Kertaus

K1. **a)** $\dfrac{x^6 \cdot x^4}{x^{10}} = \dfrac{x^{6+4}}{x^{10}} = \dfrac{x^{10}}{x^{10}} = 1,\ x \neq 0$

b) $x^5 \cdot x^{-6} = x^{5-6} = x^{-1} = \dfrac{1}{x},\ x \neq 0$

c) $(\dfrac{2}{7})^3 \cdot 7^4 = \dfrac{2^3}{7^3} \cdot 7^4 = \dfrac{2^3 \cdot 7^4}{7^3} = 2^3 \cdot 7^{4-3} = 2^3 \cdot 7^1 = 8 \cdot 7 = 56$

d) $2^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{2} = 2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}} = 2^{\frac{3}{3}} = 2^1 = 2$

K2. **a)** $\sqrt[3]{a^6} = a^{\frac{6}{3}} = a^2,\ a > 0$

b) $\sqrt[6]{a^3} = a^{\frac{3}{6}} = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a},\ a > 0$

c) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{25} = \sqrt[3]{5 \cdot 25} = \sqrt[3]{5^3} = 5$

d) $\sqrt[5]{a^2\sqrt{a}} = \sqrt[5]{a^2 \cdot a^{\frac{1}{2}}} = \sqrt[5]{a^{\frac{5}{2}}} = (a^{\frac{5}{2}})^{\frac{1}{5}} = a^{\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{5}} = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a},\ a > 0$

K3. Koska vaa'an lukema on kääntäen verrannollinen Maan keskipisteestä mitatun etäisyyden neliöön, saadaan yhtälö $l=\frac{k}{r^2}$. Ratkaistaan *k*, kun tiedetään, että vaa'an lukema on 55,7 kg, kun etäisyys keskipisteestä on 6380 km.

$$55,7=\frac{k}{6380^2}$$
$$k=55,7\cdot 6380^2=2267235080$$

Pohjoisnavalla r = 6360 km. Ratkaistaan vaa'an lukema l.

$$l=\frac{2267235080}{6360^2}=56,05...\approx 56,1$$

Vaa'an lukema on pohjoisnavalla 56,1 kg.

K4. Olkoon verrannollisuuskerroin k.

Sisälämpötilan ollessa 22 °C, lämmityskustannukset ovat
$k\cdot(22-(-2))=24k$.

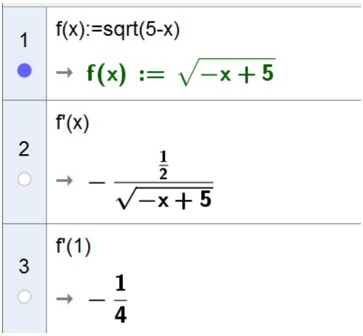
Sisälämpötilan ollessa 21 °C, lämmityskustannukset ovat
$k\cdot(21-(-2))=23k$.

Lämmityskustannukset pienenevät $\frac{24k-23k}{24k}=\frac{1}{24}=0,0416...\approx 4,2$ %.

K5. **a)** Funktio $f(x)=\sqrt{5-x}$ on määritelty, kun $5-x\geq 0$, eli $x\leq 5$.

$$f'(x)=\mathrm{D}(5-x)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(5-x)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-1)=-\frac{1}{2\sqrt{5-x}}$$

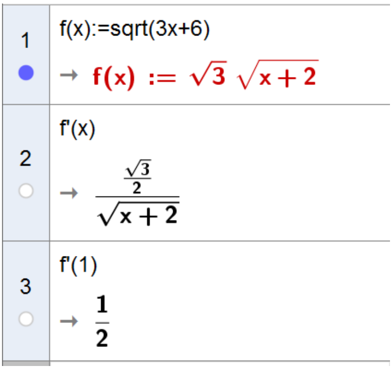
$$f'(1)=-\frac{1}{2\sqrt{5-1}}=-\frac{1}{2\sqrt{4}}=-\frac{1}{2\cdot 2}=-\frac{1}{4}$$



b) Funktio $f(x)=\sqrt{3x+6}$ on määritelty, kun $3x+6\geq 0$, eli $x\geq -2$.

$$f'(x)=\mathrm{D}(3x+6)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(3x+6)^{-\frac{1}{2}}\cdot 3=\frac{3}{2\sqrt{3x+6}}$$

$$f'(1)=\frac{3}{2\sqrt{3\cdot 1+6}}=\frac{3}{2\sqrt{9}}=\frac{3}{2\cdot 3}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$



K6. **a)**

$$\begin{aligned} \sqrt{1-3x} &= 5 \\ 1-3x &= 25 \\ -3x &= 24 \quad \|:(-3) \\ x &= -8 \end{aligned}$$

b) $x\sqrt{x} = 1000$

Yhtälön vasen puoli on määritelty, kun $x \geq 0$. Tällöin yhtälön molemmat puolet ovat ei-negatiivisia ja yhtälö voidaan korottaa puolittain toiseen potenssiin.

$$\begin{aligned} x^2 \cdot x &= 1000^2 \\ x^3 &= 1000000 \quad \| \sqrt[3]{} \\ x &= 100 \end{aligned}$$

Ratkaisu toteuttaa määrittelyehdon.

c)

$$\begin{aligned} \sqrt{x+1} + 1 &= x \\ \sqrt{x+1} &= x-1 \end{aligned}$$

Yhtälön vasen puoli on määritelty ja ei-negatiivinen, kun $x \geq -1$. Myös yhtälön oikean puolen tulee olla ei-negatiivinen, eli $x \geq 1$. Molemmat ehdot toteutuvat, kun $x \geq 1$. Korotetaan yhtälö puolittain toiseen potenssiin.

$$\begin{aligned} x+1 &= (x-1)^2 \\ x+1 &= x^2 - 2x + 1 \\ x^2 - 3x &= 0 \\ x(x-3) &= 0 \\ x = 0 \ \text{ tai } \ x &= 3 \end{aligned}$$

Ratkaisuista ehdot toteuttaa vain $x = 3$.

d)

$$4\sqrt{x-3}-x=0$$
$$4\sqrt{x-3}=x$$

Yhtälön vasen puoli on määritelty, kun $x \geq 3$. Tällöin myös oikea puoli saa ei-negatiivisia arvoja. Korotetaan yhtälö puolittain toiseen potenssiin.

$$16(x-3)=x^2$$
$$x^2-16x+48=0$$
$$x=4 \text{ tai } x=12$$

Molemmat ratkaisut toteuttavat ehdot.

e) $f(x)=\sqrt{x^2+2x}$

Funktio f on määritelty, kun juurrettava $x^2 + 2x \geq 0$.

$$x^2+2x=0$$
$$x(x+2)=0$$
$$x=0 \text{ tai } x=-2$$

Kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, joten $x^2 + 2x \geq 0$, kun $x \leq -2$ tai $x \geq 0$.

$$f'(x)=\mathrm{D}(x^2+2x)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(x^2+2x)^{-\frac{1}{2}}\cdot(2x+2)=\frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x}},$$

$x < -2$ ja $x < 0$

$$\frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x}}=0, \text{ kun}$$
$$2x+2=0$$
$$x=-1$$

Ratkaisu ei kuulu määrittelyjoukkoon, joten yhtälöllä ei ole ratkaisuja.

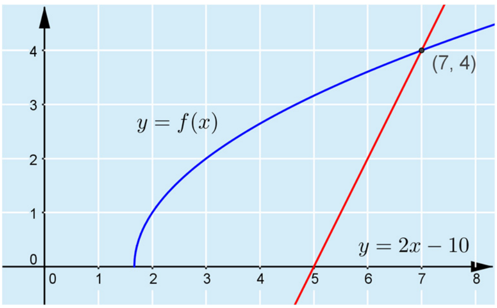
K7. Funktion f kuvaajan ja suoran leikkauspisteet ratkaistaan yhtälöstä $\sqrt{3x-5}=2x-10$.

Yhtälön vasen puoli on määritelty ja ei-negatiivinen, kun $3x - 5 \geq 0$, eli $x \geq \frac{5}{3}$. Yhtälön oikean puolen tulee myös olla ei-negatiivinen: $2x - 10 \geq 0$, eli $x \geq 5$. Molemmat ehdot toteutuvat, kun $x \geq 5$. Korotetaan yhtälö puolittain toiseen potenssiin.

$$\begin{aligned}3x-5&=(2x-10)^2\\3x-5&=4x^2-40x+100\\4x^2-43x+105&=0\\x&=\frac{15}{4}\text{ tai }x=7\end{aligned}$$

Ratkaisuista ehdon täyttää vain $x = 7$.

Leikkauspisteen y-koordinaatti on $y = 2 \cdot 7 - 10 = 4$.
Leikkauspiste on (7, 4)



K8. Vaakasuoran tangentin kulmakerroin on 0. Funktion kuvaajalla on vaakasuora tangentti, jos jollakin muuttujan x arvolla $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = \mathrm{D}(x - x^{-\frac{1}{2}}) = 1 + \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = 1 + \frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat, kun $x > 0$.

$$1 + \frac{1}{2x\sqrt{x}} = 0$$
$$\frac{1}{2x\sqrt{x}} = -1$$

Koska $x > 0$, ei yhtälön vasen puoli voi olla negatiivinen millään x:n arvolla, joten yhtälöllä ei ole ratkaisua.

Opiskelijan väite on siis tosi.

K9. Laaditaan funktion $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$, $x>0$, kulkukaavio.

Määritetään funktion f derivaatta.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \mathrm{D}\frac{x+1}{\sqrt{x}} = \mathrm{D}\frac{x+1}{x^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{1\cdot x^{\frac{1}{2}}-(x+1)\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{(x^{\frac{1}{2}})^2} \\
&= \frac{{}^{2\sqrt{x})}\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1)}{x} \\
&= \frac{2x-(x+1)}{2x\sqrt{x}} \\
&= \frac{x-1}{2x\sqrt{x}}
\end{aligned}
$$

Lasketaan derivaatan nollakohdat.

$$
\begin{aligned}
\frac{x-1}{2x\sqrt{x}} &= 0, \text{ kun} \\
x-1 &= 0 \\
x &= 1
\end{aligned}
$$

Kun $x > 0$, on derivaatan lausekkeen nimittäjä $2x\sqrt{x}$ aina positiivinen. Derivaatan merkki määräytyy osoittajan $x - 1$ merkin perusteella. $x - 1 > 0$, kun $x > 1$ ja $x - 1 < 0$, kun $0 < x < 1$.

	0		1	
$f'(x)$		$-$		$+$
$f(x)$		↘		↗

Funktion f pienin arvo on $f(1)=\dfrac{1+1}{\sqrt{1}}=\dfrac{2}{1}=2$. Suurinta arvoa ei ole.

K10. Funktio $f(x)=\sqrt{2x+4}+\sqrt{4-x}$ on määritelty, kun $2x + 4 \geq 0$, eli $x \geq -2$ ja $4 - x \geq 0$, eli $x \leq 4$. Funktio f on siis määritelty välillä $-2 \leq x \leq 4$.

Tutkitaan funktion kulkua derivaatan avulla.

$$\begin{aligned}f'(x) &= \mathrm{D}(\sqrt{2x+4}+\sqrt{4-x})\\ &= \mathrm{D}((2x+4)^{\frac{1}{2}}+(4-x)^{\frac{1}{2}})\\ &= \frac{1}{2}(2x+4)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2+\frac{1}{2}(4-x)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-1)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2x+4}}-\frac{1}{2\sqrt{4-x}},\ -2<x<4\end{aligned}$$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat.

$$\frac{1}{\sqrt{2x+4}}-\frac{1}{2\sqrt{4-x}}=0$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2x+4}} &= \frac{1}{2\sqrt{4-x}}\\ 2\sqrt{4-x} &= \sqrt{2x+4} \quad \|\,(\ )^2,\ -2<x<4\\ 4(4-x) &= 2x+4\\ 16-4x &= 2x+4\\ -6x &= -12 \quad \|:(-6)\\ x &= 2\end{aligned}$$

Derivaatan nollakohta $x = 2$ kuuluu funktion määrittelyvälille. Lasketaan derivaatan merkki nollakohdan kummallakin puolella testikohtien avulla.

$$f'(0)=\frac{1}{4}>0$$

$$f'(3)=\frac{1}{\sqrt{10}}-\frac{1}{2}<0$$

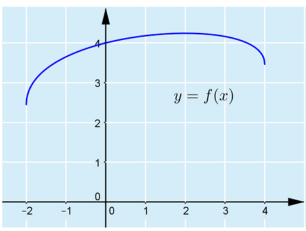
Funktio f on kasvava, kun $-2 \leq x \leq 2$ ja vähenevä, kun $2 \leq x \leq 4$.

Jatkuva funktio saa suurimman ja pienimmän arvonsa suljetulla välillä välin päätepisteissä tai derivaatan nollakohdissa.

$f(-2)=0+\sqrt{6}=\sqrt{6}$

$f(4)=\sqrt{12}+0=\sqrt{4\cdot 3}=2\sqrt{3}$

$f(2)=\sqrt{8}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}+\sqrt{2}=3\sqrt{2}$ (suurin).



Funktion suurin arvo on $3\sqrt{2}$.

K11. **a)** $f'(x)=e^{1-x^2}\cdot \mathrm{D}(1-x^2)=e^{1-x^2}\cdot(-2x)=-2xe^{1-x^2}$

b) $f'(x)=3e^{2x}\cdot \mathrm{D}(2x)=3e^{2x}\cdot 2=6e^{2x}$

$f'(0)=6e^{2\cdot 0}=6\cdot 1=6$

K12. Määritetään derivaattafunktio.

$$f'(x)=e^{2x}\cdot 2-18=2e^{2x}-18$$

Lasketaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$\begin{aligned}
2e^{2x}-18&=0\\
2e^{2x}&=18 \quad \|:2\\
e^{2x}&=9\\
2x&=\ln 9 \quad \|:2\\
x&=\frac{\ln 9}{2}=\frac{1}{2}\ln 9=\ln 9^{\frac{1}{2}}=\ln\sqrt{9}=\ln 3
\end{aligned}$$

K13. Pinta-alan funktio on $f(x) = 4\,100\,000 \cdot 0{,}995^x$.

Vuodesta 1970 on kulunut vuoteen 2030 mennessä 60 vuotta.

$$f(60) = 4\,100\,000 \cdot 0{,}995^{60} = 4\,100\,000 \cdot 0{,}740...$$

Pinta-ala on pienentynyt vuoteen 2030 mennessä 26 %.

Pinta-ala on puolittunut, kun kerroin $0{,}995^x$ on 0,5.

$$\begin{aligned} 0{,}995^x &= 0{,}5 \\ \ln 0{,}995^x &= \ln 0{,}5 \\ x \ln 0{,}995 &= \ln 0{,}5 \quad \| : \ln 0{,}995 \\ x &= \frac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}995} = 138{,}28... \end{aligned}$$

Pinta-ala on puolittunut, kun on kulunut 138,3 vuotta vuodesta 1970, eli vuoden 2108 aikana.

K14. Tarkastellaan funktion $f(x) = \dfrac{3x}{e^x}$ kulkua derivaatan avulla.

$$f'(x) = \frac{3e^x - 3x \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{\cancel{e^x}(3-3x)}{\cancel{e^x} \cdot e^x} = \frac{3-3x}{e^x}$$

Derivaattafunktion lausekkeessa nimittäjä e^x on positiivinen kaikilla muuttujan x arvoilla. Derivaatan merkkiin vaikuttaa vain osoittajan $3 - 3x$ merkki.

Funktio f on kasvava, kun $3 - 3x \geq 0$, eli $x \leq 1$ ja vähenevä, kun $x \geq 1$.

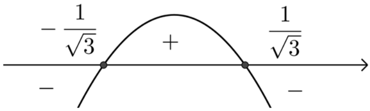
K15. Laaditaan funktion $f(x)=e^{x-x^3}$ kulkukaavio.

$f'(x)=e^{x-x^3}\cdot(1-3x^2)$

Derivaatan lausekkeessa tekijä e^{x-x^3} on aina positiivinen. Derivaatan merkkiin vaikuttaa vain tekijä $1-3x^2$.

Lasketaan derivaatan nollakohdat.

$$1-3x^2=0$$
$$3x^2=1$$
$$x^2=\frac{1}{3}$$
$$x=\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ tai } x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$



	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	↘	↗	↘

Funktion f paikallinen minimiarvo on

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=e^{-\frac{1}{\sqrt{3}}-\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3}=e^{-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}}=e^{-\frac{2}{3\sqrt{3}}}.$$

Funktion f paikallinen maksimiarvo on

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=e^{\frac{1}{\sqrt{3}}-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3}=e^{\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}}=e^{\frac{2}{3\sqrt{3}}}.$$

Lasketaan funktion arvo suljetun välin $[-1, 2]$ päätepisteissä.

$$f(-1)=e^{-1-(-1)^3}=e^0=1$$

$$f(2)=e^{2-2^3}=e^{-6}=\frac{1}{e^6}$$

Funktion suurin arvo välillä $[-1, 2]$ on $e^{\frac{2}{3\sqrt{3}}}$ ja pienin arvo $\frac{1}{e^6}$.

K16. Tutkitaan funktion $f(x) = (x^2 - x - 5)e^{-x}$ kulkua derivaatan avulla, kun $x \geq 0$.

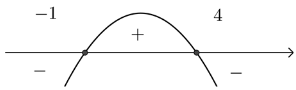
$$f'(x) = (2x-1)e^{-x} + (x^2 - x - 5)e^{-x} \cdot (-1) = (-x^2 + 3x + 4)e^{-x}$$

Derivaatan lausekkeessa tekijä e^{-x} on aina positiivinen, joten derivaatan merkkiin vaikuttaa vain tekijän $-x^2 + 3x + 4$ merkki.

Lasketaan derivaatan nollakohta.

$-x^2 + 3x + 4 = 0$

$x = -1$ tai $x = 4$



Laaditaan kulkukaavio.

		0	4
$f'(x)$		+	−
$f(x)$		↗	↘

Funktion suurin arvo on $f(4) = (4^2 - 4 - 5)e^{-4} = 7e^{-4} = \dfrac{7}{e^4}$.

Funktion arvo kohdassa $x = 0$ on $f(0) = -5$.

Kun muuttujan arvot kasvavat kohdan $x = 4$ jälkeen, funktio arvot pienenevät. Funktion lausekkeessa tekijän $x^2 - x - 5$ nollakohdat ovat $x \approx -1{,}8$ ja $x \approx 2{,}8$. Tekijällä $x^2 - x - 5$ ei ole nollakohtia kohdan $x = 4$ oikealla puolella ja koska sen kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, on tekijä aina positiivinen, kun $x > 4$. Myös tekijä e^{-x} on aina positiivinen. Funktio f saa siis vain positiivisia arvoja kohdan $x = 4$ oikealla puolella. Tällöin funktion f pienin arvo on -5.

K17. **a)** $\log_2 16 = 4$, koska $2^4 = 16$.

b) Yhtälön $3^x = 20$ ratkaisu on $x = \log_3 20 \approx 2{,}73$

c) $\log_3 9 = 2$, koska $3^2 = 9$

$\log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2}$, koska $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

$\log_3 1 = 0$, koska $3^0 = 1$

d) $\log_5 x = -2$

$$x = 5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$$

e) $7 = e^{\ln 7}$

K18. **a)** $\log_3 \sqrt[3]{3} = \log_3 3^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$

b) $\log_6 4 + \log_6 9 = \log_6 4 \cdot 9 = \log_6 36 = \log_6 6^2 = 2$

c) $\ln \frac{7}{3} + \ln 3 = \ln \frac{7}{3} \cdot 3 = \ln 7$

d)

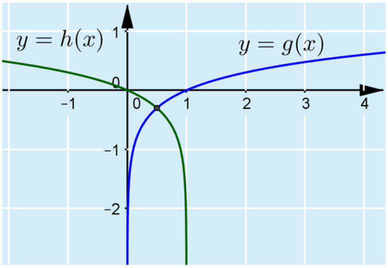
$$\begin{aligned}
\ln 2 - 0{,}5 \ln 16 &= \ln 2 - \ln 16^{0{,}5} \\
&= \ln 2 - \ln \sqrt{16} \\
&= \ln 2 - \ln 4 \\
&= \ln \frac{2}{4} \\
&= \ln \frac{1}{2} \\
&= \ln 2^{-1} \\
&= -\ln 2
\end{aligned}$$

K19. Lasketaan kuvaajien leikkauspiste yhtälöstä $g(x) = h(x)$.

$$\begin{aligned} \lg x &= \lg(1-x) \\ x &= 1 - x \\ 2x &= 1 \\ x &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$y = g\left(\frac{1}{2}\right) = \lg \frac{1}{2} = -\lg 2$$

Leikkauspiste on $\left(\frac{1}{2}, \lg\frac{1}{2}\right)$.



K20. **a)**

$$
\begin{aligned}
3^x &= \frac{1}{27} \\
3^x &= \frac{1}{3^3} \\
3^x &= 3^{-3} \\
x &= -3
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
3 + \ln x^2 &= 2 \\
\ln x^2 &= -1 \\
x^2 &= e^{-1} \\
x = \frac{1}{\sqrt{e}} &\text{ tai } x = -\frac{1}{\sqrt{e}}
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
\log_3 x &= 2 - \log_3(x+8),\ x > 0 \\
\log_3 x + \log_3(x+8) &= 2 \\
\log_3 x(x+8) &= 2 \\
x(x+8) &= 3^2 \\
x^2 + 8x - 9 &= 0 \\
x = -9 &\text{ tai } x = 1
\end{aligned}
$$

Määrittelyehdon täyttää vain $x = 1$.

d)

$$
\begin{aligned}
25 \cdot 5^x &= 0,2 \\
5^2 \cdot 5^x &= \frac{2}{10} \\
5^{2+x} &= \frac{1}{5} \\
5^{2+x} &= 5^{-1} \\
2 + x &= -1 \\
x &= -3
\end{aligned}
$$

K21. Funktio $f(x) = \ln(3 - x)$ on määritelty, kun $3 - x > 0$, eli kun $x < 3$.

Funktion f arvo kohdassa nolla: $f(0) = \ln(3 - 0) = \ln 3$.

Funktion f nollakohdat:

$$
\begin{aligned}
\ln(3 - x) &= 0 \\
3 - x &= e^0 \\
3 - x &= 1 \\
x &= 2
\end{aligned}
$$

K22. **a)** $f'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \dfrac{1}{x} = \ln x + 1,\ x > 0$

b) $f'(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$

K23. Tutkitaan funktion $f(x) = x^2 \ln x$, $x > 0$ kulkua derivaatan avulla.

$$f'(x) = 2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \ln x + x \text{, } x > 0$$

Lasketaan derivaatan nollakohdat.

$$\begin{aligned} 2x \ln x + x &= 0 \\ x(2\ln x + 1) &= 0 \\ x = 0 \text{ tai } 2\ln x + 1 &= 0 \\ 2 \ln x &= -1 \\ \ln x &= -\frac{1}{2} \\ x &= e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0{,}6 \end{aligned}$$

Vain nollakohta $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ toteuttaa määrittelyehdon.

Laaditaan funktion kulkukaavio. Kun $x > 0$, derivaatan lausekkeessa tekijä x on positiivinen, joten derivaatan merkkiin vaikuttaa vain tekijä $2 \ln x + 1$.

Lasketaan derivaatan merkki testipisteissä.

x	$f'(x)$	merkki
0,5	−0,19	−
1	1	+

		0		$\frac{1}{\sqrt{e}}$	
$f'(x)$			−		+
$f(x)$			$\searrow$		$\nearrow$

Funktion pienin arvo on

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2 \cdot \ln \frac{1}{\sqrt{e}} = \frac{1}{e} \cdot \ln e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{e} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2e}.$$

K24. Epäyhtälö $x - \ln x \geq 1$ voidaan kirjoittaa muodossa $x - \ln x - 1 \geq 0$.

Tarkastellaan funktiota $f(x) = x - \ln x - 1$.

Funktio f on määritelty, kun $x > 0$.

Tutkitaan funktion f kulkua derivaatan avulla.

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x},\ x > 0$$

Lasketaan derivaatan nollakohdat.

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{x} &= 0 \\ \frac{1}{x} &= 1 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Laaditaan funktion kulkukaavio.

Lasketaan derivaatan merkki testipisteissä.

x	$f'(x)$	merkki
0,5	-1	$-$
2	$\frac{1}{2}$	$+$

		0	1
$f'(x)$		$-$	$+$
$f(x)$		↘	↗

Funktion f pienin arvo on $f(1) = 1 - \ln 1 - 1 = 0$.

Tällöin epäyhtälö $x - \ln x - 1 \geq 0$ pätee aina, joten myös epäyhtälö $x - \ln x \geq 1$ on tosi.

Kokoavia tehtäviä

ILMAN TEKNISIÄ APUVÄLINEITÄ

1. **a)** epätosi

Ilmakehän hiilidioksidipitoisuus kasvaa joka vuosi yhtä monta prosenttia.

b) epätosi

Ilmakehän hiilidioksidipitoisuus kasvaa. (koska kerroin 1,0037 > 1).

c) epätosi

Ilmakehän hiilidioksidipitoisuus kasvaa joka vuosi 0,37 %.

d) tosi

2. **a)**

$$\sqrt{x} = 4$$
$$x = 16$$

b) $x^2 = 4$

$x = 2$ tai $x = -2$

c) $2^x = 32$

$x = 5$

d) $\ln x^2 = 0$

$x^2 = 1$

$x = 1$ tai $x = -1$

e)

$$2^{(x+1)^2} = 1$$
$$(x+1)^2 = 0$$
$$x+1 = 0$$
$$x = -1$$

f)

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{x^2-1}&=2\\ x^2-1&=2^3\\ x^2-1&=8\\ x^2&=9\\ x&=3 \text{ tai } x=-3\end{aligned}$$

3. Ratkaistaan e^x ehdosta $e^{2x} = 9$.

$$\begin{aligned}&e^{2x}=9\\ &(e^x)^2=9\\ &e^x=3 \;\; (\text{tai } e^x=-3)\end{aligned}$$

$$e^x+e^{-3x}=e^x+(e^x)^{-3}=3+3^{-3}=3+\frac{1}{3^3}=3+\frac{1}{27}=3\frac{1}{27}$$

4. **a)** $\ln(\frac{1}{3x^2})+\ln 3+2\ln x=\ln\frac{3}{3x^2}+\ln x^2=\ln\frac{1}{x^2}+\ln x^2=\ln\frac{x^2}{x^2}=\ln 1=0$

b) $\ln\frac{x}{2}+\ln\frac{e^x}{x}+\ln 2=\ln(\frac{x}{2}\cdot\frac{e^x}{x}\cdot 2)=\ln e^x=x$, $x>0$

c) $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a^2}}}=\sqrt{a\sqrt{a\cdot a}}=\sqrt{a\sqrt{a^2}}=\sqrt{a\cdot a}=\sqrt{a^2}=a$

5. Tutkitaan funktion $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$ kulkua derivaatan avulla.

$$f'(x) = \frac{1 \cdot e^x - x \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x - xe^x}{e^x \cdot e^x} = \frac{\cancel{e^x}(1-x)}{\cancel{e^x} \cdot e^x} = \frac{1-x}{e^x}$$

Lasketaan derivaatan nollakohta.

$$\begin{aligned} \frac{1-x}{e^x} &= 0 \\ 1-x &= 0 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Laaditaan funktion kulkukaavio.

Derivaatan lausekkeessa nimittäjä e^x saa vain positiivisia arvoja.
Derivaatan merkkiin vaikuttaa vain osoittajan $1 - x$ merkki.

$1 - x \geq 0$, kun $x \leq 1$ ja $1 - x \leq 0$, kun $x \geq 1$.

	1	
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	↗	↘

Funktion suurin arvo on $f(1) = \dfrac{1}{e^1} = \dfrac{1}{e}$. Funktiolla ei ole pienintä arvoa.

6. **a)** Jos tangentti on yhdensuuntainen suoran $y - 5x = 0$ eli $y = 5x$ kanssa, sen kulmakerroin on 5.

Tangentin kulmakerroin on derivaatan arvo tangentin sivuamispisteessä.

$f'(x) = e^x$

Ratkaistaan kohta, jossa derivaatan arvo on 5.

$e^x = 5$
$x = \ln 5$

Kun $x = \ln 5$, $y = f(\ln 5) = e^{\ln 5} = 5$.

Tangentin sivuamispiste on $(\ln 5, 5)$.

Tangentin yhtälö on

$$y - 5 = 5(x - \ln 5)$$
$$y = 5x - 5\ln 5 + 5.$$

b) $f'(x) = \mathrm{D}\sqrt{2x} = \mathrm{D}(2x)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(2x)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2x}}$, $x > 0$

$$\frac{1}{\sqrt{2x}} = 5$$

Yhtälön vasen puoli on määritelty, kun $x > 0$. Tällöin molemmat puolet ovat ei-negatiivisia, joten yhtälö voidaan korottaa puolittain toiseen potenssiin.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2x} &= 25 \\ 1 &= 50x \quad \|:50 \\ x &= \frac{1}{50} \end{aligned}$$

$$y = f\left(\frac{1}{50}\right) = \sqrt{2 \cdot \frac{1}{50}} = \sqrt{\frac{1}{25}} = \frac{1}{5}$$

Tangentin sivuamispiste on $\left(\frac{1}{50}, \frac{1}{5}\right)$.

Tangentin yhtälö on

$$\begin{aligned} y - \frac{1}{5} &= 5\left(x - \frac{1}{50}\right) \\ y - \frac{1}{5} &= 5x - \frac{1}{10} \\ y &= 5x + \frac{1}{10}. \end{aligned}$$

7. **a)** II, A, C, D, E

Funktio f on kasvava, koska eksponenttifunktion kantaluku $2 > 1$. Funktion f kuvaajalla on pisteet $(0, 2^0) = (0, 1)$ ja $(1, 2^1) = (1, 2)$. Nämä ehdot sopivat kuvaajaan II.

Eksponenttifunktio on määritelty kaikilla reaaliluvuilla ja se saa vain positiivisia arvoja.

Kun muuttujan arvo kasvaa yhdellä saadaan
$f(x + 1) = 2^{x+1} = 2^x \cdot 2^1 = 2f(x)$, eli funktion arvo kaksinkertaistuu.

b) IV, A, B, C

Funktio f on vähenevä, koska eksponenttifunktion kantaluku $0{,}5 < 1$. Funktion f kuvaajalla on pisteet $(0, 0{,}5^0) = (0, 1)$ ja $(1; 0{,}5^1) = (1; 0{,}5)$. Nämä ehdot sopivat kuvaajaan IV.

Eksponenttifunktio on määritelty kaikilla reaaliluvuilla ja se saa vain positiivisia arvoja.

Kun muuttujan arvo kasvaa yhdellä saadaan
$f(x + 1) = 0{,}5^{x+1} = 0{,}5^x \cdot 0{,}5^1 = 0{,}5f(x)$, eli funktion arvo puolittuu.

c) I, D, F

Funktio f on kasvava, koska logaritmifunktion kantaluku $e > 1$. Funktio on määritelty, kun $x > 0$. Funktion f kuvaajalla on piste $(1, \ln 1) = (1, 0)$. Nämä ehdot sopivat kuvaajaan I.

Kun muuttujan x arvo kaksinkertaistuu, saadaan
$f(2x) = \ln(2x) = \ln 2 + \ln x = f(x) + 2$. eli funktion arvo kasvaa vakioluvulla ln 2.

d) III, D

Parillinen juurifunktio on kasvava.

Funktion f määrittelyehto on $x \geq 0$. Funktion f kuvaajalla on pisteet $(0, 0)$, $(1, 1)$ ja $(4, 2)$. Nämä ehdot sopivat kuvaajaan III.

8. Jos funktion $f(x) = \sqrt{x}$ kuvaaja kulkee funktion $g(x) = \ln x$ kuvaajan yläpuolella, tulee epäyhtälön $f(x) > g(x)$ olla voimassa, kun $x > 0$.

$$\sqrt{x} > \ln x$$
$$\sqrt{x} - \ln x > 0$$

Tarkastellaan funktion $h(x) = \sqrt{x} - \ln x$ saamia arvoja.

$$h'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x}$$

Lasketaan derivaatan nollakohdat.

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = 0$$
$$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{x},\ x > 0$$
$$x = 2\sqrt{x}$$
$$x^2 = 4x$$
$$x^2 - 4x = 0$$
$$x(x-4) = 0$$
$$x = 0 \text{ tai } x = 4$$

Vain ratkaisu $x = 4$ toteuttaa määrittelyehdon.

Laaditaan funktion h kulkukaavio.

x	$h'(x)$	merkki
1	$-\frac{1}{2}$	$-$
5	$\frac{\sqrt{5}-2}{10}$	$+$

		0	4
$h'(x)$		$-$	$+$
$h(x)$		↘	↗

Funktion h pienin arvo on
$h(4) = \sqrt{4} - \ln 4 = 2 - 2\ln 2 \approx 0{,}614$.

Koska pienin arvo on positiivinen, saa funktio h vain positiivisia arvoja. Tällöin epäyhtälö $\sqrt{x} - \ln x > 0$ toteutuu kun $x > 0$ ja funktion f kuvaaja kulkee funktion g kuvaajan yläpuolella.

9. Kun $x \geq 0$, on yhtälön $\sqrt{x+1} = x^3$ molemmat puolet määritelty ja ei-negatiivisia, joten yhtälö voidaan korottaa puolittain toiseen potenssiin.

$$x + 1 = x^6$$
$$x^6 - x - 1 = 0$$

Tutkitaan funktion $f(x) = x^6 - x - 1$, $x \geq 0$ kulkua.

$$f'(x) = 6x^5 - 1,\ x > 0$$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat.

$$6x^5 - 1 = 0$$
$$x^5 = \frac{1}{6}$$
$$x = \frac{1}{\sqrt[5]{6}} \approx 0,7$$

Laaditaan funktion kulkukaavio.

x	$f'(x)$	merkki
0,5	$-\frac{13}{16}$	$-$
1	5	$+$

	0	$\frac{1}{\sqrt[5]{6}}$	
$f'(x)$		$-$	$+$
$f(x)$		↘	↗

$$f\left(\frac{1}{\sqrt[5]{6}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt[5]{6}}\right)^6 - \frac{1}{\sqrt[5]{6}} - 1 \approx -1,58$$
$$f(0) = -1$$

Funktio on vähenevä välillä $[0, \frac{1}{\sqrt[5]{6}}]$ ja se saa välin päätepisteissä negatiivisen arvon, joten välillä $]0, \frac{1}{\sqrt[5]{6}}[$ ei voi olla nollakohtia.

Välillä $[\frac{1}{\sqrt[5]{6}}, \infty[$ funktio f on kasvava, joten sillä on tällä välillä korkeintaan yksi nollakohta.

$f(1) = 1^6 - 1 - 1 = -1$
$f(2) = 2^6 - 2 - 1 = 61$

Koska $f(1)$ on positiivinen ja $f(2)$ negatiivinen, on välillä]1, 2[Bolzanon lauseen mukaan ainakin yksi nollakohta. Funktiolla on siis täsmälleen yksi nollakohta välillä $x \geq \frac{1}{\sqrt[5]{6}}$.

Funktion f ainut nollakohta on siis välillä]1, 2[.

10. Määritetään vektori $\overline{c}_t$.

$$\begin{aligned}
\overline{c}_t &= t\overline{a} + (1-t)\overline{b} \\
&= t(\overline{i} + 2\overline{j} + 3\overline{k}) + (1-t)(2\overline{i} + 5\overline{k}) \\
&= t\overline{i} + 2t\overline{j} + 3t\overline{k} + 2\overline{i} + 5\overline{k} - 2t\overline{i} - 5t\overline{k} \\
&= (-t+2)\overline{i} + 2t\overline{j} + (-2t+5)\overline{k}
\end{aligned}$$

Lasketaan vektorin $\overline{c}_t$ pituus.

$$\begin{aligned}
|\overline{c}_t| &= \sqrt{(-t+2)^2 + (2t)^2 + (-2t+5)^2} \\
&= \sqrt{t^2 - 4t + 4 + 4t^2 + 4t^2 - 20t + 25} \\
&= \sqrt{9t^2 - 24t + 29}
\end{aligned}$$

Vektorin pituus on pienin, kun juurrettava $9t^2 - 24t + 29$ on pienin. Juurrettavan kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, jonka pienin arvo on sen huipussa. Huippu löytyy derivaatan nollakohdasta.

$D(9t^2 - 24t + 29) = 18t - 24$

$18t - 24 = 0$
$t = \frac{24}{18} = \frac{4}{3}$

Vektorin pituus on mahdollisimman pienin parametrin arvolla $t = \frac{4}{3}$.

APUVÄLINEET SALLITTU

11. **a)** A ja C

b) B

c) ei mikään

12. Opiskelija korotti yhtälön molemmat puolet toiseen potenssiin. Kun yhtälö korotetaan parilliseen potenssiin, on varmistettava, että yhtälön molemmat puolet ovat määriteltyjä ja ei-negatiivisia. Opiskelija ei tehnyt tätä tarkistusta.

Saaduista ratkaisuista $x = -1$ ei toteuta alkuperäistä yhtälöä.

Yhtälön oikea ratkaisu olisi:

$$\sqrt{3-x} = x-1$$

Vasen puoli on määritelty ja ei negatiivinen, kun $3 - x \geq 0$, eli $x \leq 3$.

Koska oikea puoli on neliöjuuren tulos, on sen oltava ei-negatiivinen, eli $x - 1 \geq 0$, eli $x \geq 1$. Tällöin molemmat puolet voidaan korottaa toiseen potenssiin, kun $1 \leq x \leq 3$.

$$3-x = (x-1)^2$$
$$3-x = x^2-2x+1$$
$$x = -1 \text{ tai } x = 2$$

Vain $x = 2$ toteuttaa määrittelyehdon $1 \leq x \leq 3$.

13. **a)** Merkitään tiikerien määrää vuonna 2006 kirjaimella a ja vuosia vuodesta 2006 kirjaimella x. Vuotuinen kasvukerroin on p. Tiedetään, että vuonna 2022 tiikereitä on kaksi kertaa niin paljon kuin vuonna 2006, eli $2a$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan p.

$$a \cdot p^{16} = 2a$$
$$p^{16} = 2$$
$$p = \sqrt[16]{2} = 1{,}0442...$$

Tiikerien määrää kuvaava funktio on $f(x) = a \cdot 1{,}044^x$, missä a on tiikerien määrä vuonna 2006 ja x aika vuosina vuodesta 2006.

b) Lasketaan, kuinka monta tiikeriä mallin mukaan vuonna 2014 pitäisi olla.

$$f(8) = a \cdot 1{,}044^8 = a \cdot 1{,}41$$

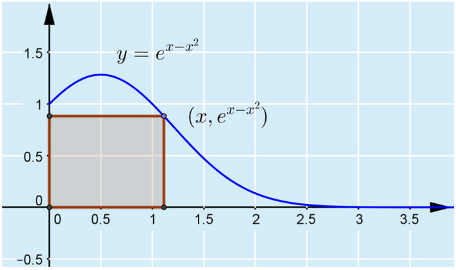
Vuonna 2016 tiikereitä oli 60 % enemmän kuin vuonna 2006, eli $a \cdot 1{,}6$. Tämä on enemmän kuin tavoitteen mukainen lukema, eli tavoite ollaan saavuttamassa.

c) Kun tiikerien määrä on nelinkertaistunut vuoteen 2006 verrattuna, on määrä $4a$. Ratkaistaan yhtälö $f(x) = 4a$.

$$a \cdot 1{,}044^x = 4a$$
$$1{,}044^x = 4$$
$$\ln 1{,}044^x = \ln 4$$
$$x \cdot \ln 1{,}044 = \ln 4 \quad \| : \ln 1{,}044$$
$$x = 32$$

Tiikerien määrä on nelinkertaistunut vuoteen 2006 verrattuna vuonna 2038.

14. Piirretään kuva tilanteesta.



Suorakulmion kanta on x ja korkeus e^{x-x^2}. Suorakulmion pinta-alaa kuvaava funktio on
$A(x) = xe^{x-x^2}$, $x > 0$.

Määritetään funktion A suurin arvo.

Laaditaan funktion A kulkukaavio.

$$A'(x) = e^{x-x^2} + xe^{x-x^2}(1-2x) = (1+x-2x^2)e^{x-x^2}$$

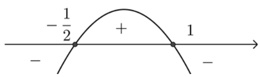
Derivaatan lausekkeessa tekijä e^{x-x^2} on aina positiivinen, joten derivaatan merkki riippuu vain tekijästä $1 + x - 2x^2$.

Lasketaan derivaatan nollakohta.

$1 + x - 2x^2 = 0$

$x = -\dfrac{1}{2}$ tai $x = 1$

Tekijän $1 + x - 2x^2$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli.



	0	1	
$A'(x)$		+	–
$A(x)$		↗	↘

Funktion A suurin arvo on $A(1) = 1 \cdot e^{1-1^2} = e^0 = 1$.

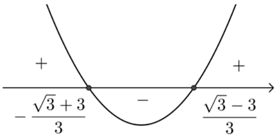
15. Yhtälö $(x+1)^3 = x$ voidaan kirjoittaa muodossa $(x+1)^3 - x = 0$. Yhtälöllä on täsmälleen yksi reaalijuuri, jos funktiolla $f(x) = (x+1)^3 - x$ on täsmälleen yksi nollakohta. Tutkitaan funktion f kulkua derivaatan avulla.

$f'(x) = 3(x+1)^2 - 1 = 3x^2 + 6x + 2$

Lasketaan derivaatan nollakohdat.

$3x^2 + 6x + 2 = 0$

$x = -\dfrac{\sqrt{3}+3}{3}$ tai $x = \dfrac{\sqrt{3}-3}{3}$



	$-\frac{\sqrt{3}+3}{3}$	$\frac{\sqrt{3}-3}{3}$	
$f'(x)$	+	−	+
$f(x)$	↗	↘	↗

$f(-\dfrac{\sqrt{3}+3}{3}) \approx 1{,}38$

$f(\dfrac{\sqrt{3}-3}{3}) \approx 0{,}62$

Koska funktion arvo on positiivinen kohdissa $x = -\dfrac{\sqrt{3}+3}{3}$ ja $x = \dfrac{\sqrt{3}-3}{3}$ ja funktio f on välillä $[-\dfrac{\sqrt{3}+3}{3}, \dfrac{\sqrt{3}-3}{3}]$ monotoninen, ei tällä välillä voi olla nollakohtaa. Välillä $x \geq \dfrac{\sqrt{3}-3}{3}$ on kasvava, joten se ei voi vaihtaa merkkiään positiivisesta negatiiviseksi, joten funktiolla f ei voi olla nollakohtaa tälläkään välillä.

Funktiolla voi olla nollakohta vain välillä $x < -\dfrac{\sqrt{3}+3}{3}$.

$f(-3) = -5$

Koska $f(-3)$ on negatiivinen ja $f(-\frac{\sqrt{3}+3}{3})$ positiivinen, on välillä $]-3, -\frac{\sqrt{3}+3}{3}[$ ainakin yksi nollakohta. Koska funktio f on tällä välillä kasvava, on nollakohtia korkeintaan yksi. Funktiolla f on siis tarkalleen yksi nollakohta.

Yhtälöllä $(x + 1)^3 = x$ on täsmälleen yksi reaalijuuri.

16. Käyrä $y = e^{-\sqrt{x}}$ on käyrän $y = e^{-x^2}$ alapuolella, kun epäyhtälö $e^{-\sqrt{x}} < e^{-x^2}$ toteutuu.

Ratkaistaan ensin käyrien leikkauspisteet yhtälöstä

$$\begin{aligned} e^{-\sqrt{x}} &= e^{-x^2} \\ -\sqrt{x} &= -x^2 \\ \sqrt{x} &= x^2. \end{aligned}$$

Yhtälön vasen puoli on määritelty, kun $x \geq 0$. Tällöin molemmat puolet ovat ei-negatiivisia, joten yhtälö voidaan korottaa puolittain toiseen potenssiin.

$$\begin{aligned} x &= x^4 \\ x^4 - x &= 0 \\ x(x^3 - 1) &= 0 \\ x &= 0 \text{ tai } x = 1 \end{aligned}$$

Kun $x = 0$, $y = e^0 = 1$ ja kun $x = 1$, $y = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

Käyrien leikkauspisteet ovat $(0, 1)$ ja $(1, \frac{1}{e})$.

Ratkaistaan epäyhtälö $e^{-\sqrt{x}} < e^{-x^2}$. Eksponenttifunktio e^x on kasvava, joten epäyhtälö toteutuu, kun

$$\begin{aligned} -\sqrt{x} &< -x^2 \quad \| : (-1) \\ \sqrt{x} &> x^2. \end{aligned}$$

Kun $x \geq 0$, on yhtälön molemmat puolet määritelty ja ei-negatiivisia, joten epäyhtälö voidaan korottaa toiseen potenssiin.

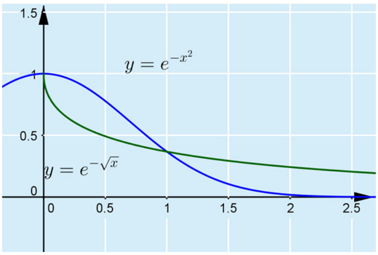
$$\begin{aligned} x &> x^4 \\ x - x^4 &> 0 \\ x(1 - x^3) &> 0 \end{aligned}$$

Kun $x = 0$, epäyhtälö ei toteudu.

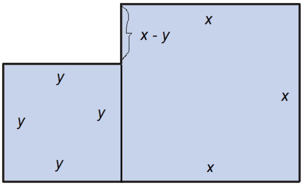
Kun $x > 0$, riippuu lausekkeen merkki vain tekijän $1 - x^3$ merkistä.

$$\begin{aligned} 1 - x^3 &> 0 \\ -x^3 &> -1 \quad \| : (-1) \\ x^3 &< 1 \quad \| \sqrt[3]{} \\ x &< 1 \end{aligned}$$

Epäyhtälön ratkaisu on $0 < x < 1$.



17. Merkitään kuvan mukaisesti suuremman neliön sivun pituutta kirjaimella x ja pienemmän kirjaimella y, $x > 0$ ja $y > 0$.



Kuvion piiri on $3x + 3y + (x - y) = 4x + 2y$.

Kuvion pinta-ala on $x^2 + y^2$. Koska pinta-ala on 20 cm^2, saadaan yhtälö, josta ratkaistaan y.

$$x^2 + y^2 = 20$$
$$y = \sqrt{20 - x^2} \quad (20 - x^2 > 0 \text{ eli } 0 < x < 2\sqrt{5})$$

Kuvion piiri voidaan ilmoittaa funktiona
$p(x) = 4x + 2\sqrt{20 - x^2}$, $0 < x < 2\sqrt{5}$.

Määritetään funktion p suurin arvo.

$$p'(x) = 4 - \frac{2x}{\sqrt{20 - x^2}}$$

Derivaatan nollakohdat:
$$4 - \frac{2x}{\sqrt{20 - x^2}} = 0$$
$$x = 4$$

Kulkukaavio:
$p'(x) > 0$, kun $0 < x < 4$ ja $p'(x) < 0$, kun $4 < x < 2\sqrt{5}$

		0		4		$2\sqrt{5}$	
$p'(x)$			+		–		
$p(x)$			↗		↘		

Funktion p suurin arvo on $p(4) = 20$.

Suuremman neliön sivun pituuden tulee olla 4 cm ja pienemmän 2 cm.

18. Koska sairastuneiden lukumäärä on kääntäen verrannollinen lausekkeeseen $1+\sqrt{e^t}$, on funktio *f* muotoa $f(t)=\frac{k}{1+\sqrt{e^t}}$. Koska aluksi sairastuneita oli 50, voidaan verrannollisuuskerroin *k* ratkaista yhtälöstä $f(0) = 50$.

$$\frac{k}{1+\sqrt{e^0}}=50$$
$$\frac{k}{2}=50$$
$$k=100$$

Funktio *f* on $f(t)=\frac{100}{1+\sqrt{e^t}}$, $t\geq 0$.

a) $f'(t)=-\frac{50\sqrt{e^t}}{(1+\sqrt{e^t})^2}$

Derivaatan lausekkeessa nimittäjä saa positiivisen luvun neliönä ja osoittaja positiivisen luvun neliöjuurena vain positiivisia arvoja. Kun positiivinen lauseke kerrotaan luvulla -1, voidaan päätellä, että derivaatan arvo aina negatiivinen. Tällöin muutosnopeus on negatiivinen ja siten sairastuneiden määrä vähenee.

b) Ratkaistaan yhtälö $f(t) = 10$.

$$\frac{100}{1+\sqrt{e^t}}=10$$
$$t=2\ln 9\approx 4{,}39\ldots$$

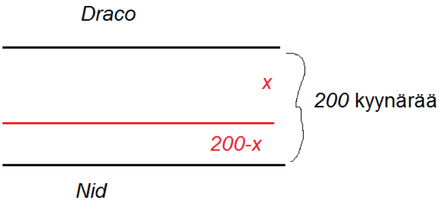
Koska sairastuneiden määrä vähenee, on sairastuneita alle 10, kun on kulunut 5 viikkoa alkuhetkestä.

c) Sairastuneita ei enää ole, kun sairastuneiden lukumäärä on alle 1. Ratkaistaan epäyhtälö $f(t) < 1$.

$$\frac{100}{1+\sqrt{e^t}}<1$$
$$t>2\ln 99\approx 9{,}1\ldots$$

Sairastuneita ei enää ole, kun on kulunut 10 viikkoa alkuhetkestä.

19. Piirretään kuva, joka havainnollistaa tilannetta. Merkitään kulkijan etäisyyttä Dracosta kirjaimella x.



Tulisuihkun vaikutus on suoraan verrannollinen lohikäärmeen kokoon ja kääntäen verrannollinen lohikäärmeestä mitatun etäisyyden kolmanteen potenssiin. Merkitään lohikäärmeen kokoa kirjaimella M ja etäisyyttä kulkijasta kirjaimella s. Tulisuihkun vaikutus on $k \cdot \frac{M}{s^3}$.

Jos Nidin koko on m, on Dracon koko $2m$.

Tulisuihkujen yhteisvaikutus on

$$k \cdot \frac{m}{(200-x)^3} + k \cdot \frac{2m}{x^3} = km\left(\frac{1}{(200-x)^3} + \frac{2}{x^3}\right).$$

Yhteisvaikutus on suurin, kun lauseke $\frac{1}{(200-x)^3} + \frac{2}{x^3}$ saa suurimman arvonsa.

Merkitään $f(x) = \frac{1}{(200-x)^3} + \frac{2}{x^3}$, $0 < x < 200$.

Määritetään funktion f suurin arvo.

Derivaatta:

$$f'(x) = \frac{3}{(200-x)^4} - \frac{6}{x^4}.$$

Derivaatan nollakohdat:

$$\frac{3}{(200-x)^4} - \frac{6}{x^4} = 0$$

$$x = 108{,}6\ldots \text{ tai } x = 1257{,}0\ldots$$

Näistä välillä $0 < x < 200$ on vain $x = 108{,}6\ldots$

$f'(x) < 0$, kun $0 < x < 108{,}6\ldots$ ja $f'(x) > 0$, kun $108{,}6\ldots < x < 200$.

		0		108,6…		200	
$f'(x)$			$-$		$+$		
$f(x)$			↘		↗		

Funktion f pienin arvo on kohdassa $x = 108{,}6\ldots$

Kulkijan tulee kulkea kohdassa, joka on 109 kyynärää Dracosta.

20. $f(x) = x^{\frac{1}{x}} = e^{\ln x^{\frac{1}{x}}} = e^{\frac{1}{x}\ln x}, \; x > 0$

Funktio f saa suurimman arvonsa, kun eksponentti $\frac{1}{x}\ln x$ on suurin.

Merkitään $g(x) = \dfrac{\ln x}{x}, \; x > 0$.

Tutkitaan funktion g kulkua derivaatan avulla.

$$g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Derivaatan nollakohdat:

$$\frac{1 - \ln x}{x^2} = 0$$
$$1 - \ln x = 0$$
$$x = e$$

$g'(x) > 0$, kun $0 < x < e$ ja $g'(x) < 0$, kun $x > e$

Kulkukaavio:

		0		e	
$g'(x)$			$+$		$-$
$g(x)$			↗		↘

Funktion g suurin arvo on kohdassa $x = e$.

Myös funktion f suurin arvo on kohdassa e. Suurin arvo on $f(e) = e^{\frac{1}{e}}$.