



Merkitään pisteen P koordinaatteja $(a, b) = (a, a + \frac{1}{a}) = (a, \frac{a^2+1}{a})$.

Asymptootit ovat $x = 0$ ja $y = x$.
Näiden leikkauspiste on origo eli (0, 0).

Kolmion kanta on tangentin ja y-akselin leikkauskohdan y-koordinaatin etäisyys origosta.
Kolmion korkeus tangentin ja suoran $y = x$ leikkauskohdan etäisyys origosta.

Muodostetaan tangentin yhtälö.

Tangentin kulmakerroin on derivaatan arvo pisteessä P.

$y = x + \frac{1}{x} = x + x^{-1}$.

$D(x + x^{-1}) = 1 - x^{-2} = 1 - \frac{1}{x^2}$

kun $x = a,\ k = 1 - \frac{1}{a^2} = \frac{a^2 - 1}{a^2}$

Määritetään pisteeseen $P = (a, \dfrac{a^2+1}{a})$ piirrettävän tangentin yhtälö:

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

$$y - (\frac{a^2+1}{a}) = k(x - a)$$

$$y - (\frac{a^2+1}{a}) = \frac{a^2-1}{a^2}(x - a)$$

$$y = \frac{a^2-1}{a^2}x - \frac{a^2-1}{a} + \frac{a^2+1}{a}$$

$$y = \frac{a^2-1}{a^2}x + \frac{2}{a}$$

Kolmion kanta on $\left|\dfrac{2}{a}\right|$.

Suorien $y = \dfrac{a^2-1}{a^2}x + \dfrac{2}{a}$ ja $y = x$ leikkauskohta on

$$\frac{a^2-1}{a^2}x + \frac{2}{a} = x$$

$$x = 2a.$$

Kolmion korkeus on $|2a|$.

Kolmion ala on $A = \dfrac{1}{2} \cdot \left|\dfrac{2}{a}\right| |2a| = \dfrac{1}{2} \cdot \left|\dfrac{4a}{a}\right| = \dfrac{1}{2} \cdot 4 = 2$.

Näin huomataan, että kolmion ala ei riipu pisteen P valinnasta.