Kertaus

Integraalifunktio ja integrointi

KERTAUSTEHTÄVIÄ

K1. **a)** $\int (x^3 + 3x^2 + x - 1)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}x^4 + x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + C$

$$= \frac{x^4}{4} + x^3 + \frac{x^2}{2} - x + C$$

b) $\int 3e^{3x}\mathrm{d}x = e^{3x} + C$

c) $\int \cos 2x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int 2 \cdot \cos 2x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin 2x + C$

K2. Funktiot F_1 ja F_2 ovat saman funktion integraalifunktioita, jos niiden derivaattafunktiot ovat samat.

$$\mathrm{D}F_1(x) = \mathrm{D}\frac{2x}{x+1} = \frac{2(x+1) - 1 \cdot 2x}{(x+1)^2} = \frac{2x + 2 - 2x}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$$

$$\mathrm{D}F_2(x) = \mathrm{D}\frac{3x+1}{x+1} = \frac{3(x+1) - 1 \cdot (3x+1)}{(x+1)^2} = \frac{3x + 3 - 3x - 1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$$

Koska sekä funktion $F_1(x) = \frac{2x}{x+1}$ että funktion $F_2(x) = \frac{3x+1}{x+1}$ derivaattafunktio on $f(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$, molemmat funktiot F_1 ja F_2 ovat funktion f integraalifunktioita.

K3. Funktion $f(x)=\frac{1}{2}x^2-3x$ kaikki integraalifunktiot ovat

$$F(x)=\int(\frac{1}{2}x^2-3x)\mathrm{d}x=\frac{1}{6}x^3-\frac{3}{2}x^2+C.$$

Koska funktion F kuvaaja kulkee pisteen $(1,-\frac{1}{3})$ kautta, niin on oltava

$$F(1)=-\frac{1}{3}.$$

$$\frac{1}{6}\cdot1^3-\frac{3}{2}\cdot1^2+C=-\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{6}-\frac{3}{2}+C=-\frac{1}{3}$$

$$C=\ {}^{2)}\frac{-1}{3}-\frac{1}{6}+\ {}^{3)}\frac{3}{2}$$

$$C=-\frac{2}{6}-\frac{1}{6}+\frac{9}{6}$$

$$C=1$$

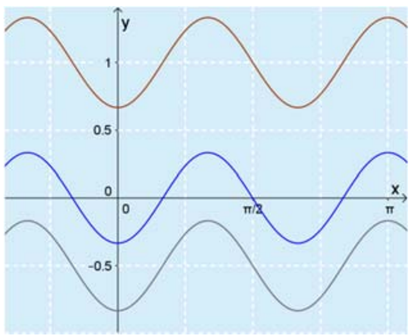
Kysytty funktio on $F(x)=\frac{1}{6}x^3-\frac{3}{2}x^2+1$.

K4. Funktion $f(x)$ = sin 3x kaikki integraalifunktiot ovat

$$F(x)=\int\sin3x\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int3\cdot\sin3x\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{3}\cos3x+C.$$

Kuvassa ovat integraalifunktion F kuvaajat alhaaltapäin lueteltuina integroimisvakion C arvoilla $-\frac{1}{2}$, 0 ja 1.



Integraalifunktio F, jonka kuvaaja kulkee pisteen $(\pi, \dfrac{10}{3})$ täyttää ehdon

$$F(\pi)=\frac{10}{3}.$$

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{3}\underbrace{\cos(3\pi)}_{=\cos\pi}+C&=\frac{10}{3}\\
-\frac{1}{3}\underbrace{\cos\pi}_{=-1}+C&=\frac{10}{3}\\
-\frac{1}{3}\cdot(-1)+C&=\frac{10}{3}\\
\frac{1}{3}+C&=\frac{10}{3}\\
C&=\frac{10}{3}-\frac{1}{3}\\
C&=\frac{9}{3}\\
C&=3
\end{aligned}$$

Kysytty integraalifunktio on $F(x)=-\dfrac{1}{3}\cos 3x+3$.

K5. **a)** $$\begin{aligned}
\int 3x(6x^2-1)^9\,dx&=\frac{1}{4}\int 4\cdot 3x(6x^2-1)^9\,dx\\
&=\frac{1}{4}\int 12x(6x^2-1)^9\,dx\\
&=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{10}(6x^2-1)^{10}+C\\
&=\frac{1}{40}(6x^2-1)^{10}+C
\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned}
\int\frac{6x^2}{x^3+1}\,dx&=\int 6x^2(x^3+1)^{-1}\,dx\\
&=2\int 3x^2(x^3+1)^{-1}\,dx\\
&=2\ln(x^3+1)+C
\end{aligned}$$

c) $\int (e^x+1)^2\,\mathrm{d}x = \int (e^{2x}+2e^x+1)\,\mathrm{d}x$

$= \int e^{2x}\,\mathrm{d}x + \int 2e^x\,\mathrm{d}x + \int 1\,\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{2}\int 2\cdot e^{2x}\,\mathrm{d}x + 2\int e^x\,\mathrm{d}x + \int 1\,\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{2}e^{2x} + 2e^x + x + C$

K6. **a)** $\int (\frac{1}{x^2}+\sqrt{x})\,\mathrm{d}x = \int (x^{-2}+x^{\frac{1}{2}})\,\mathrm{d}x$

$= -x^{-1} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$

$= -\frac{1}{x} + \frac{2}{3}x^1\cdot x^{\frac{1}{2}} + C$

$= -\frac{1}{x} + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$

b) $\int \frac{x^2-1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\overset{1}{\cancel{(x+1)}}(x-1)}{\underset{1}{\cancel{x+1}}}\,\mathrm{d}x$

$= \int (x-1)\,\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{2}x^2 - x + C$

c) $\int (\frac{1}{\sqrt{x}}-1)^2\,\mathrm{d}x = \int (\frac{1}{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}+1)\,\mathrm{d}x$

$= \int (\frac{1}{x}-2x^{-\frac{1}{2}}+1)\,\mathrm{d}x$

$= \ln\underbrace{|x|}_{x>0} - 2\cdot 2x^{\frac{1}{2}} + x + C$

$= \ln x - 4\sqrt{x} + x + C$

K7. **a)** Funktion $f(x) = e^{2x}$ kaikki integraalifunktiot ovat

$$F(x) = \int e^{2x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int 2e^{2x}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}e^{2x} + C.$$

Funktiolle F on voimassa $F(0) = -1$:

$$\frac{1}{2}e^{2\cdot 0} + C = -1$$
$$\frac{1}{2}\cdot 1 + C = -1$$
$$\frac{1}{2} + C = -1$$
$$C = -1\frac{1}{2} = -\frac{3}{2}.$$

Kysytty funktion f integraalifunktio on $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{3}{2}$.

b) Funktion $f(x) = 3 \sin 2x$ kaikki integraalifunktiot ovat

$$\begin{aligned} F(x) &= \int 3\sin 2x\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int 2\sin 2x\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{3}{2}\cos 2x + C. \end{aligned}$$

Koska $F(0) = -1$, niin

$$\begin{aligned} -\frac{3}{2}\cos(2\cdot 0) + C &= -1 \\ -\frac{3}{2}\cos 0 + C &= -1 \\ -\frac{3}{2}\cdot 1 + C &= -1 \\ C &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Kysytty funktion f integraalifunktio on $F(x) = -\frac{3}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}$.

c) Funktion $f(x) = \cos x \sin^2 x$ kaikki integraalifunktiot ovat

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \cos x \sin^2 x\,\mathrm{d}x \\ &= \int \cos x(\sin x)^2\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3}\sin^3 x + C. \end{aligned}$$

Koska $F(0) = -1$, niin

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}(\sin 0)^3 + C &= -1 \\ \frac{1}{3}\cdot 0^3 + C &= -1 \\ C &= -1. \end{aligned}$$

Kysytty funktion f integraalifunktio on $F(x) = \frac{1}{3}\sin^3 x - 1$.

K8. $f'(x)=\int f''(x)\mathrm{d}x$ ja $f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}f'(x)&=\int (20x^2(x-\frac{1}{2})^2\,\mathrm{d}x\\&=\int (20x^2(x^2-x+\frac{1}{4})\mathrm{d}x\\&=\int (20x^4-20x^3+5x^2)\mathrm{d}x\\&=4x^5-5x^4+\frac{5}{3}x^3+C\end{aligned}$$

Koska $f'(1)=-\frac{8}{3}$, niin

$$\begin{aligned}4\cdot 1^5-5\cdot 1^4+\frac{5}{3}\cdot 1^3+C&=-\frac{8}{3}\\4-5+\frac{5}{3}+C&=-\frac{8}{3}\\C&=-\frac{8}{3}-4+5-\frac{5}{3}\\C&=-\frac{10}{3}\end{aligned}$$

Funktion *f* derivaattafunktio on $f'(x)=4x^5-5x^4+\frac{5}{3}x^3-\frac{10}{3}$.

Funktio *f* saadaan integroimalla funktio f':

$$\begin{aligned}f(x)&=\int (4x^5-5x^4+\frac{5}{3}x^3-\frac{10}{3})\mathrm{d}x\\&=4\cdot\frac{1}{6}x^6-5\cdot\frac{1}{5}x^5+\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{4}x^4-\frac{10}{3}x+D\\&=\frac{2}{3}x^6-x^5+\frac{5}{12}x^4-\frac{10}{3}x+D.\end{aligned}$$

Funktiolle f on voimassa $f(1)=\frac{1}{4}$, joten

$$\frac{2}{3}\cdot 1^6 - 1^5 + \frac{5}{12}\cdot 1^4 - \frac{10}{3}\cdot 1 + D = \frac{1}{4}$$

$$\frac{2}{3} - 1 + \frac{5}{12} - \frac{10}{3} + D = \frac{1}{4}$$

$$D = \frac{1}{4} - \frac{2}{3} + 1 - \frac{5}{12} + \frac{10}{3}$$

$$D = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}.$$

Kysytty funktio on $f(x) = \frac{2}{3}x^6 - x^5 + \frac{5}{12}x^4 - \frac{10}{3}x + \frac{7}{2}.$

Määrätty integraali

KERTAUSTEHTÄVIÄ

K9. Funktion *f* arvojen muutos välillä [3, 5] on $f(5) - f(3)$.

$f(x) = \int f'(x)\mathrm{d}x$, joten $f(5) - f(2) = \int_2^5 f'(x)\mathrm{d}x$.

$$\int_3^5 \sqrt{3x-6}\,\mathrm{d}x = \int_3^5 (3x-6)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_3^5 3\cdot(3x-6)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{3}\Big/_3^5 \frac{2}{3}(3x-6)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{9}\Big/_3^5 (3x-6)^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{2}{9}((3\cdot 5-6)^{\frac{3}{2}} - (3\cdot 3-6)^{\frac{3}{2}})$$

$$= \frac{2}{9}(9^{\frac{3}{2}} - 3^{\frac{3}{2}}) = \frac{2}{9}(\sqrt{9^3} - \sqrt{3^3} = \frac{2}{9}(9\cdot\sqrt{9} - 3\sqrt{3})$$

$$= 2\cdot 3 - \frac{2\sqrt{3}}{3} = 6 - \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{18-2\sqrt{3}}{3}$$

Funktion *f* arvojen muutos välillä [2, 5] on $\frac{18-2\sqrt{3}}{3}$.

K10. **a)** $\int_2^5 v(t)\mathrm{d}t = \int_2^5 15\mathrm{d}t$

$$= \Big/_2^5 15t$$

$$= (15\cdot 5) - (15\cdot 2)$$

$$= 75 - 30$$

$$= 45$$

b) Kohdan *a* tulos 45 tarkoittaa kappaleen kulkemaa matkaa aikavälillä [2, 5]. Kappale siis kulkee 45 metriä kolmen sekunnin aikana.

K11. Kappaleen kiihtyvyys *a* on kappaleen nopeuden *v* muutosnopeus eli $a(t) = v'(t)$, joten $v(t) = \int a(t)\mathrm{d}t$.

Nyt nopeuden muutos ajanhetkestä $t = 0$ ajanhetkeen $t = 3$:

$$\begin{aligned}\int_0^3 9{,}81\,\mathrm{d}t &= \Big/_0^3 9{,}81t \\ &= (9{,}81\cdot 3) - (9{,}81\cdot 0) \\ &= 29{,}43\end{aligned}$$

Vasaran nopeus hetkellä, kun se osuu maahan on noin 29 m/s.

Kappaleen nopeus *v* on paikan *s* muutosnopeus eli $v(t) = s'(t)$, joten

$s(t) = \int v(t)\mathrm{d}t.$

Nyt paikan muutos ajanhetkestä $t = 0$ ajanhetkeen $t = 3$:

$$\begin{aligned}\int_0^3 9{,}81t\,\mathrm{d}t &= 9{,}81\int_0^3 t\,\mathrm{d}t \\ &= 9{,}81\Big/_0^3 \frac{1}{2}t^2 \\ &= 9{,}81\left(\frac{1}{2}\cdot 3^2 - \frac{1}{2}\cdot 0^2\right) \\ &= 9{,}81\cdot\frac{9}{2} \\ &= 44{,}145\end{aligned}$$

Vasara putoaa noin 44 m, joten rakennusteline on noin 44 metriä korkea.

K12. **a)** $\int_e^3 \frac{1}{x}\,dx = \mathop{/}_{e}^{3} \ln|x| = \ln|3| - \ln|e| = \ln 3 - 1$

b) Kirjoitetaan lauseke $|3x+4|$ ilman itseisarvomerkkejä.

Funktion $3x + 4$ kuvaaja on nouseva suora $y = 3x + 4$.

Funktion nollakohta saadaan yhtälöstä $3x + 4 = 0$, josta $x = -\frac{4}{3}$.

Nyt $3x + 4 < 0$, kun $x < -\frac{4}{3}$ ja $3x + 4 \geq 0$, kun $x \geq -\frac{4}{3}$, joten

$$|3x+4| = \begin{cases} -(3x+4), & \text{kun } x < -\frac{4}{3} \\ 3x+4, & \text{kun } x \geq -\frac{4}{3} \end{cases} = \begin{cases} -3x-4, & \text{kun } x < -\frac{4}{3} \\ 3x+4, & \text{kun } x \geq -\frac{4}{3} \end{cases}$$

Määrätty integraali lasketaan kahdessa välissä $[-2, -\frac{4}{3}]$ ja $[-\frac{4}{3}, 0]$.

$$\int_{-2}^{0} |3x+4|\,dx = \int_{-2}^{-\frac{4}{3}} (-3x-4)\,dx + \int_{-\frac{4}{3}}^{0} (3x+4)\,dx$$

$$= \mathop{/}_{-2}^{-\frac{4}{3}} (-\frac{3}{2}x^2 - 4x) + \mathop{/}_{-\frac{4}{3}}^{0} (\frac{3}{2}x^2 + 4x)$$

$$= [(-\frac{3}{2}\cdot(-\frac{4}{3})^2 - 4\cdot(-\frac{4}{3}) - (-\frac{3}{2}\cdot(-2)^2 - 4\cdot(-2))]$$

$$+[(\frac{3}{2}\cdot 0^2 + 4\cdot 0) - (\frac{3}{2}\cdot(-\frac{4}{3})^2 + 4\cdot(-\frac{4}{3}))]$$

$$= [(-\frac{8}{3} + \frac{16}{3}) - (-6+8)] + [0 - (\frac{8}{3} - \frac{16}{3})]$$

$$= \frac{8}{3} - 2 + \frac{8}{3} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$$

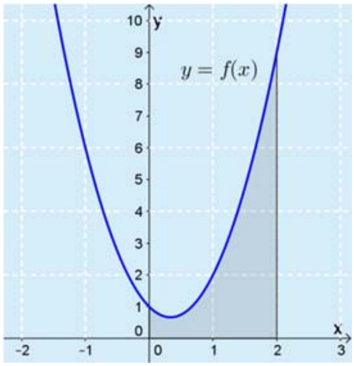
Käyrien rajoittaman alueen pinta-ala

KERTAUSTEHTÄVIÄ

K13. A–III, B–I ja C–II

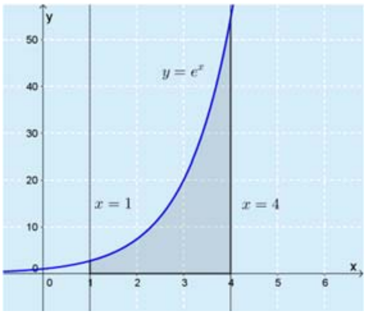
K14.
$$A=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2 (3x^2-2x+1)\mathrm{d}x$$
$$=\Big/_{\!0}^{2}(x^3-x^2+x)$$
$$=(2^3-2^2+2)-0$$
$$=6$$

Pinta-ala on 6.

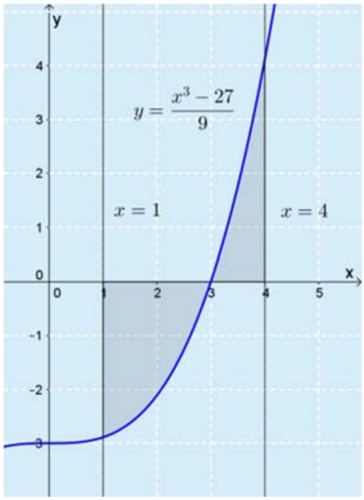


K15. **a)** Funktio e^x saa välillä [1, 4] positiivisia arvoja, joten
$$A=\int_1^4 e^x\mathrm{d}x$$
$$=\Big/_{\!1}^{4}e^x$$
$$=e^4-e^1$$
$$=e^4-e.$$

Pinta-ala on e^4-e.



b) Funktio $\frac{x^3-27}{9}$ saa välillä [1, 4] sekä negatiivisia että positiivisia arvoja, joten pinta-ala määritetään kahden osavälin avulla. Funktion merkki vaihtuu sen nollakohdassa.
Ratkaistaan funktion nollakohta.



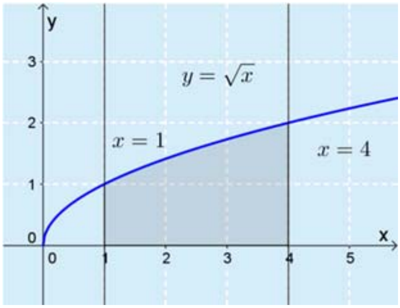
$$\frac{x^3-27}{9}=0$$
$$x^3-27=0$$
$$x^3=27 \quad || \sqrt[3]{}$$
$$x=\sqrt[3]{27}$$
$$x=3$$

$$A=-\int_1^3 \frac{x^3-27}{9}\mathrm{d}x+\int_3^4 (\frac{x^3-27}{9})\mathrm{d}x$$
$$=-\int_1^3 (\frac{x^3}{9}-\frac{27}{9})\mathrm{d}x+\int_3^4 (\frac{x^3}{9}-\frac{27}{9})\mathrm{d}x$$
$$=-\int_1^3 (\frac{1}{9}x^3-3)\mathrm{d}x+\int_3^4 (\frac{1}{9}x^3-3)\mathrm{d}x$$
$$=-\Big/_1^3(\frac{1}{36}x^4-3x)+\Big/_3^4(\frac{1}{36}x^4-3x)$$
$$=-[-\frac{27}{4}+\frac{107}{36}]+[-\frac{44}{9}+\frac{27}{4}]$$
$$=\frac{203}{36}=5\frac{23}{36}$$

Pinta-ala on $5\frac{23}{36}$.

c) Funktio $\sqrt{x}$ saa välillä [1, 4] positiivisia arvoja, joten

$$\begin{aligned} A &= \int_1^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int_1^4 x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x \\ &= \Big/_{\!1}^{4} \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{2}{3}\Big/_{\!1}^{4} x^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{2}{3}(4^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}) \\ &= \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3} \end{aligned}$$

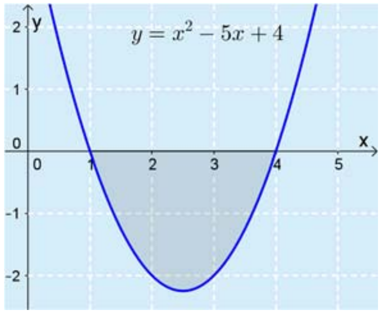


Pinta-ala on $4\frac{2}{3}$.

K16. **a)** Käyrä $y = x^2 - 5x + 4$ leikkaa x-akselin, kun $y = 0$.

$x^2 - 5x + 4 = 0$, josta $x = 1$ tai $x = 4$.

Käyrä leikkaa x-akselin kohdissa $x = 1$ ja $x = 4$.



b) Tasoalue on x-akselin alapuolella, joten

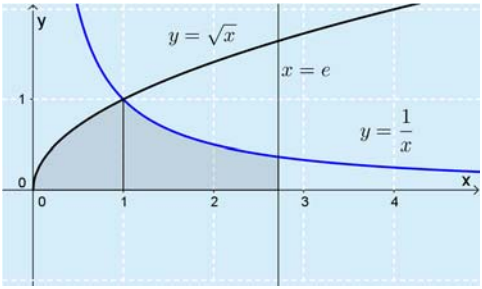
$$A = -\int_1^4 (x^2 - 5x + 4)\,\mathrm{d}x$$

$$= -\Big/_1^4 \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 4x\right)$$

$$= -\left(-\frac{8}{3} - \frac{11}{6}\right) = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$$

Pinta-ala on $4\frac{1}{2}$.

K17. Molemmat funktiot $\frac{1}{x}$ ja $\sqrt{x}$ saavat ei-negatiivisia arvoja tarkasteltavalla välillä [0, *e*]. Hahmotellaan tilannetta kuvan avulla.



Käyrien $y = \frac{1}{x}$ ja $y = \sqrt{x}$ leikkauskohta:

$$\frac{1}{x} = \sqrt{x} \quad \| \, (\,)^2, x > 0$$

$$\frac{1}{x^2} = x \, \| \cdot x^2$$

$$x^3 = 1 \quad \| \sqrt[3]{}$$

$$x = \sqrt[3]{1}$$

$$x = 1.$$

Tasoalueen pinta-ala saadaan kahden määrätyn integraalin avulla.

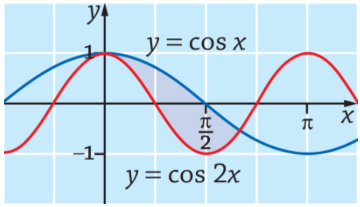
$$A = \int_0^1 \sqrt{x}\mathrm{d}x + \int_1^e \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x + \int_1^e \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

$$= \Big/_0^1 \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \Big/_1^e \ln x$$

$$= \frac{2}{3} - 0 + 1 - 0 = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$$

Pinta-ala on $1\frac{2}{3}$.

K18. Käyrät $y = \cos x$ ja $y = \cos 2x$ leikkaavat toisensa, kun $\cos x = \cos 2x$.



$$\begin{aligned}
\cos x &= \cos 2x \\
x &= \pm 2x + n \cdot 2\pi,\ n \in \mathbb{Z} \\
x &= 2x + n \cdot 2\pi \quad \text{tai} \quad x = -2x + n \cdot 2\pi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x - 2x &= n \cdot 2\pi & \qquad x + 2x &= n \cdot 2\pi \\
-x &= n \cdot 2\pi & 3x &= n \cdot 2\pi \quad \| : 3 \\
x &= n \cdot 2\pi & x &= n \cdot \frac{2\pi}{3}
\end{aligned}$$

Tarvittavat leikkauspisteet saadaan n:n arvoilla 0 ja 1.
Kun $n = 0$, saadaan alueen vasemman reunan leikkauskohta $x = 0$.
Alueen oikean reunan leikkauskohta saadaan yhtälöstä $x = n \cdot \frac{2\pi}{3}$, kun

$n = 1$: $x = 1 \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

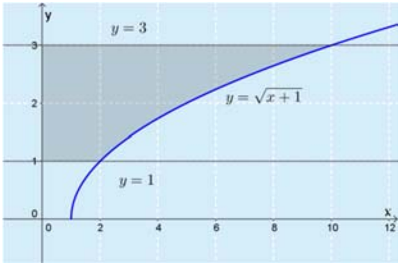
Tarkasteluvälillä $\cos x > \cos 2x$, joten alueen pinta-ala saadaan määrättynä

integraalina $A = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} (\cos x - \cos 2x)\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^{\frac{2\pi}{3}} (\cos x - \cos 2x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \cos x \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{2\pi}{3}} 2\cos 2x \mathrm{d}x \\
&= \Big/_0^{\frac{2\pi}{3}} \sin x - \frac{1}{2} \Big/_0^{\frac{2\pi}{3}} \sin 2x \\
&= (\sin \frac{2\pi}{3} - \sin 0) - \frac{1}{2}(\sin(2 \cdot \frac{2\pi}{3}) - \sin(2 \cdot 0)) \\
&= \frac{3\sqrt{3}}{4}
\end{aligned}$$

Vastaus: Leikkauskohdat ovat $x = 0$ ja $x = \frac{2\pi}{3}$ ja pinta-ala on $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

K19. Hahmotellaan tilannetta kuvan avulla.



Funktio $f(x)=\sqrt{x-1}$ on muuttujan x funktio, jonka kuvaajana on käyrä $y=\sqrt{x-1}$. Koska aluetta rajaa y-akselilla suorat $y = 1$ ja $y = 3$, alueen pinta-ala saadaan laskemalla muuttujan y funktion määrätty integraali välillä [1, 3].

Ratkaistaan yhtälö $y=\sqrt{x-1}$ muuttujan x suhteen.

$$y=\sqrt{x-1}$$

$$y^2=x-1$$

$$x=y^2+1$$

Kysytyn alueen pinta-ala saadaan määrättynä integraalina

$$\int_1^3 (y^2+1)\mathrm{d}y = \bigg/_{\!1}^{3}(\frac{1}{3}y^3+y)=(\frac{1}{3}\cdot 3^3+3)-(\frac{1}{3}\cdot 1^3+1)=10\frac{2}{3}.$$

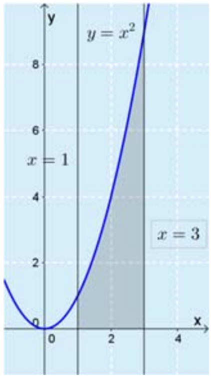
Pinta-ala on $10\frac{2}{3}$.

Tilavuus

KERTAUSTEHTÄVIÄ

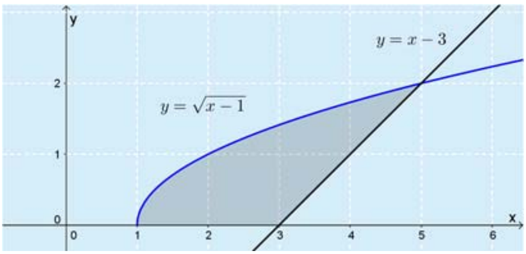
K20. Pyörähdyskappaleen tilavuus saadaan määrätyn integraalin avulla.

$$V = \pi\int_1^3 (x^2)^2\,\mathrm{d}x = \pi\int_1^3 x^4\,\mathrm{d}x$$
$$= \pi \Big/_1^3 \frac{1}{5}x^5$$
$$= \pi\left(\frac{1}{5}\cdot 3^5 - \frac{1}{5}\cdot 1^5\right)$$
$$= \pi\left(\frac{243}{5} - \frac{1}{5}\right)$$
$$= \frac{242\pi}{5}$$



Tilavuus on $\frac{242\pi}{5}$.

K21. Hahmotellaan tilannetta kuvan avulla:



Selvitetään käyrien $y = x - 3$ ja $y = \sqrt{x-1}$ leikkauspiste yhtälöstä

$\sqrt{x-1} = x - 3$.

Yhtälön määrittelyehto on $x - 1 \geq 0$, josta $x \geq 1$ (juurrettava) ja $x - 3 \geq 0$, josta $x \geq 3$ (neliöjuuren arvo). Ehdot ovat yhtä aikaa voimassa, kun $x \geq 3$.

$$\begin{aligned}
\sqrt{x-1} &= x-3 \quad \| ()^2 \\
(x-3)^2 &= x-1 \\
x^2-6x+9 &= x-1 \\
x^2-7x+10 &= 0
\end{aligned}$$

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4\cdot 1\cdot 10}}{2\cdot 1},$$

josta $x = 2$ tai $x = 5$.

Yhtälön ratkaisuista vain $x = 5$ toteuttaa määrittelyehdon.

Käyrä $y = \sqrt{x-1}$ leikkaa x-akselin, kun $y = 0$.

$$\begin{aligned}
\sqrt{x-1} &= 0 \\
x-1 &= 0 \\
x &= 1
\end{aligned}$$

Suoran $y = x - 3$ ja x-akselin leikkauskohta:

$$\begin{aligned}
x-3 &= 0 \\
x &= 3
\end{aligned}$$

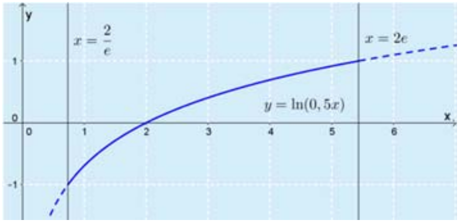
Pyörähdyskappaleen tilavuus voidaan laskea kahden pyörähdyskappaleen tilavuuden avulla. Ulompi kappale syntyy, kun käyrä $y = \sqrt{x-1}$ pyörähtää välillä [1, 5] ja sisempi, kun suora $y = x - 3$ pyörähtää välillä [3, 5] x-akselin ympäri.

$$\begin{aligned}
V &= \pi\int_1^5 (\sqrt{x-1})^2\,\mathrm{d}x - \pi\int_3^5 (x-3)^2\,\mathrm{d}x \\
&= \pi\int_1^5 (x-1)\mathrm{d}x - \pi\int_3^5 (x^2-6x+9)\mathrm{d}x \\
&= \pi\Big/_1^5 (\frac{1}{2}x^2 - x) - \pi\Big/_3^5 (\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x) \\
&= 8\pi - \frac{8\pi}{3} = \frac{16\pi}{3}
\end{aligned}$$

Tilavuus on $\frac{16\pi}{3}$.

K22. Koska käyrä pyörähtää y-akselin ympäri, niin pyörähdyskappaleen tilavuus saadaan määrättynä integraalina muuttujan y suhteen. Ratkaistaan yhtälö $y = \ln(0{,}5x)$ muuttujan x suhteen:

$$y = \ln(0{,}5x)$$
$$e^y = 0{,}5x \quad \| \cdot 2$$
$$2e^y = x$$



Integroimisrajat y-akselilta saadaan selville muuttujan x arvoilla $\frac{2}{e}$ ja $2e$:

alaraja: $y = \ln(0{,}5 \cdot \frac{2}{e}) = \ln(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{e}) = \ln(\frac{1}{e}) = -1$

yläraja: $y = \ln(0{,}5 \cdot 2e) = \ln e = 1$.

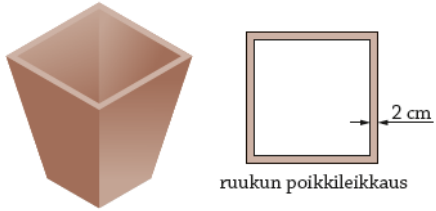
Pyörähdyskappale syntyy, kun käyrä $x = 2e^y$ pyörähtää y-akselin ympäri välillä $]-1, 1[$.

Pyörähdyskappaleen tilavuus saadaan määrättynä integraalina

$$V = \pi \int_{-1}^{1} (2e^y)^2 \mathrm{d}y = 2\pi \int_{-1}^{1} (2e^{2y}) \mathrm{d}y$$
$$= 2\pi \mathop{/}_{-1}^{1} e^{2y}$$
$$= 2\pi(e^2 - e^{-2})$$
$$= 2\pi(e^2 - \frac{1}{e^2}) = 2\pi \frac{e^4 - 1}{e^2} (= 45{,}57...)$$

Tilavuus on $2\pi \frac{e^4 - 1}{e^2}$.

K23. Saviruukun sisäosan pohjaneliön sivun pituus on
20 cm – 2 cm – 2 cm = 16 cm
ja suuaukon neliön sivun pituus on
36 cm – 2 · 2 cm = 32 cm.



Saviruukun pohjaneliön sivun pituus kasvaa tasaisesti (lineaarisesti) korkeudelta 2 cm korkeuteen 40 cm sivun pituudesta 16 cm sivun pituuteen 32 cm. Sivun pituuden kasvu korkeuden yhtä senttimetriä kohti on $\frac{32\text{ cm}-16\text{ cm}}{40\text{ cm}-2\text{ cm}}=\frac{16\text{ cm}}{38\text{ cm}}=\frac{8}{19}\approx 0,42.$

Kun ruukkua leikataan korkeutta vastaan kohtisuoralla leikkauksella korkeudelta h, on poikkileikkausneliön sivun pituus $16+\frac{8}{19}h$.

Poikkileikkausneliön pinta-ala korkeudella h saadaan lausekkeesta
$(16+\frac{8}{19}h)^2=256+\frac{256}{19}h+\frac{64}{361}h^2$ $(16+0{,}4h)^2=256+12{,}8h+0{,}16h^2$.

Ruukun sisäosan korkeus on 40 cm – 2 cm = 38 cm.

Ruukun tilavuus saadaan määrättynä integraalina:

$$\begin{aligned}V&=\int_0^{38}(256+\frac{256}{19}h+\frac{64}{361}h^2)\,\mathrm{d}h\\&=\Big/_{0}^{38}(256h+\frac{128}{19}h^2+\frac{64}{361}\cdot\frac{1}{3}h^3)\\&=22698{,}67(\text{cm}^3)\\&\approx 23\ (\text{dm}^3).\end{aligned}$$

Ruukun tilavuus on noin 23 litraa.

Kokoavia tehtäviä

ILMAN TEKNISIÄ APUVÄLINEITÄ

1. **a)** Funktion f kuvaaja on paraabeli, ja kuvaajista ainoa paraabeli on kuvassa D. Varmistetaan vielä laskemalla, että pisteet (1, 0) ja (0, 0) ovat on funktion f kuvaajalla.
$f(1) = 1^2 - 1 = 0$
$f(0) = 0^2 - 0 = 0$
Kuvaaja D on funktion f kuvaaja, siis f – D.

Toisen asteen polynomifunktion integraalifunktio on kolmatta astetta oleva polynomifunktio. Kuvaajista ainoa kolmannen asteen polynomifunktion mahdollinen kuvaaja on kuvassa B, joten F – B.

Funktion g kuvaaja voidaan päätellä jäljelle jääneistä kuvista A ja C laskemalla esim. arvo $g(2) = \frac{1}{2}$. Siis g – C.

Nyt ainoa jäljelle jäänyt funktio on G, joten sen kuvaaja on kuvassa A. Siis G – A.

b) $F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x = \int (x^2 - x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + C$

Koska funktion F kuvaaja kulkee pisteen (1, 1) kautta, niin $F(1) = 1$. Ratkaistaan vakio C tämän tiedon avulla.

$$
\begin{aligned}
F(1) &= \frac{1}{3}\cdot 1^3 - \frac{1}{2}\cdot 1^2 + C \\
&= {}^{2)}\frac{1}{3} - {}^{3)}\frac{1}{2} + C \\
&= \frac{2}{6} - \frac{3}{6} + C \\
&= -\frac{1}{6} + C
\end{aligned}
$$

Yhtälöstä $-\frac{1}{6} + C = 1$ ratkaistaan C:

$C = \frac{7}{6}$

Siis $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{6}$.

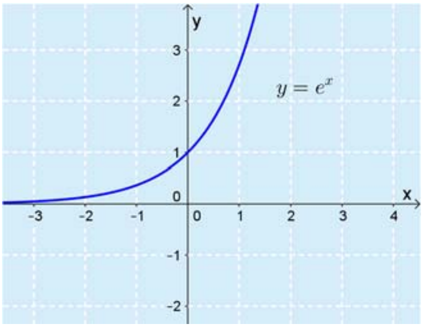
$$G(x) = \int g(x)\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|\underbrace{x}_{>0}| + C = \ln x + C$$

Koska funktion G kuvaaja kulkee pisteen (1, 1) kautta, niin $G(1) = 1$.
Ratkaistaan vakio C tämän tiedon avulla.
$G(1) = \ln 1 + C = 0 + C = C$
Koska $G(1) = 1$, niin nyt oltava $C = 1$.
Siis $G(x) = \ln x + 1$.

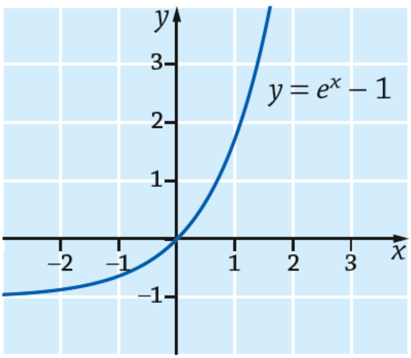
Vastaus: **a)** f – D, F – B, g – C ja G – A
b) $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{6}$ ja $G(x) = \ln x + 1$

2. Funktion f kaikki integraalifunktiot ovat $F(x) = \int e^x \mathrm{d}x = e^x + C$.

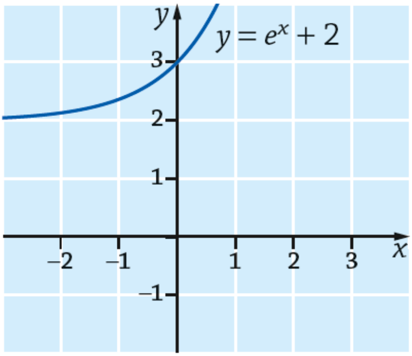
a) Hahmotellaan funktion e^x kuvaaja.



Eksponenttifunktioiden kuvaajat kulkevat aina pisteen (0, 1) kautta, sillä $a^0 = 1$, kaikilla $a > 0$. Koska halutun integraalifunktion kuvaaja kulkee origon, eli pisteen (0, 0) kautta, täytyy funktion e^x kuvaajaa siirtää yksi yksikkö alaspäin. Kysytty funktio on $e^x - 1$.



b) Suora $x = 0$ on y-akseli. Koska halutun integraalifunktion kuvaaja kulkee pisteen (0, 3) kautta, täytyy funktion e^x kuvaajaa siirtää kaksi pykälää ylöspäin. Kysytty funktio on $e^x + 2$.



3. $F(x) = \int \sin x \, dx = -\cos x + C$

Ratkaistaan vakio C tiedon $F(0) = 0$ avulla.

$F(0) = -\cos 0 + C = -1 + C$

Nyt $-1 + C = 0$

$C = 1$

Siis $F(x) = -\cos x + 1$.

Vastaus: $F(x) = -\cos x + 1$

4. **a)** $\int \underbrace{2}_{s'(x)} \underbrace{(2x-1)^3}_{u(s(x))} \mathrm{d}x = \underbrace{\frac{1}{4}(2x-1)^4}_{U(s(x))} + C$

b) $\int e^{3x} \mathrm{d}x = \int \overbrace{\frac{1}{3} \cdot 3}^{=1} \cdot e^{3x} \mathrm{d}x = \frac{1}{3} \int \underbrace{3}_{s'(x)} \cdot \underbrace{e^{3x}}_{u(s(x))} \mathrm{d}x = \frac{1}{3} \underbrace{e^{3x}}_{U(s(x))} + C$

c) $\int \frac{(2x-1)^2}{x} \mathrm{d}x = \int \frac{4x^2 - 4x + 1}{x} \mathrm{d}x = \int \left(4x - 4 + \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x$

$= 2x^2 - 4x + \ln|\underbrace{x}_{>0}| + C = 2x^2 - 4x + \ln x + C$

d) $\int \frac{1}{\sqrt{4-2x}} \mathrm{d}x = \int \frac{1}{(4-2x)^{\frac{1}{2}}} \mathrm{d}x = \int (4-2x)^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}x$

$= \int \overbrace{-\frac{1}{2} \cdot (-2)}^{=1} \cdot (4-2x)^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}x = -\frac{1}{2} \int \underbrace{-2}_{s'(x)} \cdot \underbrace{(4-2x)^{-\frac{1}{2}}}_{u(s(x))} \mathrm{d}x$

$= -\frac{1}{2} \cdot \underbrace{\frac{2}{1}(4-2x)^{\frac{1}{2}}}_{U(s(x))} + C = -\sqrt{4-2x} + C$

Vastaus: **a)** $\frac{1}{4}(2x-1)^4 + C$ **b)** $\frac{1}{3}e^{3x} + C$

c) $2x^2 - 4x + \ln x + C$ **d)** $-\sqrt{4-2x} + C$

5. Lasketaan määrätty integraali.

$$\int_{-1}^{3}(ax-1)\mathrm{d}x = \underset{-1}{\overset{3}{/}}\left(\frac{a}{2}x^2 - x\right) = \left(\frac{a}{2}\cdot 3^2 - 3\right) - \left(\frac{a}{2}\cdot(-1)^2 - (-1)\right)$$

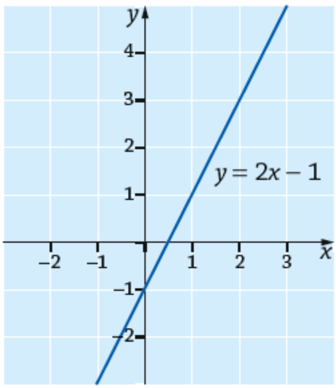
$$= \left(\frac{9a}{2} - 3\right) - \left(\frac{a}{2} + 1\right) = \frac{9a}{2} - 3 - \frac{a}{2} - 1 = \frac{8a}{2} - 4$$

$$= 4a - 4$$

Ehdosta $\int_{-1}^{3}(ax-1)\mathrm{d}x = 4$ saadaan yhtälö, josta ratkaistaan a:

$$\begin{aligned} 4a - 4 &= 4 \\ 4a &= 8 \\ a &= 2 \end{aligned}$$

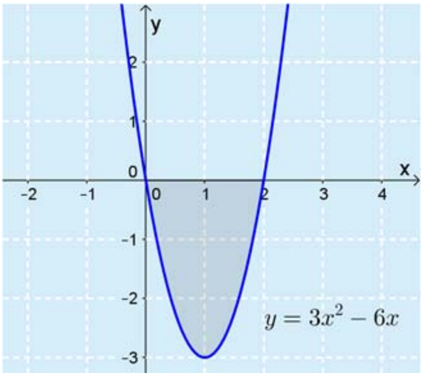
Ehdon täyttävä funktio on $2x - 1$.



Vastaus: $a = 2$, jolloin kysytty funktio on $2x - 1$.

6. Paraabeli $y = 3x^2 - 6x$ aukeaa ylöspäin, koska toisen asteen termin $3x^2$ kerroin 3 on positiivinen. Ratkaistaan paraabelin nollakohdat ja hahmotellaan kuva tilanteesta.

$$
\begin{aligned}
3x^2 - 6x &= 0 \\
3x(x-2) &= 0 \\
3x &= 0 \text{ tai } x - 2 = 0 \\
x &= 0 \text{ tai } x = 2
\end{aligned}
$$



Ylöspäin aukeava paraabeli saa nollakohtiensa välissä negatiivisia arvoja, joten paraabelin ja suoran $y = 0$, eli x-akselin, rajoittama alue on x-akselin alapuolella. Kysytyn alueen pinta-ala on $-\int_0^2 (3x^2 - 6x)\mathrm{d}x$.

$$
\begin{aligned}
-\int_0^2 (3x^2 - 6x)\mathrm{d}x &= -\Big/_{\!0}^{2} (x^3 - 3x^2) \\
&= -((2^3 - 3\cdot 2^2) - 0) \\
&= -(8 - 12) \\
&= -(-4) \\
&= 4
\end{aligned}
$$

Vastaus: Alueen pinta-ala on 4.

7. **a)** Määrätty integraali antaa funktion kuvaajan ja x-akselin välisen alueen pinta-alan vain, kun alue on x-akselin yläpuolella. Alue koostuu kahdesta osasta, välillä $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ alue on x-akselin yläpuolella, jolloin $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx$ ja välillä $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ x-akselin alapuolella, jolloin $A = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin 2x dx$. Kuvaaja on symmetrinen, joten kyseiset pinta-alat ovat yhtä suuret. Koska integraali laskettiin välillä [0, π], integraalin arvo on $A - A = 0$.

b) Kysytyn alueen pinta-ala on

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx + (-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin 2x dx) \\
&= \frac{1}{2} \mathop{/}_{0}^{\frac{\pi}{2}} (-\cos 2x) - \frac{1}{2} \mathop{/}_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\cos 2x) \\
&= -\frac{1}{2}(\cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) - \cos(2 \cdot 0)) + \frac{1}{2}(\cos 2\pi - \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right)) \\
&= -\frac{1}{2}(\cos \pi - \cos 0) + \frac{1}{2}(\cos 2\pi - \cos \pi) \\
&= -\frac{1}{2}(-1 - 1) + \frac{1}{2}(1 - (-1)) \\
&= -\frac{1}{2}(-2) + \frac{1}{2}(1 + 1) \\
&= 1 + 1 \\
&= 2
\end{aligned}
$$

Vastaus: **a)** Hän ei ottanut huomioon, että osa alueesta on x-akselin alapuolella.
b) Alueen pinta-ala on 2.

8. **a)** Lasketaan määrätty integraali.

$$\int_b^4 (3-2x)\,\mathrm{d}x = \int_b^4 \big(3x-x^2\big)$$
$$= \big(3\cdot 4-4^2\big)-\big(3b-b^2\big)$$
$$= 12-16-3b+b^2$$
$$= b^2-3b-4$$

Määrätyn integraalin arvo on 0, joten

$$b^2-3b-4=0$$
$$b=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot 1\cdot(-4)}}{2\cdot 1}$$
$$b=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{2}$$
$$b=\frac{3\pm\sqrt{25}}{2}$$
$$b=\frac{3\pm 5}{2}$$
$$b=\frac{3+5}{2} \quad \text{tai} \quad b=\frac{3-5}{2}$$
$$b=4 \qquad\qquad b=-1$$

b) Lasketaan määrätty integraali.

$$\int_{-1}^{b} e^x\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{b} e^x = e^b-e^{-1}=e^b-\frac{1}{e}$$

Määrätyn integraalin arvo on 1, joten

$$e^b-\frac{1}{e}=1$$
$$e^b=1+\frac{1}{e}$$
$$e^b=\frac{e}{e}+\frac{1}{e}$$
$$e^b=\frac{e+1}{e} \quad \| a^x=y \Rightarrow x=\log_a y, \quad \log_e x=\ln x$$
$$b=\ln\frac{e+1}{e} \quad \| \log\frac{x}{y}=\log x-\log y$$
$$b=\ln(e+1)-\ln e$$
$$b=\ln(e+1)-1$$

Vastaus: **a)** $b=-1$ tai $b=4$ **b)** $b=\ln(e+1)-1$

9. Funktiot f_1, f_2, f_3 ja f_4 ovat kasvavia välillä $[a, b]$, joten derivaattafunktiot f_1', f_2', f_3' ja f_4' ovat ei-negatiivisia. Näin ollen derivaattafunktioiden kuvaajien ja x-akselin välisten alueiden pinta-alat ovat määrätyt integraalit

$$\int_a^b f_1'(x)\,\mathrm{d}x = f_1(b) - f_1(a)$$
$$\int_a^b f_2'(x)\,\mathrm{d}x = f_2(b) - f_2(a)$$
$$\int_a^b f_3'(x)\,\mathrm{d}x = f_3(b) - f_3(a)$$
$$\int_a^b f_4'(x)\,\mathrm{d}x = f_4(b) - f_4(a).$$

Kaikki nämä ovat yhtä suuria, koska funktiot f_1, f_2, f_3 ja f_4 saavat sekä kohdassa a että kohdassa b saman arvon, jolloin arvojen erotus on kaikilla funktioilla sama.

10. esim.
a) $f(x) = 1$ tai $f(x) = x + 1$

b) $f(x) = x$ tai $f(x) = -x$

APUVÄLINEET SALLITTU

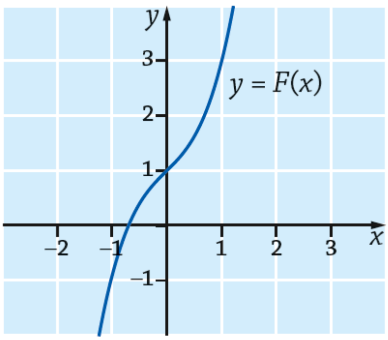
11. Funktion f kaikki integraalifunktiot ovat muotoa $F + C$, jossa $F'(x) = f(x)$. Funktion f kaikki integraalifunktiot F ovat kasvavia, jos $f(x) \geq 0$ kaikilla muuttujan x arvoilla.

Koska $x^2 \geq 0$ kaikilla muuttujan x arvoilla, niin tällä perusteella $3x^2 \geq 0$ ja siten $3x^2 + 1 \geq 1$. Siis funktion $f(x) = 3x^2 + 1$ arvot ovat aina positiivisia ja tällä perusteella kaikki funktion f integraalifunktiot $F + C$ ovat kasvavia.

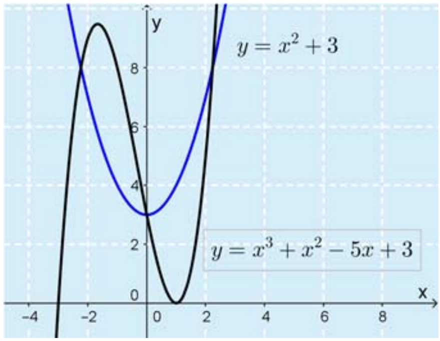
Määritetään funktion F lauseke.

$$F(x) = \int (3x^2 + 1)\mathrm{d}x = x^3 + x + C.$$

Koska integroimisvakio $C = 1$, niin kysytty integraalifunktio on $F(x) = x^3 + x + 1$.



12. **a)** Hahmotellaan tilannetta piirtämällä kuva.



Käyrien leikkauskohdat saadaan yhtälöstä

$x^2 + 3 = x^3 + x^2 - 5x + 3$
$x^3 - 5x = 0$
$x(x^2 - 5) = 0.$

Yhtälön ratkaisut ja käyrien leikkauskohdat ovat $x = -\sqrt{5}$, $x = 0$ ja $x = \sqrt{5}$.

b) Alue rajoittuu 1. neljännekseen, joten rajat ovat $x = 0$ ja $x = \sqrt{5}$.
Osoitetaan, että käyrän $y = x^2 + 3$ kuvaaja on ylempänä kuin käyrän $y = x^3 + x^2 - 5x + 3$ kuvaaja tällä välillä.
Tarkastellaan vastaavien funktioiden arvoja testikohdassa väliltä $]0, \sqrt{5}[$.
Valitaan kohdaksi $x = 1$, jossa funktio $x^2 + 3$ saa arvon $1^2 + 3 = 4$, ja funktio $x^3 + x^2 - 5x + 3$ saa arvon $1^3 + 1^2 - 5 \cdot 1 + 3 = 0$.
Funktion $x^2 + 3$ arvot ovat tarkasteltavalla välillä suurempia.

Alueen pinta-ala on

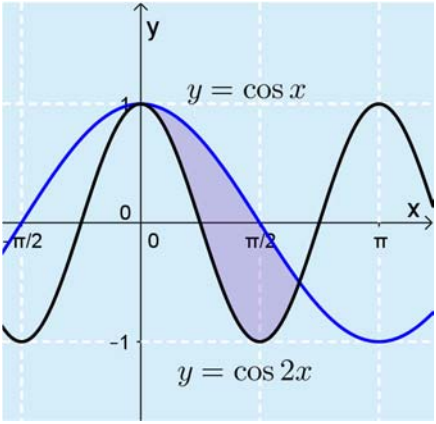
$$A = \int_0^{\sqrt{5}} ((x^2 + 3) - (x^3 + x^2 - 5x + 3))\mathrm{d}x = \int_0^{\sqrt{5}} (-x^3 + 5x)\mathrm{d}x$$

$$= \Big/_{\!0}^{\sqrt{5}} (-\frac{1}{4}x^4 + \frac{5}{2}x^2)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{25}{4} = 6\frac{1}{4}$$

Vastaus: **a)** $x = -\sqrt{5}$, $x = 0$ ja $x = \sqrt{5}$ **b)** Alueen pinta-ala on $\frac{25}{4}$.

13. Hahmotellaan tilannetta piirtämällä kuva.



Ratkaistaan käyrien leikkauskohdat.
$\cos x = \cos 2x$

$$x = \pm 2x + n \cdot 2\pi$$

$$x = n \cdot 2\pi \text{ tai } x = n \cdot \frac{2\pi}{3}.$$

Välillä $]0, \pi[$ on leikkauskohta $x = \frac{2\pi}{3}$.

Osoitetaan, että funktion $\cos x$ kuvaaja on ylempänä kuin funktion $\cos 2x$ kuvaaja välillä $]0, \frac{2\pi}{3}[$.

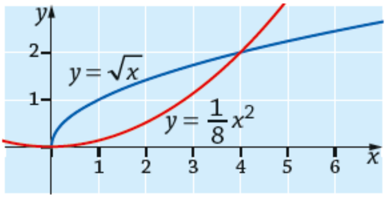
Välillä olevassa kohdassa $x = \frac{\pi}{2}$ funktion $\cos x$ arvo on 0 ja funktion $\cos 2x$ arvo on $\cos 2\pi = -1$, joten funktion $\cos x$ kuvaaja on ylempänä.
Käyrien rajoittaman alueen pinta-ala on

$$A = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} (\cos x - \cos 2x)\,\mathrm{d}x = \Big/_{\!0}^{\frac{2\pi}{3}} \left(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x\right)$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Vastaus: Alueen pinta-ala on $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

4. Piirretään kuva.



a) Merkitään $f(x) = \sqrt{x}$ ja $g(x) = \frac{1}{8}x^2$.

Ratkaistaan leikkauskohdat yhtälöstä $\sqrt{x} = \frac{1}{8}x^2$.

Yhtälöllä voi olla ratkaisuja vain kun $x \geq 0$ ja $\frac{1}{8}x^2 \geq 0$.

Koska $\frac{1}{8}x^2 \geq 0$ aina, niin yhtälön ratkaisun tulee toteuttaa ehto $x \geq 0$.
Ratkaistaan yhtälö.

$$\sqrt{x} = \frac{1}{8}x^2$$
$$x = 0 \text{ tai } x = 4$$

Kuvaajat leikkaavat kohdissa $x = 0$ ja $x = 4$.

Lasketaan molempien funktioiden arvot leikkauskohtien välillä olevassa testikohdassa, joka valitaan kohdaksi $x = 1$:

$$f(1) = \sqrt{1} = 1$$
$$g(1) = \frac{1}{8} \cdot 1^2 = \frac{1}{8}$$

Kuvan ja kohdassa $x = 1$ laskettujen arvojen perusteella neliöjuurifunktion f kuvaaja on ylempänä välillä [0, 4]. Alueen pinta-ala on siten $A = \int_0^4 (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$.

$$A=\int_0^4\left(\sqrt{x}-\frac{1}{8}x^2\right)\mathrm{d}x=\int_0^4\left(x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{8}x^2\right)\mathrm{d}x=\Big/_0^4\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{3}x^3\right)$$

$$=\Big/_0^4\left(\frac{2}{3}x\cdot x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{24}x^3\right)=\Big/_0^4\left(\frac{2}{3}x\sqrt{x}-\frac{1}{24}x^3\right)$$

$$=\left(\frac{2}{3}\cdot 4\cdot\sqrt{4}-\frac{1}{24}\cdot 4^3\right)-\left(\frac{2}{3}\cdot 0\cdot\sqrt{0}-\frac{1}{24}\cdot 0^3\right)$$

$$=\left(\frac{8}{3}\cdot 2-\frac{4^{\cancel{3}\,2}}{\cancel{4}_1\cdot 6}\right)-0=\frac{16}{3}-{}^{(2}\frac{16}{6}=\frac{16}{3}-\frac{8}{3}$$

$$=\frac{8}{3}=2\frac{2}{3}$$

b) Syntyvän pyörähdyskappale on ontto. Sen tilavuus saadaan vähentämällä ulomman pyörähdyskappaleen tilavuudesta sisemmän pyörähdyskappaleen tilavuus.

Ulompi pyörähdyskappale syntyy kun käyrän $y=\sqrt{x}$ ja x-akselin rajaama alue pyörähtää x-akselin ympäri välillä [0, 4]. Lasketaan sen tilavuus V_1.

$$V_1=\pi\int_0^4\sqrt{x}^2\,\mathrm{d}x=\pi\int_0^4 x\,\mathrm{d}x=\pi\Big/_0^4\frac{1}{2}x^2=\pi(\frac{16}{2}-0)=8\pi$$

Sisempi pyörähdyskappale syntyy kun käyrän $y=\frac{1}{8}x^2$ ja x-akselin rajaama alue pyörähtää x-akselin ympäri välillä [0, 4]. Lasketaan sen tilavuus V_2.

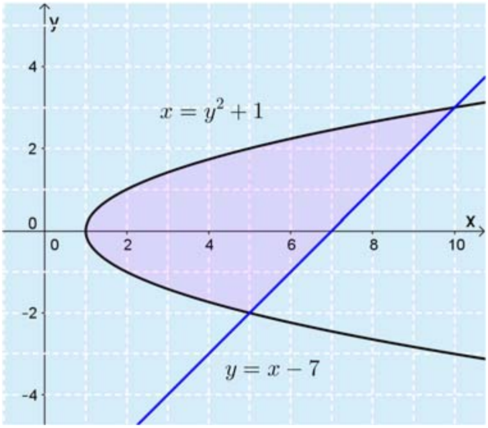
$$V_2=\pi\int_0^4(\frac{1}{8}x^2)^2\,\mathrm{d}x=\pi\int_0^4\frac{1}{64}x^4\,\mathrm{d}x=\pi\Big/_0^4\frac{1}{64}\cdot\frac{1}{5}x^5=\pi(\frac{4^{\cancel{5}\,2}}{\cancel{4^3}\cdot 5}-0)=\frac{16\pi}{5}$$

Kysytyn pyörähdyskappaleen tilavuus on

$$V_1-V_2=8\pi-\frac{16\pi}{5}=\frac{40\pi}{5}-\frac{16\pi}{5}=\frac{24\pi}{5}.$$

Vastaus: **a)** Alueen pinta-ala on $2\frac{2}{3}$. **b)** Kappaleen tilavuus on $\frac{24\pi}{5}$.

15. Paraabeli $y^2 - x + 1 = 0$ kirjoitettaan muotoon $x = y^2 + 1$. Piirretään kuva.



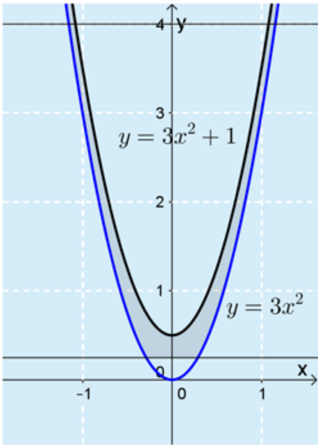
Koska paraabeli $x = y^2 + 1$ aukeaa oikealle, alueen pinta-ala on helpointa laskea vaakasuunteisesti alueena jota rajoittaa oikealta suora $x = y + 7$ ja paraabeli.

Lasketaan kuvaajien leikkauskohdat.
$y^2 + 1 = y + 7$
$y^2 - y - 6 = 0$
$y = -2$ tai $y = 3$

$$A = \int_{-2}^{3} \left((y+7)-(y^2+1)\right)\mathrm{d}x = \int_{-2}^{3} (-y^2+y+6)\,\mathrm{d}x$$
$$= \mathop{/}_{-2}^{3} \left(-\frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}y^2 + 6y\right)$$
$$= \frac{125}{6} = 20\frac{5}{6}$$

Vastaus: Alueen pinta-ala on $20\frac{5}{6}$.

16. Piirretään kuva.



Koska alue pyörähtää y-akselin ympäri, rajat ja rajoittavat käyrät on esitettävä muuttujan y avulla.

$$y = 3x^2$$
$$x^2 = \frac{y}{3}$$
$$x = \sqrt{\frac{y}{3}} \text{ tai } x = -\sqrt{\frac{y}{3}}$$

$$y = 3x^2 + 0,5$$
$$3x^2 = y - 0,5$$
$$x^2 = \frac{y-0,5}{3}$$
$$x = \sqrt{\frac{y-0,5}{3}} \text{ tai } x = -\sqrt{\frac{y-0,5}{3}}$$

Molempien paraabelien huiput ovat y-akselilla joten pyörähtävä alue on symmetrisesti y-akselin molemmin puolin. Koska alue pyörähtää y-akselin ympäri, ei ole väliä pyörähtääkö x-akselin oikealla vai vasemmalla oleva alue, syntyvä pyörähdyskappale on molemmissa tapauksissa sama.

Valitaan pyörähtäväksi alueeksi y-akselin oikealla puolella oleva alue. Nyt ulompi käyrä $x = \sqrt{\frac{y}{3}}$ pyörähtää y-akselin ympäri välillä $0,25 \le y \le 4$.

Sisempi käyrä $x = \sqrt{\frac{y-0,5}{3}}$ pyörähtää y-akselin ympäri välillä $0,5 \le y \le 4$ sillä paraabelin huippu on pisteessä (0; 0,5).

Syntyvä pyörähdyskappale on ontto ja sen tilavuus saadaan vähentämällä ulomman pyörähdyskappaleen tilavuudesta V_1 sisemmän pyörähdyskappaleen tilavuus V_2.

$$V_1 = \pi \int_{0,25}^{4} \sqrt{\frac{y}{3}}^{\,2} \mathrm{d}y = \pi \int_{0,25}^{4} \left(\frac{1}{3}y\right)\mathrm{d}y = \pi \mathop{/}_{0,25}^{4} \frac{1}{6}y^2 = \pi\left(\frac{1}{6}\cdot 4^2 - \frac{1}{6}\cdot 0,25^2\right)$$
$$= \pi\left(\frac{8}{3} - \frac{1}{96}\right) = \frac{85\pi}{32}$$

$$V_2 = \pi \int_{0,5}^{4} \sqrt{\frac{y-0,5}{3}}^{\,2} \mathrm{d}y = \pi \int_{0,5}^{4} \left(\frac{1}{3}y - \frac{1}{6}\right)\mathrm{d}y = \pi \mathop{/}_{0,5}^{4} \left(\frac{1}{6}y^2 - \frac{1}{6}y\right)$$
$$= \pi\left(\left(\frac{1}{6}\cdot 4^2 - \frac{1}{6}\cdot 4\right) - \left(\frac{1}{6}\cdot 0,5^2 - \frac{1}{6}\cdot 0,5\right)\right)$$
$$= \pi\left(2 - \left(-\frac{1}{24}\right)\right) = \frac{49\pi}{24}$$

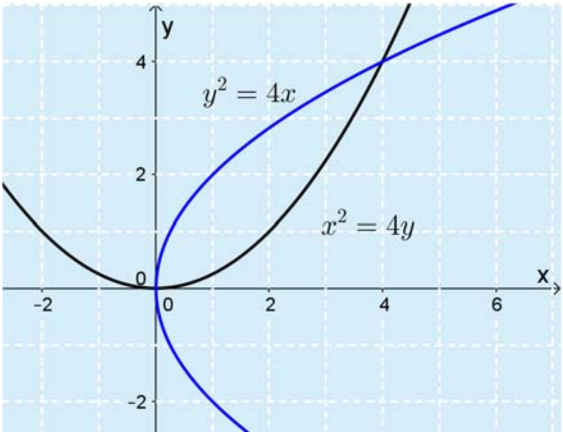
Kysytyn pyörähdyskappaleen tilavuus on
$$V_1 - V_2 = \frac{85\pi}{32} - \frac{49\pi}{24} = \frac{59\pi}{96} \approx 1,9\ (\mathrm{dm}^3)\,.$$

Massa saadaan kertomalla tiheys 2,5kg/dm^3 tilavuudella $\frac{59\pi}{96}$ dm^3:

$$2,5\mathrm{kg/dm}^3 \cdot \frac{59\pi}{96}\ \mathrm{dm}^3 \approx 4,8\ \mathrm{kg}.$$

Vastaus: Astian tilavuus on n. 1,9 dm^3 ja sen massa on n. 4,8 kg.

17. Piirretään kuva.



Kirjoitetaan molempien käyrien yhtälöt muuttujan x avulla.

$$x^2 = 4y \qquad y^2 = 4x$$
$$y = \frac{1}{4}x^2 \qquad y = \pm\sqrt{4x} = \pm 2\sqrt{x}$$

Koska alue on koordinaatiston ensimmäisessä neljänneksessä, ovat x ja y ei-negatiivisia ja toisen käyrän yhtälö $y = 2\sqrt{x}$.

Lasketaan käyrien leikkauspisteet.

$$\frac{1}{4}x^2 = 2\sqrt{x}$$
$$x = 0 \text{ ja } x = 4$$

Kysytty alue on välillä [0, 4]. Osoitetaan, että tällä välillä käyrä $y^2 = 4x$ on ylempänä kuin käyrä $x^2 = 4y$.

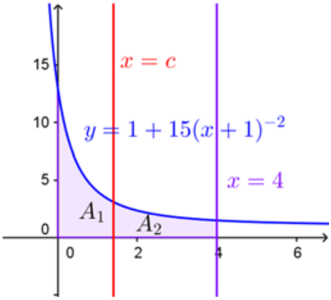
Kun $x = 1$ on $y = 2 > \frac{1}{4}$, joten käyrä $y^2 = 4x$ on ylempänä.

Alueen pinta-ala on

$$A = \int_0^4 (2\sqrt{x} - \frac{1}{4}x^2)\mathrm{d}x = \mathop{/}_0^4 \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{12}x^3 = 5\frac{1}{3}.$$

Vastaus: Alueen pinta-ala on $5\frac{1}{3}$.

18. Hahmotellaan tilannetta piirtämällä kuva. Jaetaan kuvassa alue kahtia suoralla $x = c$.



Kun $0 \le x \le 4$ ovat arvot $1 + 15(x + 1)^{-2}$ positiivisia. Näin ollen koko alueen pinta-ala A on $\int_0^4 \left(1+15(x+1)^{-2}\right)\mathrm{d}x$.

$$A = \int_0^4 \left(1+15(x+1)^{-2}\right)\mathrm{d}x = \mathop{/}_0^4 \left(x-15(x+1)^{-1}\right) = \mathop{/}_0^4 \left(x-\frac{15}{x+1}\right) = 16$$

Suoran $x = c$ vasemmalla puolella olevan osan pinta-alan A_1 tulee olla puolet koko alueen pinta-alasta:
$A_1 = 8$

Esitetään sama pinta-ala määrättynä integraalina.

$$A_1 = \int_0^c \left(1+15(x+1)^{-2}\right)\mathrm{d}x = \mathop{/}_0^c \left(x-\frac{15}{x+1}\right) = \frac{c^2+16c}{c+1}$$

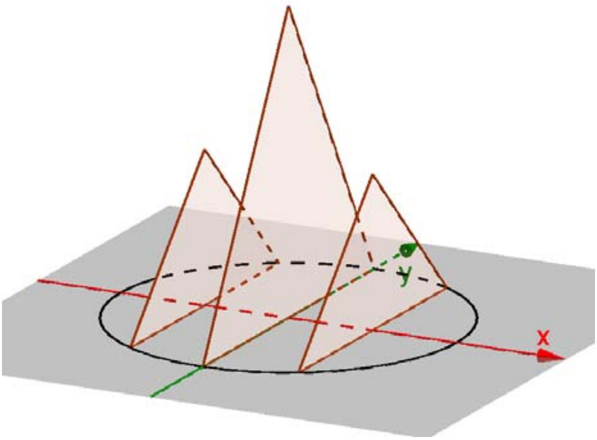
Tästä saadaan yhtälö

$$\frac{c^2+16c}{c+1} = 8 \quad \| \cdot (c+1),\ c > 0$$
$$c^2+16c = 8c+8$$
$$c^2+8c-8 = 0$$
$$c = \frac{-8 \pm \sqrt{96}}{2} = \frac{-8 \pm 4\sqrt{6}}{2} = -4 \pm 2\sqrt{6}$$

Koska $0 \le c \le 4$, niin $c = -4 + 2\sqrt{6}$.

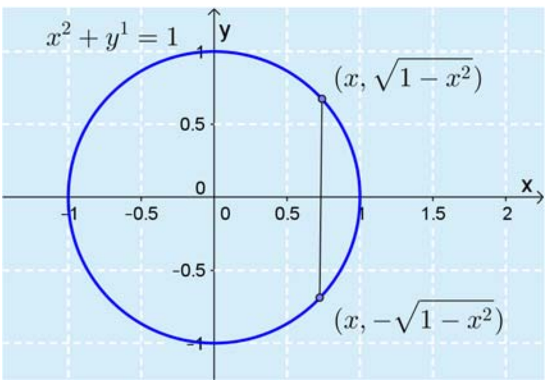
Vastaus: Alue voidaan jakaa kahtia esim. suoralla $x = -4 + 2\sqrt{6}$.

19. Hahmotellaan tilannetta piirtämällä kuva. Ympyrän $x^2 + y^2 = 1$ keskipiste on origossa ja sen säde on 1.



Tilavuuden laskemiseksi kaavalla $V = \int_a^b A(x)\mathrm{d}x$ on selvitettävä integroimisrajat a ja b ja poikkileikkauspinta-ala A. Koska kappaleen pohja on ympyrän sisäpuoli, sijaitsee kappale välillä $-1 \le x \le 1$. Siis $a = -1$ ja $b = 1$.

Piirretään pohjaympyrän kuva ja määritetään sen avulla poikkileikkauskolmion sivun pituus.



$$x^2 + y^2 = 1$$
$$y^2 = 1 - x^2$$
$$y = \sqrt{1 - x^2} \text{ tai } y = -\sqrt{1 - x^2}$$

Kohdassa x poikkileikkauskolmion kärjet ovat pisteissä $(x, \sqrt{1-x^2})$ ja $(x, -\sqrt{1-x^2})$.

Siten kolmion sivun pituus kohdassa x on $2\sqrt{1-x^2}$.

Lasketaan poikkileikkauskolmion pinta-ala kaavalla $A = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$.

Koska kolmio on tasasivuinen, kaikki sivut ovat pituudeltaan $2\sqrt{1-x^2}$ ja kaikki kulmat ovat 60°.

Poikkileikkauskolmion pinta-ala on

$$A(x) = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{1-x^2}\cdot 2\sqrt{1-x^2}\cdot \sin 60° = \sqrt{3}(1-x^2).$$

Kappaleen tilavuus on siten

$$\begin{aligned}
V &= \int_{-1}^{1} \sqrt{3}(1-x^2)\,\mathrm{d}x = \sqrt{3}\mathop{/}_{0}^{1}\left(x - \frac{1}{3}x^3\right) \\
&= \sqrt{3}\left(\left(1-\frac{1}{3}\cdot 1^3\right) - \left(-1-\frac{1}{3}\cdot(-1)^3\right)\right) = \sqrt{3}\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right) \\
&= \frac{4\sqrt{3}}{3}
\end{aligned}$$

Vastaus: Tilavuus on $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

20. Funktion f derivaattafunktion muutosnopeus on funktion f toinen derivaatta, siis $f''(x) = e^x - e^{-x}$.

Määritetään derivaattafunktion f' lauseke.

$$f'(x) = \int f''(x)\mathrm{d}x = \int (e^x - e^{-x})\mathrm{d}x = e^x + e^{-x} + C$$

Koska funktion f pienin hetkellinen muutosnopeus on 1, niin derivaattafunktion f' pienin arvo on 1.
Määritetään kulkukaavion avulla missä funktio f' saa pienimmän arvonsa. Lasketaan tätä varten toisen derivaatan nollakohdat.

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ e^x - e^{-x} &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

		0
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	↘	↗

x	$f''(x) = e^x - e^{-x}$	Merkki
-1	$\approx -2{,}4$	$-$
1	$\approx 2{,}4$	$+$

Koska derivaattafunktion pienin arvo 1 saavutetaan kohdassa 0, niin $f'(0) = 1$. Ratkaistaan vakion C arvo tämän tiedon perusteella.

$$f'(0) = e^0 + e^{-0} + C = 2 + C$$

$$\begin{aligned} 2 + C &= 1 \\ C &= -1 \end{aligned}$$

Siis $f'(x) = e^x + e^{-x} - 1$.

Määritetään funktion f lauseke.

$$f(x) = \int f'(x)\mathrm{d}x = \int (e^x + e^{-x} - 1)\,\mathrm{d}x = e^x - e^{-x} - x + D$$

Koska funktion f kuvaaja kulkee pisteen $(0, -1)$ kautta, niin $f(0) = -1$. Ratkaistaan vakion D arvo tämän tiedon perusteella.

$f(0) = e^0 - e^{-0} - 0 + D = D$, mistä saadaan $D = -1$.

Siis $f(x) = e^x - e^{-x} - x - 1$.

Vastaus: $f(x) = e^x - e^{-x} - x - 1$.