Kertaus

K1. **a)** $\sin 130° = 0{,}77$

b) $\cos(-130°) = \cos 130° = -0{,}64$

c) $\sin 50° = \sin(180° - 50°) = \sin 130° = 0{,}77$

d) $\tan 310° = \tan(310° - 180°) = \tan 130° = -1{,}19$

e) $\cos 490° = \cos(490° - 360°) = \cos 130° = -0{,}64$

f) $\sin 230° = \sin(230° - 360°) = \sin(-130°) = -\sin 130° = -0{,}77$

K2. **a)** $\sin\frac{7\pi}{2} = \sin(3\frac{1}{2}\pi) = \sin(\frac{3\pi}{2} + 2\pi) = \sin\frac{3\pi}{2} = -1$

b) $\cos\frac{7\pi}{3} = \cos(2\frac{1}{3}\pi) = \cos(\frac{\pi}{3} + 2\pi) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

c) $\tan 3\pi = \tan(0 + 3 \cdot \pi) = \tan 0 = 0$

d) $\cos(-100\pi) = \cos(0 - 50 \cdot 2\pi) = \cos 0 = 1$

e) $\sin(-\frac{19\pi}{4}) = \sin(-4\frac{3}{4}\pi) = \sin(-\frac{3\pi}{4} - 4\pi) = \sin(-\frac{3\pi}{4}) = -\sin(\frac{3\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

f) $\tan(\frac{5\pi}{4}) = \tan(1\frac{1}{4}\pi) = \tan(\frac{\pi}{4} + \pi) = \tan(\frac{\pi}{4}) = 1$

K3. **a)** Tangentti on sinin ja kosinin suhde, joten

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha \quad \| \cdot \cos\alpha \neq 0$$

$$\sin\alpha = \tan\alpha \cdot \cos\alpha \quad \|: \tan\alpha \neq 0$$

$$\cos\alpha = \frac{\sin\alpha}{\tan\alpha}$$

$$\cos\alpha = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{4}{3}} = -\frac{4}{5} : \frac{4}{3} = -\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} = -\frac{3}{5}$$

b) Käytetään kaavaa $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$$

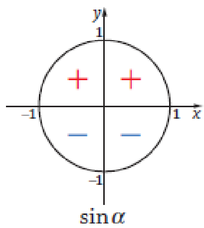
$$\sin^2\alpha = 1 - (-\frac{1}{3})^2$$

$$\sin^2\alpha = 1 - \frac{1}{9}$$

$$(\sin\alpha)^2 = \frac{8}{9}$$

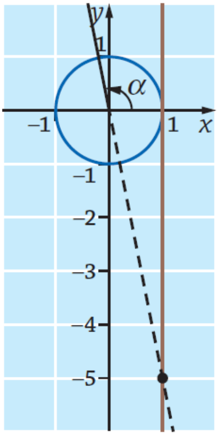
$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad \text{tai} \quad \sin\alpha = -\sqrt{\frac{8}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Koska kulma α on kolmannessa neljänneksessä, on sinin arvo negatiivinen, eli $\sin\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.



$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}{-\frac{1}{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} : \frac{1}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{1} = 2\sqrt{2}$$

K4. **a)**



b)

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -5 \quad \| \cdot \cos\alpha$$

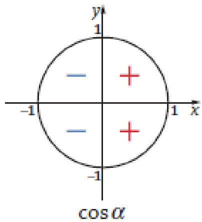
$$\sin\alpha = -5\cos\alpha$$

$$\begin{aligned}
\sin^2\alpha + \cos^2\alpha &= 1 \\
(-5\cos\alpha)^2 + \cos^2\alpha &= 1 \\
25\cos^2\alpha + \cos^2\alpha &= 1 \\
26\cos^2\alpha &= 1 \\
\cos^2\alpha &= \frac{1}{26} \\
\cos\alpha &= \sqrt{\frac{1}{26}} \quad \text{tai} \quad \cos\alpha = -\sqrt{\frac{1}{26}}
\end{aligned}$$

Koska kulma on tylppä, on kosini negatiivinen,

eli $\cos\alpha = -\sqrt{\frac{1}{26}} = -\frac{1}{\sqrt{26}}$.

$$\sin\alpha = -5\cos\alpha = -5\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{26}}\right) = \frac{5}{\sqrt{26}}$$



K5. **a)** Taulukosta saadaan yksi ratkaisu: $x = \dfrac{\pi}{3}$.

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi \quad \text{tai} \quad x = \pi - \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi,\ n \in \mathbb{Z}$$

b) Taulukosta saadaan yksi ratkaisu: $x = \dfrac{2\pi}{3}$.

$$\cos x = -0{,}5$$

$$x = \frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi \quad \text{tai} \quad x = -\frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi,\ n \in \mathbb{Z}$$

c) Taulukosta saadaan yksi ratkaisu: $x = \dfrac{3\pi}{8}$.

$$\tan x = \sqrt{2} + 1$$

$$x = \frac{3\pi}{8} + n \cdot \pi,\ n \in \mathbb{Z}$$

K6. **a)** Ohjelmalla saadaan yksi ratkaisu: $x = 53{,}13\ldots°$.

$\sin x = 0{,}8$

$x = 53{,}13\ldots° + n \cdot 360°$ tai $x = 180° - 53{,}13\ldots° + n \cdot 360°$

$x \approx 53° + n \cdot 360°$ $\quad$ $x \approx 127° + n \cdot 360°,\ n \in \mathbb{Z}$.

b) Kulmat, joilla on sama sini kuin kulmalla 39° ovat $39° + n \cdot 360°$ ja $180° - 39° + n \cdot 360° = 141° + n \cdot 360°,\ n \in \mathbb{Z}$.

K7. **a)** cos 3x = cos 45

$$3x = 45 + n \cdot 2\pi \quad ||:3 \qquad \text{tai} \qquad 3x = -45 + n \cdot 2\pi \quad ||:3$$

$$x = 15 + n \cdot \frac{2\pi}{3} \qquad\qquad x = -15 + n \cdot \frac{2\pi}{3},\ n \in \mathbb{Z}$$

Ratkaisuista välille [10, 15] kuuluvat

$x = 15$

$$x = 15 - 1 \cdot \frac{2\pi}{3} = 12{,}9\ldots,$$

$$x = 15 - 2 \cdot \frac{2\pi}{3} = 15 - \frac{4\pi}{3} = 10{,}8\ldots,$$

$$x = -15 + 12 \cdot \frac{2\pi}{3} = -15 + 8\pi = 10{,}1\ldots,$$

$$x = -15 + 13 \cdot \frac{2\pi}{3} = -15 + \frac{26\pi}{3} = 12{,}2\ldots \text{ ja}$$

$$x = -15 + 14 \cdot \frac{2\pi}{3} = -15 + \frac{28\pi}{3} = 14{,}3\ldots$$

b)

$$\sin 2x = \frac{1}{2}$$

$$2x = \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi \quad ||:2 \qquad \text{tai} \qquad 2x = \pi - \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi \quad ||:2$$

$$x = \frac{\pi}{12} + n \cdot \pi \qquad\qquad x = \frac{5\pi}{12} + n \cdot \pi$$

Koska $\pi < x < \frac{5\pi}{4}$, eli $\frac{12\pi}{12} < x < \frac{15\pi}{12}$, ainut ehdon toteuttava luku x on

$$x = \frac{\pi}{12} + \pi = \frac{13\pi}{12}.$$

K8. **a)**

$$6\cos\frac{x}{3}-3=0$$

$$6\cos\frac{x}{3}=3 \quad \|:6$$

$$\cos\frac{x}{3}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{3}=\frac{\pi}{3}+n\cdot 2\pi \quad \|\cdot 3 \qquad \text{tai} \qquad \frac{x}{3}=-\frac{\pi}{3}+n\cdot 2\pi \quad \|\cdot 3$$

$$x=\pi+n\cdot 6\pi \qquad\qquad x=-\pi+n\cdot 6\pi,\ n\in\mathbb{Z}.$$

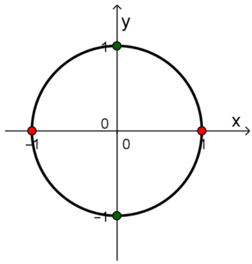
b) $7-\tan(x+1)=0$

$$\tan(x+1)=7$$

$$x+1=1{,}42\ldots+n\cdot\pi$$

$$x=0{,}428\ldots+n\cdot\pi$$

$$x\approx 0{,}43+n\cdot\pi,\ n\in\mathbb{Z}$$



c) $\sin x\cos x=0$

$\sin x=0$ tai $\cos x=0$

$$x=n\cdot\pi \qquad\qquad x=\frac{\pi}{2}+n\cdot\pi$$

Ratkaisut voi yhdistää $x=n\cdot\dfrac{\pi}{2},\ n\in\mathbb{Z}$.

K9. Ratkaistaan funktioiden leikkauskohdat yhtälöstä $\sin x = -\cos x$. Yhtälö ei toteudu, jos $\cos x = 0$, joten voidaan olettaa, että $\cos x \neq 0$.

$$\begin{aligned}
\sin x &= -\cos x \quad \| : \cos x \neq 0 \\
\frac{\sin x}{\cos x} &= -1 \\
\tan x &= -1 \\
x &= \frac{3\pi}{4} + n \cdot \pi, \quad n \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Kuvaajat leikkaavat toisensa kohdissa $x = \frac{3\pi}{4} + n \cdot \pi, \quad n \in \mathbb{Z}$.

K10. Ratkaistaan yhtälö siirtämällä lauseke $\cos x$ vasemmalle, jolloin se voidaan ottaa yhteiseksi tekijäksi. Tämän jälkeen voidaan käyttää tulon nollasääntöä.

$$\begin{aligned}
\sin x \cos x &= \cos x \\
\sin x \cos x - \cos x &= 0 \\
\cos x(\sin x - 1) &= 0
\end{aligned}$$

$$\cos x = 0 \qquad \text{tai} \qquad \sin x - 1 = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi \qquad\qquad \sin x = 1$$

$$x = \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$$

Vastaus $x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$ sisältää myös kaikki vastaukset $x = \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$, joten vastaukset voidaan yhdistää: $x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi, n \in \mathbb{Z}$.

K11. A − IV
Funktion 2sin x arvot ovat kaksinkertaiset sinifunktion sin x arvoihin nähden. Koska vain kuvaajassa IV arvot ovat välillä [−2, 2] sen täytyy olla 2sin x kuvaaja.

B − I
Funktion cos x + 2 kuvaaja saadaan nostamalla funktion cos x kuvaajaa kaksi yksikköä ylöspäin. Kuvaajassa I arvot ovat välillä [1, 3], joten sen täytyy olla cos x + 2 kuvaaja.

C − II
Funktion cos 2x + 1 jakso on π ja arvot ovat välillä [0, 2]. Nämä toteutuvat vain kuvaajassa II.

D − III
Funktion $\frac{1}{2}\sin 2x + 1$ jakso on π ja arvot ovat välillä $[\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}]$. Nämä toteutuvat vain kuvaajassa III.

K12. Derivoidaan ja ratkaistaan derivaatan nollakohdat.

$f(x) = 6\sin x + 3x$

$f'(x) = 6\cos x + 3$

Nollakohdat:

$6\cos x + 3 = 0$

$6\cos x = -3 \quad \|:6$

$\cos x = -\dfrac{1}{2}$

$x = \dfrac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi \qquad \text{tai} \qquad x = -\dfrac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi,\ n \in \mathbb{Z}$

K13. **a)** Sijoitetaan funktion $f(x) = x \sin x$ lausekkeeseen $x = \dfrac{\pi}{4}$.

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} \cdot \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{8}$$

b) Derivoidaan funktio tulon derivoimissäännöllä ja sijoitetaan derivaattafunktioon $x = \dfrac{\pi}{4}$.

$f'(x) = 1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x = \sin x + x \cos x$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{4+\pi}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(4+\pi)}{8}$$

K14. **a)** Sinifunktio saa kaikki arvot väliltä $[-1, 1]$, eli $-1 \leq \sin x \leq 1$. Funktio $3\sin x$ saa kaikki arvot väliltä $[-3, 3]$, joten $-3 \leq 3\sin x \leq 3$. Kun funktioon $3\sin x$ lisätään luku 4, myös pienin ja suurin arvo kasvaa saman verran. Siis $1 \leq 3\sin x + 4 \leq 7$, eli funktion f arvojoukko on $[1, 7]$.

Päättelyketju kaksoisepäyhtälönä

$$
\begin{array}{rcll}
-1 \leq & \sin x & \leq 1 & \| \cdot 3 \\
-3 \leq & 3\sin x & \leq 3 & \| + 4 \\
1 \leq & 3\sin x + 4 & \leq 7 &
\end{array}
$$

b) Muuttujan kertominen tai jakaminen vakiolla ei vaikuta trigonometrisen funktion arvojoukkoon. Siis funktion $f(x) = \cos\left(\frac{5x+3}{2}\right)$ arvojoukko on sama kuin kosinifunktiolla eli $[-1, 1]$.

K15. Tangentin kulmakerroin on derivaatta kohdassa $x = \frac{\pi}{3}$. Derivoidaan funktio $f(x) = \tan x + 2x$ ja sijoitetaan derivaatan lausekkeeseen $x = \frac{\pi}{3}$.

$$f'(x) = 1 + \tan^2 x + 2 = 3 + \tan^2 x$$

$$f'(\tfrac{\pi}{3}) = 3 + (\tan \tfrac{\pi}{3})^2 = 3 + (\sqrt{3})^2 = 3 + 3 = 6$$

Tangentin kulmakerroin on 6.

K16. Tutkitaan funktion $f(x) = \cos x + \sin x$ arvoja. Koska funktioiden $\sin x$ ja $\cos x$ jakso on 2π, on myös funktion f jakso 2π. Funktio saa suurimman ja pienimmän arvonsa 2π pituisella välillä.

Tutkitaan väliä $[0, 2\pi]$. Funktio f on derivoituva kaikilla muuttujan x arvoilla. Näin ollen se saavuttaa suurimman ja pienimmän arvonsa suljetulla välillä $[0, 2\pi]$ välin päätepisteessä tai välille kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa.

$$f'(x) = -\sin x + \cos x$$

Derivaatan nollakohdat:

$$-\sin x + \cos x = 0$$
$$\sin x = \cos x \quad \| : \cos x \neq 0$$
$$\frac{\sin x}{\cos x} = 1$$
$$\tan x = 1$$
$$x = \frac{\pi}{4} + n \cdot \pi, n \in \mathbb{Z}$$

Välillä $[0, 2\pi]$ derivaatan nollakohdista ovat $\frac{\pi}{4}$ ja $\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$.

Lasketaan funktion f arvo kohdissa $x = 0$, $x = 2\pi$, $x = \frac{\pi}{4}$ ja $x = \frac{5\pi}{4}$.

$$f(0) = \cos 0 + \sin 0 = 1 + 0 = 1$$

$$f(2\pi) = \cos 2\pi + \sin 2\pi = 1 + 0 = 1$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \cos\frac{5\pi}{4} + \sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

Funktion f suurin arvo on $\sqrt{2}$ ja pienin arvo $-\sqrt{2}$, joten sen arvojoukko on $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

K17. **a)** Sijoitetaan sisäfunktion $s(x) = x + \frac{1}{3}$ lauseke ulkofunktion $u(x) = 2x^{10} + x$ lausekkeeseen muuttujan x paikalle.

$$(u \circ s)(x) = u(s(x)) = u(x + \frac{1}{3}) = 2(x + \frac{1}{3})^{10} + x + \frac{1}{3}$$

$$(u \circ s)(\frac{2}{3}) = 2(\frac{2}{3} + \frac{1}{3})^{10} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 2 \cdot 1^{10} + 1 = 3$$

b) Yhdistetyn funktion $u \circ s$ lauseke on $u(s(x)) = u(1 - x) = (1 - x)^2$.

$$(u \circ s)(\frac{2}{3}) = (1 - \frac{2}{3})^2 = (\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{9}$$

K18. **a)** Esimerkiksi $s(x) = x^2 + 1$ ja $u(x) = x^7$.

b) Esimerkiksi $s(x) = x + 3$ ja $u(x) = \sin x$.

K19. **a)** $\mathrm{D}\,(x^2 + 1)^7 = 7(x^2 + 1)^6 \cdot \mathrm{D}\,x^2 = 7(x^2 + 1)^6 \cdot 2x = 14x(x^2 + 1)^6$

b) $\mathrm{D}\sin(x + 3) = \cos(x + 3) \cdot \mathrm{D}(x + 3) = \cos(x + 3) \cdot 1 = \cos(x + 3)$

c) $\mathrm{D}\cos^5 x = \mathrm{D}\,(\cos x)^5 = 5(\cos x)^4 \cdot \mathrm{D}\cos x = 5\cos^4 x \cdot (-\sin x)$
$= -5\sin x \cos^4 x$

d) $\mathrm{D}\cos x^5 = -\sin x^5 \cdot \mathrm{D}\,x^5 = = -\sin x^5 \cdot 5x^4 = -5x^4 \sin x^5$

K20. Tangentin kulmakerroin on funktion $f(x) = \sin 2x$ derivaatta tangentin sivuamiskohdassa.

$$f'(x) = \cos 2x \cdot 2 = 2\cos 2x$$

$$k_t = f'(\frac{\pi}{4}) = 2\cos(2 \cdot \frac{\pi}{4}) = 2\cos\frac{\pi}{2} = 0$$

Kohtaan $x = \frac{\pi}{4}$ piirretty tangentti on siis vaakasuora.

Ratkaistaan tangentin sivuamispiste.

$$y = f(\frac{\pi}{4}) = \sin(2 \cdot \frac{\pi}{4}) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

Kohtaan $x = \frac{\pi}{4}$ piirretyn tangentin yhtälö on $y = 1$.

K21. Koska $-1 \leq \cos 2x \leq 1$, niin yhtälöllä $\cos 2x = x$ voi olla ratkaisu vain, kun $-1 \leq x \leq 1$.

Kirjoitetaan yhtälö $\cos 2x = x$ muodossa $\cos 2x - x = 0$. Merkitään yhtälön vasen puoli funktioksi $f(x) = \cos 2x - x$. Yhtälön $\cos 2x = x$ ratkaisut ovat samat kuin funktion f nollakohdat. Tutkitaan funktion kulkua välillä $[-1, 1]$ derivaatan avulla.

$f'(x) = -\sin 2x \cdot 2 - 1 = -2\sin 2x - 1$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat.

$$
\begin{aligned}
-2\sin 2x - 1 &= 0 \\
-2\sin 2x &= 1 \quad \| : (-2) \\
\sin 2x &= -\frac{1}{2} \\
2x &= \frac{7\pi}{6} + n \cdot 2\pi \quad \| : 2 \quad \text{tai} \quad 2x = \pi - \frac{7\pi}{6} + n \cdot 2\pi \quad \| : 2 \\
x &= \frac{7\pi}{12} + n \cdot \pi \qquad\qquad x = -\frac{\pi}{12} + n \cdot \pi, \quad n \in \mathbb{Z} \\
(x &\approx 1{,}8 + n \cdot \pi \qquad\qquad x \approx 0{,}3 + n \cdot \pi)
\end{aligned}
$$

Derivaatan nollakohdista välille $]-1, 1[$ kuuluu vain $x = -\frac{\pi}{12}$.

Määritetään derivaatan merkki testikohtien avulla.

x	$f'(x)$	Merkki
$-\frac{\pi}{4}$	1	+
0	−1	−

		-1		$-\frac{\pi}{12}$		1	
$f'(x)$			+		−		
$f(x)$			↗		↘		

Koska $f(-1) = \cos(2 \cdot (-1)) - (-1) = 0{,}58\ldots > 0$ ja funktio f on kasvava välillä $[-1, -\frac{\pi}{12}]$, niin funktiolla f ei ole nollakohtaa välillä $[-1, -\frac{\pi}{12}]$.

$$f(-\frac{\pi}{12}) = \cos(2 \cdot (-\frac{\pi}{12})) - (-\frac{\pi}{12}) = 1{,}12\ldots > 0$$
$$f(1) = \cos(2 \cdot 1) - 1 = -1{,}41\ldots < 0$$

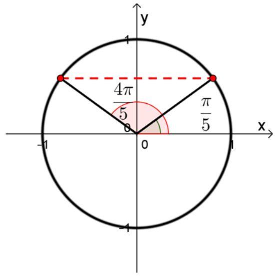
Koska funktio $f(x) = \cos 2x - x$ on jatkuva välillä $\left[-\frac{\pi}{12}, 1\right]$ ja saa eri merkkiset arvot välin päätepisteissä, Bolzanon lauseen mukaan sillä on ainakin yksi nollakohta välillä $\left]-\frac{\pi}{12}, 1\right[$. Toisaalta funktio on vähenevä välillä $\left[-\frac{\pi}{12}, 1\right]$, joten sillä voi olla korkeintaan yksi nollakohta tällä välillä. Näin ollen funktiolla f on täsmälleen yksi nollakohta välillä $\left]-\frac{\pi}{12}, 1\right[$. Koska funktiolla f on täsmälleen yksi nollakohta, niin yhtälöllä $\cos 2x = x$ on täsmälleen yksi ratkaisu.

Kokoavia tehtäviä

ILMAN TEKNISIÄ APUVÄLINEITÄ

1. **a)** Kyllä, $\sin\frac{\pi}{5} = \sin\frac{4\pi}{5} = \sin(\pi - \frac{\pi}{5})$.

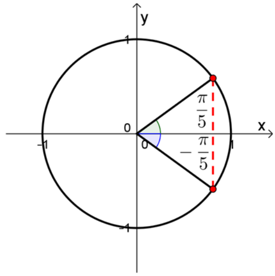
Kulmien $\frac{\pi}{5}$ ja $\frac{4\pi}{5}$ kehäpisteiden y-koordinaatit ovat samat.



b) Ei, $\cos(-\frac{\pi}{5}) \neq -\cos\frac{\pi}{5}$.

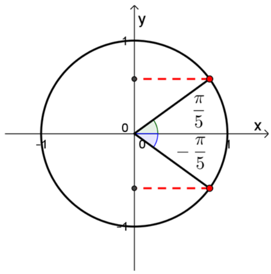
Kulmien $-\frac{\pi}{5}$ ja $\frac{\pi}{5}$ kehäpisteiden x-koordinaatit ovat samat, eli

$\cos(-\frac{\pi}{5}) = \cos\frac{\pi}{5}$.



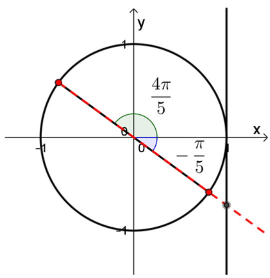
c) Kyllä, $\sin(-\frac{\pi}{5}) = -\sin\frac{\pi}{5}$.

Kulmien $\frac{\pi}{5}$ ja $-\frac{\pi}{5}$ kehäpisteiden y-koordinaatit ovat toistensa vastaluvut.



d) Kyllä, $\tan(-\frac{\pi}{5}) = \tan\frac{4\pi}{5} = \tan(-\frac{\pi}{5} + \pi)$.

Kulmien loppukylki tai sen jatke leikkaavat suoran $x = 1$ samassa pisteessä.



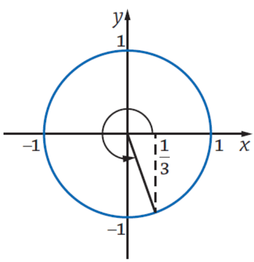
2. Sijoitetaan kaavaan $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ kosinin arvoksi $\cos x = \frac{1}{3}$ ja ratkaistaan $\sin x$.

$$\begin{aligned}
\sin^2 x + \cos^2 x &= 1 \\
\sin^2 x + (\tfrac{1}{3})^2 &= 1 \\
\sin^2 x + \frac{1}{9} &= 1 \\
(\sin x)^2 &= \frac{8}{9} \\
\sin x = \sqrt{\frac{8}{9}} \quad &\text{tai} \quad \sin x = -\sqrt{\frac{8}{9}} \\
\sin x = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad & \quad\quad\;\; \sin x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}
\end{aligned}$$

Sini voi saada arvot $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ tai $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Jos kulma x on välillä]180°, 360°[, niin sinin arvo on negatiivinen, joten $\sin x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Koska $\cos x = \frac{1}{3}$, on kulma neljännessä neljänneksessä. Piirretään arvioiden ympyrän neljänteen neljännekseen kulma, jonka kehäpisteen x-koordinaatti on $\frac{1}{3}$.

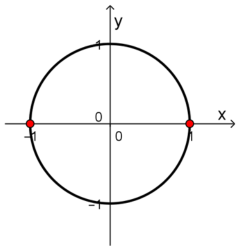


3. Kolmion kulmien summa on 180°, joten $x + 2x + 3x = 180°$

$$x + 2x + 3x = 180°$$
$$6x = 180° \quad \|:6$$
$$x = 30°$$

$$\begin{aligned}(\sin x + \sin 2x + \sin 3x)^2 &= (\sin 30° + \sin (2 \cdot 30°) + \sin (3 \cdot 30°))^2 \\ &= (\sin 30° + \sin 60° + \sin 90°)^2 \\ &= (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1)^2 \\ &= (\frac{3+\sqrt{3}}{2})^2 \\ &= \frac{9 + 6\sqrt{3} + 3}{4} \\ &= \frac{12 + 6\sqrt{3}}{4} \\ &= 3 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

4. Osamäärä $\frac{2}{1+\cos^2 x}$ saa arvon yksi, jos nimittäjä saa arvon 2.
Ratkaistaan yhtälö $1 + \cos^2 x = 2$.



$$1 + \cos^2 x = 2$$
$$\cos^2 x = 1$$
$$\cos x = 1 \qquad \text{tai} \qquad \cos x = -1$$
$$x = n \cdot 2\pi \qquad\qquad x = \pi + n \cdot 2\pi,\ n \in \mathbb{Z}$$

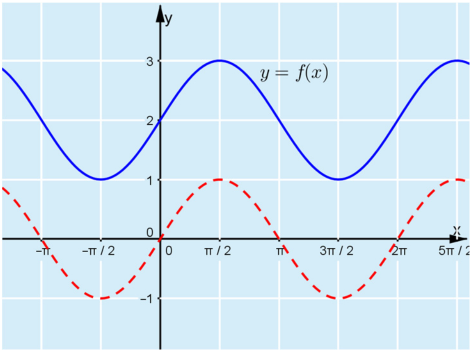
Vastaukset voidaan yhdistää.
Osamäärä on 1, kun $x = n \cdot \pi,\ n \in \mathbb{Z}$.

5. **a)** $f(x) = 2 + \sin x$

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \quad \| +2$$
$$1 \leq 2 + \sin x \leq 3$$

Funktion arvojoukko on [1, 3].

Funktion f kuvaaja saadaan, kun funktion sin x kuvaajaa nostetaan kaksi yksikköä ylöspäin.

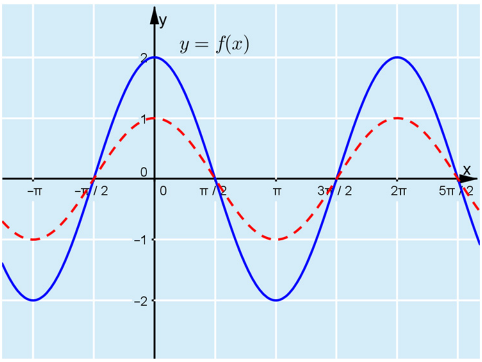


b) $f(x) = 2 \cos x$

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \quad \| \cdot 2$$
$$-2 \leq 2 \cos x \leq 2$$

Funktion arvojoukko on [−2, 2].

Funktion f kuvaaja saadaan venyttämällä funktion cos x kuvaajaa pystysuunnassa niin, että kuvaajan pisteiden etäisyydet x-akselista kaksinkertaistuvat.

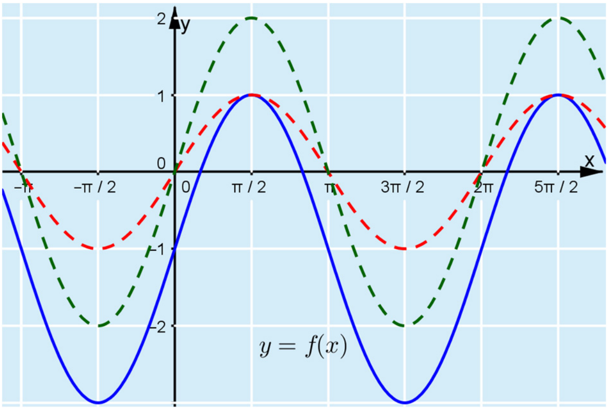


c) $f(x) = 2 \sin x - 1$

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \quad \| \cdot 2$$
$$-2 \leq 2 \sin x \leq 2 \quad \| -1$$
$$-3 \leq 2 \sin x - 1 \leq 1$$

Funktion arvojoukko on $[-3, 1]$.

Funktion f kuvaaja saadaan, kun funktion $\sin x$ kuvaajaa venytetään siten, että kuvaajan pisteiden etäisyydet x-akselista kaksinkertaistuvat ja tämän jälkeen kuvaajaa lasketaan yhden yksikön verran.



6. Sinifunktio saa kaikki arvot väliltä $[-1, 1]$, eli $-1 \leq \sin x \leq 1$.

$$-1 \leq \sin(100\pi t) \leq 1 \quad \| \cdot 330$$
$$-330 \leq 330 \sin(100\pi t) \leq 330.$$

Verkon suurin jännite on siis 330 volttia.

Funktion $u(t) = 330 \sin(100\pi t)$ jakso on $\frac{2\pi}{100\pi} = \frac{1}{50}\text{(s)}$, eli sen suurin arvo toistuu 50 kertaa sekunnissa.

7. **a)** $\tan(a + 5\pi) = \tan a = 5$

b) $f'(x) = 1 + \tan^2 x$

$f'(a) = 1 + \tan^2 a = 1 + 5^2 = 26$

c) $\tan a = 5$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 5 \ \| \cdot \cos\alpha$$
$$\sin\alpha = 5\cos\alpha \ \| : 5$$
$$\cos\alpha = \frac{\sin\alpha}{5}$$

Sijoitetaan saatu $\cos\alpha$ kaavaan $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ ja ratkaistaan $\sin\alpha$.

$$\sin^2\alpha + \left(\frac{\sin\alpha}{5}\right)^2 = 1$$
$$\sin^2\alpha + \frac{1}{25}\sin^2\alpha = 1$$
$$\frac{26}{25}\sin^2\alpha = 1 \ \| : \frac{26}{25}$$
$$\sin^2\alpha = \frac{25}{26}$$
$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{25}{26}} \quad \text{tai} \quad \sin\alpha = -\sqrt{\frac{25}{26}}$$
$$\sin\alpha = \frac{5}{\sqrt{26}} \quad \text{tai} \quad \sin\alpha = -\frac{5}{\sqrt{26}}$$

8. Kosinifunktio saa kaikki arvot väliltä $[-1, 1]$. Funktio x^3 on kasvava funktio, joten epäyhtälön korottaminen kolmanteen potenssiin säilyttää järjestyksen.

$$-1 \le \cos^3 x \le 1 \ \| \cdot (-1)$$
$$1 \ge -\cos^3 x \ge -1$$
$$-1 \le -\cos^3 x \le 1 \ \| + 1$$
$$0 \le 1 - \cos^3 x \le 2$$

Kun arvot korotetaan kolmanteen potenssiin, saadaan
$0 \le (1 - \cos^3 x)^3 \le 8$.

Funktion suurin arvo on 8 ja pienin 0.

9. **a)** Yhtälö $\cos x = \sqrt{3}\sin x$ ei toteudu, jos $\cos x = 0$, joten voidaan olettaa, että $\cos x \neq 0$.

$$\cos x = \sqrt{3}\sin x \quad \| : \cos x \neq 0$$
$$1 = \sqrt{3}\frac{\sin x}{\cos x} \quad \| : \sqrt{3}$$
$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sin x}{\cos x}$$
$$\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$x = \frac{\pi}{6} + n \cdot \pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

b)

$$(\sin x + \sqrt{3})^2 = \frac{27}{4}$$

$$\sin x + \sqrt{3} = \sqrt{\frac{27}{4}} \quad \text{tai} \quad \sin x + \sqrt{3} = -\sqrt{\frac{27}{4}}$$
$$\sin x = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} \qquad \sin x = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}$$
$$\sin x = \frac{3\sqrt{3} - 2\sqrt{3}}{2} \qquad \sin x = \frac{-3\sqrt{3} - 2\sqrt{3}}{2}$$
$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sin x = \frac{-5\sqrt{3}}{2}$$

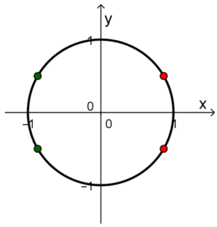
Koska $\frac{-5\sqrt{3}}{2} < -1$, yhtälöllä $\sin x = \frac{-5\sqrt{3}}{2}$ ei ole ratkaisua.

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$x = \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi \quad \text{tai} \quad x = \pi - \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$$
$$x = \frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi, \ n \in \mathbb{Z}$$

10. Ratkaistaan funktion nollakohdat yhtälöstä $3\cos^2 x - \sin^2 x - 2 = 0$ hyödyntäen lausetta $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

$$3\cos^2 x - \sin^2 x - 2 = 0$$
$$3\cos^2 x - (1 - \cos^2 x) - 2 = 0$$
$$4\cos^2 x - 3 = 0$$
$$\cos^2 x = \frac{3}{4}$$
$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{tai} \quad \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$x = \pm\frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi \qquad x = \pm\frac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi,\ n \in \mathbb{Z}$$

Vastaukset voidaan yhdistää. Funktion f nollakohdat ovat $x = -\frac{\pi}{6} + n \cdot \pi$ ja $x = \frac{\pi}{6} + n \cdot \pi$.



Sekä sini- että kosinifunktion perusjakso on 2π, joten funktio $f(x) = 3\cos^2 x - \sin^2 x - 2$ saa kaikki arvonsa välillä $[0, 2\pi]$. Funktio f on derivoituva kaikilla muuttujan x arvoilla. Näin ollen se saavuttaa suurimman ja pienimmän arvonsa suljetulla välillä $[0, 2\pi]$ välin päätepisteessä tai välille kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa.

$$f'(x) = 6\cos x\,(-\sin x) - 2\sin x \cos x = -8\cos x \sin x$$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat.

$$-8\cos x \sin x = 0$$
$$\cos x = 0 \qquad \text{tai} \qquad \sin x = 0$$
$$x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$$
$$x = n \cdot \pi,\ n \in \mathbb{Z}$$

Derivaatan nollakohdista välille]0, 2π[kuuluu

$x = \frac{\pi}{2}, x = \pi$ ja $x = \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2}$.

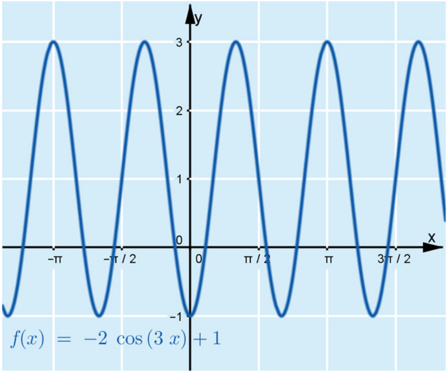
Lasketaan funktion *f* arvot välin päätepisteissä ja välillä olevissa derivaatan nollakohdissa.

$$f(0) = f(2\pi) = 3\cos^2 0 - \sin^2 0 - 2 = 3 \cdot 1^2 - 0 - 2 = 1$$
$$f(\pi) = 3\cos^2 \pi - \sin^2 \pi - 2 = 3 \cdot (-1)^2 - 0^2 - 2 = 1$$
$$f(\frac{\pi}{2}) = 3\cos^2 \frac{\pi}{2} - \sin^2 \frac{\pi}{2} - 2 = 3 \cdot 0^2 - 1^2 - 2 = -3$$
$$f(\frac{3\pi}{2}) = 3\cos^2 \frac{3\pi}{2} - \sin^2 \frac{3\pi}{2} - 2 = 3 \cdot 0^2 - (-1)^2 - 2 = -3$$

Funktion *f* suurin arvo on 1 ja pienin −3.

APUVÄLINEET SALLITTU

11. **a)** Piirretään funktion $f(x) = -2\cos 3x + 1$ kuvaaja.



Kuvaajan perusteella suurin arvo on 3, ja pienin arvo −1.

b) Tutkitaan toteuttaako piste $(\frac{3\pi}{2}, 2)$ yhtälön $y = -2\cos 3x + 1$.

$$2 = -2\cos\left(3 \cdot \frac{3\pi}{2}\right) + 1$$

$$2 = -2 \cdot 0 + 1$$

$$2 = 1$$

Yhtälö ei toteudu, joten piste $(\frac{3\pi}{2}, 2)$ ei ole kuvaajalla.

12. **a)** Muutosnopeus kohdassa $x = \frac{\pi}{3}$ on derivaatan arvo.

$f'(x) = 2\cos x - 2\sin 2x$

$$f'(\frac{\pi}{3}) = 2\cos\frac{\pi}{3} - 2\sin(2\cdot\frac{\pi}{3}) = 2\cdot\frac{1}{2} - 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 1-\sqrt{3}$$

Muutosnopeus on $1-\sqrt{3}$.

b) Selvitetään tangentin kulmakerroin ja yksi piste.

Lasketaan funktion f arvo, kun $x = -\frac{\pi}{4}$.

$$f(-\frac{\pi}{4}) = -\cos^2(-\frac{\pi}{4}) = -(\frac{1}{\sqrt{2}})^2 = -\frac{1}{2}$$

Tangentti kulkee pisteen $(-\frac{\pi}{4}, -\frac{1}{2})$ kautta.

$$f'(x) = -2\cos x \cdot(-\sin x) = 2\sin x \cos x = \sin 2x$$

$$f'(-\frac{\pi}{4}) = \sin(2\cdot(-\frac{\pi}{4})) = -1$$

Tangentin kulmakerroin $k = -1$.

Sijoitetaan suoran yhtälöön $y - y_0 = k(x - x_0)$ piste $(x_0, y_0) = (-\frac{\pi}{4}, -\frac{1}{2})$ ja kulmakerroin $k = -1$.

$$y - (-\frac{1}{2}) = -1(x - (-\frac{\pi}{4}))$$

$$y = -x - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

Tangentin yhtälö on $y = -x - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

13. **a)** Sinifunktio saa kaikki arvot väliltä [−1, 1].

$$\begin{aligned} -1 \le \quad & \sin 140\pi t \le 1 && \| \cdot 20 \\ -20 \le \quad & 20\sin 140\pi t \le 20 && \| + 100 \\ 80 \le \; & 100 + 20\sin 140\pi t \le 120. \end{aligned}$$

Yläpaine on 120 ja alapaine 80.

b) Funktion $f(t) = 100 + 20\sin 140\pi t$ jakso on $\frac{2\pi}{140\pi} = \frac{1}{70}(\text{min})$.

Minuuttiin mahtuu 70 jaksoa, joten henkilön syke on 70.

14. Kaksinkertaisen kulman kaavan mukaan $\sin 2x = 2\sin x \cos x$. Jotta $\sin 2x$ voidaan määrittää, tarvitaan kosinin arvo. Ratkaistaan $\cos x$ kaavasta $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, kun $\sin x = -\frac{8}{17}$.

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$(-\tfrac{8}{17})^2 + \cos^2 x = 1$$

$$\cos^2 x = \frac{225}{289}$$

$$\cos x = \frac{15}{17} \quad \text{tai} \quad \cos x = -\frac{15}{17}$$

Koska $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, niin kulma x on yksikköympyrän kolmannessa neljänneksessä, jossa kosini on negatiivinen. Siis $\cos x = -\frac{15}{17}$.

Nyt saadaan

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x = 2 \cdot (-\tfrac{8}{17}) \cdot (-\tfrac{15}{17}) = \frac{240}{289}$$

15. Sinifunktio sin x saa kaikki arvot väliltä $[-1, 1]$. Se siis heilahtelee keskikohtansa molemmille puolille yhden yksikön verran. Funktion f kuvaaja heilahtelee keskikohtansa molemmin puolin 7 cm, joten sinifunktiota on venytetty 7-kertaiseksi. Siis $A = 7$.

Funktion 7sin Bx jakso on $\frac{2\pi}{B}$ ja koholla kestää ylhäältä alas ja takaisin ylös $2 \cdot 5 = 10$ sekuntia. Saadaan siis yhtälö $\frac{2\pi}{B} = 10$, josta $B = \frac{\pi}{5}$.

Mato-ongen kohoa voidaan siis mallintaa funktiolla $f(t) = 7\sin \frac{\pi}{5} t$.

16. Kirjoitetaan yhtälö 5tan $x - 3 = 10x$ muodossa 5tan $x - 3 - 10x = 0$.
Merkitään yhtälön vasen puoli funktioksi $f(x) = 5\tan x - 3 - 10x$. Yhtälön 5tan $x - 3 = 10x$ ratkaisut ovat samat kuin funktion f nollakohdat.
Tutkitaan funktion kulkua derivaatan avulla.

$$f'(x) = 5(1 + \tan^2 x) - 10 = 5\tan^2 x - 5$$

$$\begin{aligned}
5\tan^2 x - 5 &= 0 \\
5\tan^2 x &= 5 \\
\tan^2 x &= 1 \\
\tan x = 1 \quad &\text{tai} \quad \tan x = -1 \\
x = \frac{\pi}{4} + n \cdot \pi \quad &\quad x = -\frac{\pi}{4} + n \cdot \pi,\ n \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Derivaatan nollakohdista välille $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ kuuluu

$x = \frac{\pi}{4}$ ja $x = \frac{3\pi}{4} - 1 \cdot \pi = -\frac{\pi}{4}$.

Määritetään derivaatan merkki testikohtien avulla.

x	$f'(x)$	Merkki
$-\frac{\pi}{3}$	10	+
0	−5	−
$\frac{\pi}{3}$	10	+

$-\frac{\pi}{2}$ $\qquad$ $-\frac{\pi}{4}$ $\qquad$ $\frac{\pi}{4}$ $\qquad$ $\frac{\pi}{2}$

$f'(x)$		+	−	+	
$f(x)$		↗	↘	↗	

Koska $f(-\frac{\pi}{4}) = 5\tan(-\frac{\pi}{4}) - 3 - 10\cdot(-\frac{\pi}{4}) = -0{,}146... < 0$ ja funktio *f* on kasvava välillä $\left]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right]$, niin funktiolla *f* ei ole nollakohtaa tällä välillä..

Koska *f* on vähenevä välillä $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ ja $f(-\frac{\pi}{4}) < 0$, sillä ei voi olla nollakohtaa tällä välillä.

Funktio *f* on kasvava välillä $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$. Kasvava funktio ei saa samaa arvoa kahdesti, joten nollakohtia on korkeintaan yksi.

$$f(\frac{\pi}{4}) = 5\tan\frac{\pi}{4} - 3 - 10\cdot\frac{\pi}{4} = -5{,}85... < 0$$

$$f(\frac{5\pi}{12}) = 5\tan\frac{5\pi}{12} - 3 - 10\cdot\frac{5\pi}{12} = 2{,}57... > 0$$

Koska funktio $f(x) = 5\tan x - 3 - 10x$ on jatkuva välillä $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{12}\right]$ ja saa päätepisteissä eri merkkiset arvot, Bolzanon lauseen mukaan sillä on ainakin yksi nollakohta tällä välillä.

Funktiolla *f* on siis toisaalta ainakin yksi ja toisaalta korkeintaan yksi nollakohta, joten sillä on täsmälleen yksi nollakohta välillä $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
Koska funktiolla *f* on täsmälleen yksi nollakohta, niin yhtälöllä $5\tan x - 3 - 10x$ on täsmälleen yksi juuri välillä $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Yhtälön juuri on $x \approx 1{,}3$.

17. Derivoidaan funktio *f*.

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}\sin\frac{1-x}{x}$$

Derivaatan nollakohtia ratkaistaessa voidaan käyttää tulon nollasääntöä.

$$\frac{1}{x^2}\sin\frac{1-x}{x} = 0$$

$$\frac{1}{x^2} = 0 \quad \text{tai} \quad \sin\frac{1-x}{x} = 0$$

$$\text{ei ratkaisua} \qquad \frac{1-x}{x} = n\cdot\pi$$

$$x\cdot n\cdot\pi = 1-x$$

$$x(1+n\pi) = 1$$

$$x = \frac{1}{1+n\cdot\pi},\ n\in\mathbb{Z}$$

Tutkitaan mitkä nollakohdsta ovat välillä]−1, 1[.
Kun $n = 0$, on lausekkeen $\frac{1}{1+n\cdot\pi}$ arvo 1, joten tämä nollakohta ei ole välillä]−1, 1[.

Kaikilla muilla n:n arvoilla nimittäjä $1 + n\cdot\pi$ on suurempi kuin 1 tai pienempi kuin −1. Näin ollen lausekkeen $\frac{1}{1+n\cdot\pi}$ arvo on välillä]−1, 1[kaikilla muilla n:n arvoilla kuin arvolla $n = 0$.

Välillä]−1, 1[olevat derivaatan nollakohdat ovat siis

$$x = \frac{1}{1+n\cdot\pi},\ n\in\mathbb{Z},\ n\neq 0.$$

18. Olkoon sektorin keskuskulma α.

Sektorin pinta-ala on $A_s = \dfrac{\alpha}{2\pi} \cdot \pi r^2 = \dfrac{\alpha r^2}{2}$.

Jotta sektorin keskuskulma olisi sama kuin sektorin pinta-ala, tulee olla

$$\alpha = \frac{\alpha r^2}{2} \quad \|: \frac{\alpha}{2} \neq 0$$

$$r^2 = 2$$

$$r = \sqrt{2} \ \ (\text{tai } r = -\sqrt{2})$$

Ympyrän säteen tulee olla $\sqrt{2}$.

19. Käyrän $y = \sin x + 2\cos x + 2\sqrt{2}$ etäisyys x-akselista kohdassa $x = \frac{\pi}{4}$ on käyrän pisteen y-koordinaatin itseisarvo.

$$y = \sin\frac{\pi}{4} + 2\cos\frac{\pi}{4} + 2\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} + 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + 2\sqrt{2} = \frac{7}{\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{2}$$

Käyrän etäisyys y-akselista on $\frac{7\sqrt{2}}{2}$.

Lyhin etäisyys on funktion $f(x) = \sin x + 2\cos x + 2\sqrt{2}$ pienin positiivinen tai suurin negatiivinen arvo.
Tutkitaan funktion f arvoja.

Sekä sini- että kosinifunktion perusjakso on 2π, joten funktio f saa kaikki arvonsa välillä $[0, 2\pi]$. Funktio f on derivoituva kaikilla muuttujan x arvoilla, joten se saa suljetulla välillä $[0, 2\pi]$ suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteessä tai välille kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa.

$f'(x) = \cos x - 2\sin x$

Derivaattafunktion nollakohdat:

$$\begin{aligned}
\cos x - 2\sin x &= 0 \\
\cos x &= 2\sin x \quad \| : 2\cos x \neq 0 \\
\frac{\sin x}{\cos x} &= \frac{1}{2} \\
\tan x &= \frac{1}{2} \\
x &= 0{,}463... + n\cdot\pi, \quad n \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Derivaatan nollakohdista välille $]0, 2\pi[$ kuuluvat
$x = 0{,}463\ldots$ ja $x = 3{,}60\ldots$

Lasketaan funktion f arvot välin $[0, 2\pi]$ päätepisteissä ja välille kuuluvissa derivaatan nollakohdissa.

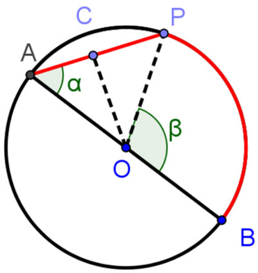
$f(0) = f(2\pi) = \sin 0 + 2\cdot\cos 0 + 2\sqrt{2} = 1 + 2\sqrt{2} = 3{,}82\ldots$

$f(0{,}463\ldots) = \sin 0{,}463\ldots + 2\cdot\cos 0{,}463\ldots + 2\sqrt{2} = 5{,}06\ldots$

$f(3{,}60\ldots) = \sin 3{,}60\ldots + 2\cdot\cos 3{,}60\ldots + 2\sqrt{2} = 0{,}592\ldots$

Funktion f kaikki arvot ovat positiivisia, joten käyrän lyhin etäisyys x-akseliin on funktion pienin arvo, joka on $0{,}592\ldots \approx 0{,}6$ yksikköä.

20. Valitaan muuttujaksi kulma $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ kuvan mukaisesti.



Suolla juostun matkan *AP* pituus saadaan selville tasakylkisen kolmion *AOP* puolikkaan avulla. Kolmio *AOC* on suorakulmainen. *AO* on ympyrän säde, jonka pituus on 0,5 km.

$$\cos\alpha = \frac{\frac{1}{2}AP}{0{,}5}$$
$$AP = \cos\alpha$$

Sektorin *OBP* keskuskulma β on 2α, koska kulma α on samaa kaarta vastaava kehäkulma. Sektorin *OBP* kaaren pituus on $\beta r = 2\alpha \cdot 0{,}5 = \alpha$.

Matkan kesto saadaan jakamalla matka nopeudella.

$$t = \frac{\cos\alpha}{5} + \frac{\alpha}{10}$$

Tutkitaan aikaa kuvaavaa funktiota $f(\alpha) = \frac{\cos\alpha}{5} + \frac{\alpha}{10}$, $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Funktio *f* on derivoituva, joten se saa suljetulla välillä $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteessä tai välille kuuluvassa derivaattafunktion nollakohdassa.

$$f'(\alpha) = -\frac{1}{5}\sin\alpha + \frac{1}{10}$$

$$-\frac{1}{5}\sin\alpha + \frac{1}{10} = 0$$

$$\sin\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi \quad \text{tai} \quad \alpha = \pi - \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi = \frac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi,\ n \in \mathbb{Z}$$

Derivaattafunktion nollakohdista välillä $]0, \frac{\pi}{2}[$ on ainoastaan $x = \frac{\pi}{6}$

Lasketaan funktion f arvot välin $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ päätepisteissä ja välillä olevassa derivaatan nollakohdassa.

$$f(0) = \frac{\cos 0}{5} + \frac{0}{10} = \frac{1}{5} = 0,2$$

$$f(\frac{\pi}{6}) = \frac{\cos\frac{\pi}{6}}{5} + \frac{\frac{\pi}{6}}{10} = \frac{\sqrt{3}}{10} + \frac{\pi}{60} = 0,225...$$

$$f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\cos\frac{\pi}{2}}{5} + \frac{\frac{\pi}{2}}{10} = 0 + \frac{\pi}{20} = 0,157...$$

Funktion f pienin arvo on 0,157… h ≈ 9,4 min, joka saavutetaan lähtökulmalla $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (rad) = 90°. Suunnistajan kannattaa siis kiertää suo kokonaan.