1 Luvut ja laskutoimitukset

1.1 Perusteita

LUVUN 1.1 YDINTEHTÄVÄT

101. **a)** $2\frac{1}{3}-1\frac{5}{7}= {}^{7)}\frac{7}{3}- {}^{3)}\frac{12}{7}=\frac{49}{21}-\frac{36}{21}=\frac{13}{21}$

b)

$$
\begin{aligned}
&3\frac{1}{3}:1\frac{2}{3}+2\frac{1}{2}\cdot\left(-1\frac{5}{9}\right)\\
&=\frac{10}{3}:\frac{5}{3}+\frac{5}{2}\cdot\left(-\frac{14}{9}\right)\\
&=\frac{\cancel{10}^{2}}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{5}}-\frac{5}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{14}^{7}}{9}\\
&=2-\frac{35}{9}\\
&=\frac{18}{9}-\frac{35}{9}=-\frac{17}{9}=-1\frac{8}{9}
\end{aligned}
$$

c) $3\cdot\dfrac{2-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{2}}=3\cdot(1\frac{2}{3}:1\frac{1}{2})=3\cdot(\frac{5}{3}:\frac{3}{2})=3\cdot(\frac{5}{3}:\frac{3}{2})=3\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{10}{3}=3\frac{1}{3}$

d) $\frac{3a}{4}+ {}^{2)}\frac{a}{2}=\frac{3a}{4}+\frac{2a}{4}=\frac{5a}{4}$

e)

$$\frac{4a}{5}:\frac{a}{4}-\frac{a}{2}(a-1)$$
$$=\frac{4\cancel{a}}{5}\cdot\frac{4}{\cancel{a}}-\frac{a(a-1)}{2}$$
$$={}^{2)}\frac{16}{5}-{}^{5)}\frac{a(a-1)}{2}$$
$$=\frac{32}{10}-\frac{5a(a-1)}{10}$$
$$=\frac{32-5a^2+5a}{10}$$
$$=\frac{-5a^2+5a+32}{10}$$
$$=\frac{-5a^2}{10}+\frac{5a}{10}+\frac{32}{10}$$
$$=-\frac{a^2}{2}+\frac{a}{2}+\frac{16}{5}\quad(a\neq 0)$$

f) $-a\cdot\left(\frac{2a-3}{3}\right):3=\frac{-a(2a-3)}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{-2a^2+3a}{9}=-\frac{2a^2}{9}+\frac{a}{3}$

102. **a)** Vastaluku on $-(\sqrt{3}-7)=-\sqrt{3}+7=7-\sqrt{3}$.

Käänteisluku on ${}^{\sqrt{3}+7)}\frac{1}{\sqrt{3}-7}=\frac{\sqrt{3}+7}{(\sqrt{3}-7)(\sqrt{3}+7)}=\frac{\sqrt{3}+7}{3-49}=-\frac{\sqrt{3}+7}{46}$.

b) Vastaluku on $-(e-1)=-e+1=1-e$.

Käänteisluku on $\frac{1}{e-1}$

c) Vastaluku on $-(-a+b)=a-b$.

Käänteisluku on $\frac{1}{-a+b}$.

103. **a)** $4\cdot 2^{-3}-2^{-1}+2^{0}=4\cdot\frac{1}{2^{3}}-\frac{1}{2}+1=\frac{4}{8}-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1=1$

b) $3^{0}+((-1)^{3})^{7}=1+(-1)^{21}=1-1=0$

c) $\frac{2\cdot 3^{2}}{27}-\frac{1}{3^{2}}=\frac{2\cdot 9^{(3}}{27}-\frac{1}{9}=\frac{2\cdot 3}{9}-\frac{1}{9}=\frac{6}{9}-\frac{1}{9}=\frac{5}{9}$

d)

$$\begin{aligned}&7^{4}\cdot 7^{-4}-7^{-2}+(-7)^{2}\\&=7^{4-4}-\frac{1}{7^{2}}+49\\&=7^{0}-\frac{1}{49}+49\\&=1-\frac{1}{49}+49\\&=\frac{48}{49}+49=49\frac{48}{49}\end{aligned}$$

e) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}-\frac{2^{4}}{3^{2}}=\left(\frac{4}{3}\right)^{2}-\frac{16}{9}=\frac{16}{9}-\frac{16}{9}=0$

f)

$$\begin{aligned}&(5\cdot 10^{-4})\cdot(3\cdot 10^{6})\\&=5\cdot 10^{-4}\cdot 3\cdot 10^{6}\\&=5\cdot 3\cdot 10^{-4}\cdot 10^{6}\\&=15\cdot 10^{-4+6}\\&=15\cdot 10^{2}=1500\end{aligned}$$

104. **a)** $1{,}03\cdot 10^{-5}=0{,}0000103$

b) $2{,}40\cdot 10^{7}=24\,000\,000$

105. **a)** Luvut ovat toistensa käänteislukuja, jos niiden tulo on 1.

$$\frac{\sqrt{6}}{3}\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{6}{6}=1$$

Luvut ovat toistensa käänteislukuja.

b) Luvut ovat toistensa vastalukuja, jos niiden summa on 0 ja käänteislukuja, jos niiden tulo on 1.

$$(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=2+2+\sqrt{3}-\sqrt{3}=4\neq 0$$

$$(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=4-3=1$$

Luvut ovat toistensa käänteislukuja mutta eivät vastalukuja.

106.
$$(1+1)\cdot(1+\frac{1}{2})\cdot(1+\frac{1}{3})+...+(1+\frac{1}{99})$$

$$=\cancel{2}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{5}}{\cancel{4}}\cdot...\cdot\frac{\cancel{99}}{\cancel{98}}\cdot\frac{100}{\cancel{99}}=1\cdot 100=100$$

107. **a)**
$$(a+3)^2-(a-3)^2$$
$$=a^2+6a+9-(a^2-6a+9)$$
$$=a^2+6a+9-a^2+6a-9$$
$$=12a$$

b) $((a+3)(a-3))^2=(a^2-9)^2=a^4-18a^2+81$

c)

$$2+2(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)$$
$$=2+2(\sqrt{a}^2-1^2)$$
$$=2+2(a-1)$$
$$=2+2a-2=2a$$

108. **a)** $\dfrac{2}{\sqrt{8}-\sqrt{2}}=\dfrac{2}{\sqrt{4\cdot 2}-\sqrt{2}}=\dfrac{2}{2\sqrt{2}-\sqrt{2}}\overset{\sqrt{2})}{=}\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

b) $8^{\frac{2}{3}}-9^{\frac{3}{2}}=(2^3)^{\frac{2}{3}}-(3^2)^{\frac{3}{2}}=2^{3\cdot\frac{2}{3}}-3^{2\cdot\frac{3}{2}}=2^2-3^3=4-27=-23$

c) $\sqrt[4]{\sqrt{16}}=\sqrt[4]{4}=(2^2)^{\frac{1}{4}}=2^{2\cdot\frac{1}{4}}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$

109. **a)** $\dfrac{a^2}{3}-\left(\dfrac{-a}{3}\right)^2\overset{3)}{=}\dfrac{a^2}{3}-\dfrac{a^2}{9}=\dfrac{3a^2}{9}-\dfrac{a^2}{9}=\dfrac{2a^2}{9}$

b)

$$\begin{aligned}&\frac{a^2-b^2}{a-b}+\frac{a^2-b^2}{a+b}\\&=\frac{(a+b)\cancel{(a-b)}}{\cancel{a-b}}+\frac{\cancel{(a+b)}(a-b)}{\cancel{a+b}}\\&=(a+b)+(a-b)\\&=2a\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}&(a+b)^2\cdot(a-b)^2-(a^4+b^4)\\&=((a+b)(a-b))^2-(a^4+b^4)\\&=(a^2-b^2)^2-(a^4+b^4)\\&=a^4-2a^2b^2+b^4-a^4-b^4\\&=-2a^2b^2\end{aligned}$$

1.2 Prosenttilaskuja

LUVUN 1.2 YDINTEHTÄVÄT

110. **a)** 100 % + 15 % = 115 %
$1{,}15a$

b) 100 % – 35 % = 65 %
$0{,}65a$

c) 100 % + 230 % = 330 %
$3{,}3a$

d) 100 % – 50 % = 50 %
$0{,}5 \cdot 0{,}5a = 0{,}25a$

111. Merkitään verotonta hintaa kirjaimella x.
$1{,}24x = 389{,}90 \;||: 1{,}24$
$x = 314{,}435\ldots$

Veroton hinta on 314,44 €.
Hinnassa on veroa 389,90 € – 314,44 € = 75,46 €.

112. Merkitään työntekijöiden määrää vuoden alussa kirjaimella x.
$1{,}09x = 145 \;||: 1{,}09$
$x = 133{,}027\ldots$

Yrityksessä oli vuoden alussa 133 työntekijää.

113. Liuosta on yhteensä 500 g + 300 g = 800 g.

6-prosenttisessa liuoksessa on suolaa 0,06 · 500 g = 30 g.
5-prosenttisessa liuoksessa on suolaa 0,05 · 300 g = 15 g.
Suolaa on yhteensä 30 g + 15 g = 45 g.

Lasketaan koko liuoksen suolapitoisuus.

$$\frac{45g}{800g} = 0{,}05625$$

Syntyvän liuoksen suolapitoisuus on 5,6 %.

114. Merkitään matkustajamäärää vuoden alussa kirjaimella a.
Helmikuun alussa matkustajamäärää oli $1{,}02a$.
Maaliskuun alussa matkustajamäärä oli $1{,}03 \cdot 1{,}02a$.
Huhtikuun alussa matkustajamäärä oli $1{,}04 \cdot 1{,}03 \cdot 1{,}02a = 1{,}092624a$.

Matkustajamäärä kasvoi yhteensä 9,3 %.

115. Merkitään osakkeen arvoa alussa kirjaimella a. Muutosten jälkeen osakkeen arvo on $1{,}12 \cdot 0{,}9a = 1{,}008a$.

Arvo nousi 0,8 %.

116.

Väite	A	B	C	D	E	F
Kaavan numero	3	5	2	6	1	4

1.3 Itseisarvon määritelmä ja ominaisuuksia

LUVUN 1.3 YDINTEHTÄVÄT

117. **a)** Luku $1-\sqrt{2}$ on negatiivinen, koska $1=\sqrt{1}<\sqrt{2}$.

b) $|1-\sqrt{2}|=-(1-\sqrt{2})=-1+\sqrt{2}=\sqrt{2}-1$

118. **a)** $|\sqrt{5}-1|=\sqrt{5}-1 \quad (\sqrt{5}>\sqrt{1}=1)$

b) $|3-\sqrt{10}|=-(3-\sqrt{10})=\sqrt{10}-3 \quad (3=\sqrt{9}<\sqrt{10})$

c) $|6-2\;\;|=-(6-2\;\;)=2\;\;-6 \quad (\pi=3{,}14...>3$, joten $2\pi>6)$

119. **a)** $|\sqrt{3}+2|-|\sqrt{3}-2|=\sqrt{3}+2-(-(\sqrt{3}-2))=\sqrt{3}+2+\sqrt{3}-2=2\sqrt{3}$

b) $\dfrac{|1-\sqrt{2}|}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{-(1-\sqrt{2})}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}=1$

c) $|\sqrt{5}-5|-|5-\sqrt{5}|=-(\sqrt{5}-5)-(5-\sqrt{5})=-\sqrt{5}+5-5+\sqrt{5}=0$

120. **a)** Epätosi. Luvun 0 itseisarvo on 0.

b) Epätosi. Jos esimerkiksi $a=-3$, $|-3+2|=1$, mutta $-3+2=-1$.

c) Tosi. Tämä on osa itseisarvon määritelmää.

121. **a)** $|\pi-2|+|5-\pi|=\pi-2+5-\pi=3$

b) $\left|\sqrt{3}+5\right|-\left|\sqrt{3}-5\right|=\sqrt{3}+5-(-(\sqrt{3}-5))=\sqrt{3}+5+\sqrt{3}-5=2\sqrt{3}$

c) $-\left|\sqrt{3}-1\right|+\left|-(\sqrt{3}-1)\right|=-(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{3}-1)=-\sqrt{3}+1+\sqrt{3}-1=0$

122. **a)** $|a| = a$, kun $a > 0$.

b) Kun $a \leq -1$, niin $1 + a \leq 0$, joten $|1 + a| = -(1 + a) = -1 - a$.

c) $|3a| = -3a$, kun $a < 0$.

d) Kun $a < 0$, niin $-a > 0$ ja $1 - a > 0$, joten $|1 - a| = 1 - a$.

123. **a)** Epätosi. Kun $a = -1$, -1 ei ole suurempi kuin $-(-1) = 1$.

b) Epätosi. Ei ole voimassa luvulle $a = 0$.

c) Tosi. Koska $a + 1 - a = 1 > 0$, niin $a + 1 \geq a$.

d) Epätosi. Negatiivisille luvuille a väite ei ole voimassa, koska neliöjuuren arvo ei voi olla negatiivinen.

e) Epätosi. Kun $a = -2$, $-|-(-2)| = -2$, mutta $-(-2) = 2$.

f) Tosi. Tällainen luku on esimerkiksi $a = -0{,}5$.

g) Tosi. Tällainen luku on $a = 0$.

h) Tosi. Luku $a = 0$ on tällainen luku.

Luvun 1 vahvistavat ja syventävät tehtävät

VAHVISTAVAT TEHTÄVÄT

124. **a)** Pienin rationaaliluku on sellainen negatiivinen luku, jonka itseisarvo on suurin. Luku on negatiivinen ainoastaan silloin, kun $m = -1$. Itseisarvo $\left|\frac{m}{n}\right|$ on suurin, kun nimittäjä n on pienin, eli $n = 2$. Pienin luku on $-\frac{1}{2}$.

Luvuista m ja n valitaan (positiiviset) luvut siten, että osoittaja m on suurin mahdollinen ja nimittäjä n pienin mahdollinen.

Suurin luku on $\frac{2}{2} = 1$.

Huomautus:
Voidaan myös luetella kaikki mahdolliset osamäärät
$-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ ja 1,
ja valita niistä suurin ja pienin.

b) Luvun 1,5 käänteisluku on $\frac{1}{1{,}5} = 1 : \frac{3}{2} = 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$ ja tämän vastaluku on $-\frac{2}{3}$. Luvun 1,5 vastaluku on $-1{,}5$ ja tämän käänteisluku on

$\frac{1}{-1{,}5} = 1 : (-\frac{3}{2}) = -1 \cdot \frac{2}{3} = -\frac{2}{3}$.

125. **a)** $^{x)}\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1-x}{x^2} = \frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2} - \frac{1-x}{x^2} = \frac{x+1-1+x}{x^2} = \frac{2x^{(x}}{x^2} = \frac{2}{x}$, $x \neq 0$

b) $\frac{1}{2a-a^2} \cdot \frac{a^2+2a}{2+a} = \frac{1}{\cancel{a}(2-a)} \cdot \frac{\cancel{a}(\cancel{a+2})}{\cancel{a+2}} = \frac{1}{2-a}$, $a \neq 0$, $a \neq \pm 2$

126. **a)** Lavennetaan luvut samannimisiksi.

$$^{35)}\frac{1}{2}=\frac{35}{70}$$

$$^{14)}\frac{3}{5}=\frac{42}{70}$$

$$^{10)}\frac{4}{7}=\frac{40}{70}$$

Suuruusjärjestys määräytyy osoittajien perusteella ja on $\frac{1}{2}<\frac{4}{7}<\frac{3}{5}$.

b) $\sqrt{a+b}<\sqrt{a}+\sqrt{b}$

Koska $a>0$ ja $b>0$, epäyhtälön molemmat puolet ovat positiivisia ja epäyhtälö voidaan korottaa puolittain neliöön.

$$(\sqrt{a+b})^2<(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$$

$$a+b<a+2\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}+b \quad \| -a-b$$

$$0<2\sqrt{ab}$$

Oikealla puollella oleva lauseke on aina positiivinen, joten epäyhtälö aina tosi. Tällöin myös alkuperäinen epäyhtälö on aina tosi.

127. **a)** $\frac{8\cdot 2^3}{32}=\frac{2^3\cdot 2^3}{2^5}=\frac{2^6}{2^5}=2^{6-5}=2^1$

b) $2^6\cdot(-2)^8=2^6\cdot 2^8=2^{6+8}=2^{14}$

c) $\underbrace{4\cdot\underbrace{(-2)^3}_{<0}\cdot\underbrace{(-\frac{1}{2})^5}_{<0}}_{>0}=2^2\cdot 2^3\cdot(2^{-1})^5=2^2\cdot 2^3\cdot 2^{-5}=2^{2+3-5}=2^0$

128. $a=0{,}75b$

$$\frac{b}{a}=\frac{b}{0{,}75b}=1:0{,}75=1:\frac{3}{4}=\frac{4}{3}=1{,}333...$$

b on noin 33% suurempi kuin a.

129. A-I: $\sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt{4} = 2$
B-II
C-I
D-III: Vähenee neljäsosan, joten jäljelle jää kolme neljäsosaa, eli 0,75a.
E-I: Vähenee neljäsosaan, joten jäljellä on neljäsosa, eli 0,25a.
F-II: Jos a on negatiivinen, niin $-a$ on positiivinen.

130. Merkitään yöpymisen hintaa ennen sesongin alkamista kirjaimella a.
Sesongin alkaessa hinta on 1,08a.
Sesongin päätyttyä hinta on $0{,}9 \cdot 1{,}08a = 0{,}972a$.

$1 - 0{,}972 = 0{,}028$
Hinta on laskenut 2,8 %.

131.

$$
\begin{aligned}
&(a^2b^2 - a^4b^6) : (ab - a^2b^3) \\
&= \frac{a^2b^2(1 - a^2b^4)}{ab(1 - ab^2)} \\
&= \frac{(ab)^{\cancel{2}}\cancel{(1 - ab^2)}(1 + ab^2)}{\cancel{ab}\cancel{(1 - ab^2)}} \\
&= ab(1 + ab^2) \\
&= ab + a^2b^3 \\
&= a^2b^3 + ab
\end{aligned}
$$

$a = 10^6$ ja $b = 10^{-5}$

$$
\begin{aligned}
&(10^6)^2 \cdot (10^{-5})^3 + 10^6 \cdot 10^{-5} \\
&= 10^{12} \cdot 10^{-15} + 10^1 \\
&= 10^{-3} + 10 \\
&= 0{,}001 + 10 \\
&= 10{,}001
\end{aligned}
$$

132. **a)** Luvut ovat toistensa vastalukuja, jos niiden summa on 0.
$(a - b) + (b - a) = a - b + b - a = 0.$
Luvut ovat toistensa vastalukuja.

b) Luvut ovat toistensa käänteislukuja, jos niiden tulo on 1.

$$\frac{\sqrt{a}}{b} \cdot \frac{b\sqrt{a}}{a} = \frac{b\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}}{ba} = \frac{ba}{ba} = 1$$

Luvut ovat toistensa käänteislukuja.

133.

$$\begin{aligned}
&\sqrt{a}\sqrt{2}\sqrt{4}\sqrt{5}\sqrt{6} \\
&= \sqrt{a \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \\
&= \sqrt{a \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3} \\
&= \sqrt{16 \cdot 5 \cdot 3 \cdot a} \\
&= \sqrt{16} \cdot \sqrt{5 \cdot 3 \cdot a} \\
&= 4\sqrt{5 \cdot 3 \cdot a}
\end{aligned}$$

Tulo on kokonaisluku, jos juurrettava eli $5 \cdot 3 \cdot a$ on jonkin kokonaisluvun neliö. Pienin mahdollinen a:n arvo on $5 \cdot 3 = 15$, koska tällöin $5 \cdot 3 \cdot a$ on $5^2 \cdot 3^2$. Pienin kokonaisluku on 15.

134. **a)** $${}^{2+\sqrt{2})}\frac{1}{\sqrt{2}} + {}^{\sqrt{2})}\frac{1}{2+\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}(2+\sqrt{2})} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}(2+\sqrt{2})} = \frac{2+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+2} = 1$$

b) $$\sqrt{3\frac{3}{4}} : \sqrt{1\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{15}{4}} : \sqrt{\frac{5}{3}} = \frac{\sqrt{5 \cdot 3}}{\sqrt{4}} : \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = \frac{\cancel{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{4}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cancel{\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2}$$

135. **a)** $(\sqrt{a}+1)^2 - a - 1 = a + 2\sqrt{a} + 1 - a - 1 = 2\sqrt{a}$

b)

$$\begin{aligned}
&{}^{1+x)}\frac{x}{1-x} + {}^{1-x)}\frac{x}{1+x} \\
&= \frac{x(1+x)}{(1+x)(1-x)} + \frac{x(1-x)}{(1+x)(1-x)} \\
&= \frac{x + x^2 + x - x^2}{1-x^2} \\
&= \frac{2x}{1-x^2}
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
&\frac{a}{a-1} \cdot \left(\frac{1}{a} - a\right) \\
&= \frac{a}{a-1} \cdot \left(\frac{1}{a} - \frac{a^2}{a}\right) \\
&= \frac{a}{a-1} \cdot \frac{1-a^2}{a} \\
&= \frac{\cancel{a}\,\cancel{(1-a)}(1+a)}{-\underset{1}{\cancel{(1-a)}}\,\cancel{a}} \\
&= \frac{1+a}{-1} \\
&= -1 - a \\
&= -a - 1
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
&{}^{\sqrt{5})}\frac{10}{\sqrt{5}} - {}^{\sqrt{5}+1}\frac{4}{\sqrt{5}-1} \\
&= \frac{10\sqrt{5}}{5} - \frac{4(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} \\
&= \frac{10\sqrt{5}}{5} - \frac{4(\sqrt{5}+1)}{5-1} \\
&= 2\sqrt{5} - \frac{\cancel{4}(\sqrt{5}+1)}{\cancel{4}} \\
&= 2\sqrt{5} - (\sqrt{5}+1) \\
&= 2\sqrt{5} - \sqrt{5} - 1 \\
&= \sqrt{5} - 1
\end{aligned}$$

136. **a)** $\sqrt[4]{2^6} = 2^{\frac{6}{4}} = 2^{\frac{3}{2}} = 2^{1\frac{1}{2}} = 2^{1+\frac{1}{2}} = 2^1 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}$

b) $\sqrt[3]{(-2)^5} = \sqrt[3]{-32} = -\sqrt[3]{32} = -\sqrt[3]{2^5} = -2^{\frac{5}{3}} = -2^{1\frac{2}{3}} = -(2^1 \cdot 2^{\frac{2}{3}})$

$= -2 \cdot \sqrt[3]{2^2} = -2\sqrt[3]{4}$

(Huomaa, että murtopotenssi on määritelty vain, kun kantaluku on positiivinen.)

c) $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{3^2} = 3^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}} = 3^1 = 3$

d) $\dfrac{\sqrt{a^5}}{a} = \dfrac{a^{\frac{5}{2}}}{a} = a^{\frac{5}{2}-1} = a^{\frac{3}{2}} = a^{1\frac{1}{2}} = a\sqrt{a}$

137. **a)** Ei-negatiivisen luvun a neliöjuuri on luku b, jos $b \geq 0$ ja $b^2 = a$.

Koska $5 = \sqrt{25} > \sqrt{2}$, on $5 - \sqrt{2} \geq 0$.

$(5 - \sqrt{2})^2 = 25 - 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{2} + 2 = 27 - 10\sqrt{2}$

Siis luku $5 - \sqrt{2}$ on luvun $27 - 10\sqrt{2}$ neliöjuuri.

b) $2 - \sqrt{5} = \sqrt{4} - \sqrt{5} < 0$, joten ei ole $2 - \sqrt{5}$ minkään luvun neliöjuuri.

c) $\sqrt[3]{a\sqrt{a}} = \sqrt[3]{a^1 \cdot a^{\frac{1}{2}}} = \sqrt[3]{a^{\frac{3}{2}}} = (a^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$, $a > 0$

138. **a)** $\sqrt{(1-\pi)^2} = \underbrace{|1-\pi|}_{<0} = -(1-\pi) = \pi - 1$

b) $|2-\sqrt{2}|^2 = (2-\sqrt{2})^2 = 4 - 4\sqrt{2} + 2 = 6 - 4\sqrt{2}$

c) $a^a \cdot a^a \cdot a^a \cdot a^a = a^{a+a+a+a} = a^{4a}, a > 0$

d) $|-5(\pi-4)| = |-5| \cdot \underbrace{|\pi - 4|}_{<0} = 5 \cdot (-\pi + 4) = 20 - 5\pi$

e) $a^a \cdot b^a = (ab)^a$

f) $a^{-a} \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^a = \frac{1}{a^a} \cdot \frac{b^a}{a^a} = \frac{b^a}{a^{2a}} = \left(\frac{b}{a^2}\right)^a, a > 0, b > 0$

139. **a)** Positiivisten lukujen neliöiden suuruusjärjestys on täsmälleen sama kuin alkuperäisten lukujen suuruusjärjestys.

$(5\sqrt{3})^2 = 25 \cdot 3 = 75$

$(6\sqrt{2})^2 = 36 \cdot 2 = 72$

Koska 75 > 72, on $5\sqrt{3} > 6\sqrt{2}$.

b) Positiivisten lukujen suuruusjärjestys säilyy korotettaessa molemmat positiiviseen kokonaislukupotenssiin.

$(\sqrt[3]{3})^{12} = (3^{\frac{1}{3}})^{12} = 3^4 = 81$

$(\sqrt[4]{4})^{12} = (4^{\frac{1}{4}})^{12} = 4^3 = 64$

Luku $\sqrt[3]{3}$ on suurempi.

c) Positiivisten lukujen suuruusjärjestys säilyy korotettaessa molemmat positiiviseen kokonaislukupotenssiin.

$(\sqrt[3]{3})^6 = (3^{\frac{1}{3}})^6 = 3^2 = 9$

$(\sqrt[6]{6})^6 = 6$

Luku $\sqrt[3]{3}$ on suurempi.

140. **a)** Väite on tosi, sillä $\sqrt[4]{4}=(2^2)^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{2}{4}}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$.

b) Väite on epätosi. Esimerkiksi, jos $a=-2$, niin $\sqrt{(-2)^6}=\sqrt{64}=8$, mutta $(-2)^3=-8$.

c) Väite on epätosi. Esimerkiksi, jos $n=-1$, on $8^{-1}=\frac{1}{8}$, mutta

$2^{4\cdot(-1)}=2^{-4}=\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}$.

d) Väite on tosi, sillä $(-1)^{2n}=((-1)^2)^n=1^n=1$.

141. **a)** Merkitään alkuperäistä hintaa kirjaimella a. Korotuksen jälkeen hinta on 1,25a. Merkitään alennusta vastaavaa prosenttikerrointa kirjaimella k. Tulee olla:

$$
\begin{aligned}
k\cdot 1{,}25a &= a \\
k\cdot 1{,}25 &= 1 \qquad \|:1{,}25 \\
k &= 0{,}8
\end{aligned}
$$

Hintaa on alennettava 20 %.

b) Merkitään alkuperäistä hintaa kirjaimella a ja myyntiä eli myytyjen tuotteiden lukumäärää kirjaimella m. Alennuksen jälkeen hinta on 0,75a. Merkitään myynnin korotusta vastaavaa prosenttikerrointa kirjaimella k. Tulee olla:

$$
\begin{aligned}
k\cdot m\cdot 0{,}75a &= ma \\
k\cdot 0{,}75 &= 1 \qquad \|:0{,}75 \\
k &= 1{,}333...
\end{aligned}
$$

Myynnin on lisäännyttävä noin 33 %.

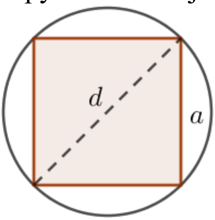
142. **a)** Alkuperäisessä liuoksessa on suolaa 0,035 · 38 g = 1,33 g.
Veden haihduttamisen jälkeen liuosta on 38 g – 6,0 g = 32 g.
Liuoksen suolapitoisuus on

$$\frac{1,33}{32}=0,0415...\approx 4,2\ \%.$$

b) Merkitään alkuperäisen liuoksen massaa kirjaimella a. Suolaa on alkuperäisessä liuoksessa $0,06a$. Veden lisäyksen jälkeen liuoksen massa on $1,5a$.
Liuoksen suolapitoisuus on

$$\frac{0,06a}{1,5a}=0,04=4,0\ \%.$$

143. Piirretään kuva tilanteesta. Merkitään neliön sivun pituutta kirjaimella a ja ympyrän halkaisijaa kirjaimella d.



Neliön piirin pituus on $4a$.
Ympyrän halkaisija on neliön lävistäjän pituinen.
Lävistäjän pituus voidaan ratkaista Pythagoraan lauseella.

$$d^2=a^2+a^2$$
$$d^2=2a^2$$
$$d=\sqrt{2}a \text{ (tai } d=-\sqrt{2}a\text{)}$$

Ympyrän kehän pituus on $\pi\cdot d=\pi\cdot\sqrt{2}a$.

$$\frac{\pi\cdot\sqrt{2}a}{4a}=\frac{\pi\sqrt{2}}{4}=1,1107...$$

Ympyrän kehän pituus on noin 11,1 % suurempi kuin neliön piirin pituus.

144.

$$\frac{2^{n-3}\cdot 4^n}{8^{n-1}}$$
$$=\frac{2^{n-3}\cdot(2^2)^n}{(2^3)^{n-1}}$$
$$=\frac{2^{n-3}\cdot 2^{2n}}{2^{3(n-1)}}$$
$$=\frac{2^{n-3+2n}}{2^{3n-3}}$$
$$=\frac{2^{3n-3}}{2^{3n-3}}$$
$$=2^{(3n-3)-(3n-3)}$$
$$=2^0$$
$$=1$$

145. Merkitään alkuperäisen kuution sivun pituutta kirjaimella a ja suurennetun kuution sivun pituutta kirjaimella b. Kuutioiden pinta-alat ovat $6a^2$ ja $6b^2$, joten syntyy yhtälö:

$$6b^2 = 1{,}2\cdot 6a^2$$
$$b^2 = 1{,}2a^2$$
$$b = \sqrt{1{,}2}a \ (b>0)$$

Suurennetun kuution tilavuus on
$b^3 = (\sqrt{1{,}2}a)^3 = (\sqrt{1{,}2})^3\cdot a^3 = 1{,}3145...\ \cdot a^3$.

Tilavuus kasvaa 31,5 %.

146. Merkitään parturimaksun verotonta hintaa kirjaimella a. Ennen veron alennusta parturimaksu oli $1{,}22a$. Alennuksen jälkeen maksu oli $1{,}08a$.

$\frac{1{,}08a}{1{,}22a} = 0{,}8852...$ $\qquad 1 - 0{,}8852... = 0{,}1147... \approx 11{,}5$ %

Maksut olisivat alentuneet 11,5 %.

147. 15 ‰ = 15:1000 = 0,015
Puhdistusainetta tulee olla 0,015 · 1000 ml = 15 ml ja
vettä 1000 ml – 15 ml = 985 ml.

200 millilitrassa pesuliuosta on 0,015 · 200 ml = 3 ml puhdistusainetta.
Merkitään kirjaimella x lisättävän puhdistusaineen määrää.
Tällöin pesuliuosta on yhteensä 200 + x ml ja puhdistusainetta liuoksessa 3 + x ml.
Saadaan yhtälö $\frac{3+x}{200+x}=0,035$, jonka ratkaisu on x = 4,145…

Puhdistusainetta on lisättävä 4 ml.

148. Olkoon meriveden massa ennen haihduttamista a.
Vedessä on suolaa 0,04a. Haihduttamisen jälkeen meriveden massa on 72 % alkuperäisestä, eli 0,72a.

Haihduttamisen jälkeen suolapitoisuus on
$$\frac{0,04a}{0,72a}=0,0555...\approx 5,6\ \%.$$

149. Olkoon perheen tulot a, joten vuokramenot ovat 0,25a, ja muuhun käyttöön jää a – 0,25a = 0,75a.

Korotuksen jälkeen vuokramenot ovat 1,15 · 0,25a = 0,2875a, joten muuhun käyttöön jää a – 0,2875a = 0,7125a.

$$\frac{0,7125a}{0,75a}=0,95$$

Muuhun käyttöön jää 5 % vähemmän rahaa korotuksen jälkeen.

150. **a)** $a^{\frac{2}{3}} = a^{2\cdot\frac{1}{3}} = (a^{\frac{1}{3}})^2 = 4^2 = 16$

b) $8^m = (2^3)^m = 2^{3m} = (2^m)^3 = 3^3 = 27$

c) $2^{4k} = 2^{2\cdot 2k} = (2^2)^{2k} = 4^{2k} = (4^k)^2 = 6^2 = 36$

151. Olkoon tuoreiden omenoiden massa a.
Tuoreissa omenoissa on sokeria $0{,}04a$ ja vettä $0{,}8a$. Sokeria ja muita aineita on yhteensä $0{,}2a$.

Olkoon kuivauksen jälkeen omenien massa b.
Kuivatuissa omenissa on vettä $0{,}2b$ ja sokeria ja muita aineita yhteensä $0{,}8b$.

Kuivauksessa sokerin ja muiden aineiden määrä ei muutu, joten
$0{,}8b = 0{,}2a$, josta $b = \frac{0{,}2a}{0{,}8} = \frac{2}{8}a = \frac{1}{4}a = 0{,}25a$.

Sokeripitoisuus on $\frac{0{,}04a}{b} = \frac{0{,}04a}{0{,}25a} = 0{,}16 = 16\ \%$.

152. Olkoon päärynämehun massa a ja omenamehun massa b. Mehua on yhteensä $a + b$.

Päärynämehussa on sokeria $0{,}14a$ ja omenamehussa $0{,}07b$. Sokeria on yhteensä $0{,}14a + 0{,}07b$.

Koska sokeripitoisuus tiedetään, saadaan yhtälö
$\frac{0{,}14a + 0{,}07b}{a+b} = 0{,}11$, josta $b = \frac{3}{4}a$.

Päärynämehun ja omenamehun sekoitussuhde on
$a : b = a : \frac{3}{4}a = \frac{4}{3} = 4:3$, eli
päärynämehua tulee olla neljä osaa ja omenamehua kolme osaa.

SYVENTÄVÄT TEHTÄVÄT

153. **a)** Jos a ja b ovat molemmat positiivisia tai nolla,
$|a| + |b| = a + b$ ja $|a + b| = a + b$. Yhtälö on tällöin tosi.

Jos a ja b ovat molemmat negatiivisia tai nolla,
$|a| + |b| = -a - b$ ja $|a + b| = -(a + b) = -a - b$. Yhtälö on tällöin tosi.

Yhtälö on tosi, kun $a \geq 0$ ja $b \geq 0$ tai $a \leq 0$ ja $b \leq 0$.

b) Jos $a > 0$ ja $b < 0$, $|a| + |b| = a - b$.
Jos $|a| > |b|$, $a + b > 0$ ja $|a + b| = a + b \neq |a| + |b|$.
Jos $|a| < |b|$, $a + b < 0$, ja $|a + b| = -a - b \neq |a| + |b|$.
Samoin, jos $a < 0$ ja $b > 0$, yhtälö ei toteudu.

Yhtälö on epätosi, kun $a < 0$ ja $b > 0$ tai $a > 0$ ja $b < 0$.

154. 1) Kun $a > b$, lukujen välinen etäisyys on $a - b$.
Kun $a > b$, on $a - b > 0$, joten $|a - b| = a - b$.

2) Kun $a = b$, lukujen välinen etäisyys on $a - b = 0$ ja $|a - b| = |0| = 0$.

3) Kun $a < b$, lukujen välinen etäisyys on $b - a$.
Kun $a < b$, on $a - b < 0$, joten $|a - b| = -(a - b) = -a + b = b - a$.

Kohtien 1-3 perusteella lukujen a ja b välinen etäisyys on $|a - b|$.

155. Kun $a \geq 0$, on $\sqrt{a^2} = a$ ja $|a| = a$.
Kun $a < 0$, on $-a > 0$. Tällöin $\sqrt{a^2} = \sqrt{(-a)^2} = -a$ ja $|a| = -a$.

156. Reaaliluvun itseisarvo on $|x| = \begin{cases} x, \text{ kun } x \geq 0 \\ -x, \text{ kun } x < 0 \end{cases}$.

a) Kun $x \geq 0$, $|x| = x$, joten epäyhtälö $x \leq |x|$ voidaan kirjoittaa muotoon $x \leq x$. joka on aina tosi.
Kun $x < 0$, epäyhtälö $x \leq |x|$ on aina tosi, koska negatiivinen luku on aina positiivista lukua pienempi.

b) a-kohdan perusteella $x \leq |x|$ ja $y \leq |y|$, joten myös $x + y \leq |x| + |y|$.

c) Määritelmän ja a-kohdan perusteella $-|x| \leq x \leq |x|$ ja $-|y| \leq y \leq |y|$.
Siis $-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$.
Jos $x + y \geq 0$, on $|x + y| = x + y \leq |x| + |y|$.
Jos $x + y < 0$, on edellisen perusteella $|x + y| = -(x + y) \leq |x| + |y|$.
Siis aina $|x + y| \leq |x| + |y|$.

d) Jos $|x| - |y| \geq 0$, niin $||x| - |y|| = |x| - |y| \leq |x| + |y|$.
Jos $|x| - |y| < 0$, niin $||x| - |y|| = -|x| + |y| \leq |x| + |y|$.
Siis aina $||x| - |y|| \leq |x| + |y|$.

157. 1º $(x \circ y) \circ z = (x + y - 2) \circ z = (x + y - 2) + z - 2 = x + y + z - 4$

$x \circ (y \circ z) = x \circ (y + z - 2) = x + (y + z - 2) - 2 = x + y + z - 4$

Siis $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$.

2° Koska $x \circ y = x + y - 2$ ja $y \circ x = y + x - 2 = x + y - 2$, on

$x \circ y = x \circ y$

kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$.

3° Kohdan 2° mukaan $x \circ \omega = \omega \circ x$ kaikilla $x, \omega \in \mathbb{R}$, joten riittää tarkastella yhtälöä $x \circ \omega = x$.

$x \circ \omega = x + \omega - 2$, joten

$x + \omega - 2 = x$

$\omega = 2$

Siis $x \circ 2 = x + 2 - 2 = x$ ja $2 \circ x = 2 + x - 2 = x$, joten on olemassa luku ω, jolle $x \circ \omega = \omega \circ x = x$.

4° Kohdan 2° mukaan $x \circ x^* = x^* \circ x$ kaikilla $x, \omega \in \mathbb{R}$ ja kohdan 3° mukaan $\omega = 2$. Tarkastellaan yhtälöä $x \circ x^* = \omega$.

$$
\begin{aligned}
x \circ x^* &= \omega \\
x + x^* - 2 &= \omega \\
x + x^* - 2 &= 2 \\
x^* &= 4 - x
\end{aligned}
$$

Siis jokaisella $x \in \mathbb{R}$ on vasta-alkio $x^* = 4 - x$, jolle

$x \circ x^* = x^* \circ x = \omega$:

$x \circ (4 - x) = x + (4 - x) - 2 = 2 = \omega$ ja

$(4 - x) \circ x = (4 - x) + x - 2 = 2 = \omega$.

2 Polynomi- ja itseisarvofunktio

2.1 Funktio yleisesti ja potenssifunktio

LUVUN 2.1 YDINTEHTÄVÄT

201. **a)** $f(-3) = -(-3)^2 - 2 \cdot (-3) = -9 + 6 = -3$

b) $f(a) = -a^2 - 2a$

c) $f(-a) = -(-a)^2 - 2 \cdot (-a) = -a^2 + 2a$

d) $f(2a) = -(2a)^2 - 2 \cdot 2a = -4a^2 - 4a$

202. **a)** $x^4 = 16$

$x^4 = 2^4$

$x = 2$ tai $x = -2$

b) $3 - x^4 = 17 \quad \| -3$

$-x^4 = 14 \quad \| : (-1)$

$x^4 = -14$

ei ratkaisua

c) $1 + 32x^5 = 0$

$32x^5 = -1$

$x^5 = -\dfrac{1}{32}$

$x = (-\dfrac{1}{2})^5$

$x = -\dfrac{1}{2}$

d) $7(3 - x)^8 = 7 \quad \| : 7$

$(3 - x)^8 = 1$

$3 - x = 1$ tai $3 - x = -1$

$x = 2$ tai $x = 4$

203. **a)** $f(x) = x^4 + x^2 + 1$

Kaikilla reaaliluvuilla x parillinen potenssi on ei-negatiivinen, eli $x^4 \geq 0$ ja $x^2 \geq 0$. Tällöin myös summa $x^4 + x^2 \geq 0$ ja edelleen $x^4 + x^2 + 1 \geq 1$.

Kaikille reaaliluvuille x siis pätee $x^4 + x^2 + 1 \geq 0$.

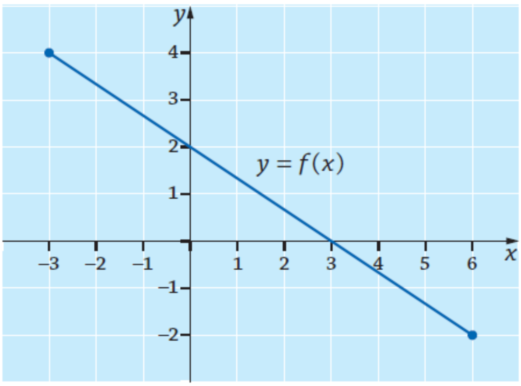
b) $g(x) = x^5 + x$

$g(-1) = (-1)^5 + (-1) = -1 - 1 = -2 < 0$

Kaikille reaaliluvuille x ei siis päde $g(x) \geq 0$, joten väite on epätosi.

204. **a)** Määrittelyjoukko on $[-3, 6]$.

b)



Funktion arvojoukko on $[-2, 4]$.

c) Funktion nollakohta on yhtälön $f(x) = 0$ ratkaisu.

$$-\frac{2}{3}x + 2 = 0$$

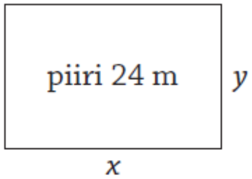
$$-\frac{2}{3}x = -2 \quad \|:(-\frac{2}{3})$$

$$x = -2 \cdot (-\frac{3}{2})$$

$$x = 3$$

205. A-III, B-I, C-II

206. **a)**



$$\begin{aligned} 2x + 2y &= 24 \\ 2y &= 24 - 2x \qquad \| : 2 \\ y &= 12 - x \end{aligned}$$

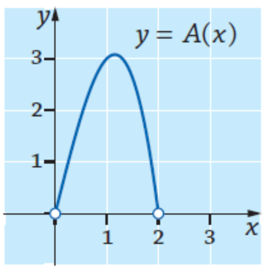
b) Sivujen pituudet ovat positiivisia eli $x > 0$ ja $y > 0$. Jälkimmäinen ehto merkitsee epäyhtälöä $12 - x > 0$, josta $x < 12$. Funktion määrittelyehto on $0 < x < 12$.

Suorakulmion pinta-ala on $xy = x(12 - x) = -x^2 + 12x$.

$A(x) = -x^2 + 12x,\ 0 < x < 12$

207. Suorakulmion kannan pituus on x. Suorakulmion korkeus on sama kuin funktion f kuvaajalla kohdassa x olevan pisteen y-koordinaatin arvo, eli $f(x)$. Suorakulmion pinta-ala A on $x \cdot f(x) = x(4 - x^2) = -x^3 + 4x$.

$A(x) = -x^3 + 4x,\ 0 < x < 2$



Suurin arvo on noin 3,1 ja se saavutetaan arvolla $x \approx 1,2$.

2.2 Polynomifunktio ja –yhtälö

LUVUN 2.2 YDINTEHTÄVÄT

208. **a)** $4(x^2 - 2x) - x(x - 3) = 4x^2 - 8x - x^2 + 3x = 3x^2 - 5x$
Asteluku on 2 ja ensimmäisen asteen termin kerroin on –5.

b) $x^2 - (x - 2)^2 = x^2 - (x^2 - 4x + 4) = 4x - 4$
Asteluku on 1 ja ensimmäisen asteen termin kerroin on 4.

c) $(2 - x^3)^2 - (x^3 + 1)(x^3 - 1) = 4 - 4x^3 + x^6 - (x^6 - 1) = -4x^3 + 5$
Asteluku on 3 ja ensimmäisen asteen termin kerroin on 0.

209. **a)** $(2x + 2)(x - 1) = 0$

$2x + 2 = 0$ tai $x - 1 = 0$

$2x = -2$ $\quad x = 1$

$x = -1$

b)
$$(2x + 2)(x - 1) = 1$$
$$2x^2 - 2x + 2x - 2 = 1$$
$$2x^2 = 3$$
$$x^2 = \frac{3}{2}$$
$$x = \sqrt{\frac{3}{2}} \text{ tai } x = -\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\sqrt{\frac{3}{2}} \overset{\sqrt{2})}{=} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}, \text{ joten}$$

$$x = \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ tai } x = -\frac{\sqrt{6}}{2}$$

210. **a)** $(x-2)(x-3)=6$

$x^2-3x-2x+6=6$

$x^2-5x=0$

$x(x-5)=0$

$x=0$ tai $x-5=0$

$x=5$

b) $7(x-3)+1=x^2-1-(x^2-1)$

$7x-21+1=0$

$7x=20$

$x=\frac{20}{7}$

211. **a)** $x^2+10x+25=x^2+2\cdot 5\cdot x+5^2=(x+5)^2$

b) $16-x^4=(4-x^2)(4+x^2)=(2-x)(2+x)(4+x^2)$

c) $2x^3+4x^2-30x=2x(x^2+2x-15)$

Ratkaistaan polynomin $x^2+2x-15$ nollakohdat.

$x^2+2x-15=0$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 1\cdot(-15)}}{2\cdot 1}=\frac{-2\pm 8}{2}$$

$x=3$ tai $x=-5$

$2x^3+4x^2-30x=2x(x^2+2x-15)=2x(x-3)(x+5)$

d) x^3+x^2-4x-4

$=x^2(x+1)-4(x+1)$

$=(x^2-4)(x+1)$

$=(x-2)(x+2)(x+1)$

212. **a)**

$$\frac{x}{6}-\frac{x-3}{2}-\frac{7}{9}=0 \quad \|\cdot 18$$

$$3x - 9(x - 3) - 2 \cdot 7 = 0$$

$$3x - 9x + 27 - 14 = 0$$

$$-6x = -13 \qquad \| : (-6)$$

$$x = \frac{13}{6}$$

b)

$$\frac{4x-1}{5}=\frac{x+1}{2}+\frac{3-x}{4} \quad \|\cdot 20$$

$$4(4x - 1) = 10(x + 1) + 5(3 - x)$$

$$16x - 4 = 10x + 10 + 15 - 5x$$

$$16x - 10x + 5x = 10 + 15 + 4$$

$$11x = 29$$

$$x = \frac{29}{11}$$

213. **a)**

$$\frac{x^3}{2}-2x^2+x=0 \quad \|\cdot 2$$

$$x^3-4x^2+2x=0$$

$$x(x^2-4x+2)=0$$

$$x=0 \text{ tai } x^2-4x+2=0$$

$$x=\frac{4\pm\sqrt{16-4\cdot 1\cdot 2}}{2}=\frac{4\pm 2\sqrt{2}}{2}$$

$$x=2+\sqrt{2} \text{ tai } x=2-\sqrt{2}$$

b)

$$\frac{x^3}{2}-\frac{3x^2}{4}=2x-3 \quad \|\cdot 4$$

$$2x^3-3x^2=8x-12$$

$$2x^3-3x^2-8x+12=0$$

$$x^2(2x-3)-4(2x-3)=0$$

$$(x^2-4)(2x-3)=0$$

$$x^2-4=0 \qquad \text{tai} \qquad 2x-3=0$$

$$x^2=4 \qquad\qquad 2x=3$$

$$x=2 \text{ tai } x=-2 \qquad\qquad x=\frac{3}{2}$$

214. **a)** Ratkaisusta on unohdettu että parillisella potenssiyhtälöllä on kaksi ratkaisua eli myös $x = -\frac{\sqrt{5}}{2}$ on ratkaisu.

$$4x^2 = 5 \quad \| :4$$
$$x^2 = \frac{5}{4}$$
$$x = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Virheetön ratkaisu:

$$4x^2 = 5$$
$$x^2 = \frac{5}{4}$$
$$x = \sqrt{\frac{5}{4}} \quad \text{tai} \quad x = -\sqrt{\frac{5}{4}}$$
$$x = \frac{\sqrt{5}}{2} \qquad x = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

b) Ratkaisussa on jaettu lausekkeella x^5 eikä ole huomioitu, että se voi olla nolla.

$$x^7 - 3x^5 = 0$$
$$x^7 = 3x^5 \quad \| :x^5$$
$$x^2 = 3$$
$$x = \sqrt{3} \text{ tai } x = -\sqrt{3}$$

Virheetön ratkaisu:

$$x^7 - 3x^5 = 0$$
$$x^5(x^2 - 3) = 0$$
$$x^5 = 0 \text{ tai } x^2 - 3 = 0$$
$$x = 0 \qquad x = \sqrt{3} \text{ tai } x = -\sqrt{3}$$

215. **a)** $7x^7 + 6x^6 = 0$

$x^6(7x + 6) = 0$

$x^6 = 0$ tai $7x + 6 = 0$

$x = 0 \qquad x = -\dfrac{6}{7}$

b) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

$(x^2)^2 - 3x^2 - 4 = 0$

tehdään sijoitus $x^2 = t$

$t^2 - 3t - 4 = 0$

$$t = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2}$$

$t = 4$ tai $t = -1$

$x^2 = 4$ tai $x^2 = -1$

$x = 2$ tai $x = -2$ ei ratkaisua

216. Yhtälön ratkaisu on $x = -2$, joten luku -2 toteuttaa yhtälön.

$(-2 + 3)^2 = a \cdot (-2) + 3$

$1^2 = -2a + 3$

$2a = 2$

$a = 1$

Kun $a = 1$, yhtälö on $(x + 3)^2 = x + 3$.

$(x + 3)^2 = x + 3$

$(x + 3)^2 - (x + 3) = 0$

$(x + 3)((x + 3) - 1) = 0$

$(x + 3)(x + 2) = 0$

$x + 3 = 0$ tai $x + 2 = 0$

$x = -3 \qquad x = -2$

Toinen ratkaisu on $x = -3$.

2.3 Polynomiepäyhtälö

LUVUN 2.3 YDINTEHTÄVÄT

217. **a)** $\frac{3}{5}x-\frac{7}{10}<-\frac{2}{15}x \quad \| \cdot 30$

$18x-21<-4x$

$18x+4x<21$

$22x<21$

$x<\frac{21}{22}$

b) $x(5-8x)>0$

$5x-8x^2>0$

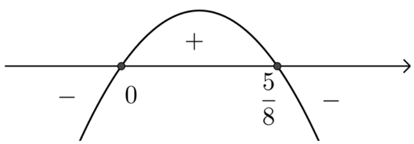
Funktion $5x-8x^2$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli. Ratkaistaan nollakohdat.

$5x-8x^2=0$

$x(5-8x)=0$

$x=0$ tai $5-8x=0$

$x=\frac{5}{8}$



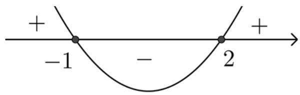
$5x-8x^2>0$, kun $0<x<\frac{5}{8}$.

218. **a)**

$$x^2 - 2 \leq x$$
$$x^2 - x - 2 \leq 0$$

Funktion $x^2 - x - 2$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. Ratkaistaan nollakohdat.

$$x^2 - x - 2 = 0$$
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$$
$$x = 2 \text{ tai } x = -1$$



$x^2 - x - 2 \leq 0$, kun $-1 \leq x \leq 2$.

b)

$$x\sqrt{7} - 3 \leq 4x$$
$$x\sqrt{7} - 4x \leq 3$$
$$(\sqrt{7} - 4)x \leq 3 \qquad \| : (\sqrt{7} - 4) < 0$$
$$x \geq {}^{\sqrt{7}+4}\frac{3}{\sqrt{7} - 4}$$
$$x \geq \frac{3(\sqrt{7} + 4)}{7 - 16}$$
$$x \geq \frac{3(\sqrt{7} + 4)}{-9}$$
$$x \geq -\frac{4 + \sqrt{7}}{3}$$

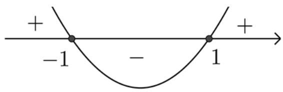
Huomautus: Myös $x \geq \dfrac{3}{\sqrt{7} - 4}$ kelpaa vastaukseksi.

219. **a)** $(2x + 2)(x - 1) > 0$

$$2x^2 - 2x + 2x - 2 > 0$$
$$2x^2 - 2 > 0 \quad \| : 2$$
$$x^2 - 1 > 0$$

Funktion $x^2 - 1$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. Ratkaistaan nollakohdat.

$$x^2 - 1 = 0$$
$$x^2 = 1$$
$$x = 1 \text{ tai } x = -1$$



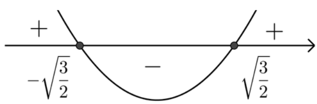
$x^2 - 1 > 0$, kun $x < -1$ tai $x > 1$.

b) $(2x + 2)(x - 1) \leq 1$

$$2x^2 - 2 \leq 1$$
$$2x^2 - 3 \leq 0$$

Funktion $2x^2 - 3$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. Ratkaistaan nollakohdat.

$$2x^2 - 3 = 0$$
$$2x^2 = 3$$
$$x^2 = \frac{3}{2}$$
$$x = \sqrt{\frac{3}{2}} \text{ tai } x = -\sqrt{\frac{3}{2}}$$



$2x^2 - 3 \leq 0$, kun $-\sqrt{\frac{3}{2}} \leq x \leq \sqrt{\frac{3}{2}}$.

c) $x^2 < 0$

Epäyhtälö ei toteudu millään x:n arvolla, sillä $x^2 \geq 0$ aina.

220. **a)** $x + 2 > x$

$0 > -2$ tosi

Epäyhtälö toteutuu kaikilla muuttujan x arvoilla.

b) $x - 2 \geq x$

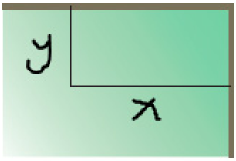
$0 \geq 2$ epätosi

Epäyhtälöllä ei ole ratkaisua.

c) $-x^2 \neq 0$

Ehto toteutuu kaikilla muilla x:n arvoilla, paitsi arvolla 0, eli $x \neq 0$.

221. Merkitään aitauksen mittoja kirjaimilla x ja y.



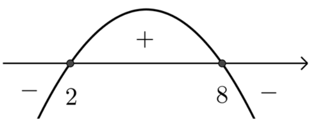
Verkkoa on 10 metriä, joten $x + y = 10$, josta $y = 10 - x$.
Aitauksen pinta-ala on $xy = x(10 - x)$.
Saadaan epäyhtälö:

$$x(10 - x) > 16$$
$$-x^2 + 10x - 16 > 0$$

Funktion $-x^2 + 10x - 16$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli.
Ratkaistaan nollakohdat.

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot (-1) \cdot (-16)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-10 \pm 6}{-2}$$

$x = 8$ tai $x = 2$



$-x^2 + 10x - 16 > 0$, kun $2 < x < 8$.

Toisen sivun x tulee olla $2 < x < 8$ metriä pitkä ja toinen sivu on $10 - x$ metriä pitkä.

222. $P(x) \geq 0$

$(x-2)^2(1-x)(2x+3) \geq 0$

$(x-2)^2 \geq 0$ kaikilla muuttujan x arvoilla.

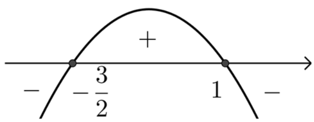
Merkkisäännön perusteella epäyhtälö $(x-2)^2(1-x)(2x+3) \geq 0$ toteutuu, kun $(1-x)(2x+3) \geq 0$.

Epäyhtälö toteutuu myös silloin, kun $(x-2)^2 = 0$ eli kun $x = 2$ lausekkeen $(1-x)(2x+3)$ arvosta riippumatta.

$$(1-x)(2x+3) \geq 0$$
$$-2x^2 - x + 3 \geq 0$$

Funktion $-2x^2 - x + 3$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli. Ratkaistaan nollakohdat.

$$-2x^2 - x + 3 = 0$$
$$(1-x)(2x+3) = 0$$
$$x = 1 \text{ tai } x = -\frac{3}{2}$$



$-2x^2 - x + 3 \geq 0$, kun $-\frac{3}{2} \leq x \leq 1$.

Epäyhtälö $P(x) \geq 0$ toteutuu, kun $-\frac{3}{2} \leq x \leq 1$ tai $x = 2$.

223. Toisen asteen polynomifunktiolla on kaksi nollakohtaa, kun diskriminantti on positiivinen.

$b^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 > 0$

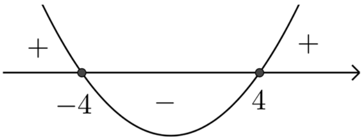
$b^2 - 16 > 0$

Funktion $b^2 - 16$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. Ratkaistaan nollakohdat.

$b^2 - 16 = 0$

$b^2 = 16$

$b = 4$ tai $b = -4$



$b^2 - 16 > 0$, kun $b < -4$ tai $b > 4$.

224. $x + 4 > 3x - 1$

$x - 3x > -1 - 4$

$-2x > -5 \quad \| :(-2)$

$x < \frac{5}{2}$

$x < 2{,}5$

Suurin epäyhtälön toteuttava kokonaisluku on 2.

225. **a)** $x^2 + x + 1 > 0$

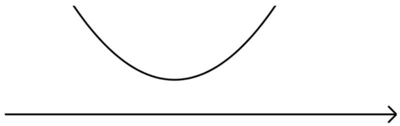
Funktion $x^2 + x + 1$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.

Ratkaistaan nollakohdat.

$x^2 + x + 1 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

ei nollakohtia



$x^2 + x + 1 > 0$ kaikilla muuttujan x arvoilla.

b) $4x^2 - 12x + 9 \leq 0$

$(2x - 3)^2 \leq 0$

$(2x - 3)^2$ on ei-negatiivinen kaikilla muuttujan x arvoilla.

Epäyhtälö toteutuu vain kun $2x - 3 = 0$, eli $x = \frac{3}{2}$.

c) $x^2 < x$

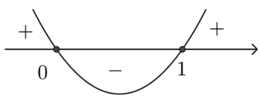
$x^2 - x < 0$

Funktion $x^2 - x$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. Ratkaistaan nollakohdat.

$x^2 - x = 0$

$x(x - 1) = 0$

$x = 0$ tai $x = 1$



$x^2 - x < 0$, kun $0 < x < 1$.

226. **a)** Ratkaisussa on jaettu x:llä kiinnittämättä huomiota x:n merkkiin ja siihen, onko x nolla.

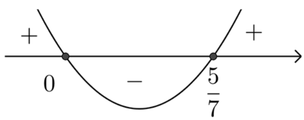
$$7x^2 < 5x \quad \| : x$$
$$7x < 5 \quad \| : 7$$
$$x < \frac{5}{7}$$

Virheetön ratkaisu:

$$7x^2 < 5x$$
$$7x^2 - 5x < 0$$

Funktion $7x^2 - 5x$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. Ratkaistaan nollakohdat.

$$7x^2 - 5x = 0$$
$$x(7x - 5) = 0$$
$$x = 0 \text{ tai } 7x - 5 = 0$$
$$x = \frac{5}{7}$$



$7x^2 - 5x < 0$, kun $0 < x < \frac{5}{7}$.

b) Viimeisessä vaiheessa on virhe: $x^2 > 16$ ei ratkea täysin samoin kuin vastaava yhtälö, vaan epäyhtälömerkkien suuntiin on kiinnitettävä huomiota.

$x^2 - 16 > 0$

$x^2 > 16$

$x > 4$ tai $x > -4$

Virheetön ratkaisu:

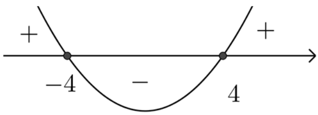
$x^2 - 16 > 0$

Funktion $x^2 - 16$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. Ratkaistaan nollakohdat.

$x^2 - 16 = 0$

$x^2 = 16$

$x = 4$ tai $x = -4$



$x^2 - 16 > 0$, kun $x < -4$ tai $x > 4$.

227.

$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$
$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$
$$(a - b)^2 \geq 0$$

Kaikilla reaaliluvuilla erotuksen neliö on ei-negatiivinen. Epäyhtälö on voimassa kaikilla reaaliluvuilla a ja b.

2.4 Funktion itseisarvo, itseisarvoyhtälö ja -epäyhtälö

LUVUN 2.4 YDINTEHTÄVÄT

228. **a)** $|2x + 5| = 7$

$2x + 5 = 7$ tai $2x + 5 = -7$

$2x = 2$ $\quad$ $2x = -12$

$x = 1$ $\quad$ $x = -6$

b) $|x^2 - 1| = 3$

$x^2 - 1 = 3$ tai $x^2 - 1 = -3$

$x^2 = 4$ $\quad$ $x^2 = -2$

$x = 2$ tai $x = -2$ $\quad$ ei ratkaisua

c) $|x^2 - 3| = -1$

Ei ratkaisua, koska itseisarvo ei voi olla negatiivinen.

d) $|x^2 + 2x| = 0$

$x^2 + 2x = 0$

$x(x + 2) = 0$

$x = 0$ tai $x = -2$

229. **a)** $|3 - x| > 5$

$3 - x > 5$ tai $3 - x < -5$

$-x > 2 \quad \|:(-1)$ $\qquad$ $-x < -8 \quad \|:(-1)$

$x < -2$ $\qquad$ $x > 8$

b) $|3x - 1| < 1$

$-1 < 3x - 1 < 1 \quad \| +1$

$0 < 3x < 2 \quad \| : 3$

$0 < x < \frac{2}{3}$

c) $|x^2 + 3x| \leq 4$

$-4 \leq x^2 + 3x \leq 4$

$-4 \leq x^2 + 3x$ ja $x^2 + 3x \leq 4$

Ratkaistaan epäyhtälöt erikseen.

1) $-4 \leq x^2 + 3x$

$x^2 + 3x + 4 \geq 0$

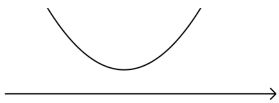
Funktion $x^2 + 3x + 4$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.

Ratkaistaan nollakohdat.

$x^2 + 3x + 4 = 0$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{-7}}{2}$$

ei nollakohtia



$x^2 + 3x + 4 \geq 0$ kaikilla muuttujan x arvoilla.

2) $x^2 + 3x \leq 4$

$x^2 + 3x - 4 \leq 0$

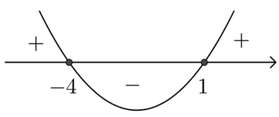
Funktion $x^2 + 3x - 4$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.

Ratkaistaan nollakohdat.

$x^2 + 3x - 4 = 0$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2}$$

$x = -4$ tai $x = 1$



$x^2 + 3x - 4 \leq 0$, kun $-4 \leq x \leq 1$.

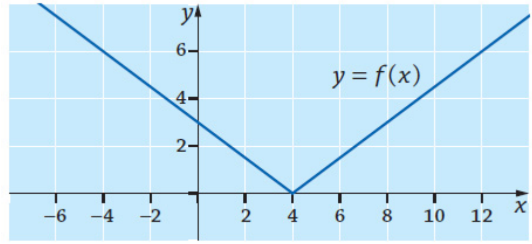
Kohtien 1 ja 2 perusteella epäyhtälö $|x^2 + 3x| \leq 4$ toteutuu, kun $-4 \leq x \leq 1$.

230. Lasketaan lausekkeen $|x^2 + 7x + 1|$ arvo, kun $x = -3$.
$|(-3)^2 + 7 \cdot (-3) + 1| = |9 - 21 + 1| = |-11| = 11$

Yhtälö on tosi, kun $a = 11$.

231. A-I, B-III, C-II, D-III, E-II

232. $f(x) = \left|\frac{3}{4}x - 3\right|$



$|f(x)| = 6$, kun $x = -4$ ja kun $x = 12$.

$|f(x)| < 3$, kun $0 < x < 8$.

233. **a)** $|f(x)| = 2$, kun $f(x) = 2$ tai $f(x) = -2$, eli kun $x = -2$, $x = 0$ tai $x = 2$.

b) $|f(x)| \leq 2$, kun $-2 \leq f(x) \leq 2$, eli kun $-2 \leq x \leq 2$.

c) $|f(x)| \geq 2$, kun $f(x) \geq 2$ tai $f(x) \leq -2$, eli kun $x \leq -2$, $x = 0$ tai $x \geq 2$.

d) $|f(x)| < 2$, kun $-2 < f(x) < 2$, eli kun $-2 < x < 0$ tai $0 < x < 2$.

234. **a)** $|2x-1| = |x^2-1|$

$2x - 1 = x^2 - 1$ tai $2x - 1 = -(x^2 - 1)$

$2x - x^2 = 0$

$x(2 - x) = 0$

$x = 0$ tai $x = 2$

$x^2 + 2x - 2 = 0$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}$$

$x = -1 - \sqrt{3}$ tai $x = -1 + \sqrt{3}$

b) $|x-2| \le |3+x|$

Molemmat puolet ovat ei-negatiivisia, joten epäyhtälö voidaan korottaa puolittain neliöön.

$$|x-2|^2 \le |3+x|^2$$

$$x^2 - 4x + 4 \le 9 + 6x + x^2$$

$$-10x \le 5 \qquad \| :(-10)$$

$$x \ge -\frac{1}{2}$$

c) $|x-1| > |2x-1|$

Molemmat puolet ovat ei-negatiivisia, joten epäyhtälö voidaan korottaa puolittain neliöön.

$$|x-1|^2 > |2x-1|^2$$

$$x^2 - 2x + 1 > 4x^2 - 4x + 1$$

$$-3x^2 + 2x > 0$$

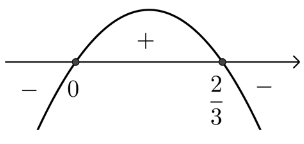
Funktion $-3x^2 + 2x$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli. Ratkaistaan nollakohdat.

$-3x^2 + 2x = 0$

$x(-3x + 2) = 0$

$x = 0$ tai $-3x + 2 = 0$

$x = \frac{2}{3}$



$-3x^2 + 2x > 0$, kun $0 < x < \frac{2}{3}$.

d) $|x| \le |2x + 3|$

Molemmat puolet ovat ei-negatiivisia, joten epäyhtälö voidaan korottaa puolittain neliöön.

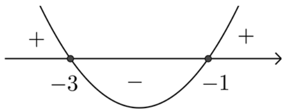
$$|x|^2 \le |2x + 3|^2$$
$$x^2 \le 4x^2 + 12x + 9$$
$$-3x^2 - 12x - 9 \le 0 \qquad \| : (-3)$$
$$x^2 + 4x + 3 \ge 0$$

Funktion $x^2 + 4x + 3$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.

Ratkaistaan nollakohdat.

$x^2 + 4x + 3 = 0$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2}$$
$$x = -3 \text{ tai } x = -1$$



$x^2 + 4x + 3 \ge 0$, kun $x \le -3$ tai $x \ge -1$.

235. **a)** $|x-(-3)| = |x-5|$

$|x+3| = |x-5|$

$x+3 = x-5$ tai $x+3 = -(x-5)$

$3 = -5$ $\quad$ $x+3 = -x+5$

epätosi $\quad$ $2x = 2$

$x = 1$

Luku x on 1.

b) $|x-(-1)| = 2|x-3|$

$|x+1| = |2|\cdot|x-3|$

$|x+1| = |2(x-3)|$

$x+1 = 2(x-3)$ tai $x+1 = -2(x-3)$

$x+1 = 2x-6$ $\quad$ $x+1 = -2x+6$

$-x = -7$ $\quad$ $3x = 5$

$x = 7$ $\quad$ $x = \dfrac{5}{3}$

Luku x on 7 tai $\dfrac{5}{3}$.

Luvun 2 vahvistavat ja syventävät tehtävät

VAHVISTAVAT TEHTÄVÄT

236. A-II, B-III, C-IV, D-I, E-V, F-VI

237. x-akselilla $y = 0$ eli
$(x - 1)^2 - 1 = 0$, josta
$(x - 1)^2 = 1$
$x - 1 = 1$ tai $x - 1 = -1$
$x = 2$ $\quad$ $x = 0$

y-akselilla $x = 0$, joten
$y = (0 - 1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0$

x-akselin leikkauspisteet ovat (2, 0) ja (0, 0) ja y-akselin (0, 0).

238. $p(x) = cx + d$

$p(4) = 1$, joten $4c + d = 1$

$p(7) = 3$, joten $7c + d = 3$

Ratkaistaan yhtälöpari

$$\begin{cases} 4c + d = 1 \\ 7c + d = 3 \quad \| \cdot (-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4c + d = 1 \\ -7c - d = -3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -3c &= -2 \\ c &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$4c + d = 1$, josta $d = 1 - 4c = 1 - 4 \cdot \frac{2}{3} = 1 - \frac{8}{3} = -\frac{5}{3}$

Siten $p(x) = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$.

$$\begin{aligned} p(x) &= 0 \\ \frac{2}{3}x - \frac{5}{3} &= 0 \\ \frac{2}{3}x &= \frac{5}{3} \quad \| : \frac{2}{3} \\ x &= \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{2} \\ x &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

239. **a)** $P(x) = -3x^2 + 4x + 1$ ja $Q(x) = x^2 - 4x - 2$

$P(2x) + Q(-x)$
$= -3(2x)^2 + 4 \cdot (2x) + 1 + (-x)^2 - 4 \cdot (-x) - 2$
$= -3 \cdot 4x^2 + 8x + 1 + x^2 + 4x - 2$
$= -11x^2 + 12x - 1$

$$P(-x) = P(1)$$
$$-3(-x)^2 + 4 \cdot (-x) + 1 = -3 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 1$$
$$-3x^2 - 4x + 1 = 2$$
$$-3x^2 - 4x - 1 = 0$$
$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot (-3) \cdot (-1)}}{2 \cdot (-3)} = \frac{4 \pm 2}{-6}$$
$$x = -1 \text{ tai } x = -\frac{1}{3}$$

b) Yhtälö toteutuu, kun $x = -2 - \sqrt{6}$ ja kun $x = -2 + \sqrt{6}$. Syntyy yhtälöpari

$$\begin{cases} (-2-\sqrt{6})^2 + p(-2-\sqrt{6}) + q = 0 \\ (-2+\sqrt{6})^2 + p(-2+\sqrt{6}) + q = 0 \end{cases}$$

Muokataan ja ratkaistaan yhtälöpari.

$$\begin{cases} 4 + 4\sqrt{6} + 6 + p(-2-\sqrt{6}) + q = 0 \\ 4 - 4\sqrt{6} + 6 + p(-2+\sqrt{6}) + q = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p(-2-\sqrt{6}) + q = -10 - 4\sqrt{6} \\ p(-2+\sqrt{6}) + q = -10 + 4\sqrt{6} \qquad \| \cdot (-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} p(-2-\sqrt{6}) + q = -10 - 4\sqrt{6} \\ p(2-\sqrt{6}) - q = 10 - 4\sqrt{6} \end{cases}$$

$$-2\sqrt{6}p = -8\sqrt{6} \qquad \| : (-2\sqrt{6})$$
$$p = 4$$

$p(2-\sqrt{6}) - q = 10 - 4\sqrt{6}$, josta $q = p(2-\sqrt{6}) - 10 + 4\sqrt{6}$.
Kun $p = 4$, on $q = 4(2-\sqrt{6}) - 10 + 4\sqrt{6} = 8 - 4\sqrt{6} - 10 + 4\sqrt{6} = -2$.

TOINEN TAPA perustuen taulukkoaineiston kaavoihin:

Toisen asteen yhtälön $x^2 + px + q = 0$ juurten summalle ja tulolle pätee
$x_1x_2 = q$ ja $x_1 + x_2 = -p$.
$q = (-2-\sqrt{6})(-2+\sqrt{6}) = 4-6 = -2$
$p = -((-2-\sqrt{6})+(-2+\sqrt{6})) = -(-4) = 4$

240. **a)** $(x-2)^2 = (x+2)^2$
$x^2 - 4x + 4 = x^2 + 4x + 4$
$-8x = 0$
$x = 0$

b) $(x^4-1)^2 = 9$
$x^4 - 1 = 3$ tai $x^4 - 1 = -3$
$x^4 = 4$ $\qquad$ $x^4 = -2$
$x = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$ tai $x = -\sqrt[4]{4} = -\sqrt{2}$ $\qquad$ ei ratkaisua

$(\sqrt[4]{4} = (2^2)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2})$

c) $|x^2 - 5| = 3$
$x^2 - 5 = 3$ tai $x^2 - 5 = -3$
$x^2 = 8$ $\qquad$ $x^2 = 2$
$x = \sqrt{8}$ tai $x = -\sqrt{8}$ $\qquad$ $x = \sqrt{2}$ tai $x = -\sqrt{2}$
$x = 2\sqrt{2}$ $\quad$ $x = -2\sqrt{2}$

d) $|x-2| = |x^2+2|$
$x - 2 = x^2 + 2$ tai $x - 2 = -(x^2+2)$
$x^2 - x + 4 = 0$ $\qquad$ $x^2 + x = 0$
$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4\cdot 1\cdot 4}}{2\cdot 1} = \dfrac{1\pm\sqrt{-15}}{2}$ $\qquad$ $x(x+1) = 0$
ei ratkaisua $\qquad$ $x = 0$ tai $x = -1$

241. **a)** $2x^2 - 7x - 4 = 0$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 2 \cdot (-4)}}{2 \cdot 2} = \frac{7 \pm 9}{4}$$

$$x = 4 \text{ tai } x = -\frac{1}{2}$$

b)

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

$$x^2 + 2ax + a^2 = x^2 + 14x + b$$

$2a = 14$, josta $a = 7$

$b = a^2 = 7^2 = 49$

242. Koska $t = -2$ on nollakohta, on $f(-2) = 0$.

$f(-2) = 3 \cdot (-2)^2 + 2 \cdot (-2) - a = 12 - 4 - a = 8 - a$

$8 - a = 0$

$a = 8$

Nollakohdat saadaan yhtälöstä $f(t) = 3t^2 + 2t - 8 = 0$, jonka ratkaisut ovat

$$t = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 3 \cdot (-8)}}{2 \cdot 3} = \frac{-2 \pm 10}{6}$$

$$t = -2 \quad \text{tai} \quad t = \frac{4}{3}$$

Toinen nollakohta on siten $t = \frac{4}{3}$.

243. **a)** $3x^2 < 5x$

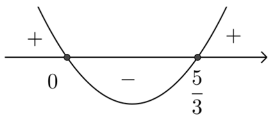
$3x^2 - 5x < 0$

Funktion $3x^2 - 5x$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. Ratkaistaan nollakohdat.

$3x^2 - 5x = 0$

$x(3x - 5) = 0$

$x = 0$ tai $x = \dfrac{5}{3}$



$3x^2 - 5x < 0$, kun $0 < x < \dfrac{5}{3}$

b) $x^4 - 16 > 0$

$(x^2 - 4)(x^2 + 4) > 0$

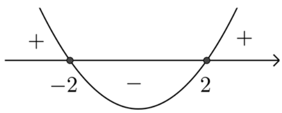
$x^2 + 4 > 0$ kaikilla muuttujan x arvoilla. Lausekkeen $(x^2 - 4)(x^2 + 4)$ merkkiin vaikuttaa vain tekijän $x^2 - 4$ merkki.

Funktion $x^2 - 4$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. Ratkaistaan nollakohdat.

$x^2 - 4 = 0$

$x^2 = 4$

$x = 2$ tai $x = -2$



$x^2 - 4 > 0$, kun $x < -2$ tai $x > 2$.

c) $|3x - 2| < 4$

$-4 < 3x - 2 < 4 \quad \| +2$

$-2 < 3x < 6 \quad \| : 3$

$-\frac{2}{3} < x < 2$

d) $|x^2 - 3| > 2$

$x^2 - 3 > 2$ tai $x^2 - 3 < -2$

$x^2 - 5 > 0 \qquad x^2 - 1 < 0$

Ratkaistaan epäyhtälöt erikseen.

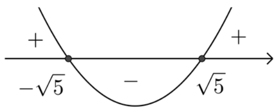
1) $x^2 - 5 > 0$

Funktion $x^2 - 5$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. Ratkaistaan nollakohdat.

$x^2 - 5 = 0$

$x^2 = 5$

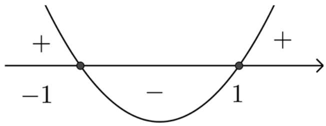
$x = \sqrt{5}$ tai $x = -\sqrt{5}$



$x^2 - 5 > 0$ kun $x < -\sqrt{5}$ tai $x > \sqrt{5}$ (1)

2) $x^2 - 1 < 0$
Funktion $x^2 - 1$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. Ratkaistaan nollakohdat.

$$x^2 - 1 = 0$$
$$x^2 = 1$$
$$x = 1 \text{ tai } x = -1$$



$x^2 - 1 < 0$, kun $-1 < x < 1$ (2)

Huomioiden vastaukset (1) ja (2) saadaan epäyhtälön $|x^2 - 3| > 2$ ratkaisuksi $x < -\sqrt{5}$ tai $x > \sqrt{5}$ tai $-1 < x < 1$.

244. $|x| = 1 + x$
Yhtälöllä on ratkaisu, kun $1 + x \geq 0$, eli kun $x \geq -1$.

$x = 1 + x$ tai $x = -1 - x$
$0 = 1$ $\quad 2x = -1$
epätosi $\quad x = -\frac{1}{2}$

$x = -\frac{1}{2}$ toteuttaa määrittelyehdon eli on ratkaisu.

245. Aitamateriaalia on 150 m.

$8x + 5y = 150$

$$y = 30 - \frac{8}{5}x$$

Karsinoiden yhteispinta-ala on $4xy = 4x(30 - \frac{8}{5}x) = 120x - \frac{32}{5}x^2$.

Jotta muodostuisi aitaus, tulee olla

$x > 0$ ja

$y > 0$, eli $30 - \frac{8}{5}x > 0$, josta $x < 18{,}75$.

Funktio, joka ilmaisee neljän karsinan yhteispinta-alan, on

$A(x) = 120x - \frac{32}{5}x^2,\ 0 < x < 18{,}75$

(eli $A:\ ]0;18{,}75[\to \mathbb{R},\ A(x) = 120x - \frac{32}{5}x^2$)

$120x - \frac{32}{5}x^2 > 500$

$6{,}25 < x < 12{,}5$

Jotta yhteispinta-ala ylittäisi 500 m^2, tulee karsinan sivun x olla

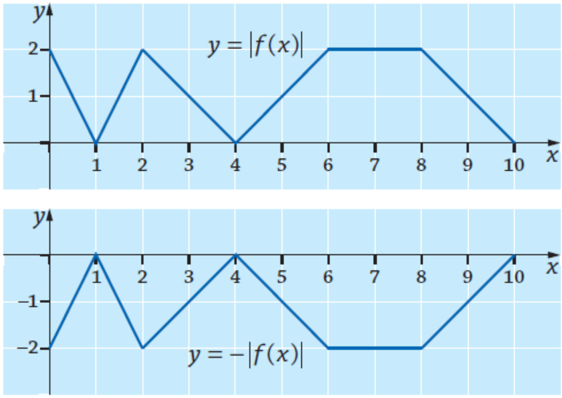
6,25 m $< x <$ 12,5 m ja toisen sivun $30 - \frac{8}{5}x$ m.

246. **a)** $f(9) \approx -1$

Funktio f saa arvon 2 muuttujan arvolla $x \approx 2$.

b) $f(0) = -2$, nollakohdat $x \approx 1$, $x \approx 4$ ja $x \approx 10$

c)



d) $|f(x)| = 1$, kun $x \approx 0{,}5$, $x \approx 1{,}5$, $x \approx 3$, $x \approx 5$ ja $x \approx 9$

247. **a)** $2(x-6)(x-9) = 2(x^2 - 9x - 6x + 54) = 2x^2 - 30x + 108$

b) Ratkaistaan polynomin nollakohdat.

$x^2 + x - 12 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2}$$

$$x = -4 \text{ tai } x = 3$$

$a = 1$, $x_1 = -4$ ja $x_2 = 3$, joten

$x^2 + x - 12 = 1 \cdot (x+4)(x-3) = (x+4)(x-3)$.

c) $a(x-x_1)(x-x_2)=a(x^2-x_2x-x_1x+x_1x_2)=ax^2-a(x_1+x_2)x+ax_1x_2$

Toisaalta polynomi voidaan kirjoittaa muotoon ax^2+bx+c.
Vakiotermien tulee olla samat, joten $ax_1x_2=c$, joista edelleen

$x_1x_2=\dfrac{c}{a}$.

Toinen tapa:
Ratkaistaan polynomin ax^2+bx+c nollakohdat. Oletuksen mukaan ne ovat olemassa (eli $b^2-4ac\geq 0$).

$$ax^2+bx+c=0$$
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Muodostetaan ja sievennetään nollakohtien x_1 ja x_2 tulo.

$$\begin{aligned}x_1x_2&=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\&=\frac{(-b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2}{(2a)^2}\\&=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}\\&=\frac{4ac}{4a^2}\\&=\frac{c}{a}\end{aligned}$$

248. **a)** Ratkaistaan polynomin nollakohdat.

$6x^2 + 4x - 2 = 0$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 6 \cdot (-2)}}{12} = \frac{-4 \pm 8}{12}$$

$$x = -1 \text{ tai } x = \frac{1}{3}$$

$$6x^2 + 4x - 2 = 6(x+1)(x - \frac{1}{3}) = 2(x+1)3(x - \frac{1}{3}) = 2(x-1)(3x-1)$$

b) Polynomilla $2x^2 - x + 3$ ei ole nollakohtia, koska sen diskriminantti $(-1)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 3 = -71$ on negatiivinen. Koska sillä ei ole nollakohtia, sillä ei ole ensimmäisen asteen tekijöitä.

249. **a)** Ensimmäisen asteen polynomifunktio, jonka nollakohta on $x = -3$ on $x + 3$. Ensimmäisen asteen polynomifunktio, jonka nollakohta $x = \frac{2}{5}$ on $x - \frac{2}{5}$. Näiden tulo $(x + 3)(x - \frac{2}{5}) = x^2 - \frac{13}{5}x - \frac{6}{5}$ on haluttu toisen asteen polynomifunktio.

b) Koska $x^2 \geq 0$, on $x^2 + 1 \geq 1 > 0$. Esimerkiksi $x^2 + 1$ on toisen asteen polynomifunktio, jolla ei ole nollakohtia.

250. Toisen asteen polynomin lauseke voidaan muodostaa nollakohtien avulla. Kaikki toisen asteen funktion, joilla on nollakohdat $x = 1$ ja $x = 4$ ovat $f(x) = a(x - 1)(x - 4)$. Kerroin a ratkaistaan käyttäen tietoa, että piste (3, 2) on funktion kuvaajalla eli että yhtälö $f(3) = 2$ on tosi.

$$
\begin{aligned}
a(3-1)(3-4) &= 2 \\
a \cdot 2 \cdot (-1) &= 2 \\
a &= -1
\end{aligned}
$$

Siten $f(x) = -(x-1)(x-4) = -(x^2 - 4x - x + 4) = -x^2 + 5x - 4$.

Kolmannen asteen polynomifunktion lauseke voidaan muodostaa vastaavasti nollakohtien avulla ja on $g(x) = b(x - 0)(x - 3)(x - 5)$. Piste (1, 2) on funktion kuvaajalla, joten $g(1) = 2$.

$$
\begin{aligned}
b(1-0)(1-3)(1-5) &= 2 \\
b \cdot 1 \cdot (-2) \cdot (-4) &= 2 \\
8b &= 2 \\
b &= \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

$$g(x) = \frac{1}{4}(x-0)(x-3)(x-5) = \frac{1}{4}x(x^2 - 8x + 15) = \frac{1}{4}x^3 - 2x^2 + \frac{15}{4}x$$

251. **a)** Koska $x = -2$ on kaksinkertainen nollakohta, on funktion lauseke $f(x) = a(x-(-2))(x-(-2)) = a(x+2)^2$ jollekin a. Kerroin a ratkeaa yhtälöstä $f(0) = 10$.

$$a(0+2)^2 = 10$$
$$4a = 10$$
$$a = \frac{5}{2}$$

Funktion lauseke on

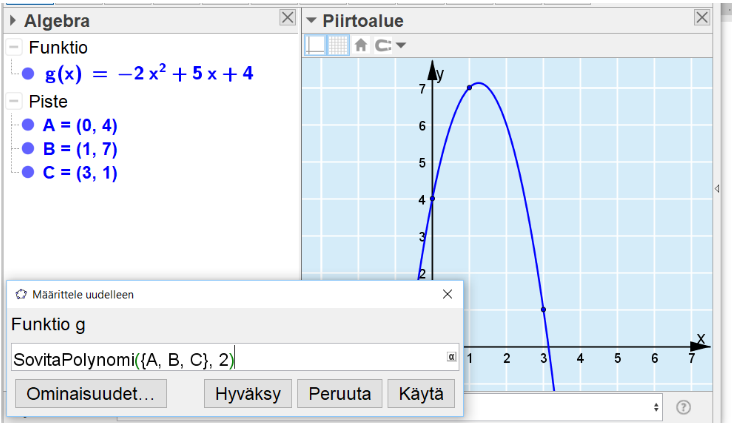
$$f(x) = \frac{5}{2}(x+2)^2 = \frac{5}{2}(x^2+4x+4) = \frac{5}{2}x^2 + 10x + 10.$$

b) $f(x) = a(x+5)(x-1)(x-3)^2$ ja $f(2) = -14$, joten

$$a(2+5)(2-1)(2-3)^2 = -14$$
$$a \cdot 7 \cdot 1 \cdot (-1)^2 = -14$$
$$7a = -14$$
$$a = -2$$

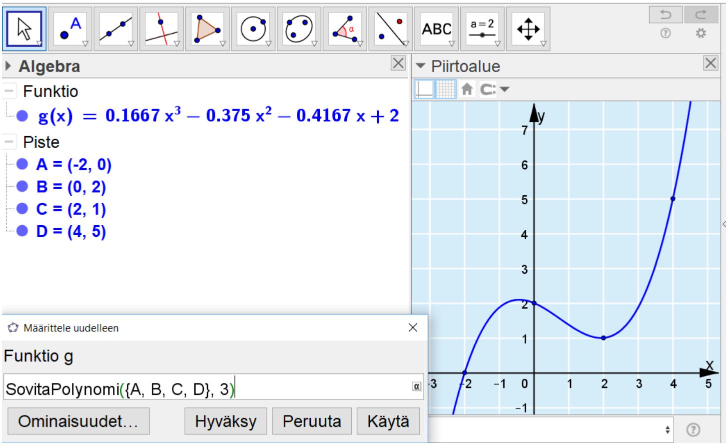
$$\begin{aligned} f(x) &= -2(x+5)(x-1)(x-3)^2 \\ &= -2(x^2+4x-5)(x^2-6x+9) \\ &= -2(x^4-2x^3-20x^2+66x-45) \\ &= -2x^4+4x^3+40x^2-132x+90 \end{aligned}$$

252. a)



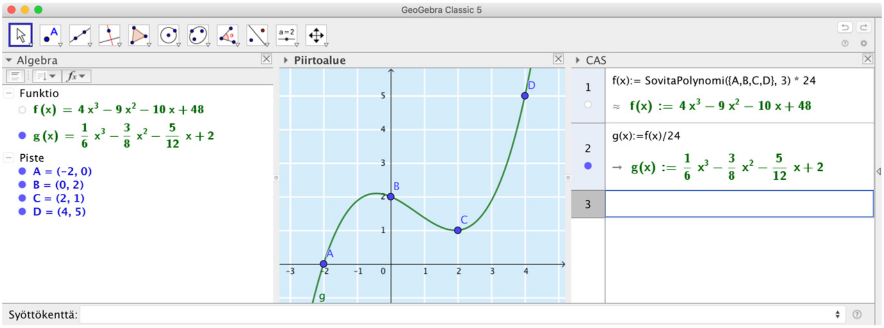
Polynomifunktion lauseke on $-2x^2 + 5x + 4$.

b)



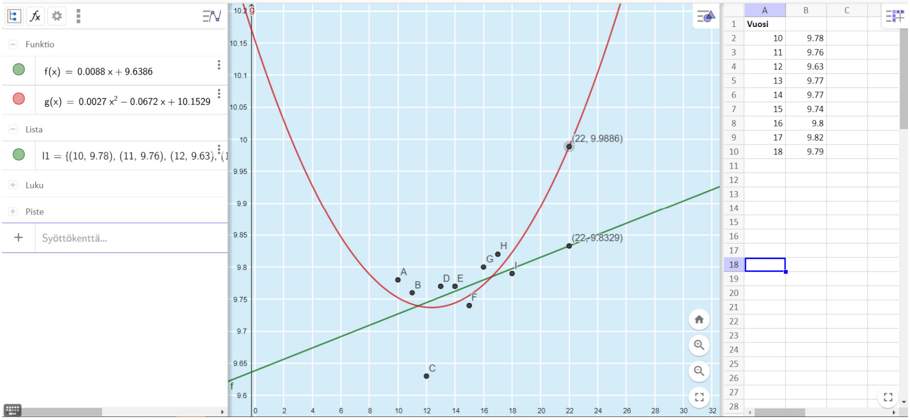
GeoGebra antaa kertoimet likiarvoina.
Polynomifunktion lauseke on $0{,}1667x^3 - 0{,}375x^2 - 0{,}4167x + 2$.

Kertoimien likiarvojen perusteella kokeillen huomataan, että kertoimet saadaan pakotettua murtoluviksi, kun lauseke kerrotaan luvulla 24 ja saatu polynomi jaetaan luvulla 24. Kerroin 24 voidaan löytää vaiheittain: tunnistetaan 0,1667 luvun $\frac{1}{6}$ likiarvoksi, joten kerrotaan kuudella. Tämän jälkeen tunnistetaan kerroin 0,25 luvuksi $\frac{1}{4}$.



Siten polynomin lauseke on $\frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{12}x + 2$.

253. Geogebralla voidaan luoda tuloksista ensin pistelista (esim. l1) ja tämän jälkeen sovittaa listan pisteet ensimmäisen asteen polynomifunktioksi komennolla SovitaPolynomi(l1,1) tai toisen asteen polynomifunktioksi komennolla SovitaPolynomi(l1,2)



Ensimmäisen asteen polynomisen mallin mukaan paras tulos vuonna 2022 olisi 9,83 s ja toisen asteen mallin mukaan 9,99 s.

254. **a)** Ratkaistaan yhtälö $3x^2 - 10x + 3 = 0$.

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 3 \cdot 3}}{6} = \frac{10 \pm 8}{6}$$

$$x = 3 \text{ tai } x = \frac{1}{3}$$

Ratkaisut ovat toistensa käänteislukuja, koska niiden tulo $3 \cdot \frac{1}{3}$ on 1.

b) Ratkaistaan yhtälö $x^2 - 2x + 3 - a = 0$.

$$\begin{aligned} x &= \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1(3 - a)}}{2} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{4 - 12 + 4a}}{2} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{-8 + 4a}}{2} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{4(a - 2)}}{2} \\ &= \frac{2 \pm 2\sqrt{a - 2}}{2} \\ &= 1 \pm \sqrt{a - 2} \end{aligned}$$

Jotta ratkaisuja olisi, tulee olla $a - 2 \geq 0$, eli $a \geq 2$.

Lasketaan ratkaisujen tulo.

$$(1 + \sqrt{a - 2})(1 - \sqrt{a - 2}) = 1^2 - \sqrt{a - 2}^2 = 1 - (a - 2) = 3 - a.$$

Jotta ratkaisut olisivat toistensa käänteislukuja, tulee olla $3 - a = 1$, eli $a = 2$.

255. $x^2 + 2x - 1 = 0$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$$

$$x = -1 - \sqrt{2} \text{ tai } x = -1 + \sqrt{2}$$

$$(5^x)^y + 5^x \cdot 5^y = 5^{x \cdot y} + 5^{x+y}$$

Eksponentit ovat lukujen x ja y tulo sekä summa. Se, kumpaa yhtälön ratkaisuista merkitään luvulla x ja kumpaa luvulla y, ei ole lopputuloksen kannalta merkitystä. Valitaan $x = -1 - \sqrt{2}$ ja $y = -1 + \sqrt{2}$.

$$5^{x \cdot y} + 5^{x+y} = 5^{(-1-\sqrt{2})(-1+\sqrt{2})} + 5^{(-1-\sqrt{2})+(-1+\sqrt{2})} = 5^{1-2} + 5^{-2}$$

$$= 5^{-1} + 5^{-2} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} = \frac{1}{5} + \frac{1}{25} = \frac{5}{25} + \frac{1}{25} = \frac{6}{25}$$

256. **a)** $|f(x)| = 2$, kun $x \approx -3$, $x \approx -1$, $x \approx 1$ ja $x \approx 3$.

b) $|f(x)| \geq 2$, kun $-3 \leq x \leq -1$ tai $1 \leq x \leq 3$.

c) $|f(x) - 2| < 2$, kun $-2 < f(x) - 2 < 2$ eli $0 < f(x) < 4$.
Tämä toteutuu, kun $0 < x < 5$.

257. Yhtälöllä $2x^2 + ax + 1 = 0$ on kaksoisjuuri, kun sillä on yksi nollakohta.
Yhtälöllä on yksi nollakohta, kun diskriminantti on 0.

$$a^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 0$$
$$a^2 = 8$$
$$a = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \text{ tai } a = -2\sqrt{2}$$

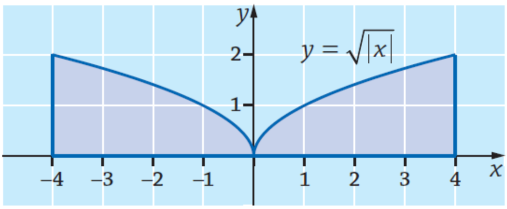
Kun $a = 2\sqrt{2}$:

$$2x^2 + 2\sqrt{2}\,x + 1 = 0$$
$$x = \frac{-2\sqrt{2} \pm \sqrt{8 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = \frac{-2\sqrt{2}}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Kun $a = -2\sqrt{2}$

$$2x^2 - 2\sqrt{2}\,x + 1 = 0$$
$$x = \frac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{8 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

258.



259. $x^2 + 2a^2x - a^4 = 0$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-2a^2 \pm \sqrt{(2a^2)^2 - 4\cdot 1\cdot(-a^4)}}{2} \\ &= \frac{-2a^2 \pm \sqrt{4a^4 + 4a^4}}{2} \\ &= \frac{-2a^2 \pm \sqrt{8a^4}}{2} \\ &= \frac{-2a^2 \pm 2\sqrt{2}a^2}{2} \\ &= -a^2 \pm \sqrt{2}a^2 \end{aligned}$$

$$x = -a^2 + \sqrt{2}a^2 \text{ tai } x = -a^2 - \sqrt{2}a^2$$

Ratkaisujen summan itseisarvo on

$\left|-a^2 + \sqrt{2}a^2 + (-a^2 - \sqrt{2}a^2)\right| = \left|-2a^2\right| = |-2|\left|a^2\right| = 2a^2$.

260.

$$\begin{aligned} (2x - 5)(x^2 + 3x - 2) &= (2x - 5)(x - 2) \\ (2x - 5)(x^2 + 3x - 2) - (2x - 5)(x - 2) &= 0 \\ (2x - 5)((x^2 + 3x - 2) - (x - 2)) &= 0 \\ (2x - 5)(x^2 + 3x - 2 - x + 2) &= 0 \\ (2x - 5)(x^2 + 2x) &= 0 \end{aligned}$$

$2x - 5 = 0$ tai $x^2 + 2x = 0$

$2x = 5$ $\quad$ $x(x + 2) = 0$

$x = \frac{5}{2}$ $\quad$ $x = 0$ tai $x = -2$

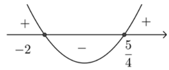
261. **a)** $4x^3 + 3x^2 - 10x \geq 0$
$x(4x^2 + 3x - 10) \geq 0$

Laaditaan merkkikaavio. Lasketaan sitä varten nollakohdat.

$(4x^2 + 3x - 10) = 0$
$x = 0 \quad \text{tai} \quad 4x^2 + 3x - 10 = 0$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 4 \cdot (-10)}}{8} = \frac{-3 \pm 13}{8}$$

$$x = -2 \text{ tai } x = \frac{5}{4}$$



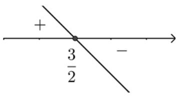
		-2	0	$\frac{5}{4}$
x	−	−	+	+
$4x^2 + 3x - 10$	+	−	−	+
$x(4x^2 + 3x - 10)$	−	+	−	+

$4x^3 + 3x^2 - 10x \geq 0$, kun $-2 \leq x \leq 0$ tai $x \geq \frac{5}{4}$.

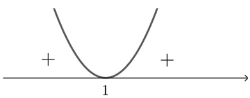
b) $(3 - 2x)(x - 1)^2 \leq 0$

Selvitetään tulon tekijöiden merkit ja laaditaan merkkikaavio.

$3 - 2x = 0$
$x = \frac{3}{2}$



$(x - 1)^2 = 0$
$x = 1$



		1	$\frac{3}{2}$
$3 - 2x$	+	+	−
$(x - 1)^2$	+	+	+
$(3 - 2x)(x - 1)^2$	+	+	−

$(3 - 2x)(x - 1)^2 \leq 0$, kun $x = 1$ tai $x \geq \frac{3}{2}$.

c) $x^4 + 4x^2 - 5 > 0$

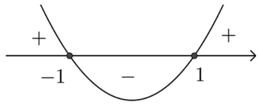
Ratkaistaan nollakohdat sijoittamalla $x^2 = t$.
$t^2 + 4t - 5 = 0$

$$t = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm 6}{2}$$

$$t = -5 \quad \text{tai} \quad t = 1$$

$$x^2 = -5 \quad \text{tai} \quad x^2 = 1$$

ei ratk. $\qquad x = 1$ tai $x = -1$



$x^4 + 4x^2 - 5 > 0$, kun $x < -1$ tai $x > 1$.

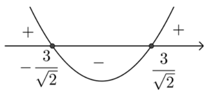
d)
$$6x^3 + 2x^2 < 27x + 9$$
$$6x^3 + 2x^2 - 27x - 9 < 0$$
$$2x^2(3x + 1) - 9(3x + 1) < 0$$
$$(2x^2 - 9)(3x + 1) < 0$$

Laaditaan merkkikaavio.

$2x^2 - 9 = 0$

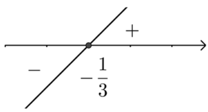
$$x^2 = \frac{9}{2}$$

$$x = -\frac{3}{\sqrt{2}} \text{ tai } x = \frac{3}{\sqrt{2}}$$



$3x + 1 = 0$

$$x = -\frac{1}{3}$$



$-\frac{3}{\sqrt{2}}$ $\qquad -\frac{1}{3}$ $\qquad \frac{3}{\sqrt{2}}$

$2x^2 - 9$	+	–		+
$3x + 1$	–	–	+	+
$x(4x^2 + 3x - 10)$	–	+	–	+

$(2x^2 - 9)(3x + 1) < 0$, kun $x < -\frac{3}{\sqrt{2}}$ tai $-\frac{1}{3} < x < \frac{3}{\sqrt{2}}$.

262. **a)** $|x - 2| = |2x - 2|$

$x - 2 = 2x - 2$ tai $x - 2 = -2x + 2$

$-x = 0$ $\quad$ $3x = 4$

$x = 0$ $\quad$ $x = \dfrac{4}{3}$

Luvut ovat $x = 2x = 0$ sekä $x = \dfrac{4}{3}$ ja $2x = \dfrac{8}{3}$.

b) $|x - 2| = 3|x - (-2)|$

$|x - 2| = 3|x + 2|$ $\quad$ Huom. $3|x + 2| = |3| \cdot |x + 2| = |3(x + 2)|$

$x - 2 = 3(x + 2)$ tai $x - 2 = -3(x + 2)$

$x - 2 = 3x + 6$ $\quad$ $x - 2 = -3x - 6$

$-2x = 8$ $\quad$ $4x = -4$

$x = -4$ $\quad$ $x = -1$

Luvut ovat –4 ja –1.

263. **a)** $|x^2 + x| = x$

Yhtälöllä on ratkaisu, kun $x \geq 0$.

$x^2 + x = x$ tai $x^2 + x = -x$

$x^2 = 0$ $\quad$ $x^2 + 2x = 0$

$x = 0$ $\quad$ $x(x + 2) = 0$

$x = 0$ tai $x = -2$

Määrittelyehdon toteuttaa ratkaisu $x = 0$.

b) $|x^2 + 6| = x$

Yhtälöllä on ratkaisu, kun $x \geq 0$.

$x^2 + 6 = x$ $\quad$ tai $\quad$ $x^2 + 6 = -x$

$x^2 - x + 6 = 0$ $\quad$ $x^2 + x + 6 = 0$

$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{-23}}{2}$ $\quad$ $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-23}}{2}$

ei ratkaisua $\quad$ ei ratkaisua

Yhtälöllä ei ole ratkaisua.

c) $|3x - 1| \geq |x|$

Epäyhtälön molemmat puolet ovat ei-negatiivisia, joten epäyhtälö voidaan korottaa puolittain neliöön.

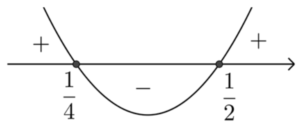
$$|3x-1|^2 \geq |x|^2$$
$$9x^2 - 6x + 1 \geq x^2$$
$$8x^2 - 6x + 1 \geq 0$$

Ratkaistaan nollakohdat ja hahmotellaan kuvaaaja.

$$8x^2 - 6x + 1 = 0$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 8 \cdot 1}}{2 \cdot 8} = \frac{6 \pm 2}{16}$$

$$x = \frac{1}{2} \text{ tai } x = \frac{1}{4}$$



$8x^2 - 6x + 1 \geq 0$, kun $x \leq \frac{1}{4}$ tai $x \geq \frac{1}{2}$.

d) $|2x + 3| = x - 2$

Yhtälöllä on ratkaisu, kun $x - 2 \geq 0$, eli $x \geq 2$.

$2x + 3 = x - 2$ tai $2x + 3 = -x + 2$

$x = -5$ $\qquad$ $3x = -1$

$x = -\frac{1}{3}$

Kumpikaan ratkaisuista ei toteuta ehtoa $x \geq 2$, joten yhtälöllä ei ole ratkaisua.

e) $|x - 3| = x - 3$

Yhtälöllä on ratkaisu, kun $x - 3 \geq 0$, eli $x \geq 3$. Tällöin luku ja sen itseisarvo ovat yhtä suuret.

f) $|x^2 - 4x - 4| < 4$

$-4 < x^2 - 4x - 4 < 4 \quad || +4$

$0 < x^2 - 4x < 8$

Ratkaistaan epäyhtälöt erikseen.

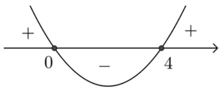
$0 < x^2 - 4x$

$x^2 - 4x > 0$

$x^2 - 4x = 0$

$x(x - 4) = 0$

$x = 0$ tai $x = 4$



$x^2 - 4x > 0$, kun $x < 0$ tai $x > 4$

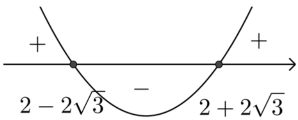
$x^2 - 4x < 8$

$x^2 - 4x - 8 < 0$

$x^2 - 4x - 8 = 0$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{48}}{2} = \frac{4 \pm 4\sqrt{3}}{2} = 2 \pm 2\sqrt{3}$$

$x = 2 + 2\sqrt{3}$ tai $x = 2 - 2\sqrt{3}$



$x^2 - 4x - 8 < 0$, kun

$2 - 2\sqrt{3} < x < 2 + 2\sqrt{3}$

$x^2 - 4x - 4| < 4$, kun $2 - 2\sqrt{3} < x < 0$ tai $4 < x < 2 + 2\sqrt{3}$

264. **a)** $\frac{2+3}{2\oplus 3}=\frac{2+3}{(2+3)^2}=\frac{5}{25}=\frac{1}{5}$

b) $a\oplus b=(a+b)^2$ ja $b\oplus a=(b+a)^2=(a+b)^2$, joten $a\oplus b=b\oplus a$

c) i) Lasketaan $a\oplus(b+c)$ ja $a\oplus b+a\oplus c$.

$$\begin{aligned}&a\oplus(b+c)\\&=(a+(b+c))^2\\&=a^2+2a(b+c)+(b+c)^2\\&=a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2\\&=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&a\oplus b+a\oplus c\\&=(a+b)^2+(a+c)^2\\&=a^2+2ab+b^2+a^2+2ac+c^2\\&=2a^2+b^2+c^2+2ab+2ac\end{aligned}$$

$$a\oplus(b+c)\neq a\oplus b+a\oplus c$$

ii) b-kohdan mukaan $(b+c)\oplus a=a\oplus(b+c)$ ja $b\oplus a=a\oplus b$ ja $c\oplus a=a\oplus c$.

Koska $a\oplus(b+c)\neq a\oplus b+a\oplus c$, niin myöskään $(b+c)\oplus a\neq b\oplus a+c\oplus a$

Osittelulaki ei päde.

d) 1) Jos $a\oplus b=0$, niin

$$\begin{aligned}(a+b)^2&=0\\a+b&=0\\b&=-a\end{aligned}$$

Luvut a ja b ovat toistensa vastaluvut.

2) Jos a ja b ovat toistensa vastaluvut, on $b=-a$.
Tällöin $a\oplus b=(a+b)^2=(a-a)^2=0^2=0$.
Väite on tosi.

265. **a)** Toisen asteen yhtälöllä on täsmälleen yksi ratkaisu, kun diskriminantti on 0.

$$9 - 4 \cdot a \cdot 2 = 0$$
$$9 - 8a = 0$$
$$a = \frac{9}{8}$$

b) Funktiolla on yksi nollakohta, kun yhtälöllä $-x^3 + x^2 + ax = 0$ on yksi ratkaisu.

$$-x^3 + x^2 + ax = 0$$
$$x(-x^2 + x + a) = 0$$
$$x = 0 \text{ tai } -x^2 + x + a = 0$$

Yhtälöllä $-x^3 + x^2 + ax = 0$ on vain yksi ratkaisu, jos yhtälön $-x^2 + x + a = 0$ ainut ratkaisu on $x = 0$ tai jos sillä ei ole ratkaisua.

Jos yhtälön $-x^2 + x + a = 0$ ratkaisu on $x = 0$, niin $a = 0$.
Tällöin alkuperäinen yhtälö $-x^3 + x^2 + ax = 0$ on $-x^3 + x^2 = 0$.
Ratkaistaan se.

$$-x^3 + x^2 = 0$$
$$x^2(-x + 1) = 0$$
$$x = 0 \text{ tai } x = 1$$

Siten yhtälöllä on kaksi ratkaisua ja $a = 0$ ei ole mahdollinen a:n arvo.

Yhtälöllä $-x^2 + x + a = 0$ ei ole ratkaisuja, kun diskriminantti on negatiivinen.

$$1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot a < 0$$
$$4a < -1$$
$$a < -\frac{1}{4}$$

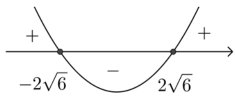
Funktiolla $f(x) = -x^3 + x^2 + ax = 0$ on yksi nollakohta, kun $a < -\frac{1}{4}$.

c) $3x^3 + ax^2 + 2x = 0$
$x(3x^2 + ax + 2) = 0$

$x = 0$ on yhtälön yksi ratkaisu. Yhtälöllä on kolme ratkaisua, jos yhtälöllä $3x^2 + ax + 2 = 0$ on kaksi eri suurta ratkaisua, joista kumpikaan ei ole 0.

Yhtälöllä $3x^2 + ax + 2 = 0$ on kaksi ratkaisua, kun diskriminantti on positiivinen.
$a^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 > 0$
$a^2 - 24 > 0$

$a^2 - 24 = 0$
$a^2 = 24$
$a = 2\sqrt{6}$ tai $a = -2\sqrt{6}$



$a^2 - 24 > 0$, kun $x < -2\sqrt{6}$ tai $x > 2\sqrt{6}$.

Yhtälön $3x^2 + ax + 2 = 0$ ratkaisu ei ole 0 millään a:n arvolla, koska $x = 0$ ei toteuta yhtälöä.

Yhtälöllä on kolme ratkaisua, kun $a < -2\sqrt{6}$ tai $a > 2\sqrt{6}$.

266. Kolme peräkkäistä kokonaislukua ovat n, $n + 1$ ja $n + 2$. Muodostetaan väittämän mukainen epäyhtälö ja näytetään että se on aina tosi.

$n(n + 2) < (n + 1)^2$
$n^2 + 2n < n^2 + 2n + 1$
$0 < 1$

Epäyhtälö on tosi kaikilla kokonaisluvun n arvoilla, joten väite on tosi.

267. **a)** $|x+2| = \begin{cases} x+2, \text{ kun } x+2 \geq 0 \\ -x-2, \text{ kun } x+2 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x+2, \text{ kun } x \geq -2 \\ -x-2, \text{ kun } x < -2 \end{cases}$

b) $2x + |x+1| = \begin{cases} 2x+(x+1), \text{ kun } x+1 \geq 0 \\ 2x-(x+1), \text{ kun } x+1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 3x+1, \text{ kun } x \geq -1 \\ x-1, \text{ kun } x < -1 \end{cases}$

$2x + |x + 1| = 2$

Kun $x \geq -1$, yhtälö on

$$\begin{aligned} 3x + 1 &= 2 \\ 3x &= 1 \\ x &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Ratkaisu $x = \frac{1}{3}$ toteuttaa määrittelyehdon $x \geq -1$.

Kun $x < -1$, yhtälö on

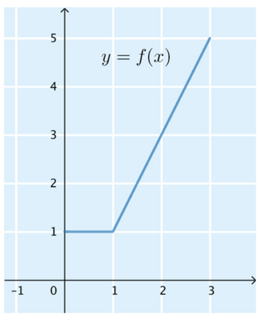
$$\begin{aligned} x - 1 &= 2 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Ratkaisu ei toteuta määrittelyehtoa $x < -1$.

Yhtälön ratkaisu on $x = \frac{1}{3}$.

268. $|x-1| + x = \begin{cases} x-1+x, \text{ kun } x-1 \geq 0 \\ -(x-1)+x, \text{ kun } x-1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x-1, \text{ kun } x \geq 1 \\ 1, \text{ kun } x < 1 \end{cases}$

$f(x) = \begin{cases} 2x-1, \text{ kun } 1 \leq x \leq 3 \\ 1, \text{ kun } 0 \leq x < 1 \end{cases}$



Välillä [0, 1[funktion arvo on 1. Välillä [1, 3] funktion kuvaaja on nouseva suora. Tällä välillä pienin arvo on $f(1) = 1$ ja suurin $f(3) = 6 - 1 = 5$.

Funktion arvojoukko on [1, 5].

269. **a)** $|x + 1| = a$

Kun $a < 0$, yhtälöllä ei ole ratkaisuja, sillä itseisarvo on aina vähintään nolla.

Kun $a = 0$, syntyy yhtälö $|x + 1| = 0$.
Tämän ratkaisu on $x = -1$.

Kun $a > 0$, on syntyy yhtälö $|x + 1| = a$, jonka ratkaisut ovat

$$x + 1 = a \quad \text{tai} \quad x + 1 = -a$$
$$x = a - 1 \qquad\qquad x = -a - 1$$

Siis yhtälöllä ei ole ratkaisua, jos a < 0. Jos $a = 0$, on yhtälön ratkaisuna $x = 0$. Jos $a > 0$, ratkaisut ovat $x = a - 1$ ja $x = -a - 1$.

b)

$$ax > x + 1$$
$$ax - x > 1$$
$$(a - 1)x > 1$$

Kun $a - 1 = 0$, eli $a = 1$, yhtälöllä ei ole ratkaisua ($0 > 1$ on epätosi).

Kun $a - 1 < 0$ eli $a < 1$,

$$(a - 1)x > 1 \quad \|:(a - 1) < 0$$
$$x < \frac{1}{a-1}.$$

Kun $a - 1 > 0$ eli $a > 1$,

$$(a - 1)x > 1 \quad \|:(a - 1) > 0$$
$$x > \frac{1}{a-1}$$

Kun $a < 1$, ratkaisu on $x < \dfrac{1}{a-1}$. Kun $a = 1$, epäyhtälöllä ei ole ratkaisua. Kun $a > 1$, ratkaisu on $x > \dfrac{1}{a-1}$.

270. Ympyrän ympärysmitta on x (m). Ratkaistaan ympyrän säde r.

$2\pi r = x$

$r = \dfrac{x}{2\pi}$

Ympyrän pinta-ala on $\pi r^2 = \pi(\dfrac{x}{2\pi})^2 = \dfrac{\pi x^2}{4\pi^2} = \dfrac{x^2}{4\pi}$.

Neliön piiri on $1 - x$ (m). Ratkaistaan neliön sivun pituus a.

$4a = 1 - x$

$a = \dfrac{1-x}{4}$

Neliön pinta-ala on $a^2 = \left(\dfrac{1-x}{4}\right)^2 = \dfrac{x^2-2x+1}{16}$.

Tulee olla $0 < x < 1$.

Yhteispinta-alan funktio on

$$\begin{aligned}
A(x) &= {}^{4)}\frac{x^2}{4\pi} + {}^{\pi)}\frac{x^2-2x+1}{16} \\
&= \frac{(4+\pi)x^2 - 2\pi x + \pi}{16\pi} \\
&= \frac{(\pi+4)x^2}{16\pi} - \frac{2\pi x}{16\pi} + \frac{\pi}{16\pi} \\
&= \frac{\pi+4}{16\pi}x^2 - \frac{x}{8} + \frac{1}{16}, 0 < x < 1.
\end{aligned}$$

Toisin kirjoitettuna $A:]0, 1[\to \mathbb{R}, A(x) = \dfrac{\pi+4}{16\pi}x^2 - \dfrac{x}{8} + \dfrac{1}{16}$.

271. Määritetään ratkaisua $x = 1$ vastaavat a:n arvot.

$$|2 \cdot 1 + a| = 1$$
$$|2 + a| = 1$$
$$2 + a = 1 \quad \text{tai} \quad 2 + a = -1$$
$$a = -1 \qquad\qquad a = -3$$

Ratkaistaan yhtälö molemmilla a:n arvoilla ja verrataan ratkaisuja.

Kun $a = -1$, on yhtälö $|2x - 1| = 1$. Ratkaistaan yhtälö.

$$|2x - 1| = 1$$
$$2x - 1 = 1 \quad \text{tai} \quad 2x - 1 = -1$$
$$2x = 2 \qquad\qquad 2x = 0$$
$$x = 1 \qquad\qquad x = 0$$

Ratkaisu ei ole haluttu ($x = 1$ tai $x = 2$).

Kun $a = -3$, on yhtälö $|2x - 3| = 1$. Ratkaistaan yhtälö.

$$|2x - 3| = 1$$
$$2x - 3 = 1 \quad \text{tai} \quad 2x - 3 = -1$$
$$2x = 4 \qquad\qquad 2x = 2$$
$$x = 2 \qquad\qquad x = 1$$

Ratkaisu on haluttu.

Kun valitaan $a = -3$, on yhtälön ratkaisu $x = 1$ tai $x = 2$.

272. Ratkaistaan yhtälöpari $\begin{cases} y = |x+2| \\ x - 3y + 10 = 0. \end{cases}$

Alemmasta yhtälöstä saadaan $y = \dfrac{x+10}{3}$.

Sijoitetaan tämä ylempään, jolloin saadaan yhtälö $|x+2| = \dfrac{x+10}{3}$.

Yhtälöllä on ratkaisu, kun $x + 10 \geq 0$ eli kun $x \geq -10$.

$$|x+2| = \frac{x+10}{3}$$

$$x+2 = \frac{x+10}{3} \qquad \text{tai} \qquad x+2 = -\frac{x+10}{3}$$

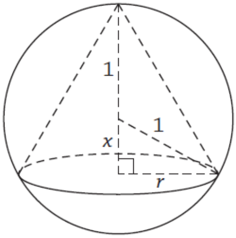
$$3x+6 = x+10 \qquad\qquad 3x+6 = -x-10$$

$$2x = 4 \qquad\qquad 4x = -16$$

$$x = 2 \qquad\qquad x = -4$$

Kun $x = 2$, $y = |2 + 2| = 4$ ja kun $x = -4$, $y = |-4 + 2| = 2$.
Käyrät leikkaavat toisensa pisteissä (2, 4) ja (–4, 2).

273. Piirretään kuva.



Määritetään kartion pohjan säde r muuttujan x avulla suorakulmaisesta kolmiosta.

$x^2 + r^2 = 1^2$

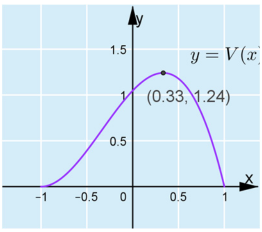
$r^2 = 1 - x^2$

Jos kartion korkeus on pienempi kuin 1, säde voidaan laskea samoin.

Kartion tilavuus on $\frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$, missä h on kartion korkeus, on

$h = 1 + x$, missä $-1 < x < 1$.

Tilavuuden funktio on $V(x) = \frac{1}{3}\pi(1 - x^2)(1 + x), -1 < x < 1.$

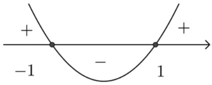


Funktion arvojoukko on]0; 1,24[.

SYVENTÄVÄT TEHTÄVÄT

274. $f(x) = x - |x^2 - 1|$

$x^2 - 1 = 0$
$x^2 = 1$
$x = 1$ tai $x = -1$



$$f(x) = x - |x^2 - 1| = \begin{cases} x - (x^2 - 1), \text{ kun } x \le -1 \\ x + (x^2 - 1), \text{ kun } -1 < x \le 1 \\ x - (x^2 - 1), \text{ kun } x > 1 \end{cases} = \begin{cases} -x^2 + x + 1, \text{ kun } x \le -1 \\ x^2 + x - 1, \text{ kun } -1 < x \le 1 \\ -x^2 + x + 1, \text{ kun } x > 1 \end{cases}$$

Yhdistämällä ehtoja lauseke yksinkertaistuu muotoon

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + x + 1, \text{ kun } x < -1 \text{ tai } x > 1 \\ x^2 + x - 1, \quad \text{kun } -1 \le x \le 1. \end{cases}$$

275. Olkoon ensimmäisen asteen polynomifunktio $P(x) = ax + b$, $a \neq 0$.
$P(x + 1) = a(x + 1) + b = ax + a + b$
$P(x) + 2 = ax + b + 2$

Ratkaistaan yhtälöstä $P(x + 1) = P(x) + 2$ ehdot a:lle ja b:lle.
$ax + a + b = ax + b + 2 \quad || -ax - b$
$a = 2$

$P(x) = 2x + b$, missä b voi olla mikä tahansa reaaliluku.

Olkoon toisen asteen polynomifunktio $P(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.
$P(x + 1) = a(x + 1)^2 + b(x + 1) + c = ax^2 + (2a + b)x + (a + b + c)$
$P(x) + 2 = ax^2 + bx + c + 2$

Tulisi olla $2a + b = b$, eli $a = 0$, jolloin kyseessä ei ole toisen asteen polynomifunktio. Vastaava ei siten päde toisen asteen polynomifunktioille.

276. $a^3 - a = a(a^2 - 1) = a(a - 1)(a + 1) = (a - 1)a(a + 1)$

Kun a on kokonaisluku, ovat $a - 1$, a ja $a + 1$ peräkkäiset kokonaisluvut. Kolmesta peräkkäisestä kokonaisluvusta yksi on varmasti kolmella jaollinen. Väite on todistettu.

277. $-x^3 - ax^2 - a^2x > 0$

$x(-x^2 - ax - a^2) > 0 \quad (1)$

(i) Jos $a = 0$, saa epäyhtälö (1) muodon $-x^3 > 0$, mikä on tosi kun $x < 0$.

(ii) Jos $a \neq 0$, on yhtälön $-x^2 - ax - a^2 = 0$ diskriminantti negatiivinen:
$D = (-a)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-a^2) = a^2 - 4a^2 = -3a^2 < 0$, kun $a \neq 0$.

Tällöin $-x^2 - ax - a^2 < 0$ (kuvaaja alaspäin aukeava paraabeli). Tulon $x \cdot (-x^2 - ax - a^2)$ molemmat tekijät ovat negatiivisia kun $x < 0$, joten tulo on positiivinen, joten epäyhtälö (1) on tosi, kun $x < 0$.

Kohtien (i) ja (ii) perusteella epäyhtälö (1) on tosi kaikilla a:n arvoilla.

278. **a)** $|x+1| > a$

Kun $a < 0$, epäyhtälö toteutuu kaikilla x:n arvoilla.
Kun $a = 0$, $|x+1| > 0$, kun $x \neq -1$.
Kun $a > 0$,
$|x+1| > a$, kun

$$x + 1 < -a \quad \text{tai} \quad x + 1 > a$$
$$x < -a - 1 \qquad\qquad x > a - 1$$

Kootusti:
Kun $a < 0$, epäyhtälö toteutuu kaikilla x:n arvoilla. Kun $a = 0$, epäyhtälö toteutuu, kun $x \neq -1$. Kun $a > 0$, epäyhtälö toteutuu, kun $x < -a - 1$ tai $x > a - 1$.

b) $|x+1| \leq a$

Kun $a < 0$, epäyhtälöllä ei ole ratkaisua.
Kun $a = 0$, epäyhtälö toteutuu, kun $x + 1 = 0$, eli kun $x = -1$.
Kun $a > 0$,

$$|x+1| \leq a$$
$$-a \leq x + 1 \leq a$$
$$-a - 1 \leq x \leq a - 1$$

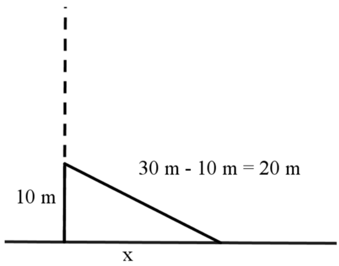
Kootusti:
Kun $a < 0$, epäyhtälöllä ei ole ratkaisuja. Kun $a = 0$, epäyhtälö toteutuu, kun $x = -1$. Kun $a > 0$, epäyhtälö toteutuu, kun $-a - 1 \leq x \leq a - 1$.

3 Geometria

3.1 Tasogeometria

LUVUN 3.1 YDINTEHTÄVÄT

301. **a)** Piirretään apukuva.

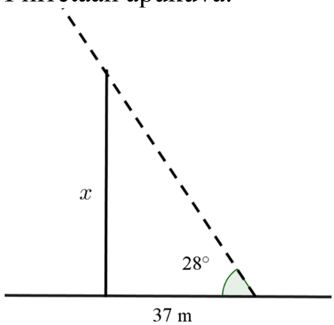


Oletetaan, että puu kasvaa maasta kohtisuorasti ylöspäin. Tyviosa, latvaosa ja maa muodostavat suorakulmaisen kolmion. Ratkaistaan latvan etäisyys tyvestä, x, Pythagoraan lauseen avulla.

$$x^2 + 10^2 = 20^2$$
$$x^2 = 400 - 100$$
$$x^2 = 300$$
$$x = \sqrt{300} = 17,32... \text{ (tai } x = -\sqrt{300}\text{)}$$

Latva osui maahan 17 metrin etäisyydellä tyvestä.

b) Piirretään apukuva.

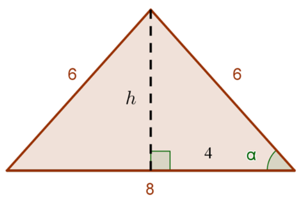


Ratkaistaan puun pituus *x* tangentin avulla.

$$\tan 28° = \frac{x}{37}$$
$$x = 37 \cdot \tan 28°$$
$$x = 19,67...$$

Puun korkeus on 20 metriä.

c) Piirretään apukuva. Kolmio on tasakylkinen, koska siinä on kaksi yhtä pitkää sivua. Tasakylkisen kolmion korkeusjana *h* puolittaa kannan.



Kolmion pienin kulma on lyhintä sivua vastassa. Ratkaistaan kolmion korkeusjanan pituus *h*.

$$h^2 + 4^2 = 6^2$$
$$h^2 = 36 - 16$$
$$h^2 = 20$$
$$h = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \quad (\text{tai } h = -\sqrt{20})$$

Ratkaistaan kulma α suorakulmaisesta kolmiosta sinin avulla.

$$\sin\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{6}$$
$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$$
$$\alpha = 48,1...° \approx 48°$$

302. **a)** Kehäkulma on puolet keskuskulmasta, eli 30°.

b) Keskuskulman ja tangenttikulman summa on 180°, joten tangenttikulma on 180° − 60° = 120°.

c) Kaaren pituuden suhde koko ympyrän kaareen on sama kuin keskuskulman suhde 360°:een.

$$\frac{4}{2\pi r}=\frac{60°}{360°}$$
$$\frac{2}{\pi r}=\frac{1}{6}$$
$$\pi r=12$$
$$r=\frac{12}{\pi}$$

Halkaisija on $2r = \dfrac{24}{\pi}$.

303. Janan CA pituus saadaan vähentämällä janan PA pituudesta janan PC pituus. Jana PC on ympyrän säde, joten sen pituus on 5. Jana PA on suorakulmaisen kolmion PAB hypotenuusa. Ratkaistaan PA Pythagoraan lauseella.

$$PA^2 = PB^2 + BA^2$$
$$PA^2 = 5^2 + 12^2$$
$$PA^2 = 169$$
$$PA = 13 \text{ (tai } PA = -13)$$

$CA = 13 – 5 = 8$.

Ratkaistaan suorakulmaisesta kolmiosta PAB kulma P, jota merkitään kirjaimella α.

$$\tan\alpha=\frac{12}{5}$$
$$\alpha=67{,}38...°$$

$$b=\frac{\alpha}{360°}\cdot 2\pi\cdot 5=5{,}880...\approx 5{,}9.$$

Janan CA pituus on 8 ja kaaren b pituus 5,9.

304. **a)** Kolmion pinta-ala voidaan laskea kaavalla $\frac{1}{2}ab\sin\alpha$.

$$\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 20\cdot \sin\alpha = 30$$
$$100\cdot \sin\alpha = 30$$
$$\sin\alpha = 0,3$$
$$\alpha = 17,45...° \text{ tai } \alpha = 180° - 17,45...° = 162,54...°$$

Kulman suuruus on 17,5° tai 162,5°.

b) Kolmion pienin kulma on lyhintä sivua vastassa. Ratkaistaan kulma α kosinilauseella.

$$3^2 = 4^2 + 6^2 - 2\cdot 4\cdot 6\cdot \cos\alpha$$
$$9 = 16 + 36 - 48\cdot \cos\alpha$$
$$48\cdot \cos\alpha = 43$$
$$\cos\alpha = \frac{43}{48}$$
$$\alpha = 26,38...°$$

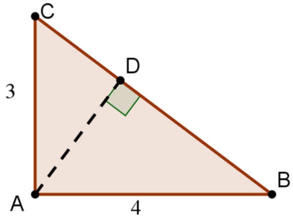
Pienimmän kulman suuruus on 26,4°.

c) Suurin kulma on pisintä sivua vastassa. Lasketaan suurimman kulman α suuruus sinilauseella.

$$\frac{6,3}{\sin 19°} = \frac{14,7}{\sin\alpha}$$
$$6,3\cdot \sin\alpha = 14,7\cdot \sin 19° \quad ||:6,3$$
$$\sin\alpha = 0,759...$$
$$\alpha = 49,43...° \text{ tai } \alpha = 180° - 49,43...° = 130,56...°$$

Kulma on 131°.

305. Piirretään apukuva.



Lasketaan hypotenuusan BC pituus Pythagoraan lauseella.

$BC^2 = 3^2 + 4^2$
$BC^2 = 25$
$BC = 5$ (tai $BC = -5$)

Kolmiot ABC ja ABD ovat yhdenmuotoiset, koska niissä on molemmissa suora kulma ja yhteinen kulma B.

$$\frac{BD}{AB} = \frac{AB}{BC}$$
$$\frac{BD}{4} = \frac{4}{5} \quad \| \cdot 4$$
$$BD = \frac{16}{5}$$

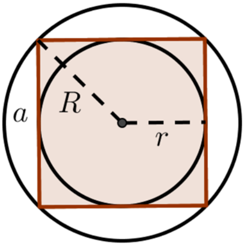
$$DC = BC - BD = 5 - \frac{16}{5} = \frac{9}{5}$$

Korkeusjana jakaa hypotenuusan osiin, joiden pituudet ovat $\frac{16}{5}$ ja $\frac{9}{5}$.

306. Olkoon B:n etäisyys maan keskipisteestä r ja A:n etäisyys R. B:n radan pituus on $2\pi r$ ja A:n radan pituus on $2\pi R$.
$2\pi R = 2\pi r + 50$
$$R = \frac{2\pi r + 50}{2\pi} = r + \frac{50}{2\pi} = r + 7{,}95...$$

A on 8 km korkeammalla.

307. Piirretään apukuva. Merkitään neliön sivun pituus a, sisään piirretyn ympyrän säde r ja ympäri piirretyn ympyrän säde R.



$$r = \frac{a}{2}$$

Sisään piirretyn ympyrän ala on $\pi r^2 = \pi(\frac{a}{2})^2 = \frac{a^2\pi}{4}$.

$$\begin{aligned} a^2 + a^2 &= (2R)^2 \\ 2a^2 &= 4R^2 \\ R^2 &= \frac{1}{2}a^2 \\ R &= \frac{a}{\sqrt{2}} \text{ (tai } R = -\frac{a}{\sqrt{2}}) \end{aligned}$$

Ympäri piirretyn ympyrän ala on $\pi R^2 = \pi(\frac{a}{\sqrt{2}})^2 = \frac{a^2\pi}{2}$.

Pinta-alojen suhde on $\frac{a^2\pi}{4} : \frac{a^2\pi}{2} = \frac{a^2\pi}{4} \cdot \frac{2}{a^2\pi} = \frac{1}{2} = 1:2.$

3.2 Avaruusgeometria

LUVUN 3.2 YDINTEHTÄVÄT

308. Veden tilavuus on 5,0 l = 5,0 dm^3 = 5000 cm^3. Tilavuus voidaan laskea kaavalla $\pi r^2 \cdot h$, missä r on pohjan säde ja h veden korkeus.

$$\pi r^2 \cdot 22 = 5000 \,\|: (\pi \cdot 22)$$
$$r^2 = \frac{5000}{\pi \cdot 22}$$
$$r = \sqrt{\frac{5000}{\pi \cdot 22}} = 8{,}50\ldots \text{ (tai } r = -8{,}50\ldots)$$

$2r = 17{,}01\ldots$

Pohjan halkaisija on 17 cm.

309. Merkitään kuution sivun pituutta kirjaimella a.
Kuution tilavuus on a^3.
Pyramidin tilavuus on $\frac{1}{3}a^2 \cdot \frac{1}{2}a = \frac{1}{6}a^3$.

Tilavuuksien suhde on 1:6.

310. **a)** Pallon säde r on puolet kuution sivun pituudesta a, eli $a = 2r$.
Kuution tilavuus on $a^3 = (2r)^3 = 8r^3$.

Pallon tilavuus on $\frac{4}{3}\pi r^3$.

Tilavuuksien suhde on $\frac{4}{3}\pi r^3 : (8r^3) = \frac{4\pi}{3} : 8 = \pi : 6$.

Tyhjää tilaa on $\dfrac{8r^3 - \frac{4}{3}\pi r^3}{8r^3} = 0{,}476... \approx 48\%$.

b) Pallon säde r on sama kuin lieriön pohjan säde ja lieriön korkeus on pallon halkaisija, eli $2r$.

Lieriön tilavuus on $\pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3$.

Pallon tilavuus on $\frac{4}{3}\pi r^3$.

Tilavuuksien suhde on $\frac{4}{3}\pi r^3 : (2\pi r^3) = \frac{4}{3} : 2 = 2 : 3$.

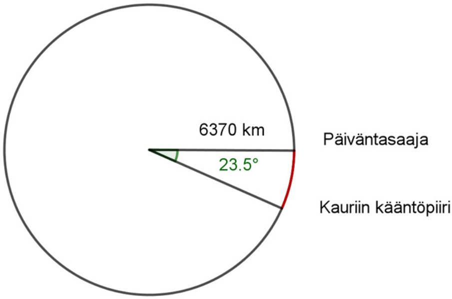
Tyhjää tilaa on $\dfrac{2\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi r^3}{2\pi r^3} = 0{,}333... \approx 33\%$.

311. Tilavuuksien suhde on mittakaavan kuutio. Merkitään 1,0 l pullon korkeutta x.

$$\left(\frac{x}{20}\right)^3 = \frac{1{,}0}{0{,}33}$$
$$\frac{x^3}{8000} = \frac{1{,}0}{0{,}33} \quad || \cdot 8000$$
$$x^3 = 24242{,}42...$$
$$x = 28{,}94...$$

1,0 litran pullon korkeus on 29 cm.

312. Piirretään apukuva.



Pituus on $\frac{23{,}5°}{360°} \cdot 2\pi \cdot 6370\text{ km} = 2612{,}67...\text{ km} \approx 2610\text{ km}.$

313. Olkoon veden korkeus alussa h, astian pohjan säde r.
Veden tilavuus ennen jäätymistä on $\pi r^2 h$ ja jäätymisen jälkeen $1{,}1\ \pi r^2 h$.
Astian korkeuden tulee siis olla $1{,}1h$.

Astian korkeudesta tulee jättää täyttämättä $0{,}1h$, joka on
$\frac{0{,}1h}{1{,}1h} = 0{,}0909... \approx 9\%$ astian korkeudesta.

314. **A**: $550 \cdot 10^6$ mm = 550 000 000 mm = 550 km, eli **III**

B: 0,2 l = 0,2 dm^3 = 200 cm^3 = 200 ml = 20 cl, eli **I ja II**

C: 0,00056 m^2 = 0,056 dm^2 = 5,6 cm^2 = 560 mm^2 eli **I ja II**

D: $5{,}6 \cdot 10^8$ dm^2 = $5{,}6 \cdot 10^6$ m^2 = 5 600 000 m^2 = 5,6 km^2 = 560 ha eli **III**

E: $1{,}2 \cdot 10^{-4}$ m = 0,00012 m = 0,12 mm = 0,012 cm eli **II**

F: 88 mm^3 = 0,088 cm^3 = $88 \cdot 10^{-9}$ m^3 = $8{,}8 \cdot 10^{-8}$ m^3 = 0,088ml
= 0,000088 l = $8{,}8 \cdot 10^{-5}$ l eli **III**

G: 440 000 m^2 = 44 ha = 0,44 km^2 eli **II ja III**

H: 0,05 dl = 5 ml = 5 cm^3 eli **I ja III**

Luvun 3 vahvistavat ja syventävät tehtävät

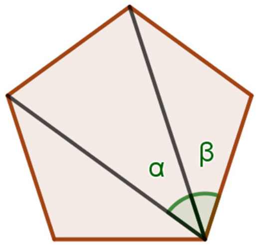
VAHVISTAVAT TEHTÄVÄT

315. **a)** Tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat yhtä suuret. Merkitään kantakulmat $5x$ ja huippukulma $2x$. Kolmion kulmien summa on 180°.

$$\begin{aligned} 5x + 5x + 2x &= 180° \\ 12x &= 180° \quad \|:12 \\ x &= 15° \end{aligned}$$

Kantakulmat ovat $5 \cdot 15° = 75°$ ja huippukulma $2 \cdot 15° = 30°$.

b) Piirretään apukuva.



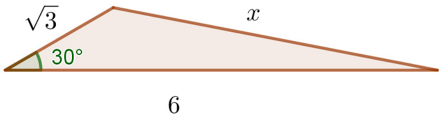
Säännöllisen viisikulmion yhden kulman suuruus on $\frac{3 \cdot 180°}{5} = 108°$.

Muodostuneet kolmiot ovat tasakylkisiä.

$108° + 2\beta = 180°$, josta $\beta = 36°$.

Tällöin $\alpha = 108° - 2\beta = 108° - 72° = 36°$.

316. **a)** Piirretään apukuva.

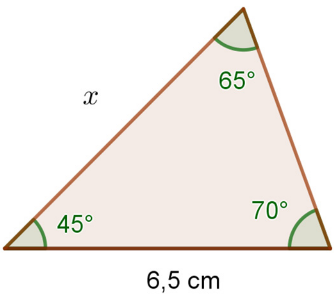


Määritetään kolmannen sivun pituus x kosinilauseen avulla.

$$x^2 = 6^2 + \sqrt{3}^2 - 2 \cdot 6 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos 30°$$
$$x^2 = 36 + 3 - 12 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$x^2 = 21$$
$$x = \sqrt{21} \text{ (tai } x = -\sqrt{21}\text{)}$$

Kolmannen sivun pituus on $\sqrt{21}$.

b) Piirretään apukuva. Kolmion kolmas kulma on 180° − 45° − 65° = 70°. Pisin sivu on suurinta kulmaa vastassa.



Ratkaistaan pisin sivu x sinilauseella.

$$\frac{x}{\sin 70°} = \frac{6,5}{\sin 65°} \quad \| \cdot \sin 70°$$
$$x = 6,73...$$

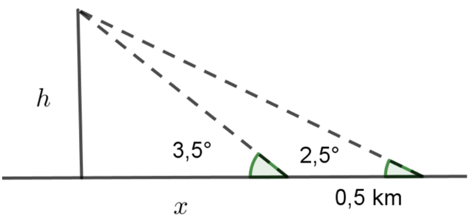
Pisin sivu on 6,7 cm.

c) Suurin kulma on pisintä sivua vastapäätä. Ratkaistaan suurin kulma α kosinilauseella.

$$\begin{aligned}\sqrt{19}^2 &= 3^2+4^2-2\cdot3\cdot4\cdot\cos\alpha\\ 19 &= 9+16-24\cos\alpha\\ 24\cos\alpha &= 6\\ \cos\alpha &= \frac{1}{4}\\ \alpha &= 75{,}52...^\circ\end{aligned}$$

Suurin kulma on 75,5°.

317. Piirretään apukuva. Merkitään tornin korkeutta h ja lähemmän katselupaikan etäisyyttä x.



Oletetaan, että torni on kohtisuorassa maanpintaan nähden.

Ratkaistaan h suorakulmaisista kolmioista.

$$\tan 3{,}5^\circ = \frac{h}{x} \qquad \tan 2{,}5^\circ = \frac{h}{x+0{,}5}$$

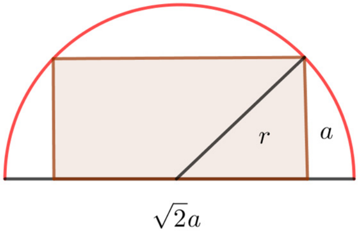
$$h = x\cdot\tan 3{,}5^\circ \qquad h = (x+0{,}5)\cdot\tan 2{,}5^\circ$$

$$\begin{aligned}x\cdot\tan 3{,}5^\circ &= (x+0{,}5)\cdot\tan 2{,}5^\circ\\ x\cdot\tan 3{,}5^\circ &= x\cdot\tan 2{,}5^\circ + 0{,}5\cdot\tan 2{,}5^\circ\\ x(\tan 3{,}5^\circ-\tan 2{,}5^\circ) &= 0{,}5\cdot\tan 2{,}5^\circ\\ x &= \frac{0{,}5\cdot\tan 2{,}5^\circ}{\tan 3{,}5^\circ-\tan 2{,}5^\circ}\\ x &= 1{,}247...\end{aligned}$$

$$h = x\cdot\tan 3{,}5^\circ = 1{,}247...\cdot\tan 3{,}5^\circ = 0{,}0762...$$

Tornin korkeus on 76 m ja katseluetäisyydet ovat 1,2 km ja 1,7 km.

318. Piirretään poikkileikkauskuva kuution pohjan lävistäjää pitkin. Merkitään kuution sivua a. Kuution pohjan lävistäjä on $\sqrt{2}a$.



$$r^2 = a^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2}a)^2 = a^2 + \frac{2}{4}a^2 = \frac{3}{2}a^2$$
$$r = \sqrt{\frac{3}{2}}a \text{ (tai } r = -\sqrt{\frac{3}{2}}a)$$

Kuution tilavuus on a^3.
Puolipallon tilavuus on

$$\frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{2} = \frac{2}{3}\pi(\sqrt{\frac{3}{2}}a)^3 = \frac{2}{3}\pi \cdot \frac{3}{2} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}a^3 = \sqrt{\frac{3}{2}}\pi a^3 = \frac{\sqrt{6}}{2}\pi a^3.$$

Tilavuuksien suhde on $\frac{a^3}{\frac{\sqrt{6}}{2}\pi a^3} = \frac{2}{\sqrt{6}\pi} = 0,259\ldots$.

Kuution tilavuus on 26 % puolipallon tilavuudesta.

319. Olkoon padan sisäsäde r.

Padan sisäosan tilavuus on $\frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{2} = \frac{2}{3}\pi r^3$.

$$\frac{2}{3}\pi r^3 = 74$$
$$r = 3,28\ldots(\text{dm})$$

Padan säde on 3,28… dm = 32,8… cm.
(67,0 cm – 2 · 32,8… cm) : 2 = 0,686… cm

Padan seinämän paksuus on 0,7 cm.

320. Pisin sivuista on $a + 1$, joka on siis hypotenuusa.
Suorakulmaisille kolmioille on voimassa Pythagoraan lause.

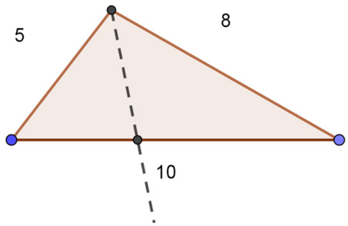
$$
\begin{aligned}
(a-1)^2 + a^2 &= (a+1)^2 \\
a^2 - 2a + 1 + a^2 &= a^2 + 2a + 1 \\
a^2 - 4a &= 0 \\
a(a-4) &= 0 \\
a = 0 \text{ tai } a &= 4
\end{aligned}
$$

Jotta muodostuisi kolmio, tulee olla $a = 4$.

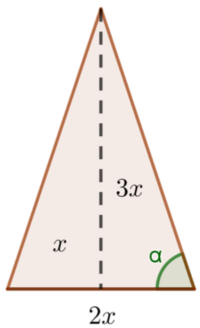
Koska puoliympyrän sisältämä kehäkulma on suora, suorakulmaisen kolmion ympäri piirretyn ympyrän halkaisija on kolmion hypotenuusa.
Halkaisija on $4 + 1 = 5$, joten säde on $2\frac{1}{2}$.

321. **a)** Kulmanpuolittaja jakaa vastaisen sivun viereisten sivujen suhteessa. Suurinta kulmaa vastassa on pisin sivu 10. Kulmanpuolittaja jakaa sivun suhteessa 5:8.

Osat ovat $\frac{5}{13}\cdot 10=\frac{50}{13}$ ja $\frac{8}{13}\cdot 10=\frac{80}{13}$.



b) Piirretään apukuva. Merkitään kantaa $2x$ ja korkeutta $3x$. Tasakylkisen kolmion korkeusjana puolittaa kannan.



Määritetään kantakulma α suorakulmaisesta kolmiosta.

$$\tan\alpha=\frac{3x}{x}$$
$$\tan\alpha=3$$
$$\alpha=71{,}56...^\circ$$

Tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat yhtä suuret. Huippukulman suuruus on $180° - 2 \cdot 71{,}56…° = 36{,}86…°$.

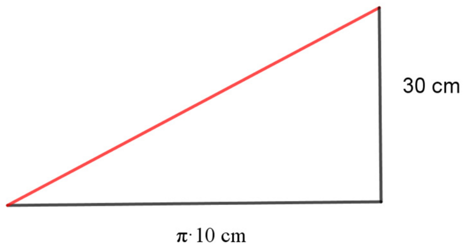
Kolmion kulmat ovat 71,6°, 71,6° ja 36,9°.

322. **a)** Säännöllisen n-kulmion yhdestä kulmasta voidaan piirtää $n - 3$ lävistäjää. Nämä lävistäjät jakavat n-kulmion $n - 2$ kolmioon. n-kulmion kulmien summa on yhtä suuri kuin $n - 2$ kolmion kulmien yhteenlaskettu summa eli $(n - 2) \cdot 180°$.

b) n-kulmion kulmien summa on $(n-2)\cdot 180°$.

Yhden kulman suuruus on tällöin $\frac{n-2}{n}\cdot 180°$.

323. Yhdellä kierroksella naru nousee $\frac{1}{3}$ putken pituudesta, eli 30 cm ja kiertää kokonaisen kierroksen, eli $\pi \cdot 10$ cm. Piirretään apukuva.



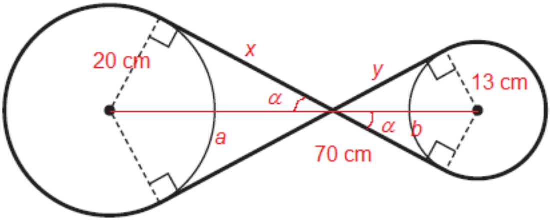
Ratkaistaan narun yhdellä kierroksella kiertämä matka x Pythagoraan lauseella.

$$x^2 = 30^2 + (\pi \cdot 10)^2$$
$$x^2 = 900 + 100\pi^2$$
$$x = \sqrt{900+100\pi^2} \text{ (tai } x = -\sqrt{900+100\pi^2}\text{)}$$

$$3 \cdot \sqrt{900+100\pi^2} = 130{,}31\ldots$$

Narun pituus on 130 cm.

324. Piirretään kuva. Isomman hihnapyörän säde on 20,0 cm ja pienemmän 13,0 cm.



Kuvaan merkityt kulmat α ovat ristikulmina yhtä suuret. Muodostuneet suorakulmaisetkolmiot ovat siten yhdenmuotoiset.

$$\frac{20}{x} = \frac{13}{y}$$

$$y = \frac{13x}{20}$$

Määritetään kolmioiden hypotenuusat *a* ja *b*.

$$a^2 = 20^2 + x^2$$

$$a = \sqrt{400 + x^2}$$

$$b^2 = 13^2 + y^2 = 13^2 + (\frac{13x}{20})^2$$

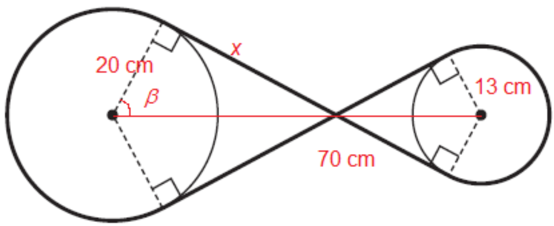
$$b = \sqrt{169 + \frac{169x^2}{400}}$$

$$a + b = 70$$

$$\sqrt{400 + x^2} + \sqrt{169 + \frac{169x^2}{400}} = 70$$

$$x = 37{,}41\ldots \text{ (tai } x = -37{,}41\ldots)$$

$$y = \frac{13x}{20} = 24{,}31\ldots$$



Ratkaistaan kulma β.

$$\tan\beta = \frac{x}{20}$$
$$\beta = 61{,}87...°$$

Hihnan pituus isomman pyörän kehällä on

$$\frac{360° - 2\beta}{360°}\cdot 2\pi\cdot 20 = 82{,}68...$$

Hihnan pituus pienemmän pyörän kehällä on

$$\frac{360° - 2\beta}{360°}\cdot 2\pi\cdot 13 = 53{,}60...$$

Hihnan pituus yhteensä on
82,68… + 53,60….+ 2 · 37,41… + 2 · 24,31… = 259,53… ≈ 260 cm.

325. Merkitään pohjan halkaisija x ja korkeus $2x$.

Pohjan pinta-ala on $\pi\cdot(\frac{x}{2})^2$.

$$\pi\cdot(\frac{x}{2})^2 = 150$$
$$x = 13{,}81...\ (\text{tai } x = -13{,}81...)$$

Korkeus on $2x = 27{,}63...$.

Lieriön tilavuus on $150\cdot 27{,}63... = 4145{,}92... \approx 4150\ \text{cm}^3$.

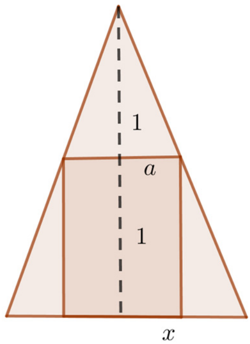
326. **a)** Runko pitenee muotonsa säilyttäen, jolloin alkuperäinen ja kasvanut puu ovat yhdenmuotoiset. Koska mitat kasvavat viidesosan, eli 20%, on mittakaava 1:1,2.
Tilavuuksien suhde on mittakaavan kuutio eli $(1:1{,}2)^3 = 1:1{,}728$.
Puun tilavuus kasvaa siis 73 %.

b) Olkoon puun tyven halkaisija a ja korkeus h. Puun tilavuus alussa on
$\frac{1}{3}\pi\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2\cdot h$.

Kun tyven halkaisija kasvaa viidesosan eli 20 % ja korkeus neljäsosan eli 25 %, on uusi tilavuus $\frac{1}{3}\pi\cdot(1{,}2\cdot\frac{a}{2})^2\cdot 1{,}25h = 1{,}8\cdot\frac{1}{3}\pi\cdot(\frac{a}{2})^2\cdot h$.

Tilavuus kasvaa 80 %.

327. **a)** Piirretään poikkileikkauskuva.



Muodostunut pieni kartio ja iso kartio ovat yhdenmuotoiset. Koska korkeuksien suhde on 1:2, myös pohjaympyröiden säteiden suhde on 1:2, joten $x = 2a$.

Kartioiden tilavuuksien suhde on mittakaavan kuutio, eli 1:8. Kartion toisen osan suhde koko kartioon on siten 7:8.

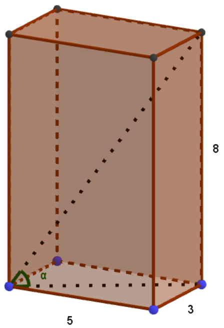
Kartion osien suhde on 1:7.

b) Lieriön korkeus on 1 ja pohjan säde a. Kartion pohjan säde on $2a$. Lieriön tilavuus on $\pi \cdot a^2 \cdot 1$.

Kartion tilavuus on $\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (2a)^2 \cdot 2 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 8a^2 = \frac{8}{3}\pi a^2$.

Lieriön ja kartion tilavuuksien suhde on $\frac{\pi a^2}{\frac{8}{3}\pi a^2} = \frac{3}{8} = 3:8$.

328. **a)** Piirretään apukuva.

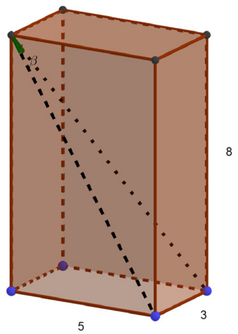


Pohjan lävistäjän pituus on $\sqrt{5^2+3^2}=\sqrt{34}$.

$$\tan\alpha=\frac{8}{\sqrt{34}}$$
$$\alpha=53{,}91...^\circ$$

Avaruuslävistäjän ja pohjan halkaisijan välinen kulma on 53.9°-

b)



Pohjan halkaisija pituus on $\sqrt{5^2+8^2}=\sqrt{89}$.

$$\tan\beta=\frac{3}{\sqrt{89}}$$
$$\beta=17{,}64...^\circ$$

Avaruuslävistäjän ja pohjan välinen kulma on 17,6°.

329. Kulmanpuolittaja jakaa vastaisen sivun viereisten sivujen suhteessa.
Merkitään $AC = 4x$ ja $BC = 3x$.
Merkitään $\sphericalangle ACD = \sphericalangle DCB = \alpha$.

$$AD^2 = AC^2 + DC^2 - 2 \cdot AC \cdot DC \cdot \cos\alpha$$
$$4^2 = (4x)^2 + 6^2 - 2 \cdot 4x \cdot 6 \cdot \cos\alpha$$

$$DB^2 = DC^2 + BC^2 - 2 \cdot DC \cdot BC \cdot \cos\alpha$$
$$3^2 = 6^2 + (3x)^2 - 2 \cdot 6 \cdot 3x \cdot \cos\alpha$$

Ratkaistaan yhtälöparista x.

$$\begin{cases} 4^2 = (4x)^2 + 6^2 - 2 \cdot 4x \cdot 6 \cdot \cos\alpha \\ 3^2 = 6^2 + (3x)^2 - 2 \cdot 6 \cdot 3x \cdot \cos\alpha \end{cases}$$

$x = 2$ tai $x = -2$, joista vain $x = 2$ kelpaa ratkaisuksi.

$AC = 4 \cdot 2 = 8$ ja $BC = 3 \cdot 2 = 6$.

330. **a)** Kuutiot ovat yhdenmuotoiset. Yhdenmuotoisten kappaleiden pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö. Mittakaava on 1:1,1, joten pinta-alojen suhde on 1:1,21. Pinta-ala kasvaa 21 %.

b) Kuutiot ovat yhdenmuotoiset. Yhdenmuotoisten kappaleiden tilavuuksien suhde on mittakaavan kuutio. Tilavuuksien suhde on 1:0,75, joten mittakaava on suhteen kuutiojuuri 1: 0,9085… Särmä lyhenee 9,1 %.

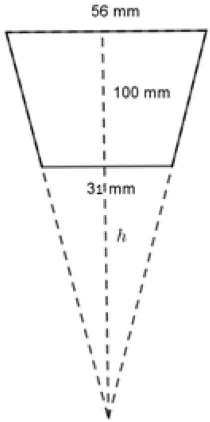
c) Kuutiot ovat yhdenmuotoiset. Yhdenmuotoisten kappaleiden pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö. Pinta-alojen suhde on 1:1,44. Mittakaava on pinta-alojen suhteen neliöjuuri ja tilavuuksien suhde on mittakaavan kuutio.

$$k = \sqrt{\frac{1}{1,44}}$$

$$k = \frac{1}{1,2}$$

Mittakaava on 1:1,2, joten tilavuuksien suhde on $(1:1,2)^3 = 1 : 1,728$. Tilavuus kasvaa 73 %.

331. **a)** Piirretään poikkileikkauskuva.



Kartio, josta pikari on saatu katkaisemalla, on korkeudeltaan h + 100. Kartio ja poistettu pienempi kartio ovat yhdenmuotoisia.

$$\frac{56}{h+100}=\frac{31}{h}$$
$$h=124$$

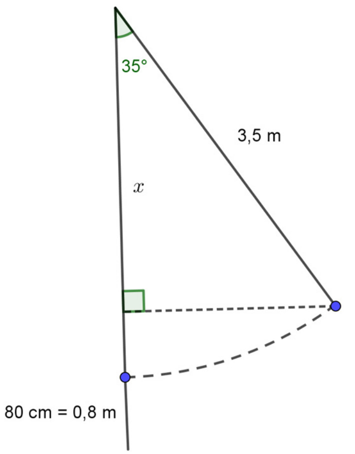
Pikarin tilavuus saadaan, kun ison kartion tilavuudesta poistetaan pienemmän kartion tilavuus. Pohjien säteet ovat 28 mm ja 15,5 mm ja koko kartion korkeus on 100 mm + 124 mm = 224 mm.

$$\frac{1}{3}\pi\cdot 28^2\cdot 224-\frac{1}{3}\pi\cdot 15{,}5^2\cdot 124=152707{,}5...$$

Pikarin tilavuus on noin 150 000 mm^3 = 0,15 dm^3 = 0,15 l = 150 ml.

b) Kartion korkeus on noin 220 mm.

332. Piirretään kuva.



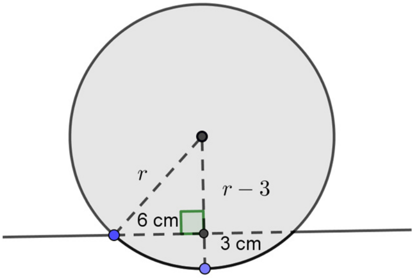
Ratkaistaan kuvaan merkitty x suorakulmaisesta kolmiosta.

$$\cos 35° = \frac{x}{3,5}$$

$$x = 3,5 \cdot \cos 35° = 2,867...$$

Istuinlauta nousee korkeudelle
(3,5 m – 2,86… m) + 0,8 m = 1,43… m ≈ 1,4 m.

333. Piirretään poikkileikkauskuva.
Merkitään ympyrän sädettä r.

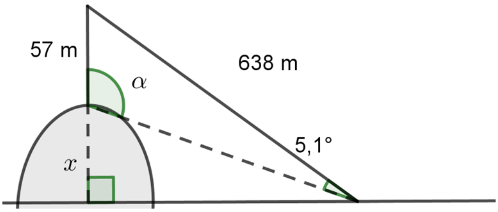


Ratkaistaan kuvan suorakulmaisesta kolmiosta ympyrän säde r.
$r^2 = (r - 3)^2 + 6^2$
$r = 7{,}5$

Kuulan halkaisija on $2 \cdot 7{,}5$ cm = 15 cm.
Kuulan säde on 7,5 cm = 0,075 m.
Kuulan tilavuus on $\frac{4}{3}\pi \cdot (0{,}075\ \text{m})^3 = 0{,}001767...\text{m}^3$.
Kuulan massa on $0{,}001767...\ \text{m}^3 \cdot 7{,}86 \cdot 10^3\ \text{kg/m}^3 = 13{,}88...\text{kg} \approx 14\ \text{kg}$.

Kuulan halkaisija on 15 cm ja massa 14 kg.

334. Piirretään kuva. Merkitään mäen korkeus x ja katselupaikan ja maston juuren etäisyys y.



$$\frac{57}{\sin 5{,}1°} = \frac{638}{\sin\alpha}$$

$$\sin\alpha = \frac{638 \cdot \sin 5{,}1°}{57}$$

$$\alpha = 84{,}26...° \text{ tai } \alpha = 180° - 84{,}26...° = 95{,}73...°$$

Koska katselupaikka on maston alapuolella, kulma $\alpha = 95{,}73…°$.

Kolmion kolmas kulma on $180° - 5{,}1° - 95{,}73…° = 79{,}16…°$.
Suorakulmaisesta kolmiosta saadaan:

$$\cos 79{,}16...° = \frac{57 + x}{638}$$

$$x = 638 \cdot \cos 79{,}16...° - 57$$

$$x = 62{,}94...$$

Mäen korkeus on 63 m.

335. Kolmiot *ABC* ja *ADC* ovat yhdenmuotoiset, koska niissä on yhteinen kulma *A* ja suora kulma. Kolmiot *ABC* ja *CDB* ovat yhdenmuotoiset, koska niissä on yhteinen kulma *B* ja suora kulma. Tällöin myös kolmiot *ADC* ja *CDB* ovat yhdenmuotoiset.

Merkitään $DB = b$.
Tällöin kolmioiden *ABC* ja *CDB* yhdenmuotoisuuden perusteella saadaan

$$\frac{b}{a} = \frac{a}{a+b}$$
$$a^2 = b(a+b)$$
$$a^2 = ab + b^2$$
$$b^2 + ab - a^2 = 0$$
$$b = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-a^2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-a \pm \sqrt{5a^2}}{2} = \frac{-a \pm \sqrt{5}a}{2}$$

Koska $a > 0$ ja $b > 0$,

$$b = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a\,.$$

Merkitään kulma $A = \alpha$. Kolmiosta *ABC* saadaan

$$\sin\alpha = \frac{a}{a+b}$$
$$\sin\alpha = \frac{a}{a + \frac{\sqrt{5}-1}{2}a}$$
$$\sin\alpha = 0{,}618...$$
$$\alpha = 38{,}17...°$$

Kulma *A* on 38° ja kulma *B* on $90° - 38{,}17…° = 51{,}82…° \approx 52°$.

336. Muutetaan leveyspiirien asteluvut asteiksi.

$60°9' = 60° + \frac{9}{60}° = 60{,}15°$

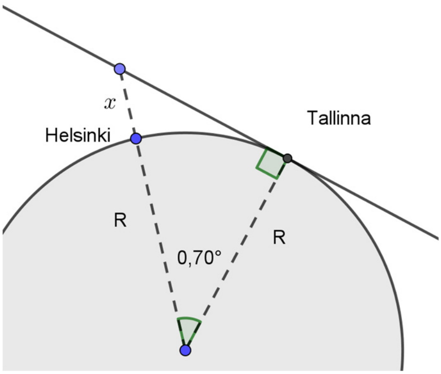
$59°27' = 59° + \frac{27}{60}° = 59{,}45°$

Leveyspiirien välinen kulma on $60{,}15° - 59{,}45° = 0{,}70°$.

Maapallon ympärysmitta on 40 000 km. Ratkaistaan maapallon säde R.

$$2\pi R = 40000$$
$$R = \frac{20000}{\pi}$$

Piirretään apukuva.
Merkitään kuumailmapallon korkeutta x.

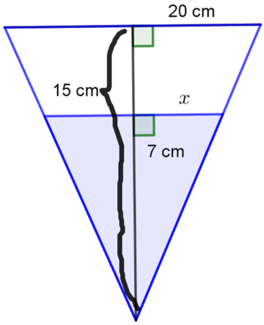


Ratkaistaan x suorakulmaisesta kolmiosta.

$$\cos 0{,}70° = \frac{R}{R+x}$$
$$x = \frac{R - R\cdot\cos 0{,}70°}{\cos 0{,}70°}$$
$$x = 0{,}475...$$

Kuumailmapallolla tulisi nousta 0,48 km eli 480 m korkeuteen.

337. Piirretään poikkileikkauskuva.



Kuvan suorakulmaiset kolmiot ovat yhdenmuotoiset, koska niillä on yhteinen kulma ja molemmissa kolmioissa on suora kulma.

$$\frac{x}{7} = \frac{20}{15}$$

$$x = \frac{20}{15} \cdot 7 = \frac{28}{3}$$

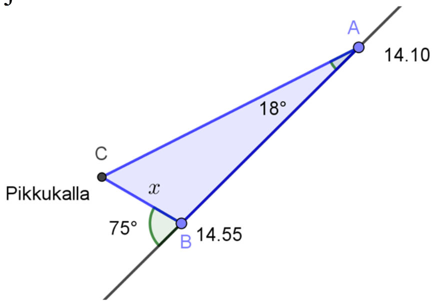
Vesimäärän tilavuus on $\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (\frac{28}{3})^2 \cdot 7 = 638,55...(\text{cm}^3)$.

Pinta-ala, jolle vesimäärä on satanut, on mittarin suuaukon pinta-ala.

$\pi \cdot 20^2 = 1256,63...(\text{cm}^2)$.

Sademäärä on tilavuus 638,55 cm^3 jaettuna pinta-alalla 1256,63… cm^2, eli 0,508… cm ≈ 5 mm.

338. Piirretään kuva. Merkitään purjeveneen etäisyyttä majakasta klo 14.55 kirjaimella x.



Määritetään veneen kellonaikojen 14.10 ja 14.55 välissä kulkema matka, eli kuvan etäisyys AB.
14.55 ja 14.10 väli on 45 min = 0,75 h.
7,2 · 1852 m/h · 0,75 h = 10000,8 m

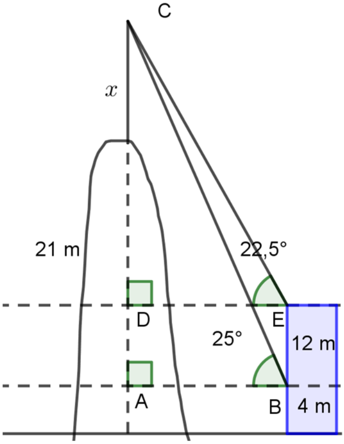
Kuvan kolmion BAC kulma B on 180° − 75° = 105° ja kulma C on 180° − 18° − 105° = 57°.

Määritetään etäisyys x sinilauseella.

$$\frac{x}{\sin 18°} = \frac{10000{,}8}{\sin 57°}$$
$$x = 3684{,}8...$$

Purjeveneen etäisyys majakasta kello 14.55 on 3,7 km.

339. Piirretään kuva.



Kuvan suorakulmaisessa kolmiossa *DEC* kateetti *DC* on pituudeltaan 21 m – 16 m + x = 5 m + x.
Kolmiossa *ABC* kateetti *AC* on pituudeltaan 21 m – 4 m + x = 17 m + x.
Kateetit *AB* ja *DE* ovat yhtä pitkät.

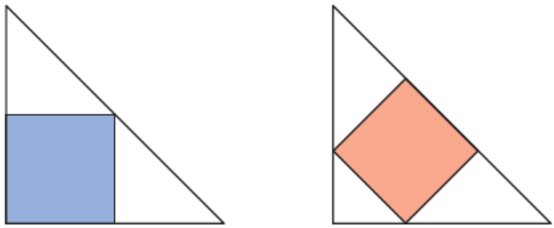
$$\tan 22,5° = \frac{DC}{DE}$$
$$\tan 22,5° = \frac{5+x}{DE}$$
$$DE = \frac{5+x}{\tan 22,5°}$$

$$\tan 25° = \frac{AC}{AB}$$
$$\tan 25° = \frac{17+x}{AB}$$
$$AB = \frac{17+x}{\tan 25°}$$

$$\frac{5+x}{\tan 22,5°} = \frac{17+x}{\tan 25°}$$
$$x = 90,41\ldots$$

Tornin korkeus on 90,4 metriä.

340. Piirretään kuva.



Molemmissa kolmioissa neliön ulkopuolelle jäävät pienet kolmiot ovat yhdenmuotoisia ison kolmion kanssa. Ensimmäisessä kuviossa pienet kolmiot ovat yhteneviä ja toisessa ison kolmion hypotenuusalla olevat pienet kolmiot ovat yhteneviä.

Ensimmäisen (sinisen) neliön sivun pituus on puolet kolmion kateetin pituudesta. Toisen (punaisen) neliön sivun pituus on kolmasosa kolmion hypotenuusan pituudesta.

Olkoon kolmion kateetin pituus a. Sinisen neliön sivun pituus on $\frac{1}{2}a$ ja pinta-ala $\frac{1}{4}a^2$.

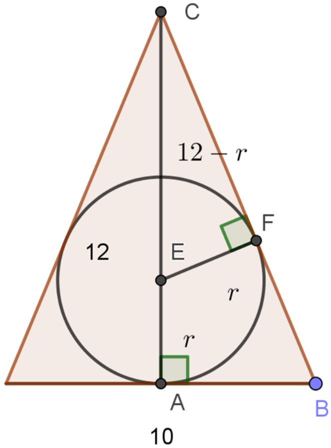
Ratkaistaan kolmion hypotenuusan pituus b.

$b^2 = a^2 + a^2$
$b^2 = 2a^2$
$b = \sqrt{2}a$ (tai $b = -\sqrt{2}a$)

Punaisen neliön sivun pituus on $\frac{1}{3}\sqrt{2}a = \frac{\sqrt{2}}{3}a$ ja pinta-ala $\frac{2}{9}a^2$.

Piirtämällä kaksi sivua kateeteille syntyy suurempi neliö.

341. Piirretään kuva. Merkitään ympyrän säde r.



Janan AB pituus on 5 ja janan AC pituus on 12.
Kolmiot ABC ja EFC ovat yhdenmuotoiset, koska niissä on yhteinen kulma C ja suora kulma (kk-lause).

Ratkaistaan kolmion ABC hypotenuusa BC.

$BC^2 = 5^2 + 12^2$

$BC^2 = 169$

$BC = 13$ (tai $BC = -13$)

Kolmioiden ABC ja EFC yhdenmuotoisuudesta saadaan

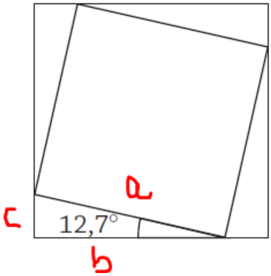
$$\frac{EF}{EC} = \frac{AB}{BC}$$

$$\frac{r}{12-r} = \frac{5}{13}$$

$$r = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$$

Ympyrän säde on $3\frac{1}{3}$.

342. Olkoon pienemmän neliön sivun pituus a, kolmion pidempi kateetti b ja lyhempi kateetti c.



$$\sin 12,7° = \frac{c}{a}$$
$$c = a \cdot \sin 12,7°$$

$$\cos 12,7° = \frac{b}{a}$$
$$b = a \cdot \cos 12,7°$$

Isomman neliön sivun pituus on $b + c = a(\cos 12,7° + \sin 12,7°)$.

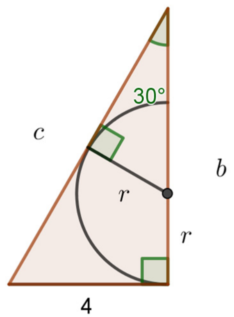
Pienemmän neliön sivun pituus on suuremman pituudesta

$$\frac{a}{b+c} = \frac{a}{a(\cos 12,7° + \sin 12,7°)} = 0,8365... \approx 84\%.$$

Pienemmän neliön pinta-ala on suuremman alasta

$$\frac{a^2}{(b+c)^2} = \frac{a^2}{a^2(\cos 12,7° + \sin 12,7°)^2} = 0,6998... \approx 70\%.$$

343. Piirretään kuva. Merkitään puoliympyrän sädettä r.



Ratkaistaan kolmion muiden sivujen pituudet.

$$\sin 30° = \frac{4}{c}$$

$$c = \frac{4}{\sin 30°} = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8$$

$$c^2 = 4^2 + b^2$$
$$8^2 = 4^2 + b^2$$
$$b = \sqrt{48} = 4\sqrt{3} \quad (\text{tai } b = -\sqrt{48})$$

Kuvan suorakulmaiset kolmiot ovat yhdenmuotoiset, koska molemmissa on yhteinen 30° kulma ja suora kulma.
Yhdenmuotoisuudesta saadaan

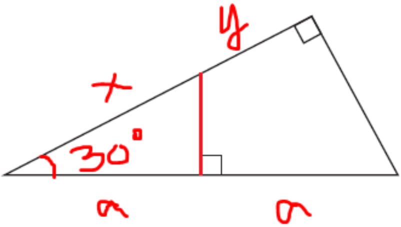
$$\frac{r}{b-r} = \frac{4}{c}$$
$$\frac{r}{4\sqrt{3}-r} = \frac{4}{8}$$
$$r = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

Kolmion pinta-ala on $\frac{4 \cdot 4\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}$.

Puoliympyrän pinta-ala on $\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (\frac{4\sqrt{3}}{3})^2 = \frac{8\pi}{3}$.

Pinta-alojen suhde on $\frac{\frac{8\pi}{3}}{8\sqrt{3}} \overset{\sqrt{3})}{=} \frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{9} = 0{,}6045... \approx 60\%$.

344. Täydennetään kuvaan merkinnät.



Kuvan kolmiot ovat yhdenmuotoiset, koska niissä on yhteinen kulma 30° ja suora kulma (kk-lause).

$$\cos 30° = \frac{a}{x}$$

$$x = \frac{a}{\cos 30°} = \frac{2}{\sqrt{3}}a$$

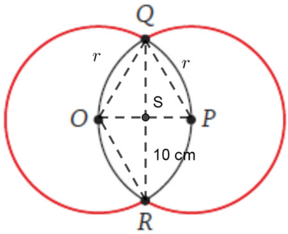
$$\cos 30° = \frac{x+y}{2a}$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}a$$

Osien x ja y pituuksien suhde on

$$x : y = \frac{2}{\sqrt{3}}a : \frac{\sqrt{3}}{3}a = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{\sqrt{3}} = 2:1\,.$$

345. Täydennetään kuvaan merkinnät.



Ympyröillä on sama säde, koska *OP* on niiden yhteinen säde.
OP, *OQ* ja *PQ* ovat ympyrän säteen *r* mittaisia.

Kolmio *OPQ* on tasasivuinen kolmio, jonka sivun pituus on *r*. Kolmion *OPQ* korkeusjana *SQ* on puolet pisteiden *Q* ja *R* välisestä etäisyydestä eli 5.

Suorakulmaisesta kolmiosta *OSQ* saadaan:

$$\begin{aligned} r^2 &= (\frac{1}{2}r)^2 + 5^2 \\ \frac{3}{4}r^2 &= 25 \\ r^2 &= \frac{100}{3} \\ r &= \frac{10}{\sqrt{3}} \text{ (tai } r = -\frac{10}{\sqrt{3}}) \end{aligned}$$

Kolmion *OPQ* kaikki kulmat ovat 60°. Lyhyempää kaarta *RQ* vastaava keskuskulma on 120° ja pidempää kaarta vastaava 360° – 120° = 240°. Pidemmän kaaren *RQ* pituus on

$$\frac{240°}{360°} \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{10}{\sqrt{3}} = \frac{40}{3\sqrt{3}}\pi.$$

Lasketaan merkityn viivan pituus.

$$2 \cdot \frac{40}{3\sqrt{3}}\pi = \frac{80}{3\sqrt{3}}\pi = \frac{80\sqrt{3}}{9}\pi = 48,36...$$

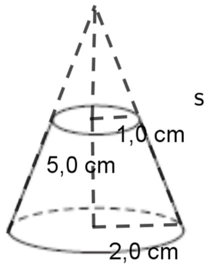
Pituus on noin 48 cm.

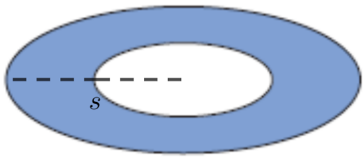
346. Jotta kuutio mahtuisi pallon sisälle, tulee kuution avaruuslävistäjän olla pallon halkaisijan mittainen.
Olkoon kuution särmä a. Kuution avaruuslävistäjän pituus on
$\sqrt{a^2+a^2+a^2}=\sqrt{3}a.$
Tällöin

$$\sqrt{3}a=2R$$
$$a=\frac{2}{\sqrt{3}}R.$$

Kuution särmän pituus on $\frac{2}{\sqrt{3}}R=\frac{2\sqrt{3}}{3}R.$

347. Täydennetään kuvaan merkinnät ja ympyräkartio kokonaiseksi.





Kartion poistettu kärkiosa on yhdenmuotoinen alkuperäisen kartion kanssa mittakaavassa 1:2.

Kartion sivujanan pituus voidaan ratkaista suorakulmaisesta kolmiosta.

$$s^2=2{,}0^2+5{,}0^2$$
$$s^2=29$$
$$s=\sqrt{29}\ (\text{tai } s=-\sqrt{29})$$

Poistetun kärjen sivujanan pituus on $\frac{\sqrt{29}}{2}$.

Pinta-ala saadaan, kun ulommasta ympyrästä vähennetään sisempi.

$$\pi\cdot s^2-\pi\cdot(\frac{s}{2})^2=\pi\cdot(\sqrt{29})^2-\pi\cdot(\frac{\sqrt{29}}{2})^2=\frac{3\cdot 29}{4}\pi=68{,}32...$$

Sinisen rengasalueen pinta-ala on 68 cm^2.

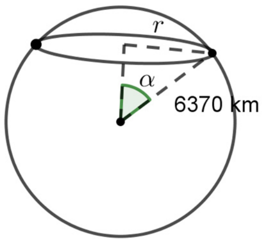
SYVENTÄVÄT TEHTÄVÄT

348. Maapallo kiertää kerran akselinsa ympäri vuorokauden aikana. Olkoon lentokoneen kiertämän ympyrän säde *r*. Lentokone lentää 10 km korkeudella, joten leveyspiirin säde on *r* – 10. Lentokoneen nopeus on $\frac{2\pi r}{24}$ km/h.

Ratkaistaan *r*, kun lentokoneen nopeus on 900 km/h.

$$\frac{2\pi r}{24} = 900$$
$$r = 3437{,}74...$$

Leveyspiirin säde on 3427,74… km.



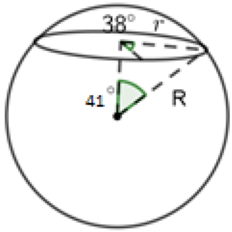
Ratkaistaan kulma α.

$$\sin\alpha = \frac{3427{,}74...}{6370}$$
$$\alpha = 32{,}55...°$$

Leveyspiirit lasketaan Päiväntasaajalta.
90° − 32,55…° = 57,44…°.

Leveyspiiri on 57,4° pohjoista tai eteläistä leveyttä.

349. Piirretään kuva. Merkitään maapallon sädettä R ja leveyspiirin sädettä r. Leveysaste on 49°, joten kulma Pohjoisnavalta mitattuna on $90° - 49° = 41°$.



Ratkaistaan maapallon säde.

$$2\pi R = 40000$$
$$R = \frac{20000}{\pi}$$

Ratkaistaan leveyspiirin säde suorakulmaisesta kolmiosta.

$$\sin 41° = \frac{r}{R}$$
$$r = R\sin 41° = \frac{20000}{\pi}\cdot \sin 41°$$

Lasketaan paikkakuntien välimatka leveyspiiriä pitkin.

$$\frac{38°}{360°}\cdot 2\pi r = \frac{38°}{360°}\cdot 2\pi \cdot \frac{20000}{\pi}\cdot \sin 41° = 2770,0...$$

Välimatka on 2770 km.

Paikkakuntien välimatka suoraviivaisesti voidaan laskea tasakylkisestä kolmiosta, jonka huippukulma on 38º ja kyljet r.
Etäisyys a on tällöin

$$a^2 = r^2 + r^2 - 2r\cdot r\cdot \cos 38°$$
$$a = 2719,5...$$

Maapallon keskipisteestä mitatun sektorin keskuskulma on sen tasakylkisen kolmion huippukulma, jonka kyljet ovat R ja kanta a.

$$a^2 = R^2 + R^2 - 2R\cdot R\cdot \cos\alpha$$
$$\alpha = 24,66...°$$

Paikkakuntien välinen lyhin etäisyys maanpintaa pitkin on 24,66…°:een ympyräsektorin kaaren pituus.

$$\frac{24,66...°}{360°}\cdot 40000 \text{ km} = 2740,65... \text{ km} \approx 2740 \text{ km}$$

350. **a)** Olkoon suorakulmaisen kolmion kateetit a ja b. Suorakulmaisen kolmion pinta-ala on $\frac{ab}{2}$. Koska $\frac{ab}{2} > 1$, niin $ab > 2$.

Jos kolmion molemmat kateetit ovat lyhempiä kuin 1, on tulo $ab < 1$, joten ainakin toisen kateeteista a ja b tulee olla pidempi kuin 1, jotta olisi $ab > 2$.

b) Olkoon kolmion kaksi sivua a ja b ja näiden välinen kulma γ. Kolmion pinta-ala on $\frac{1}{2}ab\sin\gamma$.

Tiedetään, että $\frac{1}{2}ab\sin\gamma > 1$, eli $ab\sin\gamma > 2$. Kaikilla kulman γ arvoilla $-1 \leq \sin\gamma \leq 1$. Jos a ja b ovat molemmat lyhempiä kuin 1, on tulo $ab < 1$. Jotta olisi $ab\sin\gamma > 2$, tulee ainakin toisen sivuista a ja b olla pidempi kuin 1.

351. **a)** Kaukalo ja kallistuksen jälkeen kaukalossa oleva vesimäärä ovat muodoltaan saman pohjaiset ja yhtä korkeat lieriö ja kartio. Kartion tilavuus on $\frac{1}{3}$ lieriön tilavuudesta. Vedestä valuu pois

$\frac{2}{3} = 0,666... \approx 67\%.$

b) Kallistuksen jälkeen vesimäärän tilavuus on $\frac{1}{3}$ koko astian tilavuudesta. Kun astia suoristetaan, sen pituus pysyy samana (b), joten päädyn pinta-alan tulee olla $\frac{1}{3}$ astian päädystä.

Päätykolmiot ovat yhdenmuotoiset. Koska pinta-alojen suhde on 1:3, on mittakaava $1:\sqrt{3}$.

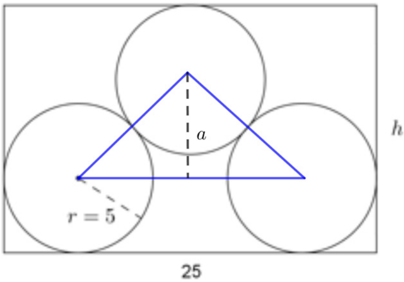
Vesi on korkeudella $\frac{1}{\sqrt{3}}$ astian korkeudesta. Astian korkeus d saadaan tasasivuisen kolmion korkeutena.

$$a^2 = (\frac{1}{2}a)^2 + d^2$$

$$d = \frac{\sqrt{3}}{2}a \quad (\text{tai } d = -\frac{\sqrt{3}}{2}a)$$

Veden korkeus on $\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{1}{2}a.$

352. Täydennetään kuvaan merkintöjä.



Ympyröiden keskipisteet yhdistävän kolmion kannan pituus on
25 – 2 · 5 = 15.

Tasakylkisen kolmion korkeus a voidaan ratkaista suorakulmaisesta kolmiosta.

$$a^2 + 7\frac{1}{2}^{\,2} = 10^2$$

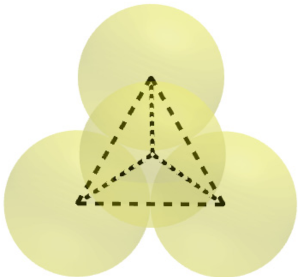
$$a^2 = \frac{175}{4}$$

$$a = \frac{5\sqrt{7}}{2} \text{ (tai } a = -\frac{5\sqrt{7}}{2}\text{)}$$

Suorakulmion korkeus h on $a + 2r = \dfrac{5\sqrt{7}}{2} + 10$.

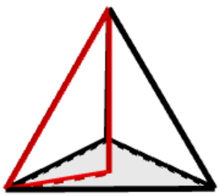
353. Yhdistämällä pallojen keskipisteet muodostuu tetraedri, jonka sivun pituus on $2r$, kun pallon säde on r ja korkeus h. Rakennelman korkeus on $h + 2r$. Tetraedrin tahkon korkeus on tasasivuisen kolmion korkeus

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2r=\sqrt{3}r.$$



Korkeusjana leikkaa pohjakolmion mediaanien leikkauspisteessä. Mediaanin leikkauspiste jakaa mediaanit suhteessa 2:1 kärjestä lukien, joten mediaanien leikkauspisteen etäisyys pohjakolmion kärjistä on

$$\frac{2}{3}\sqrt{3}r=\frac{2\sqrt{3}}{3}r.$$



Ratkaistaan tetraedrin korkeus h.

$$h^2+(\frac{2\sqrt{3}}{3}r)^2=(2r)^2$$

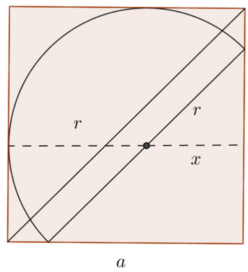
$$h^2=4r^2-\frac{4}{3}r^2$$

$$h^2=\frac{8}{3}r^2$$

$$h=\sqrt{\frac{8}{3}}r \text{ (tai } h=-\sqrt{\frac{8}{3}}r)$$

Rakennelman korkeus on $\sqrt{\frac{8}{3}}r+2r=(\sqrt{\frac{8}{3}}+2)r=(\frac{2\sqrt{6}}{3}+2)r$.

354. Piirretään kuva.



Suurin mahdollinen puoliympyrä muodostuu, kun puoliympyrän kehä sivuaa neliön sivuja. Kolmio, jonka kateettia on merkitty kirjaimella *x,* on tasakylkinen, koska se on yhdenmuotoinen neliön puolikkaan kanssa.

$$x^2 + x^2 = r^2$$
$$2x^2 = r^2$$
$$x = \frac{r}{\sqrt{2}} \quad (x > 0)$$

Nyt

$$r + x = a$$
$$r + \frac{r}{\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2}+1)r}{\sqrt{2}} = a\,,$$

josta $r = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}a$.

Neliön pinta-ala on a^2.
Puoliympyrän pinta-ala on

$$\frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}a\right)^2 = \frac{1}{2}\pi\cdot\frac{2}{(\sqrt{2}+1)^2}a^2 = \frac{\pi}{(\sqrt{2}+1)^2}a^2$$

Ulkopuolelle jää neliön pinta-alasta $a^2 - \frac{\pi}{(\sqrt{2}+1)^2}a^2$.

$$\frac{a^2 - \frac{\pi}{(\sqrt{2}+1)^2}a^2}{a^2} = 0{,}4609... \approx 46\ \%.$$

355. Yhdistämällä reunimmaisten pallojen keskipisteet muodostuu neliöpohjainen pyramidi, jonka jokaisen särmän pituus on $6r$. Pallopyramidin korkeus on tämän neliöpohjaisen pyramidin korkeus h lisättynä kahden pallon säteellä $2r$.

Pyramidin korkeusjana leikkaa neliön muotoisen pohjatahkon pohjan lävistäjien leikkauspisteessä, jonka etäisyys kärjestä on $\frac{\sqrt{2}\cdot 6r}{2} = 3\sqrt{2}r$.

Pyramidin korkeus h saadaan suorakulmaisesta kolmiosta.

$$h^2 + (3\sqrt{2}r)^2 = (6r)^2$$
$$h^2 = 18r^2$$
$$h = 3\sqrt{2}r \text{ (tai } h = -3\sqrt{2}r)$$

Pallopyramidin korkeus on $3\sqrt{2}r + 2r$.

Korkeuden suhde pallon halkaisijaan on
$(3\sqrt{2}+2)r : (2r) = (3\sqrt{2}+2) : 2.$

4 Analyyttinen geometria

4.1 Tason käyrä ja suora

LUVUN 4.1 YDINTEHTÄVÄT

401. **a)** Piste on käyrällä, jos se toteuttaa käyrän yhtälön.

$$2\cdot(-1)^4-(-1)^3-(-1)-2^2=2\cdot 1+1+1-4=0$$

Piste on käyrällä.

b) $3\cdot 3+2a-7=0$

$$9+2a-7=0$$

$$2a=-2 \quad \|:2$$

$$a=-1$$

402. **a)** $k=\dfrac{-5-(-1)}{10-(-2)}=\dfrac{-4}{12}=-\dfrac{1}{3}$

Suoran yhtälö on

$$y-(-1)=-\frac{1}{3}(x-(-2))$$

$$y+1=-\frac{1}{3}(x+2)$$

$$y+1=-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$$

$$y=-\frac{1}{3}x-1\frac{2}{3}$$

$$y=-\frac{1}{3}x-\frac{5}{3}.$$

Suuntakulma:

$$\tan\alpha=-\frac{1}{3}$$

$$\alpha=-18{,}43...^\circ\approx-18{,}4^\circ$$

b) $k=\tan(-30^\circ)=-\tan 30^\circ=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}=-0{,}577...\approx-0{,}58$

403. **a)** x-akselin suuntaisen suoran kulmakerroin on 0. Suoran yhtälö on $y = 2$.

b) y-akselin suuntaisella suoralla ei ole kulmakerrointa. Suoran yhtälö on $x = 1$.

c) $k = \tan(-45°) = -\tan 45° = -1$

Suoran yhtälö on

$$y - 2 = -1(x - 1)$$
$$y - 2 = -x + 1$$
$$y = -x + 3.$$

d) $2x + y = 0$

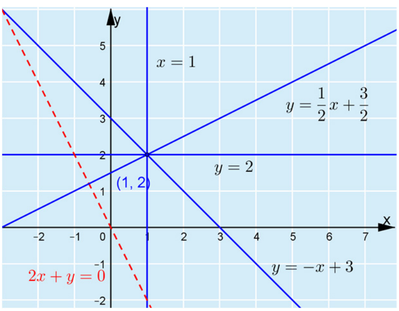
$$y = -2x$$

Suoran kulmakerroin on -2.

Kohtisuoran suoran kulmakerroin on $\frac{1}{2}$, koska kohtisuorien suorien kulmakertoimien tulo on -1.

Suoran yhtälö on

$$y - 2 = \frac{1}{2}(x - 1)$$
$$y - 2 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$
$$y = \frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}$$
$$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \text{ eli } x - 2y + 3 = 0.$$



404. Pisteiden A ja B kautta kulkevan suoran kulmakerroin on $\frac{10-5}{-1-2}=-\frac{5}{3}$.

Suoran $3x - 5y - 8 = 0$, eli suoran $y=\frac{3}{5}x-\frac{8}{5}$ kulmakerroin on $\frac{3}{5}$.

Kulmakertoimien tulo on $-\frac{5}{3}\cdot\frac{3}{5}=-\frac{15}{15}=-1,$ joten pisteiden A ja B kautta kulkeva suora ja suora $3x - 5y - 8 = 0$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

Suoran $10x + 6y + 1 = 0$ eli suoran $y=-\frac{5}{3}x-\frac{1}{6}$ kulmakerroin on $-\frac{5}{3}$, joten se on yhdensuuntainen pisteiden A ja B kautta kulkevan suoran kanssa.

Pisteiden A ja B kautta kulkevan suoran suuntakulma on

$$\tan\alpha=-\frac{5}{3}, \text{ josta}$$
$$\alpha=-59{,}03...°$$
$$\alpha\approx-59{,}0°.$$

Suora muodostaa x-akselin kanssa kulman, jonka suuruus on noin 59,0°.

405. **a)** Sivun AB keskinormaali kulkee sivun AB keskipisteen kautta.

Keskipiste on $\left(\frac{0+2}{2},\ \frac{4+0}{2}\right)=(1, 2)$.

Sivun AB suuntaisen suoran kulmakerroin on $\frac{0-4}{2-0}=-2$.

Keskinormaalin kulmakerroin on $\frac{1}{2}$, koska $-2\cdot\frac{1}{2}=-1$.

Keskinormaalin yhtälö on

$$y-2=\frac{1}{2}(x-1)$$
$$y-2=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$$
$$y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} \text{ eli } x-2y+3=0.$$

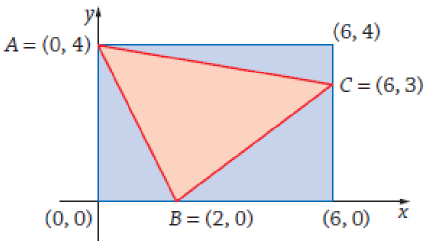
b) Kärjen C kautta piirretty keskijana kulkee pisteen C ja janan AB keskipisteen (1, 2) kautta.

Suoran kulmakerroin on $\frac{3-2}{6-1}=\frac{1}{5}$.

Suoran yhtälö on

$$y-3=\frac{1}{5}(x-6)$$
$$y=\frac{1}{5}x-\frac{6}{5}+3$$
$$y=\frac{1}{5}x+\frac{9}{5} \text{ eli } x-5y+9=0.$$

c)



Kuvan merkinnöillä kolmion ABC pinta-ala
voidaan laskea vähentämällä suorakulmion pinta-alasta kolmen suorakulmaisen kolmion pinta-alat.

Kolmion ABC pinta-ala on

$$6\cdot 4-(\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4+\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3+\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 1)=24-(4+6+3)=11.$$

406. Ratkaistaan suorien leikkauspisteet.

$$\begin{cases} y = 2x \\ x - 5y - 9 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 3 \\ x - 5y - 9 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 2x \\ x + y = 3 \end{cases}$$

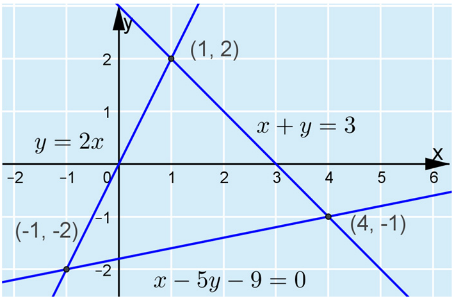
$$x = -1,\ y = -2 \qquad x = 4,\ y = -1 \qquad x = 1,\ y = 2$$

Merkitään kärkipisteet $A = (-1, -2)$, $B = (4, -1)$ ja $C = (1, 2)$.
Lasketaan kolmion sivujen pituudet.

AB: $\sqrt{(4-(-1))^2 + (-1-(-2))^2} = \sqrt{26}$

BC: $\sqrt{(1-4)^2 + (2-(-1))^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

AC: $\sqrt{(-1-1)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$



407. Suoran $2x + 3y = 0$, eli suoran $y = -\frac{2}{3}x$ kulmakerroin on $-\frac{2}{3}$.

Pisteen (–3, 6) kautta kulkevan yhdensuuntaisen suoran yhtälö on

$$\begin{aligned} y - 6 &= -\frac{2}{3}(x+3) \\ y &= -\frac{2}{3}x + 4. \end{aligned}$$

Olkoon piste A y-akselin leikkauspiste, jolloin $y = 4$ ja kysytty piste $A = (0, 4)$.

Olkoon piste B x-akselin leikkauspiste, jolloin $0 = -\frac{2}{3}x + 4$ ja edelleen $x = 6$. Kysytty piste on $B = (6, 0)$.

Janan AB pituus on $\sqrt{(6-0)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$.

Janan AB keskipiste on $\left(\frac{6+0}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = (3, 2)$.

Janan AB keskinormaalin kulmakerroin on $\frac{3}{2}$, koska $-\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = -1$.

Keskinormaalin yhtälö on

$$\begin{aligned} y - 2 &= \frac{3}{2}(x-3) \\ y &= \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Keskinormaali leikkaa y-akselin pisteessä $(0, -\frac{5}{2})$.

Keskinormaali leikkaa x-akselin pisteessä, jossa $y = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}x - \frac{5}{2} &= 0 \\ x &= \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

Keskinormaali leikkaa x-akselin pisteessä $(\frac{5}{3}, 0)$.

4.2 Ympyrä ja paraabeli

LUVUN 4.2 YDINTEHTÄVÄT

408. **a)** Ympyrän keskipiste on (0, 0) ja säde 9.

$$(x-0)^2+(y-0)^2=9^2$$
$$x^2+y^2=81$$

b) Sijoitetaan piste (–4, 8) ympyrän yhtälöön.

$$(-4)^2+8^2=16+64=80<81$$

Piste on ympyrän sisäpuolella, joten sen kautta ei voida piirtää tangenttia.

409. Ympyrän keskipiste on halkaisijan päätepisteiden keskipiste.

$$\left(\frac{4+(-2)}{2},\frac{1+1}{2}\right)=(1,1)$$

Ympyrän säde on puolet halkaisijasta.

$$r=\frac{\sqrt{(4-(-2))^2+(1-1)^2}}{2}=\frac{6}{2}=3$$

Ympyrän yhtälö on

$$(x-1)^2+(y-1)^2=3^2$$
$$(x-1)^2+(y-1)^2=9.$$

410. **a)** Määritetään ympyrän $x^2 + y^2 - 8x + 14 = 0$ keskipiste ja säde.

$$x^2 - 8x + y^2 = -14$$
$$x^2 - 8x + 16 + y^2 = -14 + 16$$
$$(x - 4)^2 + y^2 = 2$$

Ympyrän keskipiste on (4, 0) ja säde on $\sqrt{2}$.

Pisteen (9, 5) etäisyys ympyrän keskipisteestä on
$\sqrt{(9-4)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{25+25} = 5\sqrt{2}$.

Pisteen (9, 5) lyhin etäisyys ympyrästä $x^2 + y^2 - 8x + 14 = 0$ on
$5\sqrt{2} - \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$.

b) Suora on normaalimuodossa $x - 1 = 0$.

$$d = \frac{|1\cdot 9 + 0\cdot 5 - 1|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = \frac{|8|}{\sqrt{1}} = 8$$

411. Suoran $3x - 4y + 9 = 0$ etäisyys ympyrän keskipisteestä on ympyrän säde. Lasketaan suoran etäisyys pisteestä (4, –1).

$$r = \frac{|3\cdot 4 - 4\cdot(-1) + 9|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{25}{5} = 5$$

Ympyrän yhtälö on
$(x - 4)^2 + (y - (-1))^2 = 5^2$
$(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 25$.

y-akselin jokaisessa pisteessä $x = 0$, joten ympyrä $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 25$ leikkaa y-akselin pisteessä

$$(0 - 4)^2 + (y + 1)^2 = 25$$
$$(y + 1)^2 = 25 - 16$$
$$(y + 1)^2 = 9$$

$y + 1 = 3$ tai $y + 1 = -3$
$y = 2$ $\qquad y = -4$

Ympyrä leikkaa y-akselin pisteissä (0, 2) ja (0, –4).

412. Piste on ympyrällä, jos se toteuttaa ympyrän yhtälön.
$(6 - 4)^2 + (2 - 1)^2 = 2^2 + 1^2 = 4 + 1 = 5.$
Piste on ympyrällä.

Tangentti on kohtisuorassa ympyrän sädettä vastaan.
Ympyrän keskipiste on (4, 1). Lasketaan keskipisteestä pisteeseen (6, 2) piirretyn säteen suuntaisen suoran kulmakerroin.

$$k_s = \frac{2-1}{6-4} = \frac{1}{2}$$

Tangentin kulmakerroin on –2, koska $-2 \cdot \frac{1}{2} = -1$.

Kysytyn tangentin yhtälö on

$$y - 2 = -2(x - 6)$$
$$y = -2x + 14.$$

413. Määritetään paraabelien leikkauspisteet.

$$\begin{cases} x = y^2 \\ x = 4y - y^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y^2 &= 4y - y^2 \\ 2y^2 - 4y &= 0 \\ 2y(y-2) &= 0 \\ 2y = 0 \ &\text{tai}\ y - 2 = 0 \\ y = 0 \quad & \quad\ \ y = 2 \end{aligned}$$

Kun $y = 0$, niin $x = 0$ ja kun $y = 2$, niin $x = 2^2 = 4$.
Paraabelien leikkauspisteet ovat (0, 0) ja (4, 2).

Leikkauspisteiden kautta kulkevan suoran kulmakerroin on $\frac{2-0}{4-0} = \frac{1}{2}$.

Kysytyn suoran yhtälö on

$$y - 0 = \frac{1}{2}(x - 0)$$
$$y = \frac{1}{2}x.$$

414. **a)** Paraabelin yhtälö on muotoa $y - 2 = a(x - 1)^2$. Piste (0, 4) toteuttaa paraabelin yhtälön.

$4 - 2 = a\,(0 - 1)^2$

$a = 2$

Paraabelin yhtälö on $y - 2 = 2(x - 1)^2$ eli $y = 2x^2 - 4x + 4$.

b) Paraabelin yhtälö on muotoa $x - 1 = a(y - 2)^2$. Piste (0, 4) toteuttaa paraabelin yhtälön.

$0 - 1 = a(4 - 2)^2$

$-1 = 4a$

$a = -\dfrac{1}{4}$

Paraabelin yhtälö on $x - 1 = -\frac{1}{4}(y - 2)^2$ eli $x = -\frac{1}{4}y^2 + y$.

415. **a)** Johtosuoralla olevien pisteiden x-koordinaatit ovat samat, joten johtosuoran yhtälö on $x = 1$ eli $x - 1 = 0$.
Paraabelin piste (x, y) on yhtä kaukana polttopisteestä ja johtosuorasta.

Etäisyys polttopisteestä on $\sqrt{(x-2)^2 + (y-(-1))^2}$.
Etäisyys johtosuorasta:
$$\frac{|1\cdot x + 0\cdot y - 1|}{\sqrt{1^2+0^2}} = |x-1|$$

Saadaan yhtälö:
$\sqrt{(x-2)^2 + (y-(-1))^2} = |x-1|$, josta $x = \frac{1}{2}y^2 + y + 2$.

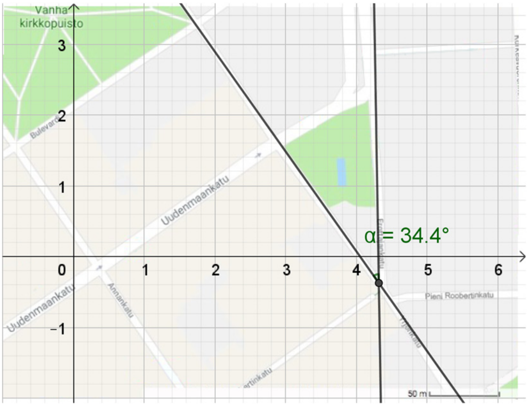
b) Koska johtosuora on y-akselin suuntainen, akseli on x-akselin suuntainen. Akseli kulkee polttopisteen $(2, -1)$ kautta.
Paraabelin akseli on $y = -1$.

c) Paraabeli leikkaa x-akselin pisteessä, jossa $y = 0$:
$x = \frac{1}{2}\cdot 0^2 + 0 + 2 = 2$, josta $x = 2$ ja leikkauspiste $(2, 0)$.

Paraabeli leikkaa y-akselin pisteessä, jossa $x = 0$:
$0 = \frac{1}{2}y^2 + y + 2$.

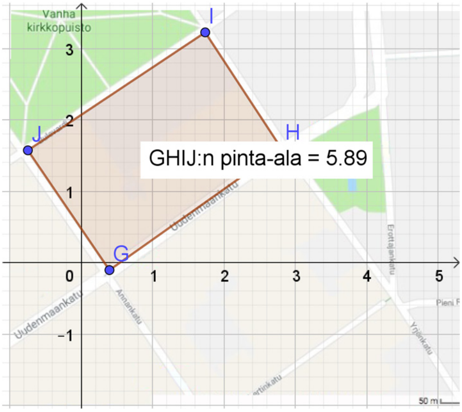
Yhtälöllä $\frac{1}{2}y^2 + y + 2 = 0$ ei ole ratkaisua, joten paraabeli ei leikkaa y-akselia.

416. **a)** Piirretään Erottajan ja Yrjönkadun suuntaiset suorat ja mitataan niiden välinen kulma.



Kulma on noin 34°.

b) Asetetaan kuva siten, että koordinaatiston yhden ruudun sivun pituus on 50 metriä kartalla.



Ohjelmalla saadaan pinta-alaksi 5,89 pinta-alayksikköä.
Yhden ruudun sivun pituus on 50 m, joten yhtä pinta-alayksikköä kartalla vastaa 50 m · 50 m = 2500 m^2 luonnossa.

Korttelin pinta-ala on 5,89 · 2500 m^2 = 14725 m^2.
Yksi aari on 100 m^2, joten korttelin pinta-ala on n. 150 aaria.

Luvun 4 vahvistavat ja syventävät tehtävät

VAHVISTAVAT TEHTÄVÄT

417. A–VI, B–V, C–III, D–VIII, E–II, F–VII, G–IV, H–I

418. **a)** Suoran kulmakerroin on $\frac{4-0}{3-0}=\frac{4}{3}$.

Suoran yhtälö on

$$y-0=\frac{4}{3}(x-0)$$
$$y=\frac{4}{3}x.$$

b) Ympyrän säde on keskipisteen (0, 0) ja pisteen (3, 4) etäisyys.

$$r=\sqrt{(3-0)^2+(4-0)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$$

Ympyrän yhtälö on

$$(x-0)^2+(y-0)^2=5^2$$
$$x^2+y^2=25.$$

c) Paraabelin yhtälö on muotoa $y-0=a(x-0)^2$, eli $y=ax^2$.
Piste (3, 4) toteuttaa paraabelin yhtälön, joten

$$4=a\cdot 3^2$$
$$a=\frac{4}{9}.$$

Paraabelin yhtälö on $y=\frac{4}{9}x^2$.

419. A–III, B–III, C–III, D–II, E–I

420. Suorat eivät leikkaa, kun suorien kulmakertoimet ovat samat ja vakiotermit eri suuret.

$ax + y + 2 = 0 \qquad 3x + y + a = 0$

$y = -ax - 2 \qquad y = -3x - a$

Suorat eivät leikkaa, kun $a = 3$, koska tällöin kulmakertoimet ovat samat, eli -3, ja vakiotermit eri suuret, eli -2 ja -3.

Ratkaistaan suorien leikkauspiste yhtälöparista $\begin{cases} y = -ax - 2 \\ y = -3x - a \end{cases}$.

$-ax - 2 = -3x - a$

$(3 - a)x = 2 - a$

$x = \dfrac{2-a}{3-a}$

Yhtälöllä on ratkaisu, joka on suorien leikkauskohta, kaikilla muilla a:n arvoilla, paitsi arvolla $a = 3$, koska tällöin nimittäjä on 0.

421. **a)** Ympyrän $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 5$ keskipiste on $(3, -1)$ ja säde on $\sqrt{5}$.

Suoran $x - 2y + 10 = 0$ etäisyys ympyrän keskipisteestä on

$$\frac{|1 \cdot 3 - 2 \cdot (-1) + 10|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} \overset{\sqrt{5})}{=} \frac{15}{\sqrt{5}} = \frac{15\sqrt{5}}{5} = 3\sqrt{5}.$$

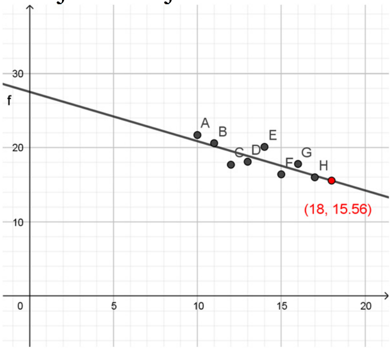
Suoran ja ympyrän etäisyys d on $3\sqrt{5} - \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$.

b) Suora $x + 2y + 4 = 0$ on ympyrän tangentti, jos sen etäisyys ympyrän keskipisteestä on säde.

$$\frac{|1 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 4|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} \overset{\sqrt{5})}{=} \frac{5}{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5}$$

Etäisyys on sama kuin ympyrän säde, joten suora $x + 2y + 4 = 0$ on ympyrän tangentti.

422. **a)** Sovitetaan suora havaintopisteisiin Geogebrassa luomalla ensi pisteistä lista ja tämän jälkeen sovittamalla suora SovitaSuora-komennolla.



Näin saadaan arvioksi heinäkuun 2018 keskilämpötilalle 15,6 astetta. Ennuste poikkeaa mitatusta arvosta 21,1 – 15,6 = 5,5 astetta.

b) Sovitetun suoran yhtälö on $y = -0{,}66x + 27{,}52$. Keskilämpötila siis pienenee keskimäärin 0,7 astetta vuodessa.

423. **a)** Suoran kulmakerroin on $\frac{2-6}{5-(-3)}=\frac{-4}{8}=-\frac{1}{2}$.

Suoran yhtälö on

$$y-2=-\frac{1}{2}(x-5)$$
$$y=-\frac{1}{2}x+\frac{9}{2}.$$

Paraabelin yhtälö on muotoa $x - 3 = a(y - 0)^2$ eli $x = ay^2 + 3$.
Piste $(-1, 2)$ on paraabelilla, josta saadaan yhtälö
$-1 = a \cdot 2^2 + 3$
$4a = -4$
$a = -1$.

Paraabelin yhtälö on siis $x = -y^2 + 3$.

Ympyrän keskipiste on $(6, -1)$. Ympyrän säde on keskipisteen ja kehän pisteen $(5, 1)$ etäisyys.

$$r=\sqrt{(6-5)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$$

Ympyrän yhtälö on

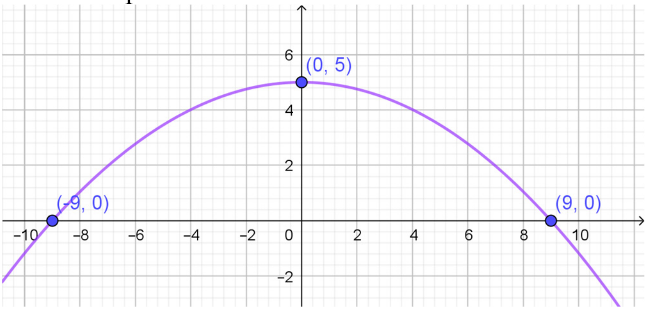
$$(x-6)^2+(y-(-1))^2=(\sqrt{5})^2=(x-6)^2+(y+1)^2=5.$$

b) Määritetään suoran $y=-\frac{1}{2}x+\frac{9}{2}$ eli suoran $x + 2y - 9 = 0$ etäisyys ympyrän keskipisteestä $(6, -1)$.

$$\frac{|1\cdot 6+2\cdot(-1)-9|}{\sqrt{1^2+2^2}} \overset{\sqrt{5})}{=} \frac{5}{\sqrt{5}}=\frac{5\sqrt{5}}{5}=\sqrt{5}$$

Etäisyys on sama kuin ympyrän säde, joten suora on ympyrän tangentti.

424. Asetetaan paraabeli koordinaatistoon.



Paraabelin yhtälö on muotoa $y - 5 = a(x - 0)^2$ eli $y = ax^2 + 5$.
Piste (9, 0) toteuttaa paraabelin yhtälön, joten
$0 = a \cdot 9^2 + 5$
$a = -\dfrac{5}{81}$.

Paraabelin yhtälö on siis $y = -\dfrac{5}{81}x^2 + 5$.

Lasketaan, mikä on paraabelin korkeus kohdassa $x = 2{,}60$.
$y = 4{,}582\ldots$

Koska korkeus on suurempi kuin kuorma-auton korkeus, kuorma-auto mahtuu ajamaan sillan ali omalla kaistallaan.

425. **a)** Ympyrän yhtälö on muotoa $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.
Pisteet (–2, 1), (0, –3) ja (4, –1) toteuttavat ympyrän yhtälön. Saadaan yhtälöryhmä:

$$\begin{cases} (-2)^2+1^2+a\cdot(-2)+b\cdot 1+c=0 \\ 0^2+(-3)^2+a\cdot 0+b\cdot(-3)+c=0 \\ 4^2+(-1)^2+a\cdot 4+b\cdot(-1)+c=0 \end{cases} \text{ eli } \begin{cases} 4+1-2a+b+c=0 \\ 9-3b+c=0 \\ 16+1+4a-b+c=0 \end{cases}$$

jonka ratkaisu on $a = -2$, $b = 0$ ja $c = -9$.

Ympyrän yhtälö on $x^2 + y^2 - 2x - 9 = 0$ eli $(x - 1)^2 + y^2 = 10$.

Ympyrän säde on $\sqrt{10}$, joten ympyrän pinta-ala on $\pi\cdot(\sqrt{10})^2=10\pi$.

b) Pisteen P pisin ja lyhin etäisyys ympyrän kehälle voidaan mitata ympyrän keskipisteen kautta kulkevaa suoraa pitkin.
Ympyrän keskipiste on a-kohdan perusteella (1, 0) ja säde $\sqrt{10}$.
Pisteen (10, 3) etäisyys keskipisteestä on
$\sqrt{(10-1)^2+(3-0)^2}=\sqrt{90}=3\sqrt{10}$.

Pisteen P lyhin etäisyys ympyrälle on $3\sqrt{10}-\sqrt{10}=2\sqrt{10}$ ja pisin etäisyys $3\sqrt{10}+\sqrt{10}=4\sqrt{10}$.

426. Pisteen P koordinaatit ovat $(2, a)$.
Suorat AP ja BP ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Määritetään molempien suorien kulmakertoimet.

AP: $\frac{a-1}{2-0}=\frac{a-1}{2}$

BP: $\frac{a-(-1)}{2-7}=\frac{a+1}{-5}$

Kun suorat ovat kohtisuorassa, niiden kulmakertoimien tulo on -1.

$$\frac{a-1}{2}\cdot\frac{a+1}{-5}=-1$$
$$\frac{(a-1)(a+1)}{-10}=-1 \quad \|\cdot(-10)$$
$$a^2-1=10$$
$$a^2=11$$
$$a=-\sqrt{11} \text{ tai } a=\sqrt{11}$$

Kuvan perusteella piste P on x-akselin alapuolella, joten $P = (2, -\sqrt{11})$.

427. Halkaisijan päätepisteiden kautta kulkeva suora kulkee myös ympyrän keskipisteen kautta.
Määritetään ympyrän keskipiste.

$$x^2 + y^2 - 8x - 4y + 15 = 0$$
$$x^2 - 8x + y^2 - 4y = -15$$
$$x^2 - 8x + 16 + y^2 - 4y + 4 = -15 + 16 + 4$$
$$(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 5$$

Ympyrän keskipiste on (4, 2).

Suora kulkee pisteiden (0, 0) ja (4, 2) kautta. Suoran kulmakerroin on $\frac{2-0}{4-0} = \frac{1}{2}$.

Suoran yhtälö on siis $y = \frac{1}{2}x$.

Määritetään suoran ja ympyrän leikkauspisteet yhtälöparista

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 8x - 4y + 15 = 0 \\ y = \frac{1}{2}x \end{cases}.$$

$$x^2 + (\tfrac{1}{2}x)^2 - 8x - 4\cdot\tfrac{1}{2}x + 15 = 0$$
$$\frac{5}{4}x^2 - 10x + 15 = 0 \quad \| \cdot 4$$
$$5x^2 - 40x + 60 = 0 \quad \| : 5$$
$$x^2 - 8x + 12 = 0$$
$$\begin{aligned} x &= \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4\cdot 1\cdot 12}}{2\cdot 1} \\ &= \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{2} \\ &= \frac{8 \pm \sqrt{16}}{2} \\ &= \frac{8 \pm 4}{2} \\ x &= 6 \text{ tai } x = 2 \end{aligned}$$

Kun $x = 6$, niin $y = \frac{1}{2}\cdot 6 = 3$ ja kun $x = 2$, niin $y = 1$.

Pisteet P ja Q ovat (2, 1) ja (6, 3).

428. Määritetään leikkauspisteet ratkaisemalla yhtälöpari $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$.

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x^2 + (\tfrac{1}{2}x)^2 &= 5 \\ \tfrac{5}{4}x^2 &= 5 \quad \| \cdot 4 \\ 5x^2 &= 20 \quad \| : 5 \\ x^2 &= 4 \\ x &= 2 \text{ tai } x = -2 \end{aligned}$$

Kun $x = 2$, niin $y = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$ ja kun $x = –2$, niin $y = –1$.

Leikkauspisteet ovat (2, 1) ja (–2, –1).

429. **a)** Pisteen (x, y) etäisyys pisteestä $(1, 2)$ on 3, eli

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}=3$$
$$(x-1)^2+(y-2)^2=9.$$

Käyrä on ympyrä $(x-1)^2+(y-2)^2=9$.

b) Pisteen (x, y) etäisyys suorasta $x = 2$ eli $x - 2 = 0$ on

$$\frac{|x-2|}{\sqrt{1^2+0^2}}.$$

Pisteen etäisyys origosta on $\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}$.
Etäisyydet ovat yhtä suuret, joten saadaan yhtälö:

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=\frac{|x-2|}{\sqrt{1^2+0^2}}, \text{ josta } \sqrt{x^2+y^2}=|x-2|.$$

Yhtälön molemmat puolet ovat ei-negatiivisia, joten yhtälö voidaan korottaa puolittain neliöön.

$$\begin{aligned}(\sqrt{x^2+y^2})^2 &= |x-2|^2\\ x^2+y^2 &= (x-2)^2\\ x^2+y^2 &= x^2-4x+4\\ 4x &= -y^2+4\\ x &= -\frac{1}{4}y^2+1\end{aligned}$$

Käyrä on paraabeli $x=-\frac{1}{4}y^2+1$.

430. Kirjoitetaan ympyrän yhtälö keskipistemuotoon.

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 6 = 0$$
$$x^2 - 2x + y^2 - 4y = -6$$
$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = -6 + 1 + 4$$
$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = -1$$

Kahden neliön summa ei voi olla negatiivinen. Mikään lukupari (x, y) ei toteuta yhtälöä.

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = 0$$
$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = -5 + 1 + 4$$
$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 0$$

Yhtälö esittää pistettä (1, 2). Lukupareja on yksi.

431. Jos lakipisteen koordinaatit ovat (0, 0), niin antennin reunoilla on koordinaatit (50, 20) ja (–50, 20). Nämä pisteet toteuttavat paraabelin yhtälön $x^2 = 4ay$:

$$50^2 = 4a \cdot 20$$
$$2500 = 80a$$
$$a = \frac{2500}{80} = \frac{125}{4} = 31,25.$$

Paraabelin polttopiste $(0, a)$ on nyt $(0, \frac{125}{4})$. Antennin vastaanotin tulee asettaa etäisyydelle 31 cm lakipisteestä.

432. $2x - 5y + 10 = 0$

$$-5y = -2x - 10 \quad || : (-5)$$
$$y = \frac{2}{5}x + 2$$

$$y = \frac{2}{5}x - 1$$

Molempien suorien kulmakerroin on $\frac{2}{5}$, joten ne ovat yhdensuuntaiset.

Suoralla $y = \frac{2}{5}x - 1$ on piste (0, –1). Pisteen etäisyys suorasta on lyhin, eli kohtisuorasti mitattu etäisyys. Tämä on samalla myös yhdensuuntaisten suorien välinen etäisyys.

Lasketaan pisteen etäisyys suorasta $2x - 5y + 10 = 0$.

$$\frac{|2 \cdot 0 - 5 \cdot (-1) + 10|}{\sqrt{2^2 + (-5)^2}} = \frac{15}{\sqrt{29}}$$

Suorien etäisyys on $\frac{15}{\sqrt{29}}$.

433. $f(0) = 2^0 = 1$, $f(1) = 2^1 = 2$ ja $f(2) = 2^2 = 4$.
Toisen asteen polynomifunktion lauseke on $g(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.
Tehtävänannon tiedoista saadaan yhtälöryhmä
$g(0) = c = 1$
$g(1) = a + b + c = 2$
$g(2) = 4a + 2b + c = 4$.

Toisesta yhtälöstä saadaan $b = -a - c + 2 = -a - 1 + 2 = -a + 1$.

Kolmannesta yhtälöstä saadaan

$$\begin{aligned} 4a + 2(-a + 1) + 1 &= 4 \\ 2a &= 1 \\ a &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Kun $a = \frac{1}{2}$, niin $b = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$.

Toisen asteen polynomi on siis $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$.

434. Etäisyys origokeskeisestä yksikköympyrästä ympyrästä saadaan vähentämällä säde pisteen etäisyydestä keskipisteestä ja ottamalla tuloksesta itseisarvo.

Pisteen (x, y) etäisyys origosta on $\sqrt{x^2+y^2}$.

Pisteen etäisyys yksikköympyrästä on $\left|\sqrt{x^2+y^2}-1\right|$.

Pisteen etäisyys x-akselista on pisteen y-koordinaatin itseisarvo $|y|$.

Yhtä suurista etäisyyksistä saadaan yhtälö $\left|\sqrt{x^2+y^2}-1\right|=|y|$.

Yhtälön molemmat puolet ovat ei-negatiivisia, joten yhtälö voidaan korottaa puolittain neliöön.

$$
\begin{aligned}
\left|\sqrt{x^2+y^2}-1\right|^2 &= |y|^2 \\
(\sqrt{x^2+y^2}-1)^2 &= y^2 \\
x^2+y^2-2\sqrt{x^2+y^2}+1 &= y^2 \\
-2\sqrt{x^2+y^2} &= -x^2-1 \quad \|:(-2) \\
\sqrt{x^2+y^2} &= \frac{1}{2}(x^2+1) \\
x^2+y^2 &= \frac{1}{4}(x^2+1)^2 \\
x^2+y^2 &= \frac{1}{4}(x^4+2x^2+1) \\
x^2+y^2 &= \frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4} \\
y^2 &= \frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4} \\
y^2 &= \frac{1}{4}(x^4-2x+1) \\
y^2 &= \frac{1}{4}(x^2-1)^2 \\
y = \frac{1}{2}(x^2-1) &\text{ tai } y=-\frac{1}{2}(x^2-1) \\
y = \frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2} & \qquad y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Käyrien $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}$ ja $y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$ yhtälöt ovat paraabelien yhtälöitä.

435. Ympyrän $(x-3)^2 + y^2 = 1$ keskipiste on (3, 0) ja säde 1. Pisteen (x, y) etäisyys ympyrästä saadaan vähentämällä säde pisteen etäisyydestä keskipisteestä ja ottamalla tuloksesta itseisarvo.

Pisteen (x, y) etäisyys ympyrän keskipisteestä (3, 0) on
$\sqrt{(x-3)^2+(y-0)^2} = \sqrt{(x-3)^2+y^2}$.

Etäisyys ympyrän kehästä on $\left|\sqrt{(x-3)^2+y^2}-1\right|$.

Pisteen etäisyys y-akselista on pisteen x-koordinaatin itseisarvo $|x|$.

$\left|\sqrt{(x-3)^2+y^2}-1\right| = |x|$, josta $x = \frac{1}{8}y^2+1$.

Pisteiden joukko on paraabeli $x = \frac{1}{8}y^2+1$.

436. Paraabeli sivuaa y-akselia, joten y-akselilla ja paraabelilla on tarkalleen yksi leikkauspiste.
Paraabelin ja y-akselin ($x = 0$) leikkauspiste voidaan ratkaista yhtälöstä $ay^2 + 3y + a = 0$.
Tällä yhtälöllä on yksi ratkaisu, kun diskriminantti on 0.
Diskriminantti $D = 3^2 - 4 \cdot a \cdot a = 9 - 4a^2$, joten

$$9 - 4a^2 = 0$$
$$a^2 = \frac{9}{4}$$
$$a = \frac{3}{2} \text{ tai } a = -\frac{3}{2}.$$

Paraabelin yhtälö on $x = \frac{3}{2}y^2 + 3y + \frac{3}{2}$ tai $x = -\frac{3}{2}y^2 + 3y - \frac{3}{2}$.

Ratkaistaan y-akselin leikkauspiste kummastakin yhtälöstä erikseen.

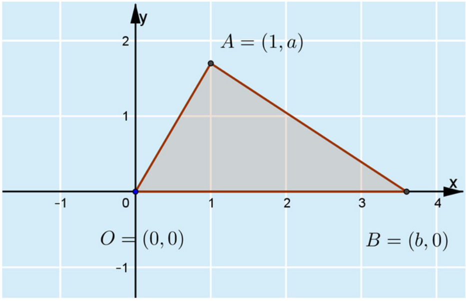
$$\frac{3}{2}y^2 + 3y + \frac{3}{2} = 0 \quad \| \cdot 2$$
$$3y^2 + 6y + 3 = 0 \quad \| : 3$$
$$y^2 + 2y + 1 = 0$$
$$y = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{2} = -1$$

Kun $a = \frac{3}{2}$, y-akselin sivuamispiste on $(0, -1)$.

$$-\frac{3}{2}y^2 + 3y - \frac{3}{2} = 0 \quad \| \cdot 2$$
$$-3y^2 + 6y - 3 = 0 \quad \| : (-3)$$
$$y^2 - 2y + 1 = 0$$
$$y = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{2} = 1$$

Kun $a = -\frac{3}{2}$, y-akselin sivuamispiste on $(0, 1)$.

437. Piirretään kuva.



Sivu OB on x-akselilla, koska pisteiden O ja B y-koordinaatit ovat 0. Kulma O ei voi olla suora kulma, koska tällöin sivun OA tulisi olla y-akselilla. Pisteen A x-koordinaatti on 1, joten se ei voi olla y-akselilla.

Suora kulma voi olla kulma A tai kulma B.

Jos kulma B on suora kulma, tulee sivun AB olla y-akselin suuntainen, eli pisteen B x-koordinaatin tulee olla 1, eli $b = 1$.
Piste B on siis tällöin (1, 0).
Kolmion OAB kannan pituus on 1 ja korkeus on pisteen A y-koordinaatti a. Kolmion pinta-ala on $\frac{1}{2}\cdot 1\cdot a = \frac{a}{2}$.

Pinta-alan tulee olla $3b = 3$, joten saadaan yhtälö $\frac{a}{2} = 3$ ja edelleen $a = 6$.

Jos kulma A on suora, tulee sivujen OA ja AB suuntaisten suorien kulmakertoimien tulon olla -1.

$$k_{OA} = \frac{a-0}{1-0} = a \quad \text{ja} \quad k_{AB} = \frac{0-a}{b-1} = \frac{a}{1-b}$$

$$\begin{aligned} a\cdot\frac{a}{1-b} &= -1 \ \| \cdot(1-b) \neq 0, \text{ eli } b \neq 1 \\ a^2 &= -1+b \\ b &= a^2+1 \end{aligned}$$

Kolmion kannan pituus on pisteen B x-koordinaatti, eli b ja korkeus pisteen A y-koordinaatti, eli a.

Kolmion pinta-ala on $\frac{1}{2}\cdot b\cdot a=\frac{1}{2}\cdot(a^2+1)\cdot a$.

Pinta-alan tulee olla $3b$.

Nyt $\frac{1}{2}\cdot(a^2+1)\cdot a=3b$ eli $\frac{(a^2+1)a}{2}=3(a^2+1)$, josta $a = 6$.

Kun $a = 6$, niin $b = 6^2 + 1 = 37$.

Kolmio on suorakulmainen ja pinta-ala on $3b$, kun $a = 6$ ja $b = 1$ tai $a = 6$ ja $b = 37$.

438. Paraabelit $y = x^2 + ax - 2a$ kulkevat saman pisteen kautta kaikilla a:n arvoilla. Valitaan $a = 0$ ja $a = 1$ ja lasketaan näin saatujen käyrien leikkauspiste.

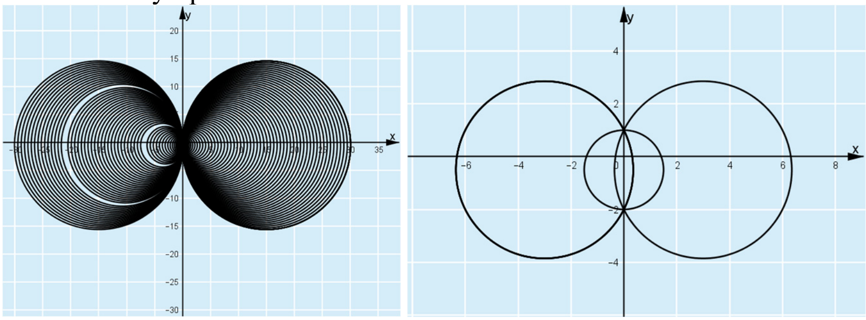
Yhtälöparin $\begin{cases} y=x^2 \\ y=x^2+x-2 \end{cases}$ ratkaisu on $\begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$.

Osoitetaan vielä, että piste (2, 4) toteuttaa kaikkien paraabelien $y = x^2 + ax - 2a$ yhtälön:
$2^2 + 2a - 2a = 4$.

Jokaisella käyrällä $y = x^2 + ax - 2a$ on y-koordinaatti 4, kun $x = 2$.
Paraabelit $y = x^2 + ax - 2a$ kulkevat siis aina pisteen (2, 4) kautta.

Pisteen etäisyys origosta on $\sqrt{(2-0)^2+(4-0)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$.

439. Piirretään käyräparvi eri vakion a:n arvoilla.



Oikeanpuoleisessa kuvassa ovat käyrät arvoilla $a = -1$, $a = 0$ ja $a = 1$. Kaikki käyrät näyttäisivät kulkevan pisteiden (0, 1) ja (0, –2) kautta. Käyrät näyttävät olevan ympyröitä.

Kirjoitetaan yhtälö $x^2 + y^2 + 6ax + y - 2 = 0$ muotoon $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, josta nähdään mahdollinen ympyrän keskipiste ja säde.

$$x^2 + y^2 + 6ax + y - 2 = 0$$
$$x^2 + 6ax + y^2 + y = 2$$
$$x^2 + 2 \cdot x \cdot 3a + (3a)^2 + y^2 + 2 \cdot y \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2 + (3a)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$(x + 3a)^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = \frac{5}{4} + 9a^2$$

Koska $\frac{5}{4} + 9a^2 > 0$ kaikilla a:n arvoilla, niin käyrä

$(x + 3a)^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = \frac{5}{4} + 9a^2 = (x - (-3a))^2 + (y - (-\frac{1}{2}))^2 = \frac{5}{4} + 9a^2$

on ympyrä kaikilla a:n arvoilla.

Ympyrän keskipiste on $(-3a, -\frac{1}{2})$, eli ympyrän keskipiste on suoralla

$y = -\frac{1}{2}$.

Käyrän yhtälössä vakio a ei vaikuta käyrän pisteiden koordinaatteihin, kun $x = 0$. Tällöin kun $x = 0$, niin $y^2 + y - 2 = 0$, jonka ratkaisuna on $y = 1$ ja $y = -2$.

Kaikki käyrät kulkevat siis pisteiden (0, 1) ja (0, –2) kautta.

440. Olkoon kannan päätepisteiden y-koordinaatti a. Koska kannan päätepisteet ovat ympyrällä $x^2 + y^2 = 6$, saadaan kannan päätepisteiden x-koordinaatit ratkaisemalla yhtälöstä x.

$$x^2 + y^2 = 6$$
$$x^2 = 6 - y^2$$
$$x = \pm\sqrt{6 - y^2}$$

Kannan päätepisteiden x-koordinaatit ovat $\sqrt{6-a^2}$ ja $-\sqrt{6-a^2}$.

Kannan pituus on $\left|\sqrt{6-a^2} - (-\sqrt{6-a^2})\right| = \left|2\sqrt{6-a^2}\right| = 2\sqrt{6-a^2}$.

Kolmion korkeus on $|a|$.

Kolmion pinta-ala on

$$\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{6-a^2} \cdot |a| = |a|\sqrt{6-a^2}.$$

Pinta-alan tulee olla 3, joten saadaan yhtälö $|a|\sqrt{6-a^2} = 3$ ja sen ratkaisuna $a = \sqrt{3}$ tai $a = -\sqrt{3}$.

Kannan päätepisteiden x-koordinaatit ovat $\sqrt{6-(\sqrt{3})^2} = \sqrt{3}$ ja $-\sqrt{6-(\sqrt{3})^2} = -\sqrt{3}$.

Kannan päätepisteet ovat $(\sqrt{3}, \sqrt{3})$ ja $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ tai $(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ ja $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$.

441. Ratkaistaan yhtälöpari $\begin{cases} x^2+y^2-8x+11=0 \\ x^2+y^2+4x-6y-7=0 \end{cases}$.

$$
\begin{array}{r}
\begin{cases} x^2+y^2-8x \qquad +11=0 \\ x^2+y^2+4x-6y-7=0 \end{cases} \quad - \\
\hline
-12x+6y+18=0 \\
6y \quad =12x-18 \quad \|:6 \\
y \quad =2x-3
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
x^2+(2x-3)^2-8x+11&=0 \\
x^2+4x^2-12x+9-8x+11&=0 \\
5x^2-20x+20&=0 \quad \|:5 \\
x^2-4x+4&=0 \\
(x-2)^2&=0 \\
x-2&=0 \\
x&=2
\end{aligned}
$$

$$y=2x-3=2\cdot 2-3=1$$

Sivuamispiste on (2, 1).

Kirjoitetaan ympyrän $x^2+y^2-8x+11=0$ yhtälö keskipistemuotoon.

$$
\begin{aligned}
x^2-8x+16+y^2&=-11+16 \\
(x-4)^2+y^2&=5
\end{aligned}
$$

Ympyrän keskipiste on (4, 0) ja säde on $\sqrt{5}$.
Tangentin sivuamispiste on (2, 1), joten tangentin yhtälö on

$$
\begin{aligned}
y-1&=k(x-2) \\
y&=kx-2k+1
\end{aligned}
$$

$kx-y-2k+1=0$,
missä k on tangentin kulmakerroin.

Tangentin etäisyys ympyrän keskipisteestä (4, 0) on säde.
Saadaan yhtälö

$$\frac{|k\cdot 4-1\cdot 0-2k+1|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$$

$$\frac{|2k+1|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{5} \quad \| \cdot\sqrt{k^2+1}\neq 0$$

$$|2k+1|=\sqrt{5(k^2+1)}$$

Molemmat puolet ovat ei-negatiivisia, joten yhtälö voidaan korottaa puolittain neliöön.

$$|2k+1|^2=(\sqrt{5(k^2+1)})^2$$

$$4k^2+4k+1=5k^2+5$$

$$-k^2+4k-4=0$$

$$k=\frac{-4\pm\sqrt{16-4\cdot(-1)\cdot(-4)}}{2\cdot(-1)}=\frac{-4\pm 0}{-2}=2$$

Tangentin kulmakerroin on 2, joten tangentin yhtälö on
$y = 2x - 4 + 1$
$y = 2x - 3$.

SYVENTÄVÄT TEHTÄVÄT

442. Ratkaistaan suoran $y = ax + 1$ ja käyrän $y = x^3 - 2x + 1$ leikkauspisteet yhtälöparista $\begin{cases} y = ax+1 \\ y = x^3 - 2x + 1 \end{cases}$.

$$\begin{cases} y = ax+1 \\ y = x^3 - 2x + 1 \end{cases}$$

$$x^3 - 2x + 1 = ax + 1$$

$$x^3 - 2x - ax = 0$$

$$x(x^2 - 2 - a) = 0$$

$$x = 0 \text{ tai } x^2 - 2 - a = 0$$

$$x^2 = 2 + a$$

Leikkauspisteitä on aina vähintään yksi, $x = 0$. Tällöin $y = 1$, eli leikkauspiste on (0, 1).

Leikkauspisteitä on täsmälleen yksi, kun yhtälöllä $x^2 = 2 + a$ ei ole ratkaisuja tai yhtälön ratkaisu on 0.
Tämä toteutuu, kun $2 + a \leq 0$, eli $a \leq -2$.

443. **a)** Tangentin yhtälö on

$$y - 3 = k(x - 1)$$
$$y = kx - k + 3$$
$$kx - y - k + 3 = 0,$$

missä k on tangentin kulmakerroin.

Kirjoitetaan ympyrän $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$ yhtälö keskipistemuotoon.

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$$
$$x^2 + 4x + y^2 - 2y = -1$$
$$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = -1 + 4 + 1$$
$$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$$

Ympyrän keskipiste on (–2, 1) ja säde 2.

Piste (1, 3) on ympyrän ulkopuolella, koska $1^2 + 3^2 + 4 - 6 + 1 = 9 > 2$.

Tangentin $kx - y - k + 3 = 0$ etäisyys ympyrän keskipisteestä (–2, 1) on ympyrän säde.

$$\frac{|k\cdot(-2) - 1\cdot 1 - k + 3|}{\sqrt{k^2 + (-1)^2}} = 2$$
$$\frac{|-3k + 2|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 2 \quad \| \cdot \sqrt{k^2 + 1}$$
$$|-3k + 2| = 2\sqrt{k^2 + 1}$$

Yhtälön molemmat puolet ovat ei-negatiivisia, joten yhtälö voidaan korottaa puolittain neliöön.

$$|-3k + 2|^2 = (2\sqrt{k^2 + 1})^2$$
$$9k^2 - 12k + 4 = 4(k^2 + 1)$$
$$5k^2 - 12k = 0$$
$$k(5k - 12) = 0$$
$$k = 0 \text{ tai } 5k - 12 = 0$$
$$k = \frac{12}{5}$$

Tangenttien yhtälöt ovat $y = 3$ ja $y = \frac{12}{5}x + \frac{3}{5}$, eli $12x - 5y + 3 = 0$

b) Suoran $3x - 4y + 1 = 0$, eli $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$ kulmakerroin on $\frac{3}{4}$. Tangentin yhtälö on $y = \frac{3}{4}x + b$, eli $3x - 4y + 4b = 0$.

Kirjoitetaan ympyrän $x^2 + y^2 - 8x - 4y - 5 = 0$ yhtälö keskipistemuotoon.

$$x^2 + y^2 - 8x - 4y - 5 = 0$$
$$x^2 - 8x + y^2 - 4y = 5$$
$$x^2 - 8x + 16 + y^2 - 4y + 4 = 5 + 16 + 4$$
$$(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 25$$

Ympyrän keskipiste on (4, 2) ja säde 5.

Tangentin $3x - 4y + 4b = 0$ etäisyys ympyrän keskipisteestä (4, 2) on säde 5.

$$\frac{|3 \cdot 4 - 4 \cdot 2 + 4b|}{\sqrt{3^3 + (-4)^2}} = 5$$
$$\frac{|4 + 4b|}{5} = 5 \quad \| \cdot 5$$
$$|4 + 4b| = 25$$

$4 + 4b = 25$ tai $4 + 4b = -25$

$4b = 21$ $\quad\quad 4b = -29$

$b = \frac{21}{4}$ $\quad\quad b = -\frac{29}{4}$

Tangenttien yhtälöt ovat $y = \frac{3}{4}x + \frac{21}{4}$, eli $3x - 4y + 21$ ja $y = \frac{3}{4}x - \frac{29}{4}$, eli $3x - 4y - 29 = 0$.

444. Määritetään piste P, eli suoran $y = ax$ ja paraabelin $y = x^2$ leikkauspiste.

$$\begin{aligned} ax &= x^2 \\ ax - x^2 &= 0 \\ x(a - x) &= 0 \\ x &= 0 \text{ tai } x = a \end{aligned}$$

Kun $x = a$, niin $y = a^2$. Piste P on (a, a^2).

Määritetään piste Q, eli suoran $y = ax$ ja paraabelin $y = ax^2$ leikkauspiste.

$$\begin{aligned} ax &= ax^2 \\ ax - ax^2 &= 0 \\ ax(1 - x) &= 0 \\ ax &= 0 \text{ tai } 1 - x = 0 \\ x &= 0 \qquad\quad x = 1 \end{aligned}$$

Kun $x = 1$, niin $y = a$. Piste Q on $(1, a)$.

$OP{:}PQ = 1{:}1$, eli $OQ = 2OP$.

$$\begin{aligned} \sqrt{(1-0)^2 + (a-0)^2} &= 2\sqrt{(a-0)^2 + (a^2-0)^2} \\ \sqrt{1+a^2} &= 2\sqrt{a^2+a^4} \end{aligned}$$

Molemmat puolet ovat ei-negatiivisia, joten yhtälö voidaan korottaa puolittain neliöön.

$$\begin{aligned} (\sqrt{1+a^2})^2 &= (2\sqrt{a^2+a^4})^2 \\ 1+a^2 &= 4(a^2+a^4) \\ 1+a^2-4a^2-4a^4 &= 0 \\ -4a^4-3a^2+1 &= 0 \end{aligned}$$

Tehdään sijoitus $a^2 = t$.

$$-4t^2 - 3t + 1 = 0$$

$$t = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4\cdot(-4)\cdot 1}}{2\cdot(-4)} = \frac{3 \pm 5}{-8}$$

$$t = -1 < 0 \text{ tai } t = \frac{1}{4} > 0$$

Kun $t = \frac{1}{4}$, niin $a^2 = \frac{1}{4}$ ja edelleen $a = \frac{1}{2}$ tai $a = -\frac{1}{2}$.

Luvun a tulee olla positiivinen, joten $a = \frac{1}{2}$.

445. Ympyrä sivuaa suoraa $3x - 4y = 0$ pisteessä (8, 6), eli suora on ympyrän tangentti. Tähän pisteeseen piirretty säteen suuntainen suora on kohtisuorassa tangenttia vastaan. Tangentin kulmakerroin on $\frac{3}{4}$, joten sen normaalin kulmakerroin on $-\frac{4}{3}$.

Normaalin yhtälö on $y-6=-\frac{4}{3}(x-8)$ eli $y=-\frac{4}{3}x+\frac{50}{3}$.

Ympyrä sivuaa myös x-akselia, joten sen keskipisteen etäisyys x-akselista on r, eli keskipisteen y-koordinaatti on r.
Saadaan

$$-\frac{4}{3}x+\frac{50}{3}=r$$
$$x=-\frac{3}{4}r+\frac{25}{2}.$$

Ympyrän keskipisteen koordinaatit ovat $\left(-\frac{3}{4}r+\frac{25}{2},\ r\right)$.

Ympyrän keskipisteen etäisyys tangentista on säde r, ja tästä tiedosta saadaan yhtälö $\frac{|3\cdot(-\frac{3}{4}r+\frac{25}{2})-4r|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=r$ ja sen ratkaisuna r:n arvo.

$$\frac{|3\cdot(-\frac{3}{4}r+\frac{25}{2})-4r|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=r$$
$$\frac{\left|-\frac{25}{4}r+\frac{75}{2}\right|}{5}=r$$
$$\left|-\frac{25}{4}r+\frac{75}{2}\right|=5r$$

$$-\frac{25}{4}r+\frac{75}{2}=5r \quad \text{tai} \quad -\frac{25}{4}r+\frac{75}{2}=-5r$$
$$-45r=-150 \qquad\qquad -5r=-150$$
$$r=\frac{10}{3} \qquad\qquad r=30$$

Kun $r = 30$, ympyrä sivuaa negatiivista x-akselia.

Ympyrän keskipiste on $\left(-\frac{3}{4}\cdot\frac{10}{3}+\frac{25}{2},\ \frac{10}{3}\right)=(10,\ \frac{10}{3})$ ja säde $\frac{10}{3}$.

446. Olkoon kolmannen kärjen B koordinaatit (a, a^2).

Sivun OB keskipiste on $\left(\frac{0+a}{2}, \frac{0+a^2}{2}\right)=\left(\frac{a}{2}, \frac{a^2}{2}\right)$.

Keskipisteen x-koordinaatti on $x=\frac{a}{2}$ ja y-koordinaatti

$y=\frac{a^2}{2}=2\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2=2x^2$, joten se piirtää käyrän $y = 2x^2$.

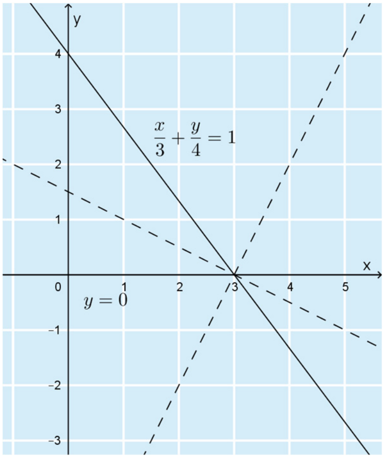
Sivun AB keskipiste on $\left(\frac{2+a}{2}, \frac{0+a^2}{2}\right)=\left(\frac{a+2}{2}, \frac{a^2}{2}\right)$. Jos sivun AB

keskipiste on x, eli $\frac{a+2}{2}=x$, niin $a=2x-2$. Tällöin y-koordinaatti on

$\frac{a^2}{2}=\frac{(2x-2)^2}{2}=\frac{4(x-1)^2}{2}=2(x-1)^2$.

Keskipiste piirtää käyrän $y = 2(x - 1)^2$.

447. Piirretään tilanteesta kuva.



Kulmanpuolittajan jokainen piste on yhtä etäällä kulman kyljistä. Olkoon kulmanpuolittajalla oleva piste (x, y). Pisteen etäisyys x-akselista on $|y|$ ja suorasta $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$ eli suorasta $4x + 3y - 12 = 0$ on $\frac{|4x+3y-12|}{\sqrt{4^2+3^2}}$.

Yhtä suurista etäisyyksistä saadaan yhtälö:

$$\frac{|4x+3y-12|}{\sqrt{4^2+3^2}}=|y|$$

$$|4x+3y-12|=5|y|$$

$$4x+3y-12=5y \quad \text{tai} \quad 4x+3y-12=-5y$$

$$y=2x-6 \qquad\qquad y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}.$$

Kysytty kulmanpuolittaja puolittaa x-akselin ja suoran välisen terävän kulman, joten sen kulmakertoimelle k on voimassa $|k| < 1$. Nyt $k=-\frac{1}{2}$ täyttää tämän ehdon.

Kysytty kulmanpuolittajan yhtälö on $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ eli $x + 2y - 3 = 0$.

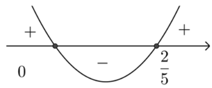
448. Täydennetään ympyrän yhtälö keskipistemuotoon.

$$x^2 + y^2 + 2ax + 4ay + 2y + 6a + 1 = 0$$
$$x^2 + 2ax + y^2 + (4a + 2)y = -6a - 1$$
$$x^2 + 2ax + a^2 + y^2 + 2(2a + 1)y + (2a + 1)^2 = -6a - 1 + a^2 + (2a + 1)^2$$
$$(x + a)^2 + (y + (2a + 1))^2 = -6a - 1 + a^2 + 4a^2 + 4a + 1$$
$$(x + a)^2 + (y + (2a + 1))^2 = 5a^2 - 2a$$

Yhtälö esittää ympyrää, kun $5a^2 - 2a > 0$.

Ratkaistaan epäyhtälö funktion nollakohtien ja kuvaajan muodon perusteella:

$5a^2 - 2a = 0$
$a(5a - 2) = 0$
$a = 0$ tai $a = \frac{2}{5}$.



$5a^2 - 2a > 0$, kun $a < 0$ tai $a > \frac{2}{5}$.

Yhtälö siis esittää ympyrää, kun $a < 0$ tai $a > \frac{2}{5}$.

Ympyröiden keskipisteet ovat $(-a, -2a - 1)$.
Kun merkitään $x = -a$, niin $y = 2x - 1$.
Kun $a < 0$, niin $-a > 0$, eli $x > 0$.
Kun $a > \frac{2}{5}$, niin $-a < -\frac{2}{5}$, eli $x < -\frac{2}{5}$.

Keskipisteet ovat suoralla $y = 2x - 1$, väleillä $x > 0$ ja $x < -\frac{2}{5}$.

Keskipisteet ovat siis suoralla $y = 2x - 1$, josta on poistettu väliltä $[-\frac{2}{5}, 0]$ jana.

449. Ympyrä sivuaa x-akselia, joten sen keskipisteen etäisyys x-akselista on ympyrän säde r, joten keskipisteen y-koordinaatti on r.

Ympyrän keskipiste on suoralla $y = \frac{1}{2}x$, eli $x = 2y$. Keskipisteen koordinaatit ovat $(2r, r)$.

Ympyrä sivuaa suoraa $4x + 3y - 24 = 0$, joten keskipisteen etäisyys suorasta on säde.

$$\frac{|4 \cdot 2r + 3r - 24|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = r$$

$$|11r - 24| = 5r$$

$$11r - 24 = 5r \quad \text{tai} \quad 11r - 24 = -5r$$

$$6r = 24 \qquad\qquad 16r = 24$$

$$r = 4 \qquad\qquad r = \frac{3}{2}$$

Kun ympyrän säde on 4, keskipiste on $(8, 4)$ ja yhtälö on $(x - 8)^2 + (y - 4)^2 = 16$ eli $x^2 + y^2 - 16x - 8y + 64 = 0$.

Kun ympyrän säde on $\frac{3}{2}$, keskipiste on $(3, \frac{3}{2})$ ja yhtälö

$(x-3)^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}$ eli $x^2 + y^2 - 6x - 3y + 9 = 0$.

450. Olkoon kärki $O = (0, 0)$ ja kolmion kaksi muuta kärkeä $A = (a, a^2)$ ja $B = (b, b^2)$, $a \neq 0$ ja $b \neq 0$.
Sivujen OA ja OB suuntaisten suorien tulee olla kohtisuorassa toisiaan vastaan, eli kulmakertoimien tulon tulee olla -1.

$k_{OA} = \dfrac{a^2}{a} = a$ ja $k_{OB} = \dfrac{b^2}{b} = b$.

$ab = -1$, eli $b = -\dfrac{1}{a}$

Kolmion hypotenuusa on suoralla AB.

Suoran AB kulmakerroin on $\dfrac{b^2 - a^2}{b - a} = \dfrac{(b-a)(b+a)}{b-a} = b + a$.

Suoran AB yhtälö on

$$
\begin{aligned}
y - a^2 &= (b+a)(x-a) \\
y &= (b+a)x - (b+a)a + a^2 \\
y &= (b+a)x - ab \\
y &= (-\frac{1}{a} + a)x - (-1) \\
y &= \frac{a^2-1}{a}x + 1
\end{aligned}
$$

Lasketaan suoran ja paraabelin akselin $x = 0$ leikkauspisteet.

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{a^2-1}{a} \cdot 0 + 1 \\
y &= 1
\end{aligned}
$$

Leikkauspiste ei riipu vakion a arvosta eli pisteiden A ja B sijainnista.

Piste on $(0, 1)$.

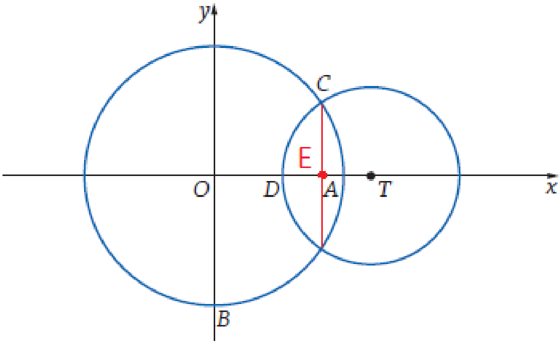
451. Suora $x_0x + y_0y = 1$ on ympyrän $x^2 + y^2 = 1$ tangentti, jos suoran etäisyys ympyrän keskipisteestä (0, 0) on säde 1.

Suoran yhtälö normaalimuodossa on $x_0x + y_0y - 1 = 0$.
Lasketaan suoran etäisyys keskipisteestä, kun tiedetään, että $x_0^2 + y_0^2 = 1$.

$$\frac{|x_0 \cdot 0 + y_0 \cdot 0 - 1|}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} = \frac{1}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1$$

Piste (x_0, y_0) toteuttaa suoran ja ympyrän yhtälön, eli se on suoran ja ympyrän ainut yhteinen piste.

452. **a)** Olkoon piste $C = (x, y)$. Täydennetään kuvaan piste $E = (x, 0)$.



Kolmiot OTC ja OAC ovat yhdenmuotoiset, koska niissä molemmissa on suora kulma ja kulma O.
Tällöin

$$\frac{OT}{OC} = \frac{OC}{OE}$$

$$\frac{t}{1} = \frac{1}{x}$$

$$tx = 1$$

$$x = \frac{1}{t}$$

Koska piste C on ympyrän $x^2 + y^2 = 1$ kehällä, niin

$$y = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\frac{1}{t^2}} = \frac{\sqrt{t^2-1}}{t}.$$

Pisteen C koordinaatit parametrin t avulla ovat

$$C = \left(\frac{1}{t}, \sqrt{1-\frac{1}{t^2}}\right) = \left(\frac{1}{t}, \frac{\sqrt{t^2-1}}{t}\right).$$

b) Ympyrän säde on pisteiden C ja T etäisyys.

$$r=\sqrt{(t-\frac{1}{t})^2+(0-\frac{\sqrt{t^2-1}}{t})^2}=\sqrt{(\frac{t^2-1}{t})^2+\frac{t^2-1}{t^2}}=\sqrt{\frac{(t^2-1)^2+t^2-1}{t^2}}.$$

Pisteen D x-koordinaatti on $t-r$, joten

$$t-\sqrt{\frac{(t^2-1)^2+t^2-1}{t^2}}=t-\sqrt{\frac{t^4-2t^2+1+t^2-1}{t^2}}=t-\sqrt{\frac{t^4-t^2}{t^2}}=t-\sqrt{t^2-1}.$$

Pitää osoittaa, että pisteet $B=(0,-1)$, $D=(t-\sqrt{t^2-1},\ 0)$ ja

$C=(\frac{1}{t},\frac{\sqrt{t^2-1}}{t})$ ovat samalla suoralla.

Määritetään kulmakerroin BD ja BC suuntaisille suorille.

$$k_{BD}=\frac{0+1}{t-\sqrt{t^2-1}-0}=\frac{1}{t-\sqrt{t^2-1}}=t+\sqrt{t^2-1}$$

$$k_{BC}=\frac{\frac{\sqrt{t^2-1}}{t}+1}{\frac{1}{t}-0}=\sqrt{t^2-1}+t=t+\sqrt{t^2-1}$$

Kulmakertoimet ovat samat, joten pisteet ovat samalla suoralla.

453. $\dfrac{(x-3)^2+y^2}{(x+3)^2+y^2}=C$

$$(x-3)^2+y^2=C((x+3)^2+y^2)$$
$$(x-3)^2+y^2-C(x+3)^2-Cy^2=0$$
$$x^2-6x+9+y^2-C(x^2+6x+9)-Cy^2=0$$
$$(1-C)x^2-(1+C)6x+(1-C)y^2+(1-C)9=0 \quad ||:(1-C)\neq 0$$
$$x^2-\frac{1+C}{1-C}\cdot 6x+y^2+9=0$$
$$x^2-2\cdot 3\cdot\frac{1+C}{1-C}x+(3\cdot\frac{1+C}{1-C})^2+y^2=-9+(3\cdot\frac{1+C}{1-C})^2$$
$$(x-3\cdot\frac{1+C}{1-C})^2+y^2=-9+9(\frac{1+C}{1-C})^2$$

Kun $C>0$, $C\neq 1$, niin $|1+C|>|1-C|$ ja $(\frac{1+C}{1-C})^2>1$.

Tällöin $9(\frac{1+C}{1-C})^2>9$ ja $-9+9(\frac{1+C}{1-C})^2>0$.

Yhtälö esittää ympyrää.

$C=0$:

$$(x-3)^2+y^2=-9+9$$
$$(x-3)^2+y^2=0$$

Käyrä on piste (3, 0).

$C=1$:

$$\frac{(x-3)^2+y^2}{(x+3)^2+y^2}=1$$
$$(x-3)^2+y^2=(x+3)^2+y^2$$
$$x^2-6x+9=x^2+6x+9$$
$$-12x=0$$
$$x=0$$

Käyrä on suora $x=0$.

Olkoon $A \neq B$ sekä $A > 0$ ja $B > 0$ että $A \neq 1$ ja $B \neq 1$.
Tällöin käyrät ovat

$$\frac{(x-3)^2+y^2}{(x+3)^2+y^2}=A \text{ ja } \frac{(x-3)^2+y^2}{(x+3)^2+y^2}=B.$$

Jotta käyrät leikkaisivat, pitäisi olla $A = B$, joka on vastoin oletusta.
Käyrät eivät siis leikkaa.

5 Vektorit

5.1 Vektori

LUVUN 5.1 YDINTEHTÄVÄT

501. Piste P jakaa janan BC suhteessa 1:1 eli kahteen yhtä suureen osaan. Siten $\overline{CP} = \frac{1}{2}\overline{CB} = \frac{1}{2}\overline{u}$ ja $\overline{DP} = \overline{DC} + \overline{CP} = \overline{DC} + \frac{1}{2}\overline{CB} = \overline{v} + \frac{1}{2}\overline{u} = \frac{1}{2}\overline{u} + \overline{v}$.

Vastaavasti $\overline{DQ} = \overline{DA} + \overline{AQ} = \overline{DA} + \frac{3}{7}\overline{AB} = \overline{u} + \frac{3}{7}\overline{v}$.

502. **a)** Pisteen koordinaatit voidaan lukea suoraan paikkavektorin $\overline{i}$:n ja $\overline{j}$:n kertoimista, joten $A = (2, 1)$ ja $B = (-3, -5)$.

b) Vektorin $\overline{AB}$ $\overline{i}$:n suuntaisen komponentin kerroin saadaan päätepisteen B ja alkupisteen A x-koordinaattien erotuksena. Vastaavasti $\overline{j}$:n suuntaisen komponentin kerroin, joten

$$\overline{AB} = (-3-2)\overline{i} + (-5-1)\overline{j} = -5\overline{i} - 6\overline{j}.$$

503. Lasketaan erotusvektori.

$$\begin{aligned}\overline{a} - \overline{b} &= (4\overline{i} + \overline{j} - 7\overline{k}) - (2\overline{i} - 3\overline{j} - 5\overline{k}) \\ &= 4\overline{i} + \overline{j} - 7\overline{k} - 2\overline{i} + 3\overline{j} + 5\overline{k} \\ &= (4-2)\overline{i} + (1+3)\overline{j} + (-7+5)\overline{k} \\ &= 2\overline{i} + 4\overline{j} - 2\overline{k}\end{aligned}$$

$$|\overline{a} - \overline{b}| = \sqrt{2^2 + 4^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+16+4} = \sqrt{24} = \sqrt{4 \cdot 6} = 2\sqrt{6}$$

504. Muodostetaan vektoreiden $\overline{i}-2\overline{j}+2\overline{k}$ ja $3\overline{i}-4\overline{k}$ suuntaisia siirtymiä vastaavat vektorit yksikkövektoreiden avulla ja näiden avulla pisteen C paikkavektori.

$|\overline{i}-2\overline{j}+2\overline{k}|=\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}=3$ ja $|3\overline{i}-4\overline{k}|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$

Siirtymiä vastaavat vektori ovat

$\overline{AB}=9\cdot\dfrac{\overline{i}-2\overline{j}+2\overline{k}}{3}=3\cdot(\overline{i}-2\overline{j}+2\overline{k})=3\overline{i}-6\overline{j}+6\overline{k}$ ja

$\overline{BC}=10\cdot\dfrac{3\overline{i}-4\overline{k}}{5}=2\cdot(3\overline{i}-4\overline{k})=6\overline{i}-8\overline{k}$.

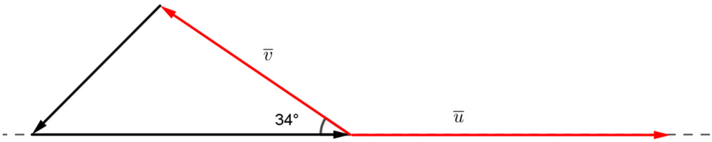
Siten

$$\begin{aligned}\overline{OC}&=\overline{OA}+\overline{AB}+\overline{BC}\\&=(\overline{i}-\overline{j})+(3\overline{i}-6\overline{j}+6\overline{k})+(6\overline{i}-8\overline{k})\\&=\overline{i}-\overline{j}+3\overline{i}-6\overline{j}+6\overline{k}+6\overline{i}-8\overline{k}\\&=10\overline{i}-7\overline{j}-2\overline{k}\end{aligned}$$

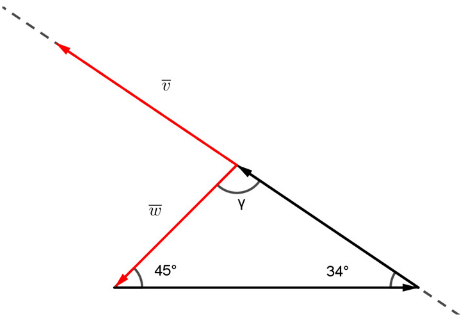
$C=(10,-7,-2)$

505. Vektorien välinen kulma on pienempi niistä kahdesta kulmasta, jotka muodostuvat, kun vektorit piirretään alkamaan samasta pisteestä.

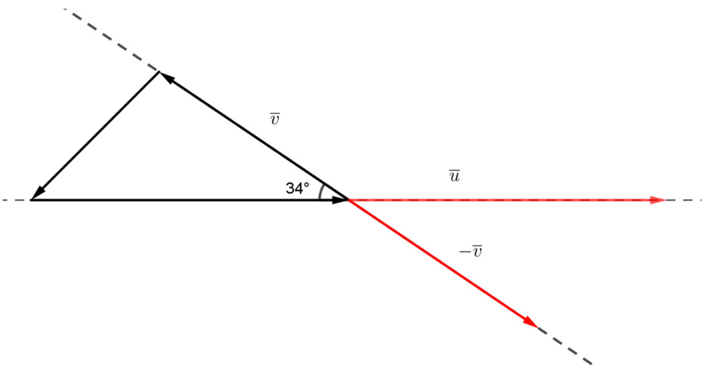
a) $\sphericalangle(\overline{u}, \overline{v}) = 180° - 34° = 146°$ (vieruskulmien summa on 180°)



b) $\gamma = 180° - (34° + 45°) = 101°$ (kolmion kulmien summa on 180º)
$\sphericalangle(\overline{v}, \overline{w}) = 180° - 101° = 79°$ (vieruskulmien summa on 180°)



c) $\sphericalangle(\overline{u}, -\overline{v}) = 34°$, (ristikulmat ovat yhtä suuret)

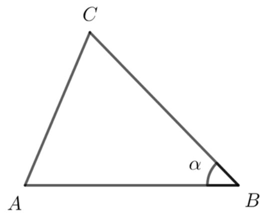


506. Muodostetaan aluksi kolmion *ABC* sivuvektorit.

$$\overline{AB} = (2-3)\overline{i} + (2-4)\overline{j} + (-5-5)\overline{k} = -\overline{i} - 2\overline{j} - 10\overline{k}$$
$$\overline{AC} = (-3-3)\overline{i} + (-2-4)\overline{j} + (3-5)\overline{k} = -6\overline{i} - 6\overline{j} - 2\overline{k}$$
$$\overline{BC} = (-3-2)\overline{i} + (-2-2)\overline{j} + (3-(-5))\overline{k} = -5\overline{i} - 4\overline{j} + 8\overline{k}$$

Lasketaan seuraavaksi sivuvektoreiden pituudet ja tehdään pituuksien pohjalta päätelmä kolmion muodosta.

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + (-10)^2} = \sqrt{105}$$
$$|\overline{AC}| = \sqrt{(-6)^2 + (-6)^2 + (-2)^2} = \sqrt{76}$$
$$|\overline{BC}| = \sqrt{(-5)^2 + (-4)^2 + 8^2} = \sqrt{105}$$



Koska kolmion sivuista kaksi ovat yhtä pitkiä ja kolmas erimittainen, on kolmio tasakylkinen.

Kolmion huippukulma on kannan *AC* vastainen kulma *B*. Merkitään kulmaa α:lla.

$$\overline{BA} = -\overline{AB} = -(-\overline{i} - 2\overline{j} - 10\overline{k}) = \overline{i} + 2\overline{j} + 10\overline{k}$$
$$\overline{BA} \cdot \overline{BC} = (\overline{i} + 2\overline{j} + 10\overline{k}) \cdot (-5\overline{i} - 4\overline{j} + 8\overline{k}) = 1 \cdot (-5) + 2 \cdot (-4) + 10 \cdot 8 = 67$$

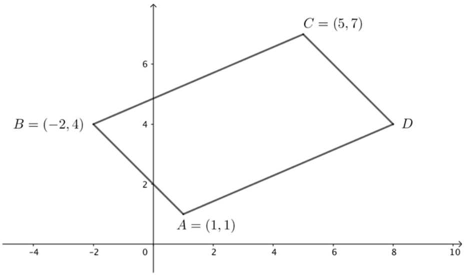
$$\cos\alpha = \frac{\overline{BA} \cdot \overline{BC}}{|\overline{BA}| \cdot |\overline{BC}|}$$
$$\cos\alpha = \frac{67}{\sqrt{105} \cdot \sqrt{105}}$$
$$\alpha = 50{,}350...° \approx 50{,}4°$$

Huippukulman suuruus on noin 50,4°.

507. Muodostetaan pisteen D paikkavektori. Koska suunnikkaan sivut AD ja BC ovat yhdensuuntaiset, on $\overline{OD} = \overline{OA} + \overline{AD} = \overline{OA} + \overline{BC}$.

$\overline{BC} = (5-(-2))\overline{i} + (7-4)\overline{j} = 7\overline{i} + 3\overline{j}$ ja $\overline{OA} = \overline{i} + \overline{j}$

Siten $\overline{OD} = \overline{OA} + \overline{BC} = \overline{i} + \overline{j} + 7\overline{i} + 3\overline{j} = 8\overline{i} + 4\overline{j}$. Pisteen D koordinaatit luetaan paikkavektorista, joten $D = (8, 4)$.



508. Vektorit $\overline{u}$ ja $\overline{v}$ ovat yhdensuuntaiset täsmälleen silloin, kun $\overline{u} = t\overline{v}$ jollakin $t \neq 0$. Lisäksi, jos $t > 0$, ovat vektorit samansuuntaiset ja jos $t < 0$ ovat vektorit vastakkaissuuntaiset. Muodostetaan yhtälö ja pyritään ratkaisemaan t.

$$\begin{aligned}
\overline{a} + \overline{c} &= t(\overline{b} + \overline{c}) \\
(4\overline{i} - 2\overline{j}) + (d\overline{i} + (d+1)\overline{j}) &= t((-3\overline{i} + \overline{j}) + d\overline{i} + (d+1)\overline{j}) \\
(4+d)\overline{i} + (-2+d+1)\overline{j} &= t((-3+d)\overline{i} + (1+d+1)\overline{j}) \\
(d+4)\overline{i} + (d-1)\overline{j} &= t(d-3)\overline{i} + t(d+2)\overline{j}
\end{aligned}$$

Koska komponentteihin jako on yksikäsitteinen, saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} d + 4 = td - 3t \\ d - 1 = td + 2t \end{cases}$$

jonka ratkaisu on $t = -1$.

Yhtälö $\overline{a} + \overline{c} = t \cdot (\overline{b} + \overline{c})$ toteutuu, kun $t = -1$, joten vektorit $\overline{a} + \overline{c}$ ja $\overline{b} + \overline{c}$ ovat yhdensuuntaiset, mutta vastatakkaissuuntaiset. Samansuuntaisuus ei siten toteudu millään d:n arvolla.

<u>Huomautus:</u> Kun $t = -1$, on $d = -\frac{1}{2}$. Tätä ei kuitenkaan tarvitse ratkaista.

5.2 Suora ja taso vektoreiden avulla

LUVUN 5.2 YDINTEHTÄVÄT

509. Suuntavektori on mikä tahansa suoran suuntainen vektori, joten esimerkiksi $\overline{AB}$ on eräs suuntavektori.

$$\overline{AB} = (4-2)\overline{i} + (-7-3)\overline{j} + (-3-6)\overline{k} = 2\overline{i} - 10\overline{j} - 9\overline{k}$$

Suora kulkee pisteen (2, 3, 6) kautta.

Suoran parametriesitys on esimerkiksi

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 - 10t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 6 - 9t \end{cases}$$

xy-tasossa $z = 0$.

$0 = 6 - 9t$, josta $t = \frac{2}{3}$.

$$x = 2 + 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$$

$$y = 3 - 10 \cdot \frac{2}{3} = -\frac{11}{3}$$

xy-tason leikkauspiste on $(\frac{10}{3}, -\frac{11}{3}, 0)$.

510. Suoran parametrimuotoinen yhtälö on

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 3 + t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 7 + 3t \end{cases}$$

Suoran mielivaltainen piste $P = (2 + 3t, 3 + t, 7 + 3t)$ on tasossa $x + 2y + z = 1$, jos se toteuttaa tason yhtälön.

Saadaan yhtälö

$2 + 3t + 2(3 + t) + 7 + 3t = 1$ eli $8t + 15 = 1$, josta $t = -\frac{7}{4}$.

$$x = 2 + 3 \cdot (-\frac{7}{4}) = -\frac{13}{4},$$

$$y = 3 - \frac{7}{4} = \frac{5}{4} \text{ ja}$$

$$z = 7 + 3 \cdot (-\frac{7}{4}) = \frac{7}{4}$$

Leikkauspiste on siis $(-\frac{13}{4}, \frac{5}{4}, \frac{7}{4})$.

511. **a)** Suoran suuntavektori on $3\overline{i} - \overline{j}$, joten suoran kulmakerroin on $k = -\frac{1}{3}$.

Suoran yhtälö saadaan kaavalla $y - y_0 = k(x - x_0)$.

$$\begin{aligned} y - 0 &= -\frac{1}{3}(x-4) \quad \| \cdot 3 \\ 3y &= -(x-4) \\ x + 3y - 4 &= 0 \end{aligned}$$

Suoran yhtälö on siis $x + 3y - 4 = 0$.

b) Suoran $x = 1 - 2t$, $y = 3t$ suuntavektori on $-2\overline{i} + 3\overline{j}$, joten suoran kulmakerroin on $k = -\frac{3}{2}$.

Arvoa $t = 0$ vastaa piste (1, 0).

$$\begin{aligned} y - 0 &= -\frac{3}{2}(x-1) \quad \| \cdot 2 \\ 2y &= -3(x-1) \\ 2y &= -3x + 3 \\ 3x + 2y - 3 &= 0 \end{aligned}$$

Suoran yhtälö on siis $3x + 2y - 3 = 0$.

512. Määritetään pisteiden A ja B kautta kulkevan suoran parametrimuotoinen yhtälö. Suoran suuntavektori on

$\overline{AB} = (-1-1)\overline{i} + (1-1)\overline{j} + (3-1)\overline{k} = -2\overline{i} + 0 \cdot \overline{j} + 2\overline{k} = -2\overline{i} + 2\overline{k}$.

Suoran kulkee pisteen $A = (1, 1, 1)$ kautta.
Suoran parametrimuotoinen yhtälö on

$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 1 \qquad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

Piste $P = (4, 1, -2)$ on suoralla, jos se toteuttaa suoran yhtälön.

Saadaan $\begin{cases} t = -\dfrac{3}{2} \\ 1 = 1 \\ t = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$ joten piste P on suoralla.

Vastaavasti on piste $Q = (0, 2, 4)$ suoralla, jos yhtälöryhmä
$0 = 1 - 2t$, $2 = 1$, $4 = 1 + 2t$ toteutuu.
Tämä on mahdotonta, koska $2 \neq 1$, joten piste Q ei ole suoralla.

Piste P on suoralla, mutta piste Q ei ole.

513. Suoran a eräs suuntavektori on

$\overline{AB} = (-2-(-4))\overline{i} + (6-7)\overline{j} + (-3-(-5))\overline{k} = 2\overline{i} - \overline{j} + 2\overline{k}$.

Suora a siis kulkee pisteen $A = (-4, 7, -5)$ kautta vektorin $2\overline{i} - \overline{j} + 2\overline{k}$ suuntaisesti.

Suoran a parametrimuotoinen yhtälö on

$$\begin{cases} x = -4 + 2t \\ y = 7 - t \qquad (t \in \mathbb{R}) \\ z = -5 + 2t \end{cases}$$

Suoran b kulkee pisteen $C = (5, 4, 1)$ kautta vektorin $\overline{i} + \overline{j} - 2\overline{k}$ suuntaisesti.

Suoran b parametrimuotoinen yhtälö on

$$\begin{cases} x = 5 + r \\ y = 4 + r \qquad (r \in \mathbb{R}) \\ z = 1 - 2r \end{cases}$$

Suorien leikkauspiste on suorien yhteinen. Syntyy siis yhtälöpari

$$\begin{cases} -4 + 2t = 5 + r \\ 7 - t = 4 + r \\ -5 + 2t = 1 - 2r \end{cases}$$

Tämän ratkaisu on $t = 4$ ja $r = -1$.

Yhteinen piste eli leikkauspiste on siten

$(5 + (-1), 4 + (-1), 1 - 2 \cdot (-1)) = (4, 3, 3)$.

Suorien välinen kulma voidaan päätellä suuntavektorien avulla. Lasketaan aluksi suuntavektoreiden välinen kulma α pistetulon avulla.

$$(2\overline{i} - \overline{j} + 2\overline{k}) \cdot (\overline{i} + \overline{j} - 2\overline{k}) = 2 - 1 - 4 = -3$$

$$\cos\alpha = \frac{-3}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}}$$
$$\cos\alpha = \frac{-3}{3\cdot\sqrt{6}}$$
$$\cos\alpha = \frac{-1}{\sqrt{6}}$$
$$\alpha = 114,094...^\circ$$

Suorien välinen kulma on aina enintään 90°, joten se on kulman α suplementtikulma 180° − 114,094...° = 65,905...° ≈ 66°.

Suorien välinen kulma on 66°.

514. Määritetään aluksi yhdysjanan keskipiste P.

$$P = (\frac{2+3}{2}, \frac{0+1}{2}, \frac{1+3}{2}) = (\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 2)$$

Tason normaalivektori on $AB = (3-2)\overline{i} + (1-0)\overline{j} + (3-1)\overline{k} = \overline{i} + \overline{j} + 2\overline{k}$

Taso kulkee pisteen $P = (\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 2)$ kautta ja sen normaalivektori on $\overline{i} + j + 2\overline{k}$.

Tason yhtälö on

$$1\cdot(x-\frac{5}{2}) + 1\cdot(y-\frac{1}{2}) + 2\cdot(z-2) = 0$$
$$x + y + 2z - 7 = 0.$$

Jos piste on y-akselilla, on sen x- ja z-koordinaatti 0.
Sijoitetaan siis $x = 0$ ja $z = 0$ yhtälöön.

$0 + y + 2 \cdot 0 - 7 = 0$, josta $y = 7$.

Taso leikkaa y-akselin pisteessä (0, 7, 0).

515. Tapa 1:

Muodostetaan yhtälö suoralle, joka kulkee pisteen P kautta ja on kohtisuorassa tasoa vastaan.

Tason $2x + y + 4z + 5 = 0$ eräs normaalivektori on $\overline{n} = 2\overline{i} + \overline{j} + 4\overline{k}$.

Pisteen $P = (1, 3, 1)$ kautta kulkevan vektorin $\overline{n} = 2\overline{i} + \overline{j} + 4\overline{k}$ suuntaisen suoran parametrimuotoinen yhtälö on

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 + t \qquad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 1 + 4t. \end{cases}$$

Lasketaan suoran ja tason leikkauspiste. Sijoitetaan $x = 1 + 2t$, $y = 3 + t$ ja $z = 1 + 4t$ tason yhtälöön ja määritetään leikkauspistettä vastaava parametrin t arvo.

$2 \cdot (1 + 2t) + (3 + t) + 4 \cdot (1 + 4t) + 5 = 0$, josta $t = -\frac{2}{3}$.

Kun $t = -\frac{2}{3}$, niin $x = 1 + 2 \cdot (-\frac{2}{3}) = -\frac{1}{3}$, $y = 3 - \frac{2}{3} = \frac{7}{3}$ ja

$z = 1 + 4 \cdot (-\frac{2}{3}) = -\frac{5}{3}$. Suora ja taso leikkaavat pisteessä $(-\frac{1}{3}, \frac{7}{3}, -\frac{5}{3})$.

Lasketaan tämän pisteen ja pisteen $P = (1, 3, 1)$ välinen etäisyys, joka on samalla pisteen ja tason välinen etäisyys.

$$\sqrt{(1 - (-\frac{1}{3}))^2 + (3 - \frac{7}{3})^2 + (1 - (-\frac{5}{3}))^2} = \sqrt{\frac{28}{3}} = \frac{2\sqrt{21}}{3} \approx 3{,}1$$

Tapa 2:

Ylioppilaskokeessa sallitusta kaavakokoelmasta löytyy pisteen (x_0, y_0, z_0) etäisyydelle tasosta $ax + by + cz + d = 0$ kaava

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Lasketaan etäisyys tämän kaavan avulla sijoittamalla pisteen P = (1, 3, 1) koordinaatit ja tason $2x + y + 4x + 5 = 0$ yhtälön x:n, y:n ja z:n kertoimet yhtälöön.

$$d = \frac{|2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 4^2}} = \frac{14}{\sqrt{21}} = \frac{2\sqrt{21}}{3}$$

Huomautus: Vastauksen voi antaa muodossa $\frac{14}{\sqrt{21}}$ tai $\frac{2\sqrt{21}}{3}$.

Etäisyys on $\frac{14}{\sqrt{21}}$ eli $\frac{2\sqrt{21}}{3}$.

516. Suoran vektorimuotoisesta yhtälöstä voidaan johtaa suoran mielivaltaisen pisteen P paikkavektori eli parametrimuotoinen yhtälö.

$$\begin{aligned}\overline{OP} &= \overline{i} + 2\overline{j} + 2\overline{k} + t(2\overline{i} + \overline{j} + s\overline{k}) = \overline{i} + 2\overline{j} + 2\overline{k} + 2t\overline{i} + t\overline{j} + st\overline{k} \\ &= (1+2t)\overline{i} + (2+t)\overline{j} + (2+st)\overline{k}\end{aligned}$$

Suoran mielivaltainen piste siis $P = (1 + 2t, 2 + t, 2 + st)$, missä $t \in \mathbb{R}$.

Suora on tasossa, kun piste P toteuttaa tason $3x + 4y + 5z = 21$ yhtälön jokaiselle parametrin t arvoilla. Parametrin arvoa $t = 1$ vastaa piste $(3, 3, 2 + s)$. Sijoitetaan tämän pisteen koordinaatit tason yhtälöön.

$3 \cdot 3 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot (2 + s) = 21$, josta $s = -2$

Varmistetaan vielä, että arvoa $s = -2$ vastaava piste
$P = (1 + 2t, 2 + t, 2 - 2t)$ toteuttaa tason yhtälön kaikilla t:n arvoilla.

$$\begin{aligned}3 \cdot (1 + 2t) + 4 \cdot (2 + t) + 5 \cdot (2 - 2t) &= 21 \\ 3 + 6t + 8 + 4t + 10 - 10t &= 21 \\ 21 &= 21\end{aligned}$$

Yhtälö on aina tosi.

Suora on tasossa, kun $s = -2$.

517. Suoran $ax + by + c = 0$ kulmakerroin on $k = -\frac{a}{b}$ ja suuntavektori $b\overline{i} - a\overline{j}$.

Lasketaan vektorien $b\overline{i} - a\overline{j}$ ja $a\overline{i} + b\overline{j}$ välinen pistetulo.

$$(b\overline{i} - a\overline{j}) \cdot (a\overline{i} + b\overline{j}) = ba - ab = 0$$

Koska vektorien $b\overline{i} - a\overline{j}$ ja $a\overline{i} + b\overline{j}$ välinen pistetulo on 0, ovat vektorit kohtisuorassa. Siten myös suora $ax + by + c = 0$ on kohtisuorassa sitä suoraa vastaan, jonka suuntavektori on $a\overline{i} + b\overline{j}$.

Luvun 5 vahvistavat ja syventävät tehtävät

VAHVISTAVAT TEHTÄVÄT

518. **a)** $\overline{u} \cdot \overline{v} = |\overline{u}| \cdot |\overline{v}| \cdot \cos(\overline{u}, \overline{v}) = 2 \cdot 3 \cdot \cos 90° = 6 \cdot 0 = 0$

b) $\overline{u} \cdot \overline{v} = |\overline{u}| \cdot |\overline{v}| \cdot \cos(\overline{u}, \overline{v}) = 2 \cdot 3 \cdot \cos 60° = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$

519. A–III, B–III, C–II, D–III, E–I

520. **a)** Summavektori on $\overline{a}+\overline{b}=(2\overline{i}+5\overline{j})+(\overline{i}-2\overline{j})=3\overline{i}+3\overline{j}$.

Koska $|3\overline{i}+3\overline{j}|=\sqrt{3^3+3^3}=3\sqrt{2}$, on vektorin $3\overline{i}+3\overline{j}$ suuntainen yksikkövektori

$$\frac{3\overline{i}+3\overline{j}}{3\sqrt{2}}=\frac{3}{3\sqrt{2}}\overline{i}+\frac{3}{3\sqrt{2}}\overline{j}=\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{j}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\overline{i}+\overline{j}).$$

b) Muodostetaan ensin vektorit $\overline{AB}$ ja $\overline{CD}$.

$$\overline{AB}=(7-3)\overline{i}+(3-1)\overline{j}=4\overline{i}+2\overline{j}$$

$$\overline{CD}=(-3-1)\overline{i}+(-2-4)\overline{j}=-4\overline{i}-6\overline{j}$$

Lasketaan vektoreiden $\overline{AB}$ ja $\overline{CD}$ pituudet ja välinen pistetulo.

$$|\overline{AB}|=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

$$|\overline{CD}|=\sqrt{(-4)^2+(-6)^2}=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$$

$$\overline{AB}\cdot\overline{CD}=(4\overline{i}+2\overline{j})\cdot(-4\overline{i}-6\overline{j})=-16-12=-28$$

$$\cos\alpha=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CD}}{|\overline{AB}|\cdot|\overline{CD}|}$$

$$\cos\alpha=\frac{-28}{2\sqrt{5}\cdot2\sqrt{13}}$$

$$\cos\alpha=\frac{-7}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{13}}$$

$$\alpha=150{,}255...^\circ\approx150{,}3^\circ$$

Vektorien $\overline{AB}$ ja $\overline{CD}$ välinen kulma on 150,3°.

521. Muodostetaan vektorin $\overline{a}$ yksikkövektori.

$|\overline{a}| = \sqrt{(\frac{3}{2})^2 + (-2)^2} = \frac{5}{2}$, joten

$\overline{a}^0 = \frac{1}{|a|} \cdot \overline{a} = \frac{2}{5}(\frac{3}{2}\overline{i} - 2\overline{j}) = \frac{3}{5}\overline{i} - \frac{4}{5}\overline{j}$

$\overline{b} = -5\overline{a}^0 = -5(\frac{3}{5}\overline{i} - \frac{4}{5}\overline{j}) = -3\overline{i} + 4\overline{j}$

Olkoon kysytty piste P. Muodostetaan pisteen P paikkavektori.

$\overline{OP} = 4\overline{i} + 3\overline{j} + \overline{b} = 4\overline{i} + 3\overline{j} + (-3\overline{i} + 4\overline{j}) = \overline{i} + 7\overline{j}$

Pisteen $\overline{b}$ loppupiste on (1, 7).

522. Mediaani eli keskijana on jana, joka yhdistää kolmion kärjen ja vastakkaisen sivun keskipisteen. Olkoon mediaanien leikkauspiste P ja janan BC keskipiste Q. Piste P jakaa jokaisen mediaanin kärjestä lukien suhteessa 2:1, joten $\overline{AP} = \frac{2}{3}\overline{AQ}$.

Piste $Q = (\frac{0+4}{2}, \frac{-2+5}{2}, \frac{3+0}{2}) = (2, \frac{3}{2}, \frac{3}{2})$, joten

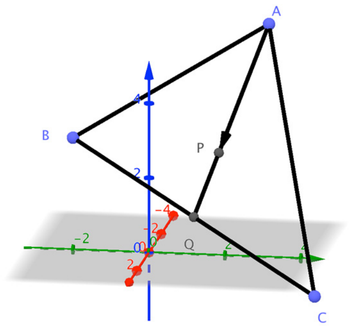
$$\overline{AQ} = (2-(-1))\overline{i} + (\frac{3}{2}-)\overline{j} + (\frac{3}{2}-6)\overline{k} = 3\overline{i} - \frac{3}{2}\overline{j} - \frac{9}{2}\overline{k}.$$

Pisteen P paikkavektori on

$$\begin{aligned}
\overline{OP} &= \overline{OA} + \overline{AP} \\
&= \overline{OA} + \frac{2}{3}\overline{AQ} \\
&= -\overline{i} + 3\overline{j} + 6\overline{k} + \frac{2}{3}(3\overline{i} - \frac{3}{2}\overline{j} - \frac{9}{2}\overline{k}) \\
&= -\overline{i} + 3\overline{j} + 6\overline{k} + 2\overline{i} - \overline{j} - 3\overline{k} \\
&= \overline{i} + 2\overline{j} + 3\overline{k}.
\end{aligned}$$

Mediaanien leikkauspiste on (1, 2, 3).

Huomautus: Pisteen P voi määrittää sopivilla ohjelmilla.



523. Lausutaan vektori PQ sivuvektoreiden avulla.

$$\begin{aligned}\overline{PQ} &= \overline{PA} + \overline{AD} + \overline{DQ} \\ &= \frac{2}{5}\overline{BA} + \overline{AD} + \frac{1}{5}\overline{DC} \\ &= \frac{2}{5}\overline{BA} + \overline{AD} + \frac{1}{5}\overline{AB} \\ &= -\frac{2}{5}\overline{AB} + \overline{AD} + \frac{1}{5}\overline{AB} \\ &= -\frac{1}{5}\overline{AB} + \overline{AD}\end{aligned}$$

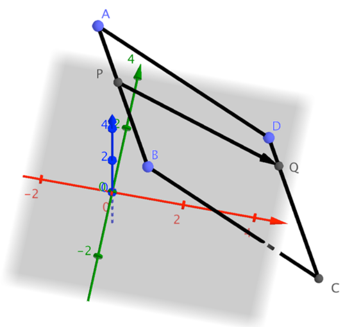
Muodostetaan tarvittavat sivuvektorit $\overline{AB}$ ja $\overline{AD}$.

$$\overline{AB} = (1-(-1))\overline{i} + (0-3)\overline{j} + (2-4)\overline{k} = 2\overline{i} - 3\overline{j} - 2\overline{k}$$

$$\overline{AD} = (4-(-1))\overline{i} + (2-3)\overline{j} + (1-4)\overline{k} = 5\overline{i} - \overline{j} - 3\overline{k}$$

Siten

$$\overline{PQ} = -\frac{1}{5}\overline{AB} + \overline{AD} = -\frac{1}{5}(2\overline{i} - 3\overline{j} - 2\overline{k}) + (5\overline{i} - \overline{j} - 3\overline{k}9 = \frac{23}{5}\overline{i} - \frac{2}{5}\overline{j} - \frac{13}{5}\overline{k}$$



524. Etsitään kertoimet r ja t siten, että $\overline{i}+7\overline{j}=r\overline{a}+t\overline{b}$.

$$\begin{aligned}
\overline{i}+7\overline{j}&=r\overline{a}+t\overline{b}\\
\overline{i}+7\overline{j}&=r(2\overline{i}+3\overline{j})+t(-7\overline{i}+6\overline{j})\\
\overline{i}+7\overline{j}&=2r\overline{i}+3r\overline{j}-7t\overline{i}+6t\overline{j}\\
1\cdot\overline{i}+7\overline{j}&=(2r-7t)\overline{i}+(3r+6t)\overline{j}
\end{aligned}$$

Koska komponentteihinjako on yksikäsitteinen, tulee olla $1 = 2r - 7t$ ja $7 = 3r + 6t$. Muodostetaan ja ratkaistaan yhtälöpari.

$$\begin{cases}1=2r-7t & \| \cdot(-3)\\ 7=3r+6t & \| \cdot 2\end{cases}$$

$$\begin{cases}-3=-6r+21t\\ 14=6r+12t\end{cases}$$

$$11=33t$$

$$t=\frac{1}{3}$$

Kun $t=\frac{1}{3}$, $7=3r+6\cdot\frac{1}{3}$ eli $3r = 5$, josta $r=\frac{5}{3}$.

Siis $\overline{i}+7\overline{j}=\frac{5}{3}\overline{a}+\frac{1}{3}\overline{b}$.

525. Eräs vektoria $-\overline{i}+3\overline{j}$ vastaan kohtisuora vektori on $\overline{a}=3\overline{i}+\overline{j}$, sillä pistetulo $(-\overline{i}+3\overline{j})\cdot(3\overline{i}+\overline{j})=-3+3=0$.

Muodostetaan vektorin $\overline{a}$ yksikkövektori.

$|\overline{a}|=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$, joten $\overline{a}^0=\dfrac{1}{|\overline{a}|}\cdot\overline{a}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}\cdot(3\overline{i}+\overline{j})$.

Myös vektorin $\overline{a}^0$ vastavektori $-\overline{a}^0$ kelpaa, joten ehdot täyttävät vektorit ovat $\dfrac{1}{\sqrt{10}}(3\overline{i}+\overline{j})$ ja $-\dfrac{1}{\sqrt{10}}(3\overline{i}+\overline{j})$.

Huomautus:
Vektoria $a\overline{i}+b\overline{j}$ vastaan kohtisuora vektori saadaan aina vaihtamalla $\overline{i}$:n ja $\overline{j}$:n kertoimet ja toisen kertoimen etumerkki, sillä muodostettujen vektorien $a\overline{i}-b\overline{j}$ ja $-a\overline{i}+b\overline{j}$ pistetulo vektorin $a\overline{i}+b\overline{j}$ kanssa on nolla.

526. Olkoon kysytty vektori $P=(x, y)$. Määritetään pisteestä P pisteisiin A, B, C, D ja E piirretyt vektorit.

$\overline{PB}=(1-x)\overline{i}+(-2-y)\overline{j}$, $\overline{PC}=(2-x)\overline{i}+(1-y)\overline{j}$,
$\overline{PD}=(2-x)\overline{i}+(3-y)\overline{j}$ ja $\overline{PE}=(-2-x)\overline{i}+(-2-y)\overline{j}$

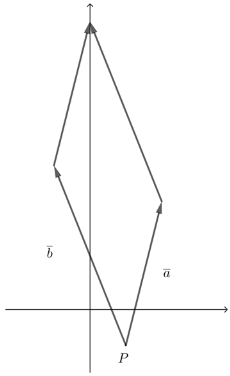
Lasketaan vektoreiden summa.

$$\begin{aligned}
&\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}+\overline{PE}\\
&=(-1-x)\overline{i}+(1-y)\overline{j}+(1-x)\overline{i}+(-2-y)\overline{j}+(2-x)\overline{i}+(1-y)\overline{j}\\
&\quad+(2-x)\overline{i}+(3-y)\overline{j}+(-2-x)\overline{i}+(-2-y)\overline{j}\\
&=(2-5x)\overline{i}+(1-5y)\overline{j}
\end{aligned}$$

Vektori $(2-5x)\overline{i}+(1-5y)\overline{j}$ on nollavektori, kun $2-5x=0$ ja $1-5y=0$. Tällöin $x=\dfrac{2}{5}$ ja $y=\dfrac{1}{5}$.

Kysytty tason piste on siis $(\dfrac{2}{5}, \dfrac{1}{5})$.

527. Suunnikkaan lävistäjien leikkauspiste Q puolittaa kummankin lävistäjän. Siten



$$\begin{aligned}\overline{PQ} &= \frac{1}{2}(\overline{a}+\overline{b})\\ &= \frac{1}{2}(\overline{i}+4\overline{j}+(-2\overline{i}+5\overline{j}))\\ &= \frac{1}{2}(-\overline{i}+9\overline{j})\\ &= -\frac{1}{2}\overline{i}+\frac{9}{2}\overline{j}.\end{aligned}$$

Pisteen Q koordinaatit saadaan paikkavektorista.

$$\overline{OQ}=\overline{OP}+\overline{PQ}=\overline{i}-\overline{j}+(-\frac{1}{2}\overline{i}+\frac{9}{2}\overline{j})=\frac{1}{2}\overline{i}+\frac{7}{2}\overline{j}$$

Siis $\overline{PQ}=-\frac{1}{2}\overline{i}+\frac{9}{2}\overline{j}$ ja $Q=(\frac{1}{2},\frac{7}{2})$.

528. Vektorin $2\overline{i}+m\overline{j}$ pituus on $|2\overline{i}+m\overline{j}|=\sqrt{2^2+m^2}=\sqrt{m^2+4}$. Oletuksena on, että m = 2, 3, 4, ... eli m on jokin positiivinen kokonaisluku. Jotta pituus on pienempi kuin m + 1 tulee epäyhtälön $\sqrt{m^2+4}<m+1$ olla tosi kun m = 2, 3, 4, ... Epäyhtälön molemmat puolet ovat positiivisia, joten ne voidaan korottaa neliöön ja saatu epäyhtälö on yhtäpitävä alkuperäisen kanssa.

$$\begin{aligned}\sqrt{m^2+4}&<m+1\\ m^2+4&<m^2+2m+1\\ 3&<2m\\ m&>\frac{3}{2}\end{aligned}$$

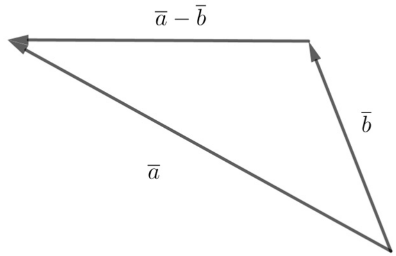
Epäyhtälö $\sqrt{m^2+4}<m+1$ toteutuu täsmälleen kun $m>\frac{3}{2}$, erityisesti se siis toteutuu kun m = 2, 3, 4, ... Täten on osoitettu, että vektorin $2\overline{i}+m\overline{j}$ pituus on pienempi kuin m + 1.

529. **a)** Kolmion kaksi sivuvektoria eli siten myös vastaavat sivut ovat yhtä pitkät. Lisäksi sivuvektorit ovat toisaan vastaan kohtisuorassa, joten kyseisten sivujen välillä on 90° kulma. Kolmio on siis tasakylkinen ja suorakulmainen. Kolmion kantakulmat ovat 45°.

b) Vektori $\overline{a}-\overline{b}$ on kolmion kolmas sivuvektori. Koska sivuvektorien pituudet toteuttavat Pythagoraan lauseen on kolmio suorakulmainen. Sivujen pituuksista ja muista kulmista ei voida sanoa mitään.

c) Kolmion kaikki sivut ovat yhtä pitkiä eli kolmio on tasasivuinen. Tasasivuisena kolmion kaikki kulmat ovat 60°.

d) Jos kahden vektorin pistetulo on negatiivinen, on näiden vektorien välinen kulma tylppä. Vektorit $\overline{a}-\overline{b}$ ja $-\overline{b}$ ovat samasta kärjestä lähtevät sivuvektorit. Koska näiden vektoreiden välinen pistetulo on tylppä, on kolmio tylppäkulmainen.



530. Tulkitaan valonsäteiden eteneminen suorina.

Pisteen $P_1 = (10, 0, 0)$ kautta vektorin $\overline{v}_1 = 2\overline{i} + 4\overline{j} + 3\overline{k}$ suuntaisesti kulkevan suoran parametrimuotoinen yhtälö on

$$\begin{cases} x = 10 + 2t \\ y = 0 + 4t \qquad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 0 + 3t \end{cases}$$

eli

$$\begin{cases} x = 10 + 2t \\ y = 4t \qquad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 3t \end{cases}$$

Pisteen $P_2 = (310, 480, 400)$ kautta vektorin $\overline{v}_2 = -4\overline{i} - 6\overline{j} - 5\overline{k}$ suuntaisesti kulkevan suoran parametrimuotoinen yhtälö on

$$\begin{cases} x = 310 - 4r \\ y = 480 - 6r \qquad (r \in \mathbb{R}) \\ z = 400 - 5r \end{cases}$$

Selvitetään leikkaavatko suorat eli tutkitaan toteutuuko yhtälöryhmä $10 + 2t = 310 - 4r$, $4t = 480 - 6r$, $3t = 400 - 5r$ joillakin r:n ja t:n arvolla.

$$\begin{cases} 10 + 2t = 310 - 4r \\ 4t = 480 - 6r \\ 3t = 400 - 5r \end{cases}$$

Yhtälöryhmän kaksi alempaa yhtälöä muodostavat yhtälöparin

$$\begin{cases} 4t + 6r = 480 \\ 3t + 5r = 400 \end{cases}$$

Tämän yhtälöparin ratkaisu on $r = 80$ ja $t = 0$. Nämä eivät kuitenkaan toteuta ensimmäistä yhtälöä, joten yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua eivätkä valonsäteet siis kohtaa toisiaan.

531. Tulkitaan valonsäteiden eteneminen suorina.

Pisteen $A = (1, -2, 3)$ kautta vektorin $\overline{u} = 2\overline{i} - \overline{j} - 3\overline{k}$ suuntaisesti kulkevan suoran parametrimuotoinen yhtälö on

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 3 - 3t \end{cases}$$

Pisteen $B = (9, -1, -12)$ kautta vektorin $\overline{v} = -\overline{i} - 2\overline{j} + 3\overline{k}$ suuntaisesti kulkevan suoran parametrimuotoinen yhtälö on

$$\begin{cases} x = 9 - r \\ y = -1 - 2r \quad (r \in \mathbb{R}) \\ z = -12 + 3r \end{cases}$$

Määritetään suorien leikkauspiste eli ratkaistaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 1 + 2t = 9 - r \\ -2 - t = -1 - 2r \\ 3 - 3t = -12 + 3r. \end{cases}$$

Yhtälöryhmän ratkaisu on $r = 2$ ja $t = 3$. Parametrin arvoa $r = 2$ vastaava piste on $(9 - 2, -1 - 2 \cdot 2, -12 + 3 \cdot 2) = (7, -5, -6)$ ja parametrin arvoa $t = 3$ vastaava piste on $(1 + 2 \cdot 3, -2 - 3, 3 - 3 \cdot 3) = (7, -5, -6)$. On näytetty, että suorat leikkaavat toisensa ja että leikkauspiste on $(7, -5, -6)$.

532. Vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat yhdensuuntaiset täsmälleen silloin, kun $\overline{a} = x\overline{b}$ jollakin luvulla $x \neq 0$.

$$\begin{aligned} \overline{a} &= x\overline{b} \\ 5\overline{i} - 2\overline{j} &= x(3\overline{i} + t\overline{j}) \\ 5\overline{i} - 2\overline{j} &= 3x\overline{i} + xt\overline{j} \end{aligned}$$

Koska komponentteihinjako on yksikäsitteinen, on $5 = 3x$ ja $-2 = xt$.
Syntyy siis yhtälöpari

$$\begin{cases} 3x = 5 \\ xt = -2 \end{cases}$$

Yhtälöparin ratkaisu on $x = \dfrac{5}{3}$ ja $t = -\dfrac{6}{5}$.

Vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat yhdensuuntaiset, kun $t = -\dfrac{6}{5}$.

Vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa, kun niiden välinen pistetulo on 0 eli $\overline{a} \cdot \overline{b} = 0$.

$$\begin{aligned} \overline{a} \cdot \overline{b} &= 0 \\ (5\overline{i} - 2\overline{j}) \cdot (3\overline{i} + t\overline{j}) &= 0 \\ 15 - 2t &= 0 \\ t &= \frac{15}{2} \end{aligned}$$

Vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ ovat kohtisuorat, kun $t = \dfrac{15}{2}$.

533. Olkoon piste $P = (x, y)$. Piste $A = (1, 2)$, joten $\overline{AB} = (x-1)\overline{i} + (y-2)\overline{j}$.

Kulma OAB on suora, kun vektorit $\overline{AB}$ ja $\overline{AO}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. $\overline{AB}$ ja $\overline{AO}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan myös silloin, kun vektorin $\overline{AO}$ vastavektori $\overline{OA}$ ja $\overline{AB}$ ovat kohtisuorassa. Tällöin vektoreiden välinen pistetulo on 0 eli

$$\begin{aligned}
\overline{AB}\cdot\overline{OA} &= 0\\
((x-1)\overline{i} + (y-2)\overline{j})\cdot(\overline{i} + 2\overline{j}) &= 0\\
(x-1)\cdot 1 + (y-2)\cdot 2 &= 0\\
x + 2y - 5 &= 0
\end{aligned}$$

Vektorin $\overline{OA}$ pituus on $|\overline{OA}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ ja vektorin $\overline{OB}$ pituus on $|\overline{OB}| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Koska vektorin $\overline{OB}$ pituus on kaksi kertaa vektorin $\overline{OA}$ pituus, on $|\overline{OB}| = 2\cdot|\overline{OA}|$ eli $\sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{5}$. Muodostuu yhtälöpari

$$\begin{cases} x + 2y - 5 = 0\\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases}$$

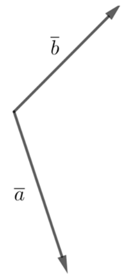
Yhtälöparin ratkaisut ovat
$x = 1 - 2\sqrt{3}$ ja $y = 2 + \sqrt{3}$ tai $x = 1 + 2\sqrt{3}$ ja $y = 2 - \sqrt{3}$, joten

$B = (1 - 2\sqrt{3},\ 2 + \sqrt{3})$ tai $B = (1 + 2\sqrt{3},\ 2 - \sqrt{3})$.

534. **a)** Jos vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ asetetaan alkamaan samasta pisteestä ovat $-\overline{b}+\overline{a}$ ja $-\overline{a}+\overline{b}$ mahdollisia sivuvektoreita. Siis

$\overline{c}=-\overline{b}+\overline{a}=-(2\overline{i}+2\overline{j})+(\overline{i}-3\overline{j})=-\overline{i}-5\overline{j}$ tai

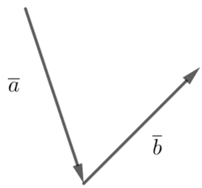
$\overline{c}=-\overline{a}+\overline{b}=-(-\overline{b}+\overline{a})=\overline{i}+5\overline{j}$.



Jos vektori $\overline{b}$ asetetaan alkamaan vektorin $\overline{a}$ loppupisteestä, ovat vektorit $\overline{a}+\overline{b}$ ja $-\overline{b}-\overline{a}$ mahdollisia sivuvektoreita. Siis

$\overline{c}=\overline{a}+\overline{b}=(\overline{i}-3\overline{j})+(2\overline{i}+2\overline{j})=3\overline{i}-\overline{j}$ tai

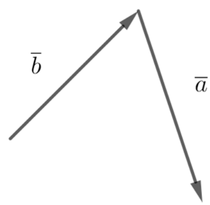
$\overline{c}=-\overline{b}-\overline{a}=-3\overline{i}+\overline{j}$.



Jos vektori $\overline{a}$ asetetaan alkamaan vektorin $\overline{b}$ loppupisteestä, ovat vektorit $\overline{b}+\overline{a}$ ja $-\overline{a}-\overline{b}$ mahdollisia sivuvektoreita. Siis

$\overline{c}=\overline{b}+\overline{a}=(2\overline{i}+2\overline{j})+(\overline{i}-3\overline{j})=3\overline{i}-\overline{j}$ tai

$\overline{c}=-\overline{a}-\overline{b}=-3\overline{i}+\overline{j}$.



Vektoreista $\overline{a},\overline{b}$ ja $\overline{c}$ voidaan muodostaa kolmio, kun

$\overline{c}=\overline{i}+5\overline{j}$, $\overline{c}=-\overline{i}-5\overline{j}$, $\overline{c}=3\overline{i}-\overline{j}$ ja $\overline{c}=-3\overline{i}+\overline{j}$

b) Pisteen P y- ja z-koordinaatit ovat 0, joten $P = (x, 0, 0)$.
Jana AB näkyy suorassa kulmassa, jos kulma P on suora eli jos vektorit $\overline{PA}$ ja $\overline{PB}$ ovat kohtisuorassa. Näin tapahtuu, kun $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = 0$ eli kun

$$((2-x)\overline{i} + (3-0)\overline{j} + (-4-0)\overline{k}) \cdot ((4-x)\overline{i} + (0-0)\overline{j} + (1-0)\overline{k}) = 0$$
$$((2-x)\overline{i} + 3\overline{j} - 4\overline{k}) \cdot ((4-x)\overline{i} + \overline{k}) = 0$$
$$(2-x)(4-x) - 4 = 0$$
$$8 - 6x + x^2 - 4 = 0$$
$$x^2 - 6x + 4 = 0$$

Yhtälön $x^2 - 6x + 4 = 0$ ratkaisut ovat $x = 3 - \sqrt{5}$ ja $x = 3 + \sqrt{5}$.

Jana AB näkyy suorassa kulmassa pisteissä $P = (3 - \sqrt{5}, 0)$ ja $P = (3 + \sqrt{5}, 0)$.

535. Paikkavektorin $\overline{r} = (2t-1)\overline{i} + (3t+\frac{1}{2})\overline{j}$ loppupiste on $(2t-1, 3t+\frac{1}{2})$.

Tämä piste on paraabelilla $y = \frac{1}{2}x^2$, jos se toteuttaa paraabelin yhtälön.

Muodostetaan ja ratkaistaan syntyvä yhtälö.

$$\begin{aligned}
y &= \frac{1}{2}x^2 \\
3t + \frac{1}{2} &= \frac{1}{2}(2t-1)^2 \quad \| \cdot 2 \\
6t + 1 &= 4t^2 - 4t + 1 \\
4t^2 - 10t &= 0 \\
2t(2t-5) &= 0 \\
2t = 0 \quad &\text{tai} \quad 2t - 5 = 0 \\
t = 0 \quad &\text{tai} \quad t = \frac{5}{2}
\end{aligned}$$

Loppupiste on paraabelilla, jos $t = 0$ tai jos $t = \frac{5}{2}$.

Näitä t:n arvoja vastaa paikkavektorit

$\overline{r} = (2\cdot 0 - 1)\overline{i} + (3\cdot 0 + \frac{1}{2})\overline{j} = -\overline{i} + \frac{1}{2}\overline{j}$ ja

$\overline{r} = (2\cdot \frac{5}{2} - 1)\overline{i} + (3\cdot \frac{5}{2} + \frac{1}{2})\overline{j} = 4\overline{i} + 8\overline{j}$.

Vektoreiden $-\overline{i} + \frac{1}{2}\overline{j}$ ja $4\overline{i} + 8\overline{j}$ välinen kulma saadaan pistetulon avulla.

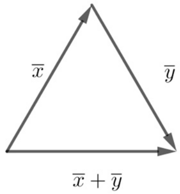
$$|-\overline{i} + \frac{1}{2}\overline{j}| = \sqrt{1^2 + (\frac{1}{2})^2} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$|4\overline{i} + 8\overline{j}| = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

$$(-\overline{i} + \frac{1}{2}\overline{j}) \cdot (4\overline{i} + 8\overline{j}) = -4 + 4 = 0$$

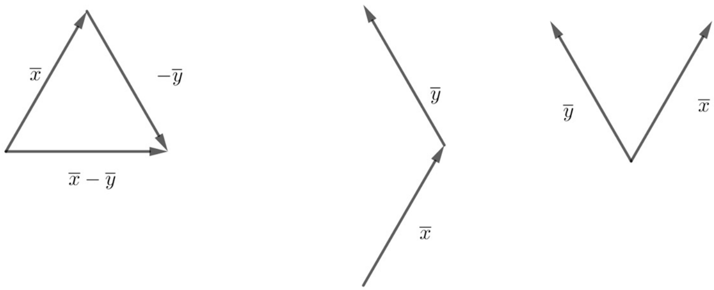
Vektoreiden välinen kulma on 90°.

536. **a)** Jos vektoreilla $\overline{x}$, $\overline{y}$ ja $\overline{x}+\overline{y}$ on sama pituus, muodostavat ne tasasivuisen kolmion.



Jos $\overline{x}$ ja $\overline{y}$ asetetaan alkamaan samasta pisteestä, muodostuu niiden välille 120° suuruinen kulma (kulman 60° vieruskulma).

b) Jos vektoreilla $\overline{x}$, $\overline{y}$ ja $\overline{x}-\overline{y}$ on sama pituus, muodostavat ne tasasivuisen kolmion.



Jos $\overline{x}$ ja $\overline{y}$ asetetaan alkamaan samasta pisteestä, muodostuu niiden välille 60° suuruinen kulma.

537. Vektori $2\overline{i}+3\overline{j}$ on suoran normaalivektori. Vektoria $2\overline{i}+3\overline{j}$ vastaa kulmakerroin $k_n=\frac{3}{2}$. Jos suoran suuntavektoria vastaa kulmakerroin k, toteuttavat kulmakertoimet k ja k_n yhtälön $k\cdot k_n=-1$, josta $k=-\frac{2}{3}$.

Suoran yhtälö on $y - y_0 = k(x - x_0)$, kun $(x_0, y_0) = (3, 1)$ ja $k=-\frac{2}{3}$. Siten

$$
\begin{aligned}
y-3&=-\frac{2}{3}(x-1) \quad \| \cdot 3\\
3y-9&=-2(x-1)\\
3y-9&=-2x+2\\
2x+3y-11&=0
\end{aligned}
$$

Pisteen (2, 2) etäisyys suorasta $2x + 3y - 11 = 0$ saadaan kaavalla

$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$, missä $a = 2$, $b = 3$ ja $(x_0, y_0) = (2, 2)$. Siten

$$d=\frac{|2\cdot 2+3\cdot 2-11|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{1}{\sqrt{13}}.$$

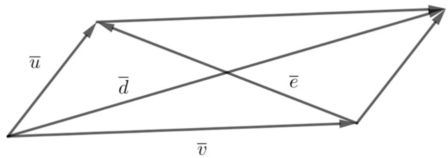
Huomautus (toinen tapa suoran yhtälön määrittämiseksi):
Jos xy-tason suoran normaalivektori on $a\overline{i}+b\overline{j}$, suoran normaalimuotoinen yhtälö on $ax + by + c = 0$ jollakin c. Vakio c saadaan selville sijoittamalla yhtälöön jokin tunnettu suoran piste ja ratkaisemalla c tästä yhtälöstä.

Tässä tehtävässä yhtälö on siis $2x + 3y + c = 0$. Koska piste (3, 1) on suoralla, syntyy yhtälö $2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + c = 0$, josta $c = -11$. Suoran normaalimuotoinen yhtälö on siis $2x + 3y + 11 = 0$.

538. Suunnikkaan lävistäjien leikkauspiste puolittaa lävistäjät. Jos suunnikkaan sivuvektorit ovat $\overline{u}$ ja $\overline{v}$, niin

$\overline{u} = \frac{1}{2}\overline{d} + \frac{1}{2}\overline{e} = \frac{1}{2}(12\overline{i} + 8\overline{j}) + \frac{1}{2}(4\overline{i} - 6\overline{j}) = 6\overline{i} + 4\overline{j} + 2\overline{i} - 3\overline{j} = 8\overline{i} + \overline{j}$ ja

$\overline{v} = \frac{1}{2}\overline{d} - \frac{1}{2}\overline{e} = \frac{1}{2}(12\overline{i} + 8\overline{j}) - \frac{1}{2}(4\overline{i} - 6\overline{j}) = 6\overline{i} + 4\overline{j} - 2\overline{i} + 3\overline{j} = 4\overline{i} + 7\overline{j}.$



Koska $|\overline{u}| = \sqrt{8^2 + 1^2} = \sqrt{65}$ ja $|\overline{v}| = \sqrt{4^2 + 7^2} = \sqrt{65}$, ovat suunnikkaan sivuvektorit ja siten myös kaikki sivut yhtä pitkä ja suunnikas on neljäkäs.

539. Suoran kulmakerroin on $k=-\frac{2}{3}$, joten suoran yhtälö on $y=-\frac{2}{3}x+b$ jollakin vakiolla b. Suora leikkaa y-akselin pisteessä (0, b). Suoran ja x-akselin leikkauspiste saadaan yhtälöstä $-\frac{2}{3}x+b=0$, josta $x=\frac{3b}{2}$.

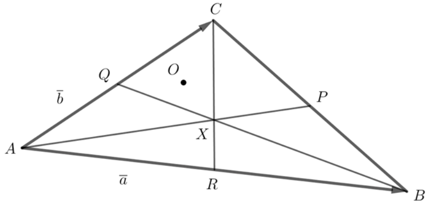
Kolmion pinta-ala on siis toisaalta $\frac{1}{2}\cdot|b|\cdot|\frac{3b}{2}|$ ja toisaalta tiedetään, että se on 15. Syntyy siis yhtälö $\frac{1}{2}\cdot|b|\cdot|\frac{3b}{2}|=15$. Ratkaistaan tästä vakio b.

$$\frac{1}{2}\cdot|b|\cdot|\frac{3b}{2}|=15$$
$$\frac{1}{2}\cdot|b|\cdot|\frac{3}{2}b|=15$$
$$\frac{1}{2}\cdot|b|\cdot|\frac{3}{2}|\cdot|b|=15$$
$$\frac{3}{4}\cdot|b|\cdot|b|=15 \quad \|\cdot\frac{4}{3}$$
$$|b^2|=20$$
$$b^2=20$$
$$b=\pm2\sqrt{5}$$

Siis $y=-\frac{2}{3}x+2\sqrt{5}$ eli $2x + 3y - 6\sqrt{5}$ tai

$y=-\frac{2}{3}x-2\sqrt{5}$ eli $2x + 3y + 6\sqrt{5}$.

540. Janat AP, CR ja BQ ovat kolmion mediaanit ja ne leikkaavat toisensa samassa pisteessä joka jakaa jokaisen kolmion kärjestä lukien suhteessa 2:1. Merkitään leikkauspistettä kirjaimella X.



Nyt $\overline{AX} = \frac{2}{3}\overline{AP}$ ja $\overline{XP} = \frac{1}{3}\overline{AP}$, $\overline{BX} = \frac{2}{3}\overline{BQ}$ ja $\overline{XQ} = \frac{1}{3}\overline{BQ}$ sekä $\overline{CX} = \frac{2}{3}\overline{CR}$ ja $\overline{XR} = \frac{1}{3}\overline{CR}$.

$$\begin{aligned}\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC} &= (\overline{OX}+\overline{XA})+(\overline{OX}+\overline{XB})+(\overline{OX}+\overline{XC})\\ &= 3\overline{OX}+\overline{XA}+\overline{XB}+\overline{XC}\\ &= 3\overline{OX}-\frac{2}{3}\overline{AP}-\frac{2}{3}\overline{BQ}-\frac{2}{3}\overline{CR}\\ &= 3\overline{OX}-\frac{2}{3}(\overline{AP}+\overline{BQ}+\overline{CR})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{OP}+\overline{OQ}+\overline{OR} &= (\overline{OX}+\overline{XP})+(\overline{OX}+\overline{XQ})+(\overline{OX}+\overline{XR})\\ &= 3\overline{OX}+\overline{XP}+\overline{XQ}+\overline{XR}\\ &= 3\overline{OX}+\frac{1}{3}\overline{AP}+\frac{1}{3}\overline{BQ}+\frac{1}{3}\overline{CR}\\ &= 3\overline{OX}+\frac{1}{3}(\overline{AP}+\overline{BQ}+\overline{CR})\end{aligned}$$

Tarkastellaan mitä on summa $\overline{AP}+\overline{BQ}+\overline{CR}$. Kun merkitään $\overline{AB}=\bar{a}$ ja $\overline{AC}=\bar{b}$ saadaan

$$\begin{aligned}\overline{AP}+\overline{BQ}+\overline{CR} &= (\bar{a}+\frac{1}{2}\overline{BC})+(-\bar{a}+\frac{1}{2}\bar{b})+(-\bar{b}+\frac{1}{2}\bar{a})\\ &= \bar{a}+\frac{1}{2}(-\bar{a}+\bar{b})-\bar{a}+\frac{1}{2}\bar{b}-\bar{b}+\frac{1}{2}\bar{a}\\ &= \bar{0}.\end{aligned}$$

Siis $\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=3\overline{OX}$ ja $\overline{OP}+\overline{OQ}+\overline{OR}=3\overline{OX}$, joten vektorisummat ovat yhtä suuret.

541. **a)** $\overline{a}\cdot\overline{b}=|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\cos(\overline{a},\overline{b})=4\cdot2\cdot\cos 90°=8\cdot0=0$

b) $\overline{a}\cdot\overline{d}=|\overline{a}|\cdot|\overline{d}|\cdot\cos(\overline{a},\overline{d})=4\cdot4\cdot\cos 180°=16\cdot(-1)=-16$

c) Koska $|\overline{c}|=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}$, on

$$\overline{a}\cdot\overline{c}=|\overline{a}|\cdot|\overline{c}|\cdot\cos(\overline{a},\overline{c})=4\cdot\sqrt{20}\cdot\frac{4}{\sqrt{20}}=16.$$

542. **a)** Paraabelia siirretään kaksi yksikköä ylöspäin. Näin tapahtuu, kun käyrän jokaisen pisteen y-koordinaattiin lisätään luku 2 eli pisteestä $(x, y) = (x, x^2)$ tulee piste $(x, x^2 + 2)$. Käyrän yhtälö on $y = x^2 + 2$.

b) Paraabelia siirretään kolme yksikköä oikealle. Näin tapahtuu, kun käyrän jokaiseen x-koordinaattiin lisätään luku 3 eli pisteestä $(x, y) = (x, x^2)$ tulee piste $(x + 3, x^2)$. Tämä on luontevampi esittää muodossa $(x, (x - 3)^2)$ eli käyrän yhtälö on $y = (x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$.

c) Yhdistetään a- ja b-kohdan päättelyt, jolloin käyrän yhtälö on $y = (x - 3)^2 + 2 = x^2 - 6x + 11$.

543. Vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ voidaan asettaa alkamaan mistä pisteestä tahansa, joten valitaan origo. Vektorien $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ päätepisteet ovat nyt $(1, 1)$ ja $(-2, -3)$. Näiden pisteiden kautta piirretyn suoran kulmakerroin on $k=\frac{-3-1}{-2-1}=\frac{-4}{-3}=\frac{4}{3}$ ja yhtälö $y-1=\frac{4}{3}(x-1)$, joka normaalimuodossa on $4x - 3y - 1 = 0$. Lasketaan origon etäisyys tästä suorasta, jolloin saadaan kysytyn korkeusjanan pituus.

$$\frac{|4\cdot0-3\cdot0-1|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{1}{5}$$

Korkeus janan pituus on $\frac{1}{5}$.

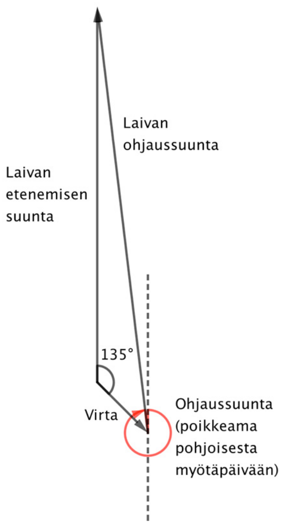
544. Koska vektori $2\overline{i}-\overline{j}+t(\overline{i}+2\overline{j})$ alkaa origosta kyseessä on paikkavektori. Määritetään sen päätepiste (x, y).

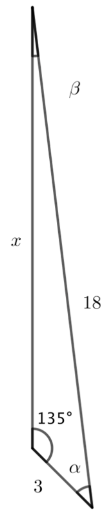
$$2\overline{i}-\overline{j}+t(\overline{i}+2\overline{j})=2\overline{i}-\overline{j}+t\overline{i}+2t\overline{j}=(2+t)\overline{i}+(-1+2t)\overline{j}$$

Siten päätepisteen koordinaatit ovat
$x = 2 + t$ ja $y = -1 + 2t$.

Koska $t = x - 2$, on
$y = -1 + 2(x - 2)$ eli $2x - y - 5 = 0$.

545. Laivaa täytyy ohjata likimain pohjoiseen, pohjoisesta hieman luodetta kohti. Jos merivirtaa kuvaavan suuntavektorin päätepisteestä piirretään vektori, joka kuvaa laivan oikeaa ohjaussuuntaa ja yhdistetään virran alkupiste sekä ohjaussuunnan loppupiste, syntyy kolmio, jonka kolmas sivu on laivan etenemisen suunta eli pohjoisen suunta. Tässä kolmiossa on yksi 135° kulma (90° + 45°). Merivirtaa kuvaavan vektorin pituus on 3 ja laivan ohjaussuuntaa kuvaavan vektorin pituus on 18.





Syntyvästä kolmiosta voidaan ratkaista kulma β sinilauseella:

$\dfrac{3}{\sin\beta} = \dfrac{18}{\sin 135°}$, josta $\beta = 6{,}768...°$

Siten $\alpha = 180° - 135° - \beta = 38{,}231...° \approx 38°$.

Ohjaussuunnan poikkeama pohjoisen suunnasta vastapäivään on $90° - 45° - 38° = 7°$, joten kompassisuunta on $360° - 7° = 353°$.

Laivan etenemisen nopeus eli x saadaan esimerkiksi kosinilauseella yhtälöstä $x^2 = 3^2 + 18^2 - 2 \cdot 3 \cdot 18 \cdot \cos 38{,}231...°$, josta $x = 15{,}75... \approx 16$.

On ohjattava suuntaan 353°, jolloin laiva etenee pohjoista kohti 16 solmun vauhdilla.

546. Tetraedri on säännöllinen, jos sen kaikki särmät ovat yhtä pitkät.
Lasketaan särmävektoreiden pituudet.

$$|\overline{a}| = |\overline{i} + \sqrt{2}\overline{j} + \overline{k}| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$|\overline{b}| = |-\overline{i} + \sqrt{2}\overline{j} + \overline{k}| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$|\overline{c}| = \left|\frac{2}{3}(2\sqrt{2}\overline{j} - \overline{k})\right| = \left|\frac{4\sqrt{2}}{3}\overline{j} - \frac{2}{3}\overline{k}\right|$$
$$= \sqrt{(\frac{4\sqrt{2}}{3})^2 + (-\frac{2}{3})^2} = \sqrt{\frac{32}{9} + \frac{4}{9}} = 2$$

Muodostetaan kolme muuta särmävektoria.

$$\overline{d} = -\overline{a} + \overline{b} = -(\overline{i} + \sqrt{2}\overline{j} + \overline{k}) + (-\overline{i} + \sqrt{2}\overline{j} + \overline{k}) = -2\overline{i}$$

$$\overline{e} = -\overline{b} + \overline{c} = -(-\overline{i} + \sqrt{2}\overline{j} + \overline{k}) + \frac{2}{3}(2\sqrt{2}\overline{j} - \overline{k})$$
$$= \overline{i} - \sqrt{2}\overline{j} - \overline{k} + \frac{4\sqrt{2}}{3}\overline{j} - \frac{2}{3}\overline{k} = \overline{j} + \frac{\sqrt{2}}{3}\overline{j} - \frac{5}{3}\overline{k}$$

$$\overline{f} = -\overline{a} + \overline{c} = -(\overline{i} + \sqrt{2}\overline{j} + \overline{k}) + \frac{4\sqrt{2}}{3}\overline{j} - \frac{2}{3}\overline{k}$$
$$= -\overline{i} - \sqrt{2}\overline{j} - \overline{k} + \frac{4\sqrt{2}}{3}\overline{j} - \frac{2}{3}\overline{k} = -\overline{i} + \frac{\sqrt{2}}{3}\overline{j} - \frac{5}{3}\overline{k}$$

Lasketaan näiden pituudet.

$$|\overline{d}| = |-2\overline{i}| = 2$$
$$|\overline{e}| = |\overline{j} + \frac{\sqrt{2}}{3}\overline{j} - \frac{5}{3}\overline{k}| = \sqrt{1^2 + (\frac{\sqrt{2}}{3})^2 + (-\frac{5}{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$
$$|\overline{f}| = |-\overline{i} + \frac{\sqrt{2}}{3}\overline{j} - \frac{5}{3}\overline{k}| = \sqrt{(-1)^2 + (\frac{\sqrt{2}}{3})^2 + (-\frac{5}{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$

Koska jokainen särmävektori on yhtä pitkä, on tetraedri säännöllinen.

Huomatus:
Pelkästään annettujen vektorien $\overline{a}$, $\overline{b}$ ja $\overline{c}$ pituuksien laskeminen ei riitä.

547. Koska vektori $\overline{b}$ on yhdensuuntainen vektorin $\overline{i}$ kanssa, on $\overline{b} = x\overline{i}$ jollakin reaaliluvulla x.

Olkoon $\overline{a} = y\overline{i} + z\overline{j}$, missä y ja z ovat jotkin reaaliluvut.

Koska $\overline{a} + \overline{b} = 4\overline{i} + \overline{j}$, saadaan yhtälö:

$$\begin{aligned} \overline{a} + \overline{b} &= 4\overline{i} + \overline{j} \\ (y\overline{i} + z\overline{j}) + x\overline{i} &= 4\overline{i} + \overline{j} \\ (x + y)\overline{i} + z\overline{j} &= 4\overline{i} + \overline{j} \end{aligned}$$

Tästä syntyy yhtälöpari

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ z = 1. \end{cases}$$

Koska $\overline{a} \cdot \overline{b} = 4$, niin $(y\overline{i} + z\overline{j}) \cdot x\overline{i} = 4$, josta $xy = 4$.

$x + y = 4$, josta $y = 4 - x$

Yhtälö $xy = 4$ saa muodon $x(4 - x) = 4$ ja edelleen $-x^2 + 4x - 4 = 0$.

$$\begin{aligned} -x^2 + 4x - 4 &= 0 \qquad \| \cdot (-1) \\ x^2 - 4x + 4 &= 0 \\ (x - 2)^2 &= 0 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Koska $x = 2$, on $y = 4 - 2 = 2$.

Kysytyt vektorit ovat $\overline{a} = 2\overline{i} + \overline{k}$ ja $\overline{b} = 2\overline{i}$.

548. Tasojen välinen kulma on enintään 90° ja se määritetään tasojen normaalivektoreiden välisen kulman avulla.

Tason $2x + y - z + 1 = 0$ eräs normaalivektori on $\overline{n}_1 = 2\overline{i} + \overline{j} - \overline{k}$.
Tason $6x + 3y + 2z - 10 = 0$ eräs normaalivektori on $\overline{n}_2 = 6\overline{i} + 3\overline{j} + 2\overline{k}$.

Lasketaan vektoreiden $\overline{n}_1$ ja $\overline{n}_2$ välinen kulma.

$$\cos\alpha = \frac{\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2}{|\overline{n}_1| \cdot |\overline{n}_2|}$$
$$\cos\alpha = \frac{12 + 3 - 2}{\sqrt{4+1+1} \cdot \sqrt{36+9+4}}$$
$$\cos\alpha = \frac{13}{\sqrt{6} \cdot 7}$$
$$\cos\alpha = 0{,}7581...$$
$$\alpha = 40{,}696...° \approx 40{,}7°$$

Tasojen välinen kulma on 40,7°

Huomautus:
Jos normaalivektoreiden välinen kulma on suurempi kuin 90°, osoittavat ne eri puolille tasoja. Tasojen välinen kulma saadaan tällöin vähentämällä tästä kulmasta 90°. Hahmottele kuva!

549. Vektori $\overline{u} = t\overline{b}$ jollekin luvulle t ja $\overline{v} \cdot \overline{b} = 0$. Lisäksi on oltava $\overline{a} = \overline{u} + \overline{v}$, josta $\overline{v} = \overline{a} - \overline{u} = \overline{a} - t\overline{b}$.

Sijoitetaan $\overline{v} = \overline{a} - t\overline{b}$ yhtälöön $\overline{v} \cdot \overline{b} = 0$ ja ratkaistaan t.

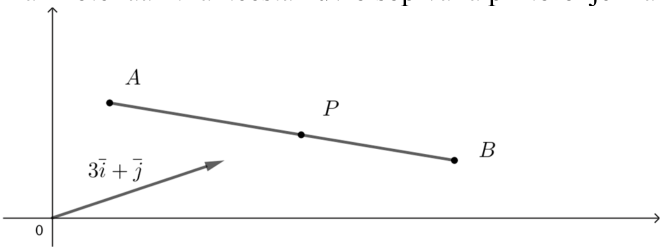
$$\begin{aligned} \overline{v} \cdot \overline{b} &= 0 \\ (\overline{a} - t\overline{b}) \cdot \overline{b} &= 0 \\ \overline{a} \cdot \overline{b} - t\overline{b} \cdot \overline{b} &= 0 \\ (8 - 5 - 6) - t(4 + 1 + 4) &= 0 \\ -3 - 9t &= 0 \\ t &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Siis $\overline{a} = \overline{u} + \overline{v}$, missä

$\overline{u} = t\overline{b} = -\frac{1}{3}\overline{b} = -\frac{1}{3}(2\overline{i} + \overline{j} - 2\overline{k}) = -\frac{2}{3}\overline{i} - \frac{1}{3}\overline{j} + \frac{2}{3}\overline{k}$ ja

$\overline{v} = \overline{a} - \overline{u} = (4\overline{i} - 5\overline{j} + 3\overline{k}) - (-\frac{2}{3}\overline{i} - \frac{1}{3}\overline{j} + \frac{2}{3}\overline{k}) = \frac{14}{3}\overline{i} - \frac{14}{3}\overline{j} + \frac{7}{3}\overline{k}$.

550. Hahmotellaan tilanteesta kuvio sopivalla piirto-ohjelmalla.



Lausutaan $\overline{OP}$ aluksi eri tavoilla.
Toisaalta

$$\begin{aligned}\overline{OP} &= \overline{OA}+\overline{AP}\\ &= (\overline{i}+2\overline{j})+r\cdot\overline{AB}\\ &= (\overline{i}+2\overline{j})+r\cdot((7-1)\overline{j}+(1-2)\overline{j})\\ &= \overline{i}+2\overline{j}+6r\overline{j}-r\overline{j}\\ &= (1+6r)\overline{i}+(2-r)\overline{j},\end{aligned}$$

missä r on jokin reaaliluku.

Toisaalta $\overline{OP}=t(3\overline{i}+\overline{j})=3t\overline{i}+t\overline{j}$, missä t on jokin reaaliluku.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan r ja t. Luku r on kysytty janan AB jakosuhde.

$$(1+6r)\overline{i}+(2-r)\overline{j}=3t\overline{i}+t\overline{j}$$

Komponentteihinjako on yksikäsitteinen, joten $1 + 6r = 3t$ ja $2 - r = t$.
Ratkaistaan syntyvä yhtälöpari.

$$\begin{cases}1+6r=3t\\ 2-r=t \qquad \| \cdot(-3)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\;\;1+6r=3t\\ -6+3r=-3t\end{cases}$$

$$\begin{aligned}-5+9r&=0\\ r&=\frac{5}{9}\end{aligned}$$

Kertoimesta $r=\dfrac{5}{9}$ nähdään jako-osien yhteismäärä 9, AP:n jako-osien lukumäärä 5 sekä PB:n jako-osien lukumäärä 4, joten suhde on 5:4.

551. Vektorin $4\overline{i}+3\overline{j}$ pituus on $\sqrt{4^2+3^2}=5,$ joten ensin siirrytään vektorin $2\cdot\frac{4\overline{i}+3\overline{j}}{5}=\frac{2}{5}(4\overline{i}+3\overline{j})=\frac{8}{5}\overline{i}+\frac{6}{5}\overline{j}$ verran.

Vektorin $5\overline{i}-12\overline{j}$ pituus on $\sqrt{5^2+(-12)^2}=13,$ joten tämän jälkeen siirrytään vektorin
$t\cdot\frac{5\overline{i}-12\overline{j}}{13}=\frac{t}{13}(5\overline{i}-12\overline{j})=\frac{5}{13}t\overline{i}-\frac{12}{13}t\overline{j}$ verran.

Olkoon kysytty piste $P = (x, y)$, jolloin
$\overline{OP}=\frac{8}{5}\overline{i}+\frac{6}{5}\overline{j}+\frac{5}{13}t\overline{i}-\frac{12}{13}t\overline{j}=(\frac{8}{5}+\frac{5}{13}t)\overline{i}+(\frac{6}{5}-\frac{12}{13}t)\overline{j}.$

On siis $x=\frac{8}{5}+\frac{5}{13}t$ ja $y=\frac{6}{5}-\frac{12}{13}t.$ Kyseessä on suoran yhtälö, joka voidaan esittää yhtälöparina

$$\begin{cases} x=\frac{8}{5}+\frac{5}{13}t \\ y=\frac{6}{5}-\frac{12}{13}t, \end{cases}$$

josta voidaan lukea eräs suoran piste $(\frac{8}{5},\frac{6}{5})$ sekä suuntavektori

$\frac{5}{13}\overline{i}-\frac{12}{13}\overline{j}.$

Suuntavektoria vastaa kulmakerroin $k=-\frac{12}{13}:\frac{5}{13}=-\frac{12}{13}\cdot\frac{13}{5}=-\frac{12}{5}.$

Suoran yhtälö on siten

$$y-y_0=k(x-x_0)$$
$$y-\frac{6}{5}=-\frac{12}{5}(x-\frac{8}{5})$$
$$60x+25y-126=0$$

552. **a)** Tason yhtälö on $ax + by + cz + d = 0$, missä a, b, c ja d ovat jotkin vakiot. Tason $ax + by + cz + d = 0$ ja xy-tason leikkaussuora on $ax + by + d = 0$, sillä xy-tason pisteillä $z = 0$.
Siten kyseessä olevan tason yhtälössä $a = 1$, $b = 2$ ja $d = -3$ eli yhtälö on $x + 2y + cz - 3 = 0$.

Tuntematon vakio c saadaan ratkaisua sen tiedon perusteella, että piste $(2, 4, 6)$ toteuttaa yhtälön eli yhtälö $2 + 2 \cdot 4 + c \cdot 6 - 3 = 0$ tosi. Tästä saadaan, että $c = -\frac{7}{6}$. Tason yhtälö on siis $x + 2y - \frac{7}{6}z - 3 = 0$ eli $6x + 12y - 7z - 18 = 0$.

b) Jokaisessa x-akselin pisteessä $y = 0$ ja $z = 0$. Sijoitetaan nämä luvut tason yhtälöön, jolloin saadaan $6x - 18 = 0$ eli $x = 3$.
Taso leikkaa x-akselin pisteessä $(3, 0, 0)$.

y-akselin leikkauspisteessä $x = 0$ ja $z = 0$, joten $12y - 18 = 0$, josta $y = \frac{3}{2}$. Taso leikkaa y-akselin pisteessä $(0, \frac{3}{2}, 0)$.

z-akselin leikkauspisteessä $x = 0$ ja $y = 0$, joten $-7z - 18 = 0$, josta $z = -\frac{18}{7}$. Taso leikkaa z-akselin pisteessä $(0, 0, -\frac{18}{7})$.

553. Suora on kohtisuorassa tasoa vastaan, jos se on kohtisuorassa kahta tason erisuuntaista vektoria vastaan. Muodostetaan suoran suuntavektori.

$$\overline{s} = (4-2)\overline{i} + (\frac{1}{2} - 11\frac{1}{2})\overline{j} + (-1-2)\overline{k} = 2\overline{i} - 11\overline{j} - 3\overline{k}$$

Muodostetaan kaksi pisteestä (1, 1, 1) lähtevää erisuuntaista tason vektoria $\overline{u}$ ja $\overline{v}$.

$$\overline{u} = (5-1)\overline{i} + (2-1)\overline{j} + (0-1)\overline{k} = 4\overline{i} + \overline{j} - \overline{k}$$

$$\overline{v} = (4-1)\overline{i} + (1-1)\overline{j} + (3-1)\overline{k} = 3\overline{i} + 2\overline{k}$$

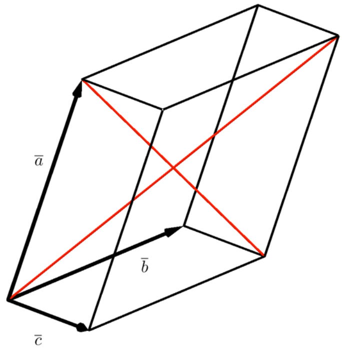
Lasketaan vektorien $\overline{u}$ ja $\overline{s}$ sekä $\overline{v}$ ja $\overline{s}$ välinen pistetulo.

$$\overline{s} \cdot \overline{u} = (2\overline{i} - 11\overline{j} - 3\overline{k}) \cdot (4\overline{i} + \overline{j} - \overline{k}) = 8 - 11 + 3 = 0$$

$$\overline{s} \cdot \overline{v} = (2\overline{i} - 11\overline{j} - 3\overline{k}) \cdot (3\overline{i} + 2\overline{k}) = 6 - 6 = 0$$

Koska pistetulot ovat nollia, on suoran suuntavektori kohtisuorassa kahta tasolla olevaa vektoria vastaan ja siten myös tasoa vastaan.

554. Piirretään tilannetta havainnollistava kuva.



Lävistäjävektorit ovat

$$\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}=(2\overline{i}+\overline{j}+4\overline{k})+(-\overline{i}+3\overline{j}+\overline{k})+(3\overline{i}+\overline{j})=4\overline{i}+4\overline{j}+4\overline{k}$$

ja

$$-\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}=-(2\overline{i}+\overline{j}+4\overline{k})+(-\overline{i}+3\overline{j}+\overline{k})+(3\overline{i}+\overline{j})=3\overline{j}-3\overline{k}.$$

Lasketaan lävistäjävektoreiden pistetulo.

$$(4\overline{i}+4\overline{j}+4\overline{k})\cdot(3\overline{j}-3\overline{k})=12-12=0$$

Koska lävistäjävektoreiden pistetulo on 0, ovat ne kohtisuorassa.

555. Lasketaan kolmion sivuvektoreiden $\overline{a}$, $\overline{b}$ ja $-\overline{a}+\overline{b}$ pituudet.

$|\overline{a}|=|t\overline{i}+2\overline{j}|=\sqrt{t^2+4}$

$|\overline{b}|=|-2\overline{i}+(t-2)\overline{j}|=\sqrt{4+(t-2)^2}=\sqrt{4+t^2-4t+4}=\sqrt{t^2-4t+8}$

$$
\begin{aligned}
&|-\overline{a}+\overline{b}|\\
&=|-(t\overline{i}+2\overline{j})+(-2\overline{i}+(t-2)\overline{j})|\\
&=|(-t-2)\overline{i}+(t-4)\overline{j}|\\
&=\sqrt{(-t-2)^2+(t-4)^2}\\
&=\sqrt{t^2+4t+4+t^2-8t+16}\\
&=\sqrt{2t^2-4t+20}
\end{aligned}
$$

Koska $t^2 - 4t + 8 \le 2t^2 - 4t + 8 < 2t^2 - 4t + 20$, on $|-\overline{a}+\overline{b}|>|\overline{b}|$.
Koska $t^2 + 4 \le t^2 + 4 + (t-2)^2 = 2t^2 - 4t + 8 < 2t^2 - 4t + 20$, on $|-\overline{a}+\overline{b}|>|\overline{a}|$.

Koska vektori $-\overline{a}+\overline{b}$ on pidempi kuin kumpikaan vektoreista $\overline{a}$ ja $\overline{b}$, on kolmion kolmas sivu pisin.

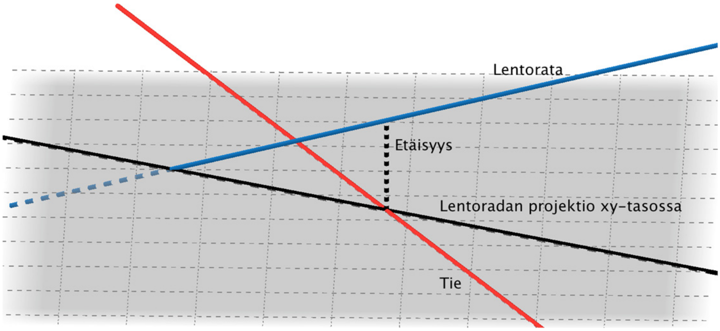
556. Lentokoneen lentorataa vastaan suoran yhtälö parametrimuodossa on

$$\begin{cases} x = 1500 - 20t \\ y = 2000 + 10t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 0 + 3t \end{cases}$$

Lentokone ylittää maantien, kun lentokoneen lentoradan projektio *xy*-tasossa ja suora $2x + y = 200$ leikkaavat.

Lentoradan projektio on xy-tason suora, joka saadaan asettamalla lentoradan z-koordinaatti nollaksi.

$$\begin{cases} x = 1500 - 20t \\ y = 2000 + 10t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$



557. Määritetään aluksi $|\overline{AP}|$ ja $|\overline{BP}|$.

$|\overline{AP}| = \sqrt{(x-(-2))^2+(y-0)^2} = \sqrt{(x+2)^2+y^2} = \sqrt{x^2+4x+4+y^2}$

$$\begin{aligned}|\overline{BP}| &= \sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}\\ &= \sqrt{x^2-4x+4+y^2-6y+9}\\ &= \sqrt{x^2+y^2-4x-6y+13}\end{aligned}$$

Ehdosta $|\overline{AP}| \le 2|\overline{BP}|$ saadaan

$\sqrt{x^2+4x+4+y^2} \le 2\sqrt{x^2+y^2-4x-6y+13}$.

Koska epäyhtälön molemmat puolet ovat ei-negatiivisia, säilyy järjestys korotettaessa puolittain neliöön.

$$x^2+4x+4+y^2 \le 4\cdot(x^2+y^2-4x-6y+13)$$

$$-3x^2-3y^2+20x+24y-48 \le 0$$

Pyritään täydentämään yhtälöön binomien neliöt.

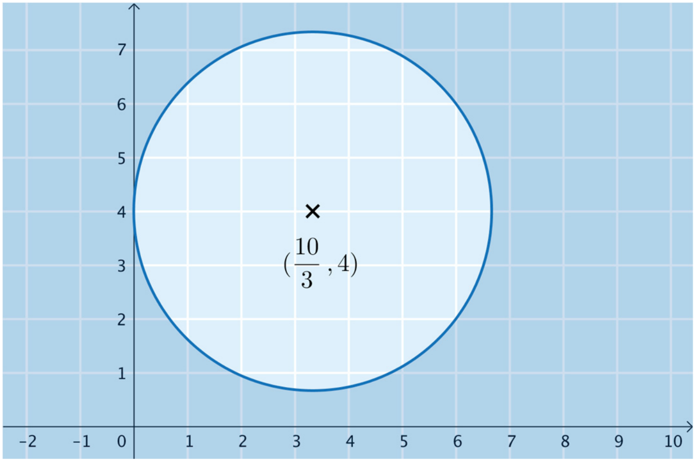
$$-3x^2-3y^2+20x+24y-48 \le 0 \qquad \|:(-3)$$

$$x^2+y^2-\frac{20}{3}x-8y+16 \ge 0$$

$$(x-\frac{10}{3})^2+(y-4)^2 \ge (\frac{10}{3})^2$$

Käyrä $(x-\frac{10}{3})^2+(y-4)^2=(\frac{10}{3})^2$ on ympyrä, jonka keskipiste on $(\frac{10}{3}, 4)$ säde on $\frac{10}{3}$.

Ehdon $(x-\frac{10}{3})^2+(y-4)^2 \ge (\frac{10}{3})^2$ toteuttavat siten kaikki mainitulla ympyrällä ja sen ulkopuolella olevat pisteet.



558. Kolmion *OAB* kylkien *OA* ja *OB* pituudet ovat $|\overline{a}|$ ja $|\overline{b}|$. Kolmion kolmas kylki on *AB*, jota vastaa vektori $\overline{AO}+\overline{OB}=-\overline{OA}+\overline{OB}=-\overline{a}+\overline{b}$. Sivun *AB* pituus on siis $|-\overline{a}+\overline{b}|$.

Jotta voidaan käyttää annettua pistetuloehtoa, lasketaan vektorin $-\overline{a}+\overline{b}$ pituuden neliö, joka on vektorin pistetulo itsensä kanssa.

$$\begin{aligned}|-\overline{a}+\overline{b}|^2 &= (-\overline{a}+\overline{b})\cdot(-\overline{a}+\overline{b})\\ &= -\overline{a}\cdot\overline{a}-2\overline{a}\cdot\overline{b}+\overline{b}\cdot\overline{b}\\ &= -2\overline{a}\cdot\overline{b}-2\overline{a}\cdot\overline{b}+\overline{b}\cdot\overline{b}\\ &= \overline{b}\cdot\overline{b}\\ &= |\overline{b}|^2.\end{aligned}$$

Siten $|-\overline{a}+\overline{b}|=|\overline{b}|$ eli *AB* ja *OB* ovat yhtä pitkät. Kolmio on *OAB* on näin ollen tasakylkinen.

559. Normaalivektori voidaan muodostaa, jos tunnetaan jotkin kaksi tason vektoria. Nämä voidaan vastaavasti muodostaa, jos tunnetaan jotkin kolme tason pistettä. Määritetään tunnetun pisteen lisäksi kaksi pistettä suoralta antamalla parametrille t jotkin kaksi arvoa, esimerkiksi $t = 0$ ja $t = 1$.

Kun $t = 0$, $x = 1 + 0 = 1$, $y = 2 + 0 = 2$ ja $z = 3 + 0 = 3$, joten parametrin arvoa $t = 0$ vastaa piste on (1, 2, 3).

Kun $t = 1$, $x = 1 + 1 = 2$, $y = 2 + 2 \cdot 1 = 4$ ja $z = 3 + 3 \cdot 1 = 6$, joten parametrin arvoa $t = 1$ vastaa piste on (2, 4, 6).

Vektori pisteestä (1, 1, 1) pisteeseen (1, 2, 3) on
$(1-1)\overline{i} + (2-1)\overline{j} + (3-1)\overline{k} = \overline{j} + 2\overline{k}$.

Vektori pisteestä (1, 1, 1) pisteeseen (2, 4, 6) on
$(2-1)\overline{i} + (4-1)\overline{j} + (6-1)\overline{k} = \overline{i} + 3\overline{j} + 5\overline{k}$.

Normaalivektori on $\overline{n} = a\overline{i} + b\overline{j} + c\overline{k}$ joillakin kertoimilla a, b ja c. Koska normaalivektori on kohtisuorassa jokaista tasossa olevaa vektoria vastaa, niin $\overline{n} \cdot (\overline{j} + 2\overline{k}) = 0$ ja $\overline{n} \cdot (\overline{i} + 3\overline{j} + 5\overline{k}) = 0$. Tästä muodostuu kaksi yhtälöä.

$$\begin{aligned}
\overline{n} \cdot (\overline{j} + 2\overline{k}) &= 0 \\
(a\overline{i} + b\overline{j} + c\overline{k}) \cdot (\overline{j} + 2\overline{k}) &= 0 \\
a \cdot 0 + b \cdot 1 + c \cdot 2 &= 0 \\
b + 2c &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{n} \cdot (\overline{i} + 3\overline{j} + 5\overline{k}) &= 0 \\
(a\overline{i} + b\overline{j} + c\overline{k}) \cdot (\overline{i} + 3\overline{j} + 5\overline{k}) &= 0 \\
a \cdot 1 + b \cdot 3 + c \cdot 5 &= 0 \\
a + 3b + 5c &= 0
\end{aligned}$$

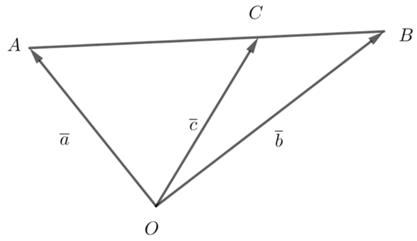
Ehdoista syntyy yhtälöpari.

$$\begin{cases} b + 2c = 0 \\ a + 3b + 5c = 0 \end{cases}$$

Yhtälöparille löytyy useita ratkaisuja, koska normaalivektoreita on useita: normaalivektorin pituus ei ole merkityksellinen. Siten yksi kertoimista a, b ja c voidaan valita vapaasti (kunhan ei valita kertoimeksi lukua 0). Valitaan $a = 1$. Yhtälöparin ensimmäistä yhtälöstä saadaan $b = -2c$. Sijoitetaan nämä toiseen, jolloin saadaan yhtälö $1 + 3 \cdot (-2c) + 5c = 0$. Tästä saadaan $c = 1$, joten $b = -2$.

Siten eräs tason normaalivektori on $\overline{n} = \overline{i} - 2\overline{j} + \overline{k}$.

560. Pisteiden A ja B kautta kulkee suora. Suoran eräs suuntavektori on $\overline{AB} = -\overline{a} + \overline{b}$. Jos merkitään vektoreiden yhteistä alkupistettä kirjaimella O, jokainen suoran piste P toteuttaa ehdon $\overline{OP} = \overline{OA} + t \cdot \overline{AB}$ jollakin parametrin t arvolla. Näytetään, että myös piste C toteuttaa tämän ehdon.



$$\overline{OC} = \overline{c} = \frac{|\overline{b}|\overline{a} + |\overline{a}|\overline{b}}{|\overline{a}| + |\overline{b}|} = \frac{|\overline{b}|\overline{a}}{|\overline{a}| + |\overline{b}|} + \frac{|\overline{a}|\overline{b}}{|\overline{a}| + |\overline{b}|} = \frac{|\overline{b}|}{|\overline{a}| + |\overline{b}|}\overline{a} + \frac{|\overline{a}|}{|\overline{a}| + |\overline{b}|}\overline{b},$$

mutta tämä muoto on ihan outo. Kokeillaan tarkastella erotusta $\overline{c} - \overline{a}$ ja yritetään saada sitä kautta jotain tolkullista aikaan.

$$\begin{aligned}
\overline{c} - \overline{a} &= \frac{|\overline{b}|\overline{a} + |\overline{a}|\overline{b}}{|\overline{a}| + |\overline{b}|} - \overline{a} \\
&= \frac{|\overline{b}|\overline{a} + |\overline{a}|\overline{b}}{|\overline{a}| + |\overline{b}|} - \frac{\overline{a}(|\overline{a}| + |\overline{b}|)}{|\overline{a}| + |\overline{b}|} \\
&= \frac{|\overline{b}|\overline{a} + |\overline{a}|\overline{b} - \overline{a}|\overline{a}| - |\overline{b}|\overline{a}}{|\overline{a}| + |\overline{b}|} \\
&= \frac{|\overline{a}|\overline{b} - \overline{a}|\overline{a}|}{|\overline{a}| + |\overline{b}|} \\
&= \frac{|\overline{a}|}{|\overline{a}| + |\overline{b}|}(\overline{b} - \overline{a}),
\end{aligned}$$

joten $\overline{c} = \overline{a} + \dfrac{|\overline{a}|}{|\overline{a}| + |\overline{b}|}(\overline{b} - \overline{a})$.

Nyt $\overline{OC} = \overline{c} = \overline{a} + \dfrac{|\overline{a}|}{|\overline{a}| + |\overline{b}|}(\overline{b} - \overline{a}) = \overline{OA} + t \cdot (\overline{b} - \overline{a}) = \overline{OA} + t \cdot \overline{AB},$ missä

$$t = \frac{|\overline{a}|}{|\overline{a}| + |\overline{b}|}.$$

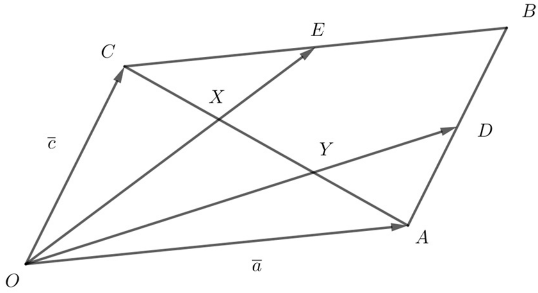
Koska $|\overline{a}|+|\overline{b}|>0$ on t määritelty aina ja piste C on aina pisteiden A ja B kautta kulkevalla suoralla. Koska lisäksi $|\overline{a}|+|\overline{b}|>|\overline{a}|,$ on $0<t<1$ eli piste C on janalla AB.

Jakosuhde on janojen AP ja PB pituuksien suhde. AP:n pituus on kerroin t ja PB:n pituus

$$1-t=1-\frac{|\overline{a}|}{|\overline{a}|+|\overline{b}|}=\frac{|\overline{a}|+|\overline{b}|}{|\overline{a}|+|\overline{b}|}-\frac{|\overline{a}|}{|\overline{a}|+|\overline{b}|}=\frac{|\overline{b}|}{|\overline{a}|+|\overline{b}|}.$$

Suhde on $\dfrac{|\overline{a}|}{|\overline{a}|+|\overline{b}|}:\dfrac{|\overline{b}|}{|\overline{a}|+|\overline{b}|}=\dfrac{|\overline{a}|}{|\overline{b}|},$ kun $|\overline{b}|\neq 0.$

561. Merkitään $\overline{OA} = \overline{a}$ ja $\overline{OC} = \overline{c}$. Piirretään tilannetta havainnollistava kuva.



Leikatkoon vektorit $\overline{OE}$ ja $\overline{OD}$ janan *AC* pisteissä *X* ja *Y*.

Oletetaan, että *X* ja *Y* jakavat janan kolmeen yhtä pitkään osaan ja osoitetaan, että $\overline{OX} = t \cdot \overline{OE}$ jollekin *t* ja $\overline{OY} = r \cdot \overline{OD}$ jollekin *r* eli että pisteet *X* ja *Y* ovat janoilla *OE* ja *OD*.

$$\overline{OX} = \overline{OC} + \frac{1}{3}\overline{CA} = \overline{c} + \frac{1}{3}(-\overline{c} + \overline{a}) = \frac{2}{3}\overline{c} + \overline{a} = \frac{1}{3}(2\overline{c} + \overline{a})$$

Toisaalta $\overline{OE} = \overline{c} + \frac{1}{2}\overline{a} = \frac{1}{2}(2\overline{c} + \overline{a})$, josta $2\overline{c} + \overline{a} = 2\overline{OE}$. Siten

$$\overline{OX} = \frac{1}{3}(2\overline{c} + \overline{a}) = \frac{1}{3} \cdot 2\overline{OE} = \frac{2}{3}\overline{OE}.$$

Samoin $\overline{OY} = \overline{OA} + \frac{1}{3}\overline{AC} = \overline{a} + \frac{1}{3}(-\overline{a} + \overline{c}) = \frac{2}{3}\overline{a} + \overline{c} = \frac{1}{3}(2\overline{a} + \overline{c})$.

Toisaalta $\overline{OD} = \overline{a} + \frac{1}{2}\overline{c} = \frac{1}{2}(2\overline{a} + \overline{c})$, josta $2\overline{a} + \overline{c} = 2\overline{OD}$. Siten

$$\overline{OY} = \frac{1}{3}(2\overline{a} + \overline{c}) = \frac{1}{3} \cdot 2\overline{OD} = \frac{2}{3}\overline{OD}.$$

On siis osoitettu, että janan *AD* kolmeen yhtä suureen osaan jakavat pisteet ovat janoilla *OD* ja *OE* eli että vektorit $\overline{OE}$ ja $\overline{OD}$ jakavat janan kolmeen yhtä suureen osaan.

6 Funktioita ja yhtälöitä

6.1 Rationaali- ja juurifunktio

LUVUN 6.1 YDINTEHTÄVÄT

601. **a)** Määritelty, kun $a \neq 0$.

$$\underbrace{(\underbrace{a+\frac{3}{a}}_{x})^2-(\underbrace{a-\frac{3}{a}}_{y})^2}_{x^2-y^2}$$

$$=\underbrace{(\underbrace{a+\frac{3}{a}}_{x}+\underbrace{a-\frac{3}{a}}_{y})}_{(x+y)}\underbrace{(\underbrace{a+\frac{3}{a}}_{x}-(\underbrace{a-\frac{3}{a}}_{y}))}_{(x-y)}$$

$$=2a\cdot\frac{6}{a}$$

$$=12$$

Toinen tapa:

$$(a+\frac{3}{a})^2-(a-\frac{3}{a})^2$$

$$=a^2+2\cdot a\cdot\frac{3}{a}+(\frac{3}{a})^2-(a^2-2\cdot a\cdot\frac{3}{a}+(\frac{3}{a})^2)$$

$$=6+6$$

$$=12$$

b) Määritelty, kun $a \neq 0$.

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}-\frac{1-a}{a^2}=\frac{1}{a}+\frac{1-(1-a)}{a^2}=\frac{1}{a}+\frac{a}{a^2}=\frac{1}{a}+\frac{1}{a}=\frac{2}{a}$$

c) Määritelty, kun $1-a>0$, eli $a<1$.

$$\frac{1}{\sqrt{1-a}}-\frac{a}{\sqrt{1-a}}\overset{\sqrt{1-a})}{=}\frac{1-a}{\sqrt{1-a}}=\frac{(1-a)\sqrt{1-a}}{(\sqrt{1-a})^2}=\frac{\cancel{(1-a)}\sqrt{1-a}}{\cancel{1-a}}$$

$$=\sqrt{1-a}$$

602. **a)** Yhtälöllä voi olla ratkaisuja vain kun $x \neq 0$.

$$\frac{{}^{x)}x}{3} - \frac{{}^{3)}3}{x} = 0$$
$$\frac{x^2}{3x} - \frac{9}{3x} = 0$$
$$\frac{x^2 - 9}{3x} = 0$$

Osamäärä on nolla vain, kun osoittaja on nolla ja osamäärä on määritelty. On siis oltava

$x^2 - 9 = 0$

$x^2 = 9$

$x = 3$ tai $x = -3$.

Molemmat näistä täyttävät ehdon $x \neq 0$.
Yhtälön ratkaisu on siis $x = 3$ tai $x = -3$.

Toinen tapa:
Yhtälöllä voi olla ratkaisuja vain, kun $x \neq 0$.

$$\frac{x}{3} - \frac{3}{x} = 0$$
$$\frac{x}{3} = \frac{3}{x} \quad \| \text{kerrotaan ristiin, } x \neq 0$$
$$x^2 = 9$$
$$x = 3 \text{ tai } x = -3$$

Molemmat näistä täyttävät ehdon $x \neq 0$.
Yhtälön ratkaisu on siis $x = 3$ tai $x = -3$.

b) Yhtälöllä voi olla ratkaisuja vain, kun $1 - x \neq 0$ eli kun $x \neq 1$.

$$1-x=\frac{1}{1-x}$$

$$\frac{{}^{1-x)}1-x}{1}-\frac{1}{1-x}=0$$

$$\frac{(1-x)^2}{1-x}-\frac{1}{1-x}=0$$

$$\frac{1-2x+x^2-1}{1-x}=0$$

$$\frac{x^2-2x}{1-x}=0$$

Ratkaistaan, milloin osoittaja on nolla.

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x(x - 2) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x - 2 = 0$$

$$x = 2$$

Molemmat näistä toteuttavat ehdon $x \neq 1$.
Yhtälön ratkaisu on siis $x = 0$ tai $x = 2$.

Toinen tapa:
Yhtälöllä voi olla ratkaisuja vain, kun $1 - x \neq 0$ eli kun $x \neq 1$.

$$1-x=\frac{1}{1-x} \quad \| \cdot (1-x) \quad \neq 0$$

$$(1-x)^2=1$$

$$1-2x+x^2=1$$

$$x^2-2x=0$$

$$x(x-2)=0$$

$$x=0 \quad \text{tai} \quad x-2=0$$

$$x=2$$

Molemmat näistä toteuttavat ehdon $x \neq 1$.
Yhtälön ratkaisu on siis $x = 0$ tai $x = 2$.

c) Yhtälöllä voi olla ratkaisuja vain, kun $1 - x \neq 0$ ja kun $1 + x^2 \neq 0$. Näistä saadaan ehdot $x \neq 1$ ja $x^2 \neq -1$. Koska $x^2 \geq 0$, yhtälön ratkaisujen riittää siis toteuttaa ehto $x \neq 1$.

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

$$^{1+x^2)}\frac{1+x}{1-x} - {}^{1-x)}\frac{1-x^2}{1+x^2} = 0$$

$$\frac{(1+x)(1+x^2)-(1-x)(1-x^2)}{(1-x)(1+x^2)} = 0$$

$$\frac{1+x^2+x+x^3-(1-x^2-x+x^3)}{(1-x)(1+x^2)} = 0$$

$$\frac{2x^2+2x}{(1-x)(1+x^2)} = 0$$

Ratkaistaan, milloin osoittaja on nolla.

$$2x^2+2x = 0$$
$$2x(x+1) = 0$$
$$2x = 0 \quad \text{tai} \quad x+1 = 0$$
$$x = 0 \qquad\qquad x = -1$$

Molemmat näistä toteuttavat ehdon $x \neq 1$.
Yhtälön ratkaisu on siis $x = -1$ tai $x = 0$.

Toinen tapa:
Yhtälöllä voi olla ratkaisuja vain, kun $1 - x \neq 0$ ja kun $1 + x^2 \neq 0$. Näistä saadaan ehdot $x \neq 1$ ja $x^2 \neq -1$. Koska $x^2 \geq 0$, yhtälön ratkaisujen riittää siis toteuttaa ehto $x \neq 1$.

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{1-x^2}{1+x^2} \quad \| \cdot (1-x)(1+x^2) \ \neq 0$$

$$(1+x)(1+x^2) = (1-x^2)(1-x)$$
$$1+x^2+x+x^3 = 1-x-x^2+x^3$$
$$2x^2+2x = 0$$
$$2x(x+1) = 0$$
$$2x = 0 \quad \text{tai} \quad x+1 = 0$$
$$x = 0 \qquad\qquad x = -1$$

Molemmat näistä toteuttavat ehdon $x \neq 1$.
Yhtälön ratkaisu on siis $x = -1$ tai $x = 0$.

603. **a)** Osoittaja 4 on aina positiivinen, joten osamäärä on negatiivinen täsmälleen silloin, kun nimittäjä 3 – 2x on negativiinen.

$$3-2x<0$$
$$-2x<-3 \quad \|:(-2)$$
$$x>\frac{3}{2}$$

b) Epäyhtälöllä on ratkaisuja vain, kun x – 1 ≠ 0 eli kun x ≠ 1.

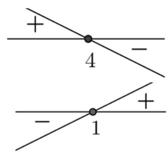
$$\frac{2x+1}{x-1}\geq 3$$
$$\frac{2x+1}{x-1}-{}^{x-1)}\frac{3}{1}\geq 0$$
$$\frac{2x+1}{x-1}-\frac{3(x-1)}{x-1}\geq 0$$
$$\frac{2x+1-3(x-1)}{x-1}\geq 0$$
$$\frac{-x+4}{x-1}\geq 0$$

Ratkaistaan osoittajan nollakohdat.

$$-x+4=0$$
$$x=4$$

Tehdään merkkikaavio

		1		4	
$-x+4$	+		+		−
$x-1$	−		+		+
$\dfrac{-x+4}{x-1}$	−		+		−



Epäyhtälön $\frac{-x+4}{x-1}\geq 0$ ja samalla epäyhtälön $\frac{2x+1}{x-1}\geq 3$ ratkaisu on siis $1<x\leq 4$.

c) Epäyhtälöllä on ratkaisuja vain, kun $x - 3 \neq 0$ eli kun $x \neq 3$.

$$\frac{x^2+7x+2}{x-3} > 1$$

$$\frac{x^2+7x+2}{x-3} - {}^{x-3)}\frac{1}{1} > 0$$

$$\frac{x^2+7x+2}{x-3} - \frac{x-3}{x-3} > 0$$

$$\frac{x^2+7x+2-x+3}{x-3} > 0$$

$$\frac{x^2+6x+5}{x-3} > 0$$

Ratkaistaan osoittajan nollakohdat.

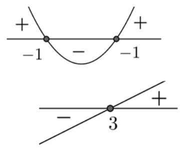
$x^2+6x+5=0$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2-4\cdot 1\cdot 5}}{2\cdot 1} = \frac{-6\pm\sqrt{16}}{2} = \frac{-6\pm 4}{2}$$

$x=-1$ tai $x=-5$

Tehdään merkkikaavio

	-5	-1	3	
x^2+6x+5	+	−	+	+
$x-3$	−	−	−	+
$\frac{-x+4}{x-1}$	−	+	−	+



Epäyhtälön $\frac{x^2+6x+5}{x-3} > 0$ ja samalla epäyhtälön $\frac{x^2+7x+2}{x-3} > 1$ ratkaisu on siis $-5 < x < -1$ tai $x > 3$.

604. **a)** Neliöjuuren arvo on 3 täsmälleen silloin, kun juurettavana on 9 eli kun $x + 5 = 9$, mistä saadaan $x = 4$.

b) Yhtälöstä $\sqrt{4x-1}+3=0$ saadaan $\sqrt{4x-1}=-3$. Koska juuren arvo on aina ei-negatiivinen, yhtälöllä ei ole ratkaisua

c) Kuutiojuuren arvo on -1 täsmälleen silloin, kun juurrettavana on -1 eli kun $x^2 - 4 = -1$. Tästä saadaan $x^2 = 3$, mistä edelleen $x=\sqrt{3}$ tai $x=-\sqrt{3}$.

605. **a)** Neliöjuuri on määritelty, kun $3 - x \geq 0$ eli kun $x \leq 3$.
Juuren arvo on ei-negatiivinen, kun $x + 3 \geq 0$, eli kun $x \geq -3$.
Molemmat ehdot toteutuvat, kun $-3 \leq x \leq 3$.
Korotetaan yhtälö puolittain neliöön.

$$\sqrt{3-x} = x+3$$
$$3-x = (x+3)^2$$
$$3-x = x^2+6x+9$$
$$x^2+7x+6=0$$
$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2-4\cdot 1\cdot 6}}{2\cdot 1} = \frac{-7\pm\sqrt{25}}{2} = \frac{-7\pm 5}{2}$$
$$x=-1 \quad \text{tai} \quad x=-6$$

Näistä vain $x = -1$ toteuttaa ehdon $-3 \leq x \leq 3$.
Yhtälön ratkaisu on siis $x = -1$.

Toinen tapa:

$$\sqrt{3-x} = x+3$$
$$3-x = (x+3)^2$$
$$3-x = x^2+6x+9$$
$$x^2+7x+6=0$$
$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2-4\cdot 1\cdot 6}}{2\cdot 1} = \frac{-7\pm\sqrt{25}}{2} = \frac{-7\pm 5}{2}$$
$$x=-1 \quad \text{tai} \quad x=-6$$

Tarkistetaan, toteuttavatko ratkaisuehdokkaan alkuperäisen yhtälön.

x	$\sqrt{3-x}$	$x + 3$	
-1	$\sqrt{3-(-1)} = \sqrt{4} = 2$	$-1 + 3 = 2$	toteuttaa
-6	$\sqrt{3-(-6)} = \sqrt{9} = 3$	$-6 + 3 = -3$	ei toteuta

Yhtälön ratkaisu on siis $x = -1$.

b) Yhtälöllä voi olla ratkaisuja vain, kun juuret ja osamäärä ovat määriteltyjä, eli kun $x - 2 > 0$, eli kun $x > 2$.

$$\begin{aligned}
\sqrt{x-2} &= 1 + \frac{2}{\sqrt{x-2}} \quad \| \cdot \sqrt{x-2} \neq 0 \\
(\sqrt{x-2})^2 &= \sqrt{x-2} + 2 \\
x - 2 &= \sqrt{x-2} + 2 \\
\sqrt{x-2} &= x - 4
\end{aligned}$$

Koska juuren arvo on aina ei-negatiivinen, on oltava $x - 4 \geq 0$, eli $x \geq 4$. Tällöin myös juuri on määritelty ja yhtälö voidaan siis korottaa puolittain neliöön.

$$\begin{aligned}
\sqrt{x-2} &= x - 4 \\
x - 2 &= (x-4)^2 \\
x - 2 &= x^2 - 8x + 16 \\
x^2 - 9x + 18 &= 0
\end{aligned}$$

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 18}}{2 \cdot 1} = \frac{9 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{9 \pm 3}{2}$$

$$x = 6 \quad \text{tai} \quad x = 3$$

Näistä vain $x = 6$, toteuttaa ehdon $x \geq 4$.
Yhtälön ratkaisu on siis $x = 6$.

Toinen tapa:

$$\begin{aligned}
\sqrt{x-2} &= 1+\frac{2}{\sqrt{x-2}} \quad \| \cdot \sqrt{x-2} \neq 0 \\
(\sqrt{x-2})^2 &= \sqrt{x-2}+2 \\
x-2 &= \sqrt{x-2}+2 \\
\sqrt{x-2} &= x-4 \\
x-2 &= (x-4)^2 \\
x-2 &= x^2-8x+16 \\
x^2-9x+18 &= 0
\end{aligned}$$

$$x=\frac{9\pm\sqrt{(-9)^2-4\cdot1\cdot18}}{2\cdot1}=\frac{9\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{9\pm3}{2}$$

$$x=6 \quad \text{tai} \quad x=3$$

Tarkistetaan, toteuttavatko ratkaisuehdokkaan alkuperäisen yhtälön.

x	$\sqrt{x-2}$	$1+\frac{2}{\sqrt{x-2}}$	
3	$\sqrt{3-2}=\sqrt{1}=1$	$1+\frac{2}{\sqrt{3-2}}=1+\frac{2}{1}=3$	ei toteuta
6	$\sqrt{6-2}=\sqrt{4}=2$	$1+\frac{2}{\sqrt{6-2}}=1+\frac{2}{2}=2$	toteuttaa

Yhtälön ratkaisu on siis $x = 6$.

606. **a)** Yhtälö $x = 3$ voidaan kirjoittaa myös muodossa $x - 3 = 0$. Siis esimerkiksi funktio $f(x) = x - 3$ saa arvon nolla kohdassa $x = 3$. Kyseessä on rationaalifuntkio, joten f on eräs tehtävänannon ehdot täyttävä funktio.

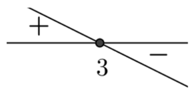
b) Rationaalifunktio ei ole määritelty nimittäjän nollakohdissa, eli kohdat $x = -1$ ja $x = 2$ on oltava nimittäjän ainoat nollakohdat. Nimittäjällä on siis oltava tekijät $x + 1$ ja $x - 2$. Eräs tällainen lauseke on $(x + 1)(x - 2)$.

Kysytyksi funktioksi kelpaa nyt esimerkiksi $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)(x-2)}$, sillä se on määritelty kaikissa muissa kohdissa, paitsi $x = -1$ ja $x = 2$.

c) Koska halutaan funktio, jota ei ole määritelty kohdassa $x = 0$, nimittäjällä tulee olla tekijä x.

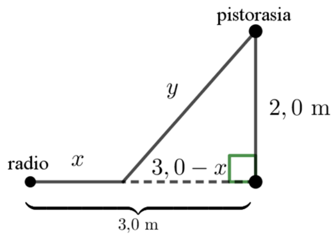
Osoittajan etsiminen on helpompaa jos nimittäjän merkki ei vaihdu. Valitaan osamäärän nimittäjäksi näin ollen $x^2 = x \cdot x$. Tällöin osamäärän merkki riippuu vain osoittajasta.

Etsitään siis osoittajaan funktio, joka saa negatiivisia arvoja vain kun $x > 3$. Eräs tällainen funktio on laskeva suora $-x + 3 = 3 - x$.



Näin ollen funktio $f(x) = \dfrac{3-x}{x^2}$ on eräs tehtävänannon ehdot toteuttava funktio.

607. Hahmotetaan tilannetta kuvan avulla. Merkitään lattiaa pitkin kulkevan osan pituutta kirjaimella x, ja ilmassa kulkevan osan pituutta kirjaimella y, jolloin virtajohdon pituus on $x + y$.



Ratkaistaan y kuvan suorakulmaisesta kolmiosta Pythagoraan lauseella.
$y^2 = (3,0 - x)^2 + 2,0^2$,
josta saadaan $y = \sqrt{x^2 - 6x + 13}$ (tai $y = -\sqrt{x^2 - 6x + 13}$).

Virtajohdon pituutta kuvaa siis lauseke $x + \sqrt{x^2 - 6x + 13}$.

Ratkaistaan ohjelman avulla millä muuttujan x arvolla virtajohdon pituus on 4,5 m.

$$x + \sqrt{x^2 - 6x + 13} = 4,5$$
$$x = 2,4166$$

Lattiaa pitkin kulkevan osan pituus on siis 2,4 m.

6.2 Eksponentti- ja logaritmifunktio

LUVUN 6.2 YDINTEHTÄVÄT

608. **a)** $f(-2)=a^{-2}=\frac{1}{a^2}$

Koska $f(-2)=4$, saadaan yhtälö $\frac{1}{a^2}=4.$ Ratkaistaan tästä a.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a^2}&=4 \quad \|\cdot a^2 \neq 0\\
4a^2&=1 \quad \|:4\\
a^2&=\frac{1}{4}\\
a&=\pm\sqrt{\frac{1}{4}}\\
a&=\pm\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Koska eksponenttifunktion kantaluku a on positiivinen, on oltava $a=\frac{1}{2}.$

Nyt $f(8)=(\frac{1}{2})^8=\frac{1}{2^8}=\frac{1}{256}.$

Kuvista I, II ja III vain kuvassa III on eksponenttifunktio. Kuvaajalla on piste (–2, 4) joten se on funktion f kuvaaja.

609. **a)** $\log_3 81$ on se eksponentti, johon luku 3 pitää korottaa, jotta saadaan 81. $81 = 9 \cdot 9 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4$, joten $\log_3 81 = 4$.

b) $\log_5 5$ on se eksponentti, johon luku 5 pitää korottaa, jotta saadaan 5. Siis $\log_5 5 = 1$.

c) $\log_7 \sqrt{7}$ on se eksponentti, johon luku 7 pitää korottaa, jotta saadaan $\sqrt{7} = 7^{\frac{1}{2}}$. Siis $\log_7 \sqrt{7} = \frac{1}{2}$.

d) $\log_6 5$ on se eksponentti, johon luku 6 pitää korottaa, jotta saadaan 5. Kun luku 6 nyt sitten korotetaan tähän potenssiin, saadaan $6^{\log_6 5} = 5$.

e) $\log_{11} 11^{-123}$ on se eksponentti, johon luku 11 pitää korottaa, jotta saadaan 11^{-123}. Siis $\log_{11} 11^{-123} = -123$.

f) $\log_k 1$ on se eksponentti, johon luku k pitää korottaa, jotta saadaan luku 1. Siis $\log_k 1 = 0$.

610. **a)** $\ln e^7 = \log_e e^7 = 7$

b)

$$\begin{aligned}&\lg 12300 - \lg 1{,}23\\ &= \lg \frac{12300}{1{,}23}\\ &= \lg \frac{1{,}23 \cdot 10000}{1{,}23}\\ &= \lg 10000\\ &= \log_{10} 10^4\\ &= 4\end{aligned}$$

c) $\ln e + \ln 1 - \ln 3e^2$
$= \log_e e + 0 - (\ln 3 + \ln e^2)$
$= 1 - \ln 3 - 2\log_e e$
$= 1 - \ln 3 - 2 \cdot 1$
$= -1 - \ln 3$

d) $e^{2\ln 5} = e^{\ln 5^2} = e^{\log_e 25} = 25$

e) $\log_6 3 + \log_6 12 = \log_6 (3 \cdot 12) = \log_6 36 = 2$

f) $\lg \frac{1}{\sqrt[3]{10000}} = \log_{10} \frac{1}{\sqrt[3]{10000}}$ on se eksponentti, johon luku 10 pitää korottaa, jotta saadaan $\frac{1}{\sqrt[3]{10000}} = \frac{1}{\sqrt[3]{10^4}} = \frac{1}{10^{\frac{4}{3}}} = 10^{-\frac{4}{3}}$.

Siis $\lg \frac{1}{\sqrt[3]{10000}} = -\frac{4}{3}$.

611. **a)** $7^x = 49^3$

$7^x = (7^2)^3$

$7^x = 7^6$

$x = 6$

b)
$$
\begin{aligned}
2^x \cdot 4^{x+1} &= 0{,}5 \\
2^x \cdot (2^2)^{x+1} &= \frac{1}{2} \\
2^x \cdot 2^{2x+2} &= 2^{-1} \\
2^{3x+2} &= 2^{-1} \\
3x + 2 &= -1 \\
3x &= -3 \quad \| : 3 \\
x &= -1
\end{aligned}
$$

c)
$$
\begin{aligned}
\frac{25^x}{5^3} &= 0{,}2 \\
\frac{(5^2)^x}{5^3} &= \frac{2}{10} \\
\frac{5^{2x}}{5^3} &= \frac{1}{5} \\
5^{2x-3} &= 5^{-1} \\
2x - 3 &= -1 \\
2x &= 2 \quad \| : 2 \\
x &= 1
\end{aligned}
$$

d) $2 \cdot 3^x = 18 \quad \| : 2$

$3^x = 9$

$3^x = 3^2$

$x = 2$

e) $3 \cdot 2^x = 21 \quad \|:3$

$2^x = 7$

$x = \log_2 7$

Toinen tapa:

$3 \cdot 2^x = 21 \quad \|:3$

$2^x = 7$

$\ln 2^x = \ln 7$

$x\ln 2 = \ln 7 \quad \| :\ln 2$

$$x = \frac{\ln 7}{\ln 2}$$

f) $e^{2x} = 36$

$2x = \log_e 36 \quad \|: 2$

$$x = \frac{\log_e 36}{2} = \frac{\ln 36}{2}$$

Tätä lauseketta voi halutessaan sieventää:

$$x = \frac{\ln 36}{2} = \tfrac{1}{2}\ln 36 = \ln 36^{\frac{1}{2}} = \ln\sqrt{36} = \ln 6$$

tai $x = \dfrac{\ln 36}{2} = \dfrac{\ln 6^2}{2} = \dfrac{2\ln 6}{2} = \ln 6$

Toinen tapa:

$e^{2x} = 36$

$(e^x)^2 = 6^2$

$e^x = 6$

$x = \log_e 6 = \ln 6$

612. **a)** $f(2\ln 5) = e^{2\ln 5} - 2 = e^{\ln 5^2} - 2 = e^{\log_e 25} - 2 = 25 - 2 = 23$

b) Selvitetään ensin, mitä on e^x.

$$e^{2x} = 9$$
$$(e^x)^2 = 3^2$$
$$e^x = 3$$

Nyt saadaan

$$e^x + e^{-3x} = e^x + (e^x)^{-3} = 3 + 3^{-3} = 3 + \frac{1}{3^3} = 3 + \frac{1}{27} = 3\frac{1}{27}.$$

Toinen tapa:
Selvitetään ensin, mitä on x.

$$e^{2x} = 9$$
$$2x = \log_e 9 \quad \| : 2$$
$$x = \frac{\ln 9}{2} = \tfrac{1}{2}\ln 9 = \ln 9^{\frac{1}{2}} = \ln\sqrt{9} = \ln 3$$

tai

$$x = \frac{\ln 9}{2} = \frac{\ln 3^2}{2} = \frac{2\ln 3}{2} = \ln 3$$

Nyt saadaan

$$e^x + e^{-3x} = e^{\ln 3} + e^{-3\ln 3} = 3 + e^{\ln 3^{-3}} = 3 + 3^{-3} = 3 + \frac{1}{3^3} = 3 + \frac{1}{27} = 3\frac{1}{27}.$$

613. Vuotuinen korko 1,5 % tarkoittaa korkokerrointa 1,015. Nyt x vuoden kulutta rahaa on kertynyt $1{,}015^x \cdot 150\,000$ euroa. Ratkaistaan, milloin rahaa on kertynyt 200 000.

$1{,}015^x \cdot 150\,000 = 200\,000 \parallel : 150\,000$

Tapa 1

$$1{,}015^x = \frac{200000}{150000} = \frac{20}{15} = \frac{4}{3}$$
$$x = \log_{1{,}015}\frac{4}{3}$$
$$x = \frac{\ln\frac{4}{3}}{\ln 1{,}015} = 19{,}32...$$

Tapa 2

$$1{,}015^x = \frac{200000}{150000} = \frac{20}{15} = \frac{4}{3}$$
$$\ln 1{,}015^x = \ln\frac{4}{3}$$
$$x\ln 1{,}015 = \ln\frac{4}{3} \quad \parallel \ln 1{,}015$$
$$x = \frac{\ln\frac{4}{3}}{\ln 1{,}015} = 19{,}32...$$

Aikaa on siis 20 vuotta

614. Vuonna 1970 aikaa on kulunut 0 vuotta, eli
$f(0) = A \cdot a^0 = A = 56$ (miljoonaa).

vuonna 2010 aikaa on kulunut 40 vuotta, eli
$f(40) = 56 \cdot a^{40} = 159$.

Yhtälön $56 \cdot a^{40} = 159$ ratkaisu on $a = \pm\sqrt[40]{\frac{159}{56}}$. Koska kantaluku a on positiivinen saadaan $a = \sqrt[40]{\frac{159}{56}}$.

Vuonna 2030 aikaa on kulunut 60 vuotta.

$f(60) = 56 \cdot \left(\sqrt[40]{\frac{159}{56}}\right)^{60} = 267{,}91...$ Väkiluku on siis noin 268 miljoonaa.

Ratkaistaan milloin väkiluku on 300 miljoonaa.

Yhtälön $56 \cdot \left(\sqrt[40]{\frac{159}{56}}\right)^{x} = 300$ ratkaisu on $x = 64{,}33\ldots$

Väkiluku ylittää siis 300 miljoonan rajan kun vuodesta 1970 on kulunut vähän reilu 64 vuotta, eli vuonna 2034.

6.3 Trigonometriset funktiot

LUVUN 6.3 YDINTEHTÄVÄT

615. **a)** $\frac{7\pi}{5}=1\frac{2\pi}{5}$ kulma on siis yli π = 180° mutta alle 1,5π = 270°. Siis kulma A on kuvassa IV.

$\frac{8\pi}{9}$ on hieman alle π = 180°, eli B on kuvassa I

Kulma C −270° on negatiivinen ja ainoa myötäpäivään kulkeva kulma on kuvassa II.

D $\frac{\pi}{2}=90°$ on kuvassa III

b) $\frac{\pi}{5}=\frac{180°}{5}=36°$, siis A = I

$\frac{3\pi}{4}=\frac{3\cdot 180°}{4}=3\cdot 45°=135°$, siis B = IV

$\frac{\pi}{2}=\frac{180°}{2}=90°$, siis C = III

$\frac{5\pi}{3}=\frac{5\cdot 180°}{3}=5\cdot 60=300°$, siis D = VI

616. **a)** Sinin arvo saadaan suoraan taulukoiduista arvoista.

$$\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

b) $\tan(\frac{7\pi}{3}) = \tan(2\frac{1}{3}\pi) = \tan(\frac{\pi}{3} + 2\pi) = \tan(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$

c) $\cos(\frac{13\pi}{3}) = \cos(4\frac{1}{3}\pi) = \cos(\frac{\pi}{3} + 4\pi) = \cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$

d) $\tan(-\frac{\pi}{6}) = -\tan(\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

e) $\sin(-\frac{5\pi}{4}) = -\sin(\frac{5\pi}{4}) = -(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

f) $\cos(-\frac{3\pi}{2} + n \cdot 2\pi) = \cos(-\frac{3\pi}{2}) = \cos(\frac{3\pi}{2}) = 0$

g) $\tan(\frac{\pi}{6} + 10\pi) = \tan(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

h) $\tan(405°) = \tan(225° + 180°) = \tan(225°) = 1$

617. **a)** $\sin(\alpha - 100\pi) = \sin(\alpha - 50 \cdot 2\pi) = \sin a = 0{,}2$

b) $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha = 0{,}2$

c) $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha = -0{,}2$

d) $\cos(\beta + 8\pi) = \cos \beta = -0{,}4$

e) $\cos(\pi - \beta) = -\cos \beta = 0{,}4$

f) $\cos(-\beta) = \cos \beta = -0{,}4$

g)

$$\begin{aligned}
\sin^2\alpha + \cos^2\alpha &= 1 \\
0{,}2^2 + \cos^2\alpha &= 1 \\
0{,}04 + \cos^2\alpha &= 1 \\
\cos^2\alpha &= 0{,}96 \\
\cos\alpha &= \pm\sqrt{0{,}96} \\
\cos\alpha &\approx \pm 0{,}98
\end{aligned}$$

h)

$$\begin{aligned}
\sin^2\beta + \cos^2\beta &= 1 \\
\sin^2\alpha + 0{,}4^2 + &= 1 \\
\sin^2\alpha + 0{,}16 + &= 1 \\
\sin^2\alpha &= 0{,}84 \\
\sin\alpha &= \pm\sqrt{0{,}84} \\
\sin\alpha &\approx \pm 0{,}92
\end{aligned}$$

618. Ratkaistaan sin x yhtälön $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ avulla.

$$\sin^2 x + (-\frac{1}{\sqrt{5}})^1 = 1$$

$$\sin^2 x + \frac{1}{5} = 1$$

$$\sin^2 x = \frac{4}{5}$$

$$\sin x = \pm\sqrt{\frac{4}{5}}$$

$$\sin x = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$$

Koska $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, $\sin x < 0$. Siis $\sin x = -\frac{2}{\sqrt{5}}$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-\frac{2}{\sqrt{5}}}{-\frac{1}{\sqrt{5}}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{1} = 2$$

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x = 2\cdot(-\frac{2}{\sqrt{5}})\cdot(-\frac{1}{\sqrt{5}}) = \frac{4}{5}$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2\cdot(-\frac{1}{\sqrt{5}})^2 - 1 = \frac{2}{5} - 1 = -\frac{3}{5}$$

619. **a)** $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$: Arvo löytyy taulukosta.

$x = \frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi$ tai $x = \pi - \frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi$

$x = \frac{3\pi}{4} + n \cdot 2\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$

b) $\cos x = -\frac{1}{2}$: Arvo löytyy taulukosta.

$x = \frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi$ tai $x = -\frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$

c) $\tan x = 2 + \sqrt{3}$: Arvo löytyy taulukosta.

$x = \frac{5\pi}{12} + n \cdot \pi, \quad n \in \mathbb{Z}$

d) $\sin \frac{x}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$: Arvo löytyy taulukosta.

$\frac{x}{3} = \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi \quad \| \cdot 3$ tai $\frac{x}{3} = \pi - \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$

$x = \pi + n \cdot 6\pi$

$\frac{x}{3} = \frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi \quad \| \cdot 3$

$x = 2\pi + n \cdot 6\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$

e) $\cos(2x + \pi) = \cos \frac{\pi}{7}$

$2x + \pi = \frac{\pi}{7} + n \cdot 2\pi$

$2x = -\frac{6\pi}{7} + n \cdot 2\pi \quad \| : 2$

$x = -\frac{3\pi}{7} + n \cdot \pi$

tai

$2x + \pi = -\frac{\pi}{7} + n \cdot 2\pi$

$2x = -\frac{8\pi}{7} + n \cdot 2\pi \quad \| : 2$

$x = -\frac{4\pi}{7} + n \cdot \pi, \quad n \in \mathbb{Z}$

f) $\tan 3x = 100$: Arvoa ei löydy taulukosta. Etsitään siis yksi ratkaisu laskimen avulla.

$3x = 1{,}56... + n \cdot \pi \quad \| : 3$

$x = 0{,}520... + n \cdot \frac{\pi}{3}$

$x \approx 0{,}52 + n \cdot \frac{\pi}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}$

620. Kaikkien merkittyjen leikkauspisteiden y-koordinaatti on $\frac{3}{2}$. Pisteiden x-koordinaatit ovat yhtälön $\cos(x-\frac{\pi}{2})+1=\frac{3}{2}$ ratkaisuja; kaksi suurinta negatiivista ratkaisua ja kolmanneksi pienin positiivinen ratkaisu.

$$\cos(x-\frac{\pi}{2})+1=\frac{3}{2}$$
$$\cos(x-\frac{\pi}{2})=\frac{1}{2}$$
$$x-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{3}+n\cdot 2\pi \quad \text{tai} \quad x-\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{3}+n\cdot 2\pi$$
$$x=\frac{2\pi}{6}+\frac{3\pi}{6}+n\cdot 2\pi \qquad x=-\frac{2\pi}{6}+\frac{3\pi}{6}+n\cdot 2\pi$$
$$x=\frac{5\pi}{6}+n\cdot 2\pi \qquad x=\frac{\pi}{6}+n\cdot 2\pi$$

Taulukoidaan arvoja.

n	$\frac{5\pi}{6}+n\cdot 2\pi$	$\frac{\pi}{6}+n\cdot 2\pi$
0	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$
1	$\frac{5\pi}{6}+2\pi=\frac{17}{6}\pi$	$\frac{\pi}{6}+2\pi=\frac{13}{6}\pi$
-1	$\frac{5\pi}{6}-2\pi=-\frac{7}{6}\pi$	$\frac{\pi}{6}-2\pi=-\frac{11}{6}\pi$

Pisteiden koordinaatit ovat $A=(-\frac{11}{6}\pi,\frac{3}{2})$, $B=(-\frac{7}{6}\pi,\frac{3}{2})$ ja $C=(\frac{13}{6}\pi,\frac{3}{2})$.

Luvun 6 vahvistavat ja syventävät tehtävät

VAHVISTAVAT TEHTÄVÄT

621. **a)**

$$\begin{aligned} \ln x &= -1 \\ \log_e x &= -1 \\ x &= e^{-1} \\ x &= \frac{1}{e} \end{aligned}$$

b) $\log_2 x = -3$ täsmälleen silloin, kun $x = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

c)

$$\begin{aligned} \lg 0{,}01974 - \lg 0{,}000001974 &= \lg \frac{0{,}01974}{0{,}000001974} \\ &= \lg 10000 \\ &= \log_{10} 10^4 \\ &= 4 \end{aligned}$$

d) $e^{3\ln a} + 2a^3 = e^{\log_e a^3} + 2a^3 = a^3 + 2a^3 = 3a^3$

622. **a)** $f(3\pi)=\dfrac{2+\sin 3\pi}{2-\cos 3\pi}=\dfrac{2+0}{2-(-1)}=\dfrac{2}{3}$

$$f(\frac{9\pi}{2})=\frac{2+\sin\frac{9\pi}{2}}{2-\cos\frac{9\pi}{2}}=\frac{2+\sin(\frac{\pi}{2}+4\pi)}{2-\cos(\frac{\pi}{2}+4\pi)}=\frac{2+\sin\frac{\pi}{2}}{2-\cos\frac{\pi}{2}}=\frac{2+1}{2-0}=\frac{3}{2}$$

b) Koska kyseessä on kolmion kulmat, niiden summa on 180°.

$x + 2x + 3x = 180°$

$6x = 180° \quad \| : 6$

$x = 30°$

Kulmat ovat siis 30°, 60° ja 90°.

Lasketaan pyydetty sinien summan neliö.

$(\sin 30° + \sin 60° + \sin 90°)^2$

$=(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+1)^2$

$=(\frac{1+\sqrt{3}+2}{2})^2$

$=(\frac{3+\sqrt{3}}{2})^2$

$=\frac{9+6\sqrt{3}+3}{4}$

$=\frac{12+6\sqrt{3}}{4}$

$=\frac{6+3\sqrt{3}}{2}$

623. **a)** Rationaalifunktion nollakohdat ovat ne osoittajan nollakohdat, joilla funktio on määritelty. Koska osoittaja on nyt aina positiivinen, sillä ei ole nollakohtia. Väite on siis tosi.

b) Väite on epätosi. Esimerkiksi $f(x)=\frac{x^2}{x+1}$ täyttää annetut ehdot, mutta funktion lauseke ei sievene ensimmäisen asteen polynomiksi.

c) Osamäärän arvo on positiivinen täsmälleen silloin, kun osoittaja ja nimittäjä ovat samanmerkkiset. Väite on siis tosi.

d) Jos $P(a) = 0$, niin myös $Q(a) = 0$, jolloin funktiota f ei ole määritelty nimittäjän nollakohdassa $x = a$. Koska a ei siis voi olla funktion nollakohta. Väite on siis tosi.

624. Suplementtikulmien sinit ovat yhtä suuret. Siis A – III

Suplementtikulmien kosinit ovat toistensa vastaluvut. Siis B – I

Aina $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. Siis C – I

$\log_a x = 1$ täsmälleen silloin, kun $x = a^1$. Siis D – III

Koska $a^0 = 1$, aina kun $a \neq 0$, pätee $\log_a 1 = 0$. Siis E – I

Merkitään $\log_2 x = a$. Nyt $\log_2 2x = \log_2 2 + \log_2 x = 1 + \log_2 x$. Siis F – I.

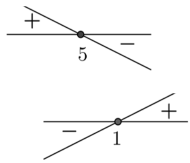
625. **a)** Epäyhtälöllä voi olla ratkaisuja vain kun $x - 1 \neq 0$ eli kun $x \neq 1$.

$$\frac{3x+1}{x-1} \geq 4$$
$$\frac{3x+1}{x-1} - \frac{4(x-1)}{x-1} \geq 0$$
$$\frac{3x+1-4(x-1)}{x-1} \geq 0$$
$$\frac{-x+5}{x-1} \geq 0$$

Ratkaistaan osoittajan nollakohdat.
$-x + 5 = 0$, josta $x = 5$.

Tehdään merkkikaavio

		1		5	
$-x+5$	$+$		$+$		-
$x-1$	$-$		$+$		$+$
$\dfrac{-x+4}{x-1}$	$-$		$+$		$-$



Epäyhtälön $\frac{-x+5}{x-1} \geq 0$ ja samalla epäyhtälön $\frac{3x+1}{x-1} \geq 4$ ratkaisu on siis $1 < x \leq 5$.

b) Yhtälöllä voi olla ratkaisuja vain, kun $x \geq 0$.

$$(\underbrace{2+x}_{a}+\underbrace{\sqrt{x}}_{b})(\underbrace{2+x}_{a}-\underbrace{\sqrt{x}}_{b}) = 4$$
$$(2+x)^2 - (\sqrt{x})^2 = 4$$
$$4+4x+x^2 - x = 4$$
$$x^2 + 3x = 0$$
$$x(x+3) = 0$$
$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x+3 = 0$$
$$x = -3$$

Näistä vain $x = 0$ toteuttaa ehdon $x \geq 0$.
Yhtälön ratkaisu on siis $x = 0$.

Toinen tapa:
Yhtälöllä voi olla ratkaisuja vain, kun $x \geq 0$.

$$
\begin{aligned}
(2+x+\sqrt{x})(2+x-\sqrt{x}) &= 4 \\
4+2x\cancel{-2\sqrt{x}}+2x+x^2\cancel{-x\sqrt{x}}+\cancel{2\sqrt{x}}+\cancel{x\sqrt{x}}-x &= 4 \\
4+3x+x^2 &= 4 \\
x^2+3x &= 0 \\
x(x+3) &= 0 \\
x = 0 \quad \text{tai} \quad x+3 &= 0 \\
x &= -3
\end{aligned}
$$

Näistä vain $x = 0$ toteuttaa ehdon $x \geq 0$.
Yhtälön ratkaisu on siis $x = 0$.

626. **a)** Yhtälöllä voi olla ratkaisuja vain kun $x > 0$ ja kun $x + 1 > 0$, eli kun $x > -1$. Molemmat ehdot toteutuvat kun $x > 0$.

$$\begin{aligned} \ln x + \ln(x+1) &= \ln 2 \\ \ln(x(x+1)) &= \ln 2 \\ x^2 + x &= 2 \\ x^2 + x - 2 &= 0 \\ x &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \\ x &= 1 \quad \text{tai} \quad x = -2 \end{aligned}$$

Näistä vain $x = 1$ toteuttaa ehdon $x > 0$.
Yhtälön ratkaisu on siis $x = 1$.

b) Yhtälöllä voi olla ratkaisuja vain, kun $2x + 10 > 0$ eli kun $2x > -10$ mistä edelleen $x > -5$, ja kun $x > 0$. Molemmat ehdot toteutuvat, kun $x > 0$.

$$\lg(2x+10) - \lg x = 2$$

$$\begin{aligned} \lg \frac{2x+10}{x} &= 2 \\ \frac{2x+10}{x} &= 10^2 \quad \| \cdot x \neq 0 \\ 2x + 10 &= 100x \\ 98x &= 10 \quad \| : 98 \\ x &= \frac{10}{98} \\ x &= \frac{5}{49} \end{aligned}$$

Ratkaisu täyttää ehdon $x > 0$.

Yhtälön ratkaisu on siis $x = \frac{5}{49}$.

Toinen tapa:

$$\begin{aligned}
\lg(2x+10)-\lg x &= 2 \\
\log_{10}\frac{2x+10}{x} &= 2 \\
\log_{10}\frac{2x+10}{x} &= \log_{10}10^2 \\
\frac{2x+10}{x} &= 10^2 \quad \| \cdot x \neq 0 \\
2x+10 &= 100x \\
98x &= 10 \quad \| :98 \\
x &= \frac{10}{98} \\
x &= \frac{5}{49}
\end{aligned}$$

Ratkaisu täyttää ehdon $x > 0$.

Yhtälön ratkaisu on siis $x = \frac{5}{49}$.

627. **a)** Yhtälö voidaan ratkaista tulon nollasäännön avulla.

$(e^x - 1)(e^x - 2) = 0$

$e^x - 1 = 0$ tai $e^x - 2 = 0$

$e^x = 1 \qquad e^x = 2$

$e^x = e^0 \qquad x = \log_e 2$

$x = 0 \qquad x = \ln 2$

b)
$$\begin{aligned}(e^x - 1)(e^x - 2) &= 2\\ (e^x)^2 - 2e^x - e^x + 2 &= 2\\ (e^x)^2 - 3e^x &= 0\\ e^x(e^x - 3) &= 0\end{aligned}$$

$e^x = 0$ tai $e^x - 3 = 0$

ei ratkaisua $\qquad e^x = 3$

$x = \log_e 3$

$x = \ln 3$

c) Parillinen juuri voidaan laskea vain positiivisesta luvusta, joten yhtälöllä voi olla ratkaisuja vain, kun $1 - 2e^x \geq 0$. Ratkaistaan, milloin näin on.

$$\begin{aligned}1 - 2e^x &\geq 0\\ 2e^x &\leq 1 \quad \| :2\\ e^x &\leq \frac{1}{2} \quad \| e^x \text{ on kasvava}\\ x &\leq \log_e \frac{1}{2}\\ x &\leq \ln \frac{1}{2} \quad (\approx -0{,}69)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}e^{\frac{x}{4}} &= \sqrt[4]{1 - 2e^x}\\ (e^x)^{\frac{1}{4}} &= (1 - 2e^x)^{\frac{1}{4}}\\ e^x &= 1 - 2e^x\\ 3e^x &= 1 \quad \| :3\\ e^x &= \frac{1}{3}\\ x &= \log_e \frac{1}{3}\\ x &= \ln \frac{1}{3} \quad (\approx -1{,}1)\end{aligned}$$

Ratkaisu täyttää ehdon $x \le \ln\frac{1}{2}$.

Yhtälön ratkaisu on siis $x = \ln\frac{1}{3}$.

Toinen tapa:

$$\begin{aligned}
e^{\frac{x}{4}} &= \sqrt[4]{1-2e^x} \\
(e^x)^{\frac{1}{4}} &= (1-2e^x)^{\frac{1}{4}} \\
e^x &= 1-2e^x \\
3e^x &= 1 \quad \|:3 \\
e^x &= \frac{1}{3} \\
x &= \log_e \frac{1}{3} \\
x &= \ln\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Tarkistetaan toteuttaako ratkaisuehdokas alkuperäisen yhtälön.

$$e^{\frac{\ln\frac{1}{3}}{4}} = (e^{\ln\frac{1}{3}})^{\frac{1}{4}} = (e^{\log_e\frac{1}{3}})^{\frac{1}{4}} = (\frac{1}{3})^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{\frac{1}{3}}$$

$$\sqrt[4]{1-2e^{\ln\frac{1}{3}}} = \sqrt[4]{1-2\cdot\frac{1}{3}} = \sqrt[4]{\frac{1}{3}}$$

Yhtälön ratkaisu on siis $x = \ln\frac{1}{3}$.

628. **a)** tan x on kulman x tangenttipisteen y-koordinaatti. Siis $\tan x = 2$.

b) $\tan(-x) = -\tan x = -2$

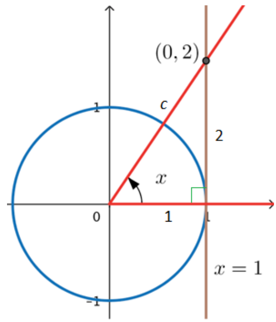
c) $\tan(x + 10\pi) = \tan x = 2$

d) Ratkaistaan kuvan kolmiosta hypotenuusan pituus c.

$c^2 = 1^2 + 2^2$

$c^2 = 5$

$c = \sqrt{5}$ (tai $c = -\sqrt{5}$)



Koska kuva perusteella $0 < x < \frac{\pi}{2}$, saadaan

$\sin x = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

e) Edellisen kohdan laskujen perusteella saadaan $\cos x = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

e) $\sin(-x) = -\sin x = -\frac{2}{\sqrt{5}}$.

629. **a)** Pisteen A y-koordinaati saadaan suoraan annetun tiedon perusteella.

$A=(x,\frac{\sqrt{3}}{2})$.

Koska ainoa sallittu keino etsiä pisteen x-koordinaatti on trigonometristen kaavojen käyttäminen, hyödynnetään sitä tietoa, että kehäpisteen x-koordinaatti on kulman kosini, ja että $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

$$\begin{aligned}\sin^2\frac{\pi}{3}+\cos^2\frac{\pi}{3}&=1\\ \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\cos^2\frac{\pi}{3}&=1\\ \frac{3}{4}+\cos^2\frac{\pi}{3}&=1\\ \cos^2\frac{\pi}{3}&=\frac{1}{4}\\ \cos\frac{\pi}{3}&=\pm\sqrt{\frac{1}{4}}\\ \cos\frac{\pi}{3}&=\pm\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Koska kulma $\frac{\pi}{3}$ on 1. neljänneksessä $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$.

Näin ollen $A=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$.

Pisteen B y-koordinaatti on sama kuin pisteellä A, joten niiden sinit ovat samat. Suplementtikulmilla on sama sini, joten piste B on kulman $\frac{\pi}{3}$ suplementtikulman kehäpiste. Koska suplementtikulmien kosinit ovat toistensa vastaluvut, pisteen B x-koordinaatti on pisteen A x-koordinaatin vastaluku.

Siis $B=(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$.

Pisteen D x-koordinaatti on sama kuin pisteellä A, joten niiden kosinit ovat samat. Vastakulmilla on sama kosini, joten piste D on kulman $\frac{\pi}{3}$ vastakulman kehäpiste. Koska vastakulmien sinit ovat toistensa vastaluvut, pisteen D y-koordinaatti on pisteen A y-koordinaatin vastaluku.

Siis $D=(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$.

Pisteen C x-koordinaatti on sama kuin pisteellä B, joten niiden kosinit ovat samat. Vastakulmilla on sama kosini, joten piste C on pistettä B vastaavan kulman vastakulman kehäpiste. Koska vastakulmien sinit ovat toistensa vastaluvut, pisteen C y-koordinaatti on pisteen B y-koordinaatin vastaluku.
Siis $D=(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$.

Tehtävänannon mukaan pistettä A vastaa kulma $\frac{\pi}{3}$.

Pistettä B vastaa kulman A suplementtikulma $\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$.

Pistettä C vastaa pisteen B vastakulma $-\frac{2\pi}{3}$. Tämä ei ole pyydetyllä välillä. Samaa pistettä vastaa pyydetyn välin kulma $-\frac{2\pi}{3}+2\pi=\frac{4\pi}{3}$.

Pistettä D vastaa pisteen A vastakulma $-\frac{\pi}{3}$. Tämä ei ole pyydetyllä välillä. Samaa pistettä vastaa pyydetyn välin kulma $-\frac{\pi}{3}+2\pi=\frac{5\pi}{3}$.

b) $P=(\frac{\pi}{3},\sin\frac{\pi}{3})=(\frac{\pi}{3},\frac{\sqrt{3}}{2})$

$Q=(\frac{2\pi}{3},\sin\frac{2\pi}{3})=(\frac{2\pi}{3},\frac{\sqrt{3}}{2})$

$R=(\frac{4\pi}{3},\sin\frac{4\pi}{3})=(\frac{4\pi}{3},-\frac{\sqrt{3}}{2})$

$Q=(\frac{5\pi}{3},\sin\frac{5\pi}{3})=(\frac{5\pi}{3},-\frac{\sqrt{3}}{2})$

630. a) Merkitään vektorin päätepistettä kirjaimella *B*, jolloin saadaan

$$\overline{OB} = \overline{i} + 2\overline{j} + 3\overline{i} + \sin(-\frac{\pi}{2})\overline{j} = 4\overline{i} + 2\overline{j} - 1\overline{j} = 4\overline{i} + \overline{j}$$

Vektorin päätepiste on siis (4, 1)

b) Merkitään vektorin päätepistettä kirjaimella *B*, jolloin saadaan

$$\overline{OB} = \overline{i} + 2\overline{j} + 3\overline{i} + \sin\frac{\pi}{3}\overline{j} = 4\overline{i} + 2\overline{j} + \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{j} = 4\overline{i} + (2 + \frac{\sqrt{3}}{2})\overline{j}$$

Vektorin päätepiste on siis $(4, 2 + \frac{\sqrt{3}}{2})$.

c) Merkitään vektorin päätepistettä kirjaimella *B*, jolloin saadaan

$$\overline{OB} = \overline{i} + 2\overline{j} + 3\overline{i} + \sin t\,\overline{j} = 4\overline{i} + (2 + \sin t)\,\overline{j}$$

Päätepisteen *x*-koordinaatti on siis koko ajan 4.

Koska $0 \leq t \leq 2\pi$, sin *t* käy läpi kaikki arvo väliltä [−1, 1].
Tämän arvon muuttuminen vaikuttaa vain pisteen *B* *y*-koordinaattiin, joka on siis välillä [2 −1, 2 + 1] = [1, 3].

Vektorin päätepiste on siis pisteiden (4, 1) ja (4, 3) välisellä janalla.

631. **a)** Funktio on määritelty, kun $x + 2 \neq 0$, eli kun $x \neq -2$.

$$\frac{2x^2+8x+8}{x+2} = \frac{2(x^2+4x+4)}{x+2} = \frac{2(x+2)^{\cancel{2}}}{\cancel{x+2}} = 2(x+2) = 2x+4$$

Funktio f ei ole määritelty, kun $x = -2$, ja $2 \cdot (-2) + 4 = 0$, joten suoran piste $(-2, 0)$ ei ole funktion f kuvaajalla.

b) Funktio on määritelty, kun $x - 1 \neq 0$, eli kun $x \neq 1$ ja kun $x \geq 0$ ja kun $\sqrt{x}+1 \neq 0$. Kaikki ehdot toteutuvat väleillä $0 \leq x < 1$ ja $x > 1$.

$$\frac{3x-3\sqrt{x}}{x-1} + {}^{\sqrt{x}-1)}\frac{3}{\sqrt{x}+1}$$
$$= \frac{3x-3\sqrt{x}}{x-1} + \frac{3(\sqrt{x}-1)}{x-1}$$
$$= \frac{3x-3\sqrt{x}+3\sqrt{x}-3}{x-1}$$
$$= \frac{3x-3}{x-1}$$
$$= \frac{3\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}$$
$$= 3$$

Funktio f on määritelty kun $0 \leq x < 1$ ja $x > 1$, joten piste $(1, 3)$ ei ole suoralla, eikä yksikään piste $(x, 3)$, jossa $x \leq 0$.

632. Koska lausekkeen halutaan olevan määritelty täsmälleen silloin kun $x \le 3$, on juurrettavan oltava ei-negatiivinen tällä välillä. Koska $3 - x \ge 0$ tällä välillä, eräs tehtävänannon määrittelyehdon täyttävä funktio on
$f(x) = \sqrt{3-x} + c$.

Etsitään sitten vakiolle c sellainen arvo, että funktio f täyttää myös ehdon $f(1) = 2$.

$$\begin{aligned} \sqrt{3-1} + c &= 2 \\ c &= 2 - \sqrt{2} \end{aligned}$$

Voidaan siis valita $f(x) = \sqrt{3-x} + 2 - \sqrt{2}$.

Toinen tapa:
Merkitään $f(x) = \sqrt{ax+b}$. Määritetään vakioiden a ja b arvot, siten, että funktio täyttää tehtävänannon ehdot.

$f(1) = \sqrt{a+b} = 2$, joten on oltava $a + b = 4$, eli $b = 4 - a$.
Siis $f(x) = \sqrt{ax + 4 - a}$.

Funktio f on määritelty kun $ax + 4 - a \ge 0$ eli kun $ax \ge a - 4$.
Tämän epäyhtälön ratkaisun halutaan olevan $x \le 3$. On siis oltava $a < 0$.
Nyt saadaan jakamalla luvulla a

$$\begin{aligned} ax &\ge a - 4 \quad \| : a < 0 \\ x &\le 1 - \frac{4}{a}. \end{aligned}$$

Näin ollen saadaan yhtälö $1 - \frac{4}{a} = 3$, jonka ratkaisu on $a = -2$.

Voidaan siis valita $f(x) = \sqrt{-2x + 6}$.

633. **a)** Rationaalifunktion nollakohdat on ne osoittajan nollakohdat, joissa lauske on määritelty. Määritetään $12x^2 + 17x - 5$ nollakohdat.

Yhtälön $12x^2 + 17x - 5 = 0$ ratkaisu on $x = -\frac{5}{3}$ tai $x = -\frac{1}{4}$.

Funktiolla f on siis yksi nollakohta silloin, kun funktiota ei ole määritelty jommallakummalla näistä luvuista eli kun jompikumpi on nimittäjän g nollakohta.

Eräs tämän ehdon täyttävä funktio on $g(x) = x + \frac{5}{3}$.

b) Jotta funktion f kuvaajan pisteet ovat suoralla, osoittaja ja nimittäjä pitää pystyä supistamaan samalla ensimmäisen asteen polynomilla.

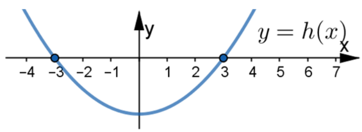
$$f(x) = \frac{12x^2 + 17x - 5}{g(x)} = \frac{12x^2 + 17x - 5}{g(x)} = \frac{(3x+5)(4x-1)}{g(x)}$$

Jos nimittäjäksi valitaan $3x + 5$, niin silloin lauseke sievennee muotoon $4x - 1$, mutta tämän kulmakerroin on positiivinen. Valitaan siis $g(x) = -(3x + 5)$, jolloin saadaan

$$f(x) = \frac{12x^2 + 17x - 5}{-(3x+5)} = \frac{(3x+5)(4x-1)}{-(3x+5)} = -4x + 1.$$

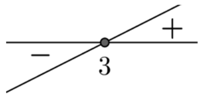
Voidaan siis valita erimerkiksi $g(x) = -(3x + 5) = -3x - 5$

c) Osoittaja on aina määritelty, joten se ei vaikuta funktion f määrittelyjoukkoon. Etsitään siis nimittäjään lauseke, jolla saadaan haluttu ehto.



Etsitään nimittäjä juurimuotoisesta lausekkeesta: $g(x) = \sqrt{h(x)}$, jolle $h(x) > 0$ kun $x > 3$ ja kun $x < -3$.
Eräs tällainen funktio on ylöspäin aukeava paraabeli $(x + 3)(x - 3) = x^2 - 9$.
Voidaan siis valita $g(x) = \sqrt{x^2 - 9}$.

d) Etsitään nimittäjä juurimuotoisesta lausekkeesta:
$g(x) = \sqrt{h(x)}$, jolle $h(x) > 0$ kun $x > 3$.
Eräs tällainen funktio $x - 3$.



Voidaan siis valita $g(x) = \sqrt{x-3}$.

634. **a)** $e^{\sin x} = e$
$e^{\sin x} = e^1$
$\sin x = 1$ || sini on kehäpisteen y-koordinaatti
$x = \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi,\ n \in \mathbb{Z}$

b) $e^{\sin x} = 1$
$e^{\sin x} = e^0$
$\sin x = 0$ || sini on kehäpisteen y-koordinaatti
$x = n \cdot \pi,\ n \in \mathbb{Z}$

Toinen tapa:
$e^{\sin x} = 1$
$e^{\sin x} = e^0$
$\sin x = 0$ || sini on kehäpisteen y-koordinaatti
$x = 0 + n \cdot 2\pi$ tai $x = \pi - 0 + n \cdot 2\pi$
$x = n \cdot 2\pi$ $x = \pi + n \cdot 2\pi,\ n \in \mathbb{Z}$

c) $2^{\cos x} = 0{,}5$
$2^{\cos x} = \frac{1}{2}$
$2^{\cos x} = 2^{-1}$
$\cos x = -1$ || kosini on kehäpisteen x-koordinaatti
$x = \pi + n \cdot 2\pi,\ n \in \mathbb{Z}$

d) $2^{\cos x} = 4$
$2^{\cos x} = 2^2$
$\cos x = 2$

Koska aina $-1 \le \cos x \le 1$, yhtälöllä ei ole ratkaisua.

635. **a)** $f(3x) = \log_3 (3x) = \log_3 3 + \log_3 x = 1 + \log_3 x = 1 + f(x) = f(x) + 1$

b) $1 < f(x) < 2$
$1 < 1 + e^{-x} < 2$
$0 < \quad e^{-x} \quad < 1$
Eksponenttifunktiona aina $e^{-x} > 0$. Riittää siis osoittaa, että $e^{-x} < 1$, kun $1 < x < 2$.

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

Koska $e = 2,7\ldots.$ ja $1 < x < 2$, niin $e^x > e$ tällä välillä. Näin ollen osoittaja ja nimittäjä ovat molemmat positiivisia, ja nimittäjä on osoittajaa suurempi. Siis $\frac{1}{e^x} < 1$.

636. **a)** Epäyhtälöllä voi olla ratkaisuja vain kun $4x - 1 \geq 0$, eli kun $4x \geq 1$, josta edelleen $x \geq \frac{1}{4}$. Tällöin epäyhtälön molemmat puolet ovat ei-negatiiviset ja puolittain neliöön korotetulla epäyhtälöllä on samat ratkaisut kuin alkuperäisellä yhtälöllä.

$$\sqrt{4x-1} \geq 3$$
$$4x-1 \geq 9$$
$$4x \geq 10 \quad \| :4$$
$$x \geq \frac{10}{4}$$
$$x \geq \frac{5}{2}$$

Kaikki nämä luvut toteuttavat ehdon $x \geq \frac{1}{4}$, joten epäyhtälön ratkaisu on $x \geq \frac{5}{2}$.

b) Epäyhtälöllä voi olla ratkaisuja vain kun $1 - 2x \geq 0$, eli kun $2x \leq 1$, josta edelleen $x \leq \frac{1}{2}$. Tällöin epäyhtälön molemmat puolet ovat ei-negatiiviset ja puolittain neliöön korotetulla epäyhtälöllä on samat ratkaisut kuin alkuperäisellä yhtälöllä.

$$\sqrt{1-2x} < 2$$
$$1-2x < 4$$
$$-2x < 3 \quad \| :(-2)$$
$$x > -\frac{3}{2}$$

Näistä luvuista kaikki eivät toteuta ehtoa $x \leq \frac{1}{2}$. Tämä ehto huomioiden saadaan epäyhtälön ratkaisuksi $-\frac{3}{x} < x \leq \frac{1}{2}$.

c) Neliöjuuren arvo on aina ei-negatiivinen, joten epäyhtälöllä $\sqrt{x^2-7} < -2$ ei ole ratkaisua.

637. **a)** cos $2x = 1$ || kosini on kehäpisteen x-koordinaatti

$$2x = n \cdot 2\pi \quad \| : 2$$
$$x = n \cdot \pi \quad , n \in \mathbb{Z}$$

Näistä välillä [2π, 3π] ovat 2π ja 3π.

b)
$$\tan(x + \pi) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$x = \frac{\pi}{6} + n \cdot \pi \quad , n \in \mathbb{Z}$$

Tämä tarkoittaa kulmia

$$\ldots, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} + \pi = 1\frac{1}{6}\pi, \frac{\pi}{6} + 2\pi = 2\frac{1}{6}\pi, \frac{\pi}{6} + 3\pi = 3\frac{1}{6}\pi, \ldots$$

Näistä välillä [2π, 3π] on $2\frac{1}{6}\pi$

Toinen tapa

$$\tan(x + \pi) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$x + \pi = \frac{\pi}{6} + n \cdot \pi$$
$$x = -\frac{5\pi}{6} + n \cdot \pi \quad , n \in \mathbb{Z}$$

$$\ldots, -\frac{5\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6} + \pi = \frac{1}{6}\pi, -\frac{5\pi}{6} + 2\pi = 1\frac{1}{6}\pi, -\frac{5\pi}{6} + 3\pi = 2\frac{1}{6}\pi,$$
$$-\frac{5\pi}{6} + 2\pi = 3\frac{1}{6}\pi, \ldots$$

Näistä välillä [2π, 3π] on $2\frac{1}{6}\pi$

c) Yhtälön korottaminen puolittain kolmanteen potenssiin ei vaikuta sen ratkaisuihin

$$\sqrt[3]{1+\sin 2x} = \frac{\sqrt[3]{12}}{2} \parallel ()^3$$

$$1+\sin 2x = \frac{12}{8}$$

$$\sin 2x = \frac{1}{2}$$

$$2x = \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi \quad \parallel :2 \qquad \text{tai} \qquad 2x = \pi - \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi$$

$$2x = \frac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi \quad \parallel :2$$

$$x = \frac{\pi}{12} + n \cdot \pi \qquad\qquad x = \frac{5\pi}{12} + n \cdot \pi \quad , n \in \mathbb{Z}$$

Taulukoidaan kulmia, että löydetään välillä [2π, 3π] olevat ratkaisut.

n	$x = \frac{\pi}{12} + n \cdot \pi$	$x = \frac{5\pi}{12} + n \cdot \pi$
0	$x = \frac{\pi}{12}$	$x = \frac{5\pi}{12}$
1	$x = \frac{\pi}{12} + \pi = 1\frac{1}{12}\pi$	$x = \frac{5\pi}{12} + \pi = 1\frac{5}{12}\pi$
2	$x = \frac{\pi}{12} + 2\pi = 2\frac{1}{12}\pi$	$x = \frac{5\pi}{12} + 2\pi = 2\frac{5}{12}\pi$
3	$x = \frac{\pi}{12} + 3\pi = 3\frac{1}{12}\pi$	$x = \frac{5\pi}{12} + 3\pi = 3\frac{5}{12}\pi$

Välillä [2π, 3π] ovat siis ratkaisut $x = 2\frac{1}{12}\pi$ ja $x = 2\frac{5}{12}\pi$.

638. **a)** Neliöjuuri on määritelty, kun $1 - x \geq 0$ eli kun $x \leq 1$.
Juuren arvo on ei-negatiivinen, kun $x - 1 \geq 0$, eli kun $x \geq 1$.
Molemmat ehdot toteutuvat vain, kun $x = 1$.

Kun $x = 1$, saadaan

$$\begin{aligned} 1-1 &= \sqrt{1-1} \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Yhtälön ratkaisu on siis $x = 1$.

Toinen tapa:
Korotetaan yhtälön molemmat puolet neliöön.

$$\begin{aligned} x-1 &= \sqrt{1-x} \\ (x-1)^2 &= 1-x \\ x^2-2x+1 &= 1-x \\ x^2-x &= 0 \\ x(x-1) &= 0 \\ x &= 0 \quad \text{tai} \quad x = 1 \end{aligned}$$

Tarkistetaan, toteuttavatko ratkaisuehdokkaan alkuperäisen yhtälön.

x	$x - 1$	$\sqrt{1-x}$	
0	$0 - 1 = -1$	$\sqrt{1-0} = 1$	ei toteuta
1	$1 - 1 = 0$	$\sqrt{1-1} = 0$	toteuttaa

Yhtälön ratkaisu on siis $x = 1$.

b) Neliöjuuri on määritelty, kun $1-x \geq 0$ eli kun $x \leq 1$.
Juuren arvo on ei-negatiivinen, kun $|x-1| \geq 0$. Tämä toteutuu kaikilla muuttujan x arvoilla.
Molemmat ehdot toteutuvat, vain kun $x \leq 1$.
Korotetaan yhtälö puolittain neliöön.

$$
\begin{aligned}
|x-1| &= \sqrt{1-x} \\
(x-1)^2 &= 1-x \\
x^2-2x+1 &= 1-x \\
x^2-x &= 0 \\
x(x-1) &= 0 \\
x = 0 \quad &\text{tai} \quad x-1 = 0 \\
& \qquad\qquad x = 1
\end{aligned}
$$

Molemmat luvut toteuttavat ehdon $x \leq 1$.
Yhtälön ratkaisu on siis $x = 0$ tai $x = 1$.

Toinen tapa:
Korotetaan yhtälön molemmat puolet neliöön.

$$
\begin{aligned}
|x-1| &= \sqrt{1-x} \\
(x-1)^2 &= 1-x \\
x^2-2x+1 &= 1-x \\
x^2-x &= 0 \\
x(x-1) &= 0 \\
x = 0 \quad &\text{tai} \quad x-1 = 0 \\
& \qquad\qquad x = 1
\end{aligned}
$$

Tarkistetaan, toteuttavatko ratkaisuehdokkaan alkuperäisen yhtälön.

x	$\|x-1\|$	$\sqrt{1-x}$	
0	$\|0-1\| = 1$	$\sqrt{1-0} = 1$	toteuttaa
1	$\|1-1\| = 0$	$\sqrt{1-1} = 0$	toteuttaa

Yhtälön ratkaisu on siis $x = 0$ tai $x = 1$.

c) Neliöjuuri on määritelty, kun $1-x \geq 0$ eli kun $x \leq 1$. Yhtälöllä voi siis olla ratkaisuja vain, kun $x \leq 1$.

$$(1+\sqrt{1-x})^2 = 4$$

$$1+\sqrt{1-x} = 2 \quad \text{tai} \quad 1+\sqrt{1-x} = -2$$

$$\sqrt{1-x} = 1 \qquad\qquad \sqrt{1-x} = -3$$

Yhtälössä $\sqrt{1-x} = 1$ molemmat puolet ovat ei-negatiiviset, joten se voidaan korottaa puolittain toiseen, kun $x \leq 1$.

$$\sqrt{1-x} = 1$$

$$1-x = 1$$

$$x = 0$$

Tämä toteuttaa ehdon $x \leq 1$, joten se on alkuperäisen yhtälön ratkaisu.

Koska juuren arvo on aina ei-negatiivinen, yhtälöllä $\sqrt{1-x} = -3$ ei ole ratkaisuja.

Siis yhtälön $(1+\sqrt{1-x})^2 = 4$ ratkaisu on $x = 0$.

Toinen tapa:

$$(1+\sqrt{1-x})^2 = 4$$

$$1+\sqrt{1-x} = 2 \quad \text{tai} \quad 1+\sqrt{1-x} = -2$$

$$\sqrt{1-x} = 1 \qquad\qquad \sqrt{1-x} = -3$$

$$1-x = 1 \qquad\qquad \text{ei ratkaisua}$$

$$x = 0$$

Tarkistetaan toteuttaako ratkaisuehdokas $x = 0$ alkuperäisen yhtälön.

$$(1+\sqrt{1-0})^2 = (1+1)^2 = 2^2 = 4$$

Siis yhtälön ratkaisu on $x = 0$.

639. **a)** Kantaluvun k tulee toteuttaa ehto $k > 0$, $k \neq 1$.

$$\log_k 12 = \log_k 3 + 1$$
$$\log_k 12 - \log_k 3 = 1$$
$$\log_k \frac{12}{3} = 1$$
$$\log_k 4 = 1$$
$$4 = k^1$$
$$k = 4$$

Tämä luku toteuttaa ehdon $k > 0$, $k \neq 1$.
Siis $k = 4$.

Toinen tapa:
Kantaluvun k tulee toteuttaa ehto $k > 0$, $k \neq 1$.
$\log_k 3 + 1 = \log_k 3 + \log_k k = \log_k 3k$
Siis

$$\log_k 12 = \log_k 3k$$
$$12 = 3k \quad \|:3$$
$$4 = k$$

Tämä luku toteuttaa ehdon $k > 0$, $k \neq 1$.
Siis $k = 4$.

b) Kantaluvun k tulee toteuttaa ehto $k > 0$, $k \neq 1$.

$$\log_k 25 = -2$$
$$25 = k^{-2}$$
$$25 = \frac{1}{k^2} \quad \| \cdot \frac{k^2}{25} \neq 0$$
$$k^2 = \frac{1}{25}$$
$$k = \pm\sqrt{\frac{1}{25}}$$
$$k = \pm\frac{1}{5}$$

Kun otetaan huomioon ehto $k > 0$, $k \neq 1$,saadaan vastaukseksi $k = \frac{1}{5}$.

Toinen tapa:

$$\log_k 25 = \log_k 5^2 = \log_k (\frac{1}{5})^{-2}$$

Koska $\log_k (\frac{1}{5})^{-2} = -2$, on oltava $k = \frac{1}{5}$.

640. **a)** $e^x > 0$ kaikilla muuttujan $x$arvoilla, joten $e^x + a > 0$ aina kun $a > 0$.
Koska positiivisten lukujen tulo on aina positiivinen, tulo
$(e^x + 1)(e^x + 2)(e^x + 3) \cdot \ldots \cdot (e^x + 100)$ on arvoltaan positiivinen.

b) $e^x + 1$ on aina positiivinen, joten tulon merkki riippuu vain lausekkeen
$e^x - e^2$ merkistä.

Koska e^x on kasvava $e^x < e^2$ kun $x < 2$, ja niin tällöin $e^x - e^2 < 0$.
Positiivisen ja negatiivisen luvun tulo on negatiivinen, joten tulo
$(e^x + 1)(e^x - 2)$ on negatiivinen, kun $x < 2$.

641. **a)**
$$e^{2x} > 3e^x$$
$$(e^x)^2 - 3e^x > 0$$
$$e^x(e^x - 3) > 0$$

Koska $e^x > 0$ aina, tulo on positiivinen täsmälleen silloin, kun $e^x - 3 > 0$.

$$e^x - 3 > 0$$
$$e^x > 3 \quad \| \ e^x \text{ on kasvava}$$
$$x > \ln 3$$

Toinen tapa
$$e^{2x} > 3e^x \quad \| : e^x > 0$$
$$e^x > 3 \quad \| \ e^x \text{ on kasvava}$$
$$x > \ln 3$$

b) Muokataan alempaa yhtälöä.
$$2^x = 8^y$$
$$2^x = (2^3)^y$$
$$2^x = 2^{3y}$$
$$x = 3y$$

Sijoitetaan tämä ylempään yhtälöön.
$$x + 2y = 4$$
$$3y + 2y = 4$$
$$5y = 4 \quad \| : 5$$
$$y = \frac{4}{5}$$

Nyt $x = 3y = 3 \cdot \frac{4}{5} = \frac{12}{5}$.

Yhtälöryhmän ratkaisu on siis $x = \frac{12}{5}$ ja $y = \frac{4}{5}$.

642. **a)**

$$\sqrt{e^{2x}+e^{-2x}+2}$$
$$=\sqrt{(e^x)^2+2+(e^{-x})^2}$$
$$=\sqrt{(e^x)^2+2\cdot 1+(e^{-x})^2}$$
$$=\sqrt{(e^x)^2+2\cdot e^0+(e^{-x})^2}$$
$$=\sqrt{(e^x)^2+2\cdot e^{x-x}+(e^{-x})^2}$$
$$=\sqrt{(e^x)^2+2\cdot e^x\cdot e^{-x}+(e^{-x})^2}$$
$$=\sqrt{(e^x+e^{-x})^2}$$
$$=|e^x+e^{-x}|$$
$$=e^x+e^{-x},\ \text{sillä } e^x+e^{-x}>0$$

Toinen tapa:
$\sqrt{a}=b$ täsmälleen silloin, kun $a \geq 0$ ja $b \geq 0$ ja $b^2 = a$.

Koska $e^y > 0$ kaikilla y, niin $e^{2x}+e^{-2x}+2>0$ ja $e^x+e^{-x}>0$.

$$(e^x+e^{-x})^2$$
$$=(e^x)^2+2\cdot e^x\cdot e^{-x}+(e^{-x})^2$$
$$=e^{2x}+2\cdot e^0+e^{-2x}$$
$$=e^{2x}+2\cdot 1+e^{-2x}$$
$$=e^{2x}+e^{-2x}+2$$

b) Jos $a = 0$, funktiota f ei ole määritelty, kun $x = 0$. Siis on oltava $x \neq 0$.

$$f(x+1) = 2f(x)$$
$$a^{x+1} = 2\cdot a^x$$
$$a^x\cdot a^1 = 2\cdot a^x \quad \| : a^x \neq 0$$
$$a = 2$$

Yhtälö toteutuu kaikilla muuttujan x arvoilla, kun $a = 2$.

643. Matti vaihtoi ratkaistavan kulman kesken ratkaisun.

$$\sin \boxed{3x} = \frac{1}{2}$$
$$\boxed{x} = \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi \text{ tai } \boxed{x} = \frac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi$$

Teppo unohti jakaa kaikki termit jakaessaan kolmella

$$3x = \frac{\pi}{6} + n \cdot \boxed{2\pi} \quad \text{tai } 3x = \frac{5\pi}{6} + n \cdot \boxed{2\pi}$$
$$x = \frac{\pi}{18} + n \cdot \boxed{2\pi} \text{ tai } \quad x = \frac{5\pi}{18} + n \cdot \boxed{2\pi}$$

Oikea ratkaisu

$$2\sin 3x - 1 = 0$$
$$\sin 3x = \frac{1}{2}$$
$$3x = \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi \quad \text{tai } 3x = \frac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi$$
$$x = \frac{\pi}{18} + n \cdot \frac{2\pi}{3} \qquad x = \frac{5\pi}{18} + n \cdot \frac{2\pi}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

644.

$$\sqrt[3]{x\sqrt{x+1} + x}\sqrt[3]{x\sqrt{x+1} - x}$$
$$= \sqrt[3]{(x\sqrt{x+1} + x)(x\sqrt{x+1} - x)}$$
$$= \sqrt[3]{(x\sqrt{x+1})^2 - x^2)}$$
$$= \sqrt[3]{x^2(x+1) - x^2)}$$
$$= \sqrt[3]{x^3 + x^2 - x^2}$$
$$= \sqrt[3]{x^3}$$
$$= x$$

645. **a)** Vakio $A > 0$ on ainoa joka vaikuttaa funktion f arvojoukkoon. Funktion f arvojoukko on $[-A, A]$.

Vakio C on ainoa, joka vaikuttaa funktion f perusjaksoon. Funktion f perusjakso on $\frac{2\pi}{C}$.

Vakio $A > 0$ skaalaa kuvaajaa pystysuunnassa korkeammaksi tai matalammaksi. Se ei siirrä kuvaaja, ainoastaan venyttää tai kutistaa.

Vakio C skaalaa kuvaavaa vaakasuunnassa, eli tihentää tai harventaa sinifunktion kuvaajan heilahtelua.

Vakio D siirtää kuvaajaa vaakasuunnassa.

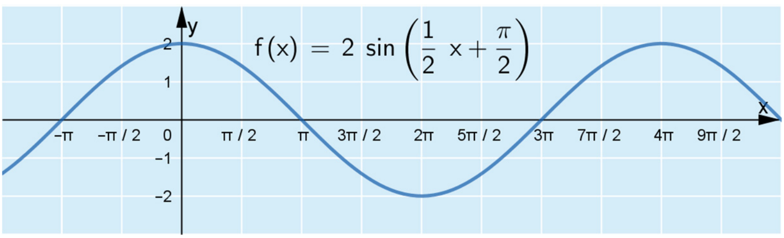
b) Koska funktion f arvojoukko on $[-2, 2]$, voidaan valita $A = 2$

Koska funktion f perusjakso on 4π, saadaan $\frac{2\pi}{C} = 4\pi$, minkä perusteella $C = \frac{1}{2}$.

Siis tähän asti on saatu $f(x) = 2\sin(\frac{1}{2}x + D)$.

Valitaan sopiva D sen tiedon avulla, että $f(0) = 2$.
$f(0) = 2\sin(D) = 2$ täsmälleen silloin, kun $\sin D = 1$. Valitaan siis $D = \frac{\pi}{2}$.

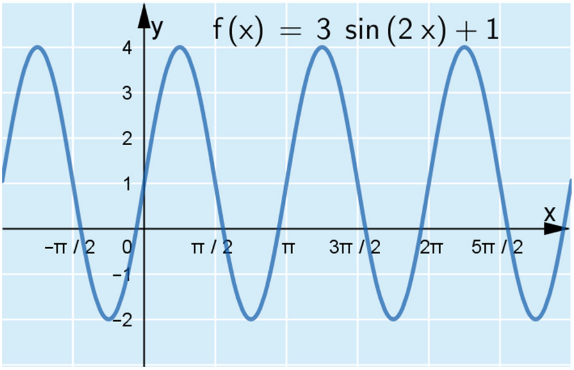
Tarkistetaan vielä piirtämällä, että näin muodostetun funktion $f(x) = 2\sin(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2})$ kuvaaja on sama kuin tehtävänannon kuvassa.



c) $-1 \leq \sin x \leq 1 \quad \| \cdot 3$
$-3 \leq 3\sin x \leq 3 \quad \| + 1$
$-2 \leq 3\sin x + 1 \leq 4$

Perusjakso π saadaan kertomalla muuttuja x kahdella.
Voidaan siis valita $f(x) = 3\sin 2x + 1$.

Tarkistetaan tämä vielä kuvan avulla.



646. **a)** Kerroin 3 ei vaikuta kosinifunktion perusjaskoon, joten se on 2π.
$-1 \leq \cos x \leq 1 \quad \| \cdot 3$
$-3 \leq 3\cos x \leq 3$

Arvojoukko on $[-3, 3]$.

b) Kerroin 2 puolittaa sinifunktion perusjakson 2π, joten perusjakso on π.
$-1 \leq \sin 2x \leq 1 \quad \| + 1$
$0 \leq 1 + \sin 2x \leq 2$

Arvojoukko on $[0, 2]$.

c) Kerroin 3 lyhentää kosinifunktion perusjakson 2π kolmasosaan joten perusjakso on $\frac{2\pi}{3}$.

$-1 \leq \cos 3x \leq 1 \quad \| \cdot 2$
$-2 \leq 2\cos 3x \leq 2 \quad \| + 4$
$2 \leq 2\cos 3x + 4 \leq 6$

Arvojoukko on $[2, 6]$.

647. **a)**

$$\sin 2x = -\sin x$$
$$2\sin x \cos x + \sin x = 0$$
$$\sin x(2\cos x + 1) = 0$$
$$\sin x = 0 \quad \text{tai } 2\cos x + 1 = 0$$
$$x = n \cdot \pi \qquad \cos x = -\frac{1}{2}$$
$$x = \frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi \text{ tai } x = -\frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi,\ n \in \mathbb{Z}$$

Taulukoidaan ratkaisuja

n	$x = \pi + n \cdot 2\pi$	$x = \frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi$	$x = -\frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi$
0	π	$\frac{2\pi}{3}$	…
1	3π	$\frac{2\pi}{3} + 2\pi = 2\frac{2}{3}\pi$	$-\frac{2\pi}{3} + 2\pi = 1\frac{1}{3}\pi$
2	…	…	$-\frac{2\pi}{3} + 4\pi = 3\frac{1}{3}\pi$

Välilllä]π, 2π[on siis ratkaisu $x = 1\frac{1}{3}\pi$.

Toinen tapa

$\sin 2x = -\sin x$

$\sin 2x = \sin(-x)$

$2x = -x + n \cdot 2\pi$ tai $2x = \pi - (-x) + n \cdot 2\pi$

$3x = n \cdot 2\pi \quad \| :3 \qquad x = \pi + n \cdot 2\pi$

$x = n \cdot \dfrac{2\pi}{3} \qquad , n \in \mathbb{Z}$

Taulukoidaan ratkaisuja

n	$x = n \cdot \dfrac{2\pi}{3}$	$x = \pi + n \cdot 2\pi$
0	…	π
1	$1 \cdot \dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{2}{3}\pi$	3π
2	$2 \cdot \dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{4}{3}\pi = 1\dfrac{1}{3}\pi$	…
3	$2 \cdot \dfrac{2\pi}{3} = 2\pi$	…

Välilllä $]\pi, 2\pi[$ on siis ratkaisu $x = 1\dfrac{1}{3}\pi$.

b) $\cos x + \cos 2x = 0$

$\cos x + 2\cos^2 x - 1 = 0$ || merkitään $\cos x = t$

$t + 2t^2 - 1 = 0$

$2t^2 + t - 1 = 0$

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

$$t = -1 \text{ tai } t = \frac{1}{2}$$

$t = -1$

$\cos x = -1$

$x = \pi + n \cdot 2\pi, \ n \in \mathbb{Z}$

$t = \frac{1}{2}$

$\cos x = \frac{1}{2}$

$x = \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$ tai $x = -\frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi, \ n \in \mathbb{Z}$

Taulukoidaan ratkaisuja

n	$x = \pi + n \cdot 2\pi$	$x = \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$	$x = -\frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$
0	π	$\frac{\pi}{3}$	…
1	3π	$\frac{\pi}{3} + 2\pi = 2\frac{1}{3}\pi$	$-\frac{\pi}{3} + 2\pi = 1\frac{2}{3}\pi$
2	…	…	$-\frac{\pi}{3} + 4\pi = 3\frac{2}{3}\pi$

Välillä $]\pi, 2\pi[$ on siis ratkaisu $x = 1\frac{2}{3}\pi$.

Toinen tapa:

$$\cos x + \cos 2x = 0$$

$$\cos 2x = -\cos x$$

$$\cos 2x = \cos(\pi - x)$$

$$2x = \pi - x + n \cdot 2\pi \quad \text{tai} \quad 2x = -(\pi - x) + n \cdot 2\pi$$

$$3x = \pi + n \cdot 2\pi \quad \| : 3 \qquad x = -\pi + n \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{\pi}{3} + n \cdot \frac{2\pi}{3} \qquad , n \in \mathbb{Z}$$

Taulukoidaan ratkaisuja

n	$x = -\pi + n \cdot 2\pi$	$x = \frac{\pi}{3} + n \cdot \frac{2\pi}{3}$
0	$-\pi$	$\frac{\pi}{3}$
1	π	$\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \pi$
2	3π	$\frac{\pi}{3} + 2 \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} = 1\frac{2}{3}\pi$
3	…	$\frac{\pi}{3} + 3 \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + \frac{6\pi}{3} = \frac{7\pi}{3} = 2\frac{1}{3}\pi$

Välilllä $]\pi, 2\pi[$ on siis ratkaisu $x = 1\frac{2}{3}\pi$.

c) $\cos x + \sin 2x = 0$

$\cos x + 2\sin x \cos x = 0$

$\cos x(1 + 2\sin x) = 0$

$\cos x = 0$ tai $1 + 2\sin x = 0$

$x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$ $\quad \sin x = -\frac{1}{2}$

$x = \frac{7\pi}{6} + n \cdot 2\pi$ tai $x = \pi - \frac{7\pi}{6} + n \cdot 2\pi$

$x = -\frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi,\ n \in \mathbb{Z}$

Taulukoidaan ratkaisuja

n	$x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$	$x = \frac{7\pi}{6} + n \cdot 2\pi$	$x = -\frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi$
-1	…	$\frac{7\pi}{6} + 2\pi = 1\frac{1}{6}\pi - 2\pi = -\frac{5}{6}\pi$	…
0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{6} = 1\frac{1}{6}\pi$	$-\frac{\pi}{6}$
1	$\frac{\pi}{2} + \pi = 1\frac{1}{2}\pi$	$\frac{7\pi}{6} + 2\pi = 1\frac{1}{6}\pi + 2\pi = 3\frac{1}{6}\pi$	$-\frac{\pi}{6} + 2\pi = 1\frac{5}{6}\pi$
2	$\frac{\pi}{2} + 2\pi = 2\frac{1}{2}\pi$	…	$-\frac{\pi}{6} + 4\pi = 3\frac{5}{6}\pi$

Välilllä]π, 2π[on siis ratkaisut $x = 1\frac{1}{2}\pi$, $x = 1\frac{1}{6}\pi$ ja $x = 1\frac{5}{6}\pi$.

648. **a)**

$$\tan 2x + \tan(\frac{\pi}{3} - x) = 0$$
$$\tan 2x = \tan(-(\frac{\pi}{3} - x))$$
$$\tan 2x = \tan(x - \frac{\pi}{3})$$
$$2x = x - \frac{\pi}{3} + n \cdot \pi$$
$$x = -\frac{\pi}{3} + n \cdot \pi,\ n \in \mathbb{Z}$$

b) $\cos x + \sqrt{3} \sin x = 0$

$$\cos x = -\sqrt{3} \sin x$$

Sini ja kosini eivät saa arvoa nolla yhtä aikaa, joten yhtälö ei toteudu silloin, kun $\cos x = 0$.

$$\cos x = -\sqrt{3} \sin x \quad \|: \cos x \neq 0$$
$$1 = -\sqrt{3} \frac{\sin x}{\cos x}$$
$$1 = -\sqrt{3} \tan x \quad \|: (-\sqrt{3})$$
$$\tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$x = \frac{5\pi}{6} + n \cdot \pi,\ n \in \mathbb{Z}$$

c)

$$\sin x = \cos(2x + \frac{\pi}{2})$$
$$\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - (-2x))$$
$$\sin x = \sin(-2x)$$

$$x = -2x + n \cdot 2\pi \quad \text{tai} \quad x = \pi - (-2x) + n \cdot 2\pi$$
$$3x = n \cdot 2\pi \quad \|:3 \qquad -x = \pi + n \cdot 2\pi \quad \|: (-1)$$
$$x = n \cdot \frac{2\pi}{3} \qquad x = -\pi - n \cdot 2\pi,\ n \in \mathbb{Z}$$

(Ratkaisu $x = -\pi - n \cdot 2\pi$ voidaan kirjoittaa myös muodossa $x = \pi + n \cdot 2\pi$)

649. **a)** Yhtälöllä voi olla ratkaisuja vain kun $x > 0$.

$$(1 + \ln x)^2 = 1$$
$$1 + \ln x = 1 \quad \text{tai} \quad 1 + \ln x = -1$$
$$\ln x = 0 \qquad\qquad \ln x = -2$$
$$x = e^0 \qquad\qquad x = e^{-2}$$
$$x = 1$$

Molemmat luvut toteuttavat ehdon $x > 0$.
Yhtälön ratkaisu on siis $x = 1$ tai $x = e^{-2}$.

b) Yhtälöllä voi olla ratkaisuja vain kun $x^3 > 0$ ja kun $x^5 > 0$. Nämä ehdot toteutuvat täsmälleen silloin, kun $x > 0$.

$$\ln x^3 - \ln x^5 + 1 = 0$$
$$3 \ln x - 5 \ln x + 1 = 0$$
$$-2 \ln x = -1 \quad \| : (-2)$$
$$\ln x = \frac{1}{2}$$
$$x = e^{\frac{1}{2}}$$
$$x = \sqrt{e}$$

Luku toteuttaa ehdon $x > 0$.
Yhtälön ratkaisu on siis $x = \sqrt{e}$.

Toinen tapa:
Yhtälöllä voi olla ratkaisuja vain kun $x^3 > 0$ ja kun $x^5 > 0$. Nämä ehdot toteutuvat täsmälleen silloin kun $x > 0$.

$$
\begin{aligned}
\ln x^3 - x^5 + 1 &= 0 \\
\ln \frac{x^3}{x^5} &= -1 \\
\ln x^{-2} &= -1 \\
x^{-2} &= e^{-1} \\
\frac{1}{x^2} &= \frac{1}{e} \quad \| \text{kerrotaan ristiin, } x \neq 0 \\
x^2 &= e \\
x &= \pm\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

Vai positiivinen vaihtoehto toteuttaa ehdon $x > 0$.
Yhtälön ratkaisu on siis $x = \sqrt{e}$.

c)

$$
\begin{aligned}
9\tan^2 x - 3 &= 0 \\
9\tan^2 x &= 3 \quad \| :9 \\
\tan^2 x &= \frac{1}{3} \\
\tan x = \sqrt{\frac{1}{3}} \quad &\text{tai} \quad \tan x = -\sqrt{\frac{1}{3}} \\
\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad & \quad \tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \\
x = \frac{\pi}{6} + n \cdot \pi \quad & \quad x = \frac{5\pi}{6} + n \cdot \pi,\ n \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

650. Kun $\ln a = \frac{b}{a} + 7$, niin silloin $a = e^{\frac{b}{2}+7}$.

Kun luku b nyt kasvaa yhdellä lukuun $b + 1$, niin luku $e^{\frac{b}{2}+7}$ muuttuu luvuksi

$$e^{\frac{b+1}{2}+7} = e^{\frac{b}{2}+\frac{1}{2}+7} = e^{\frac{1}{2}+\frac{b}{2}+7} = e^{\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{b}{2}+7} = \sqrt{e} \cdot e^{\frac{b}{2}+7} = \sqrt{e} \cdot a.$$

Luku a muuttuu siis $\sqrt{e}$ -kertaiseksi.

651. **a)** $\sin^2 x + \sin x \cos x = 0$

$\sin x(\sin x + \cos x) = 0$

$\sin x = 0$ tai $\sin x + \cos x = 0$

$x = n \cdot \pi$ $\quad$ $\sin x = -\cos x \parallel \cos x \neq 0$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = -1$$

$$\tan x = -1$$

$$x = \frac{3\pi}{4} + n \cdot \pi,\ n \in \mathbb{Z}$$

b) $2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0 \parallel$ merkitään $\sin x = t$

$2t^2 + 3t + 1 = 0$

$$t = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{4} = \frac{-3 \pm 1}{4}$$

$t = -1$ tai $t = -\frac{1}{2}$

$t = -1$ $\qquad$ $t = -\frac{1}{2}$

$\sin x = -1$ $\qquad$ $\sin x = -\frac{1}{2}$

$x = \frac{3\pi}{2} + n \cdot 2\pi$ $\qquad$ $x = \frac{7\pi}{6} + n \cdot 2\pi$ tai $x = \pi - \frac{7\pi}{6} + n \cdot 2\pi$

$$x = -\frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi,\ n \in \mathbb{Z}$$

652. **a)** Luvut ovat niin isoja, että niitä ei voida verrata ottamalla likiarvot laskimella. Koska logaritmifunktio ln x on kasva, ln a < ln b täsmälleen silloin, kun $a < b$. Verrataan siis lukujen logaritmeja.

$\ln e^{1000} = 1000$
$\ln 3^{9876} = 9876 \ln 3 = 10849{,}8\ldots$

Siis luku B on suurempi.

Toinen tapa.
Luvut ovat niin isoja, että niitä ei voida verrata ottamalla likiarvot laskimella. Lukuja voidaan nyt verrata kirjoittamlala ne saman kantalvuun avulla. Käyteään kantalukua e.

$A = e^{1000}$
$B = 3^{9876} = (e^{\log_e 3})^{9876} = (e^{\ln 3})^{9876} = e^{9876\cdot \ln 3}$
Eksponentissa olevan luvun likiarvo voidaan nyt laskea laskimella.
$B = 3^{9876} = e^{9876\cdot \ln 3} = e^{10849{,}8\ldots}$

Koska eksponenttifunktio e^x on kasvava, niin $e^{10849{,}8\ldots} > e^{10000}$.
Siis luku B on suurempi.

b) Luvut ovat niin isoja, että niitä ei voida verrata ottamalla likiarvot laskimella. Koska logaritmifunktio ln x on kasva, ln a < ln b täsmälleen silloin kun $a < b$. Verrataan siis lukujen logaritmeja.

$\ln 6^{\sqrt{70000}} = \sqrt{70000}\ln 6 = 1499{,}0\ldots$
$\ln 7^{\sqrt{60000}} = \sqrt{60000}\ln 7 = 1507{,}3\ldots$

Siis luku B on suurempi.

653. Koska $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, saadaan $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$.

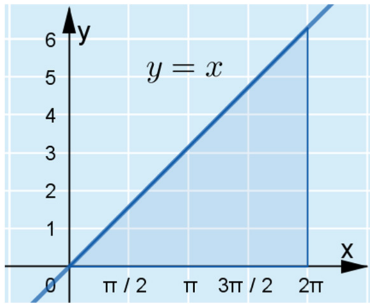
$f(x) = \sin^2 x - \cos^2 x + 2 = \sin^2 x - (1 - \sin^2 x) + 2 = 2\sin^2 x + 1$

$$\begin{aligned}
-1 \le \quad \sin x \quad &\le 1 \\
0 \le \quad \sin^2 x \quad &\le 1 \quad \| \cdot 2 \\
0 \le 2\sin^2 x \quad &\le 2 \quad \| + 1 \\
1 \le 2\sin^2 x + 1 &\le 3
\end{aligned}$$

Siis funktion f arvot eivät laita lukua 1 tai ylitä lukua 3.

$f(x) = 1$ täsmälleen silloin, kun $\sin^2 x = 0$, eli kun $\sin x = 0$. Näin käy kun $x = n \cdot \pi,\ n \in \mathbb{Z}$.

654. Integraalilla pinta-ala olisi $\int_0^{2\pi} (\sin x + x - \sin x)\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} x\mathrm{d}x$. Tämä sievennetty määrätty integraali kertoo välillä $[0, 2\pi]$ positiivisia arvoja saavan funktion x ja x-akselin välillä $[0, 2\pi]$ rajaaman alueen pinta-alan. Tämä alue on suorakulmainen kolmio, jonka kanta on 2π ja korkeus 2π. Joten sen pinta-ala on $\dfrac{2\pi \cdot 2\pi}{2} = 2\pi^2$.



655. **a)** Koska $f(x + \pi) = f(x)$ kaikilla x, kyseessä on jaksollinen funktio, jonka jakso on π. Eräs tällainen funktio on $\sin(2x)$ ja toinen tällainen funktio on $\cos(2x)$.

$\sin(2 \cdot 0) = \sin 0 = 0$, joten se ei kelpaa.
$\cos(2 \cdot 0) = \cos 0 = 1$, joten se kelpaa.

Voidaan siis valita $f(x) = \cos(2x)$.

Kaikki tehtävänannon ehdot täyttävät funktiot kelpaavat.

b) Muistetaan, että logaritmille pätee $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$. Lisäksi logaritmifunktio $\log_a x$ on määritelty, kun $x > 0$. Funtioksi f voidaan siis valita mikä tahansa funktio $f(x) = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$. Valitaan vaikkapa $f(x) = \ln x$.

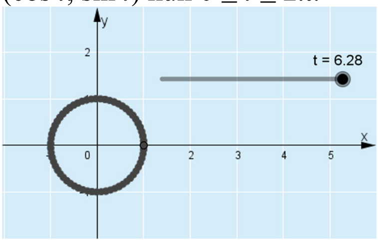
Kaikki tehtävänannon ehdot täyttävät funktiot kelpaavat.

656. **a)** Vektorin $\overline{OP} = \cos t\,\overline{i} + \sin t\,\overline{j}$ loppupisteen P koordinaatit on $P = (\cos t, \sin t)$.

Muistetaan, että yksikköympyrällä kehäpisteen x-koordinaatti on kulman kosini ja kehäpisteen y-koordinaatti on kulman sini.
Piste P on siis yksikköympyrällä.

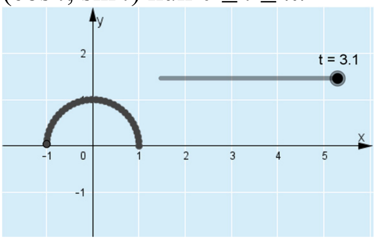
Kun kulma t käy läpi kaikki kulmat välillä $[0, 2\pi]$, piste P käy läpi kaikki yksikköympyrän pisteet. Ne siis muodostavat yksikköympyrän, eli ympyrän jonka keskipiste on origossa ja säde on yksi, eli käyrän $x^2 + y^2 = 1$.

Tarkistetaan asia piirtämällä ohjelmalla liu'un avulla pisteitä $(\cos t, \sin t)$ kun $0 \leq t \leq 2\pi$.



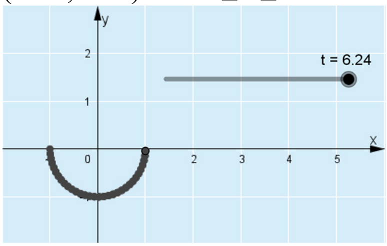
b) Jatkamalla a-kohdan päättelyä, kun kulma t käy läpi arvot $[0, \pi]$, piste P käy läpi vain yksikköympyrän x-akselin yläpuolisen osan, eli muodostuu käyrä $x^2 + y^2 = 1$ jossa $y \geq 0$. Tämä voidaan kirjoittaa myös muodossa $y^2 = 1 - x^2$ josta saadaan $y = \sqrt{1 - x^2}$.

Tarkistetaan asia piirtämällä ohjelmalla liu'un avulla pisteitä $(\cos t, \sin t)$ kun $0 \leq t \leq \pi$.



c) Jatkamalla a-kohdan päättelyä, kun kulma t käy läpi arvot $[\pi, 2\pi]$, piste P käy läpi vain yksikköympyrän x-akselin alapuolisen osan, eli muodostuu käyrä $x^2 + y^2 = 1$ jossa $y \leq 0$. Tämä voidaan kirjoittaa myös muodossa $y^2 = 1 - x^2$ josta saadaan $y = -\sqrt{1-x^2}$.

Tarkistetaan asia piirtämällä ohjelmalla liu'un avulla pisteitä $(\cos t, \sin t)$ kun $\pi \leq t \leq 2\pi$.

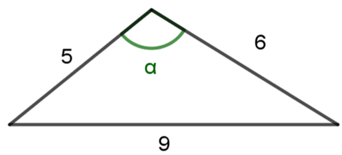


657. Kolmion suurin kulma on aina pisintä sivua vastaan, joten tylpän kulman vastainen sivu on 9.

Kulman α kosini saadaan kosinilauseella.

$$9^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = -\frac{1}{3}$$



Ratkaistaan kulman sini.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

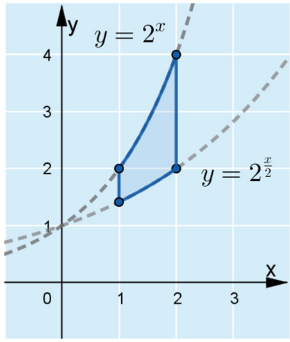
$$\sin^2 \alpha + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = 1$$

$$\sin \alpha = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Koska kulma on tylppä, sen sini on positiivinen, siis $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Kolmion pinta-ala on $A = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = 10\sqrt{2}$.

658. Piirretään tilanteesta kuva.



$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$ ¨ja $2^1 = 2$
Eli $\sqrt{2} \le f(1) \le 2.$

$2^{\frac{2}{2}} = 2$ ja $2^2 = 2$
Eli $2 \le f(2) \le 4.$

1) Tarkastellaan funktion *f* suurinta arvoa.

Tarkastellaan ensin välin päätekohta $x = 2$.
Funktio *f* ei voi saada funktiota 2^x suurempia arvoja, joten sen suurin arvo on enintään 4. Pienimmillään kohdassa $x = 2$ funktio *f* saa arvon 2. Eli sen suurin arvo on vähintään 2.

Välin alkukohdassa $x = 1$ ei saada tätä suurempia arvoja. Missään välin $1 < x < 2$ kohdassa ei voida saada arvoa 4 suurempia arvoja.

Näin ollen funktion *f* suurin arvo on välillä [2, 4].

2) Tarkastellaan funktion *f* pienintä arvoa.

Tarkastellaan ensin välin alkukohta $x = 1$.

Funktio *f* ei voi saada funktiota $2^{\frac{x}{2}}$ pienempiä arvoja, joten sen pienin arvo on vähintään $\sqrt{2}$. Suurimmillaan kohdassa $x = 1$ funktio *f* saa arvon 2. Eli sen pienin suurin arvo on enintään 2

Välin loppukohdassa $x = 2$ ei saada tätä pienempiä arvoja. Missään välin $1 < x < 2$ kohdassa ei voida saada arvoa $\sqrt{2}$ pienempiä arvoja.

Näin ollen funktion *f* pienin arvo on välillä $[\sqrt{2},\ 2]$.

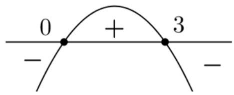
3) Tarkastellaan yhtälöitä $f(x) = 3$ ja $f(x) = 1{,}5$.
Funktion pienin arvo on välillä $[\sqrt{2},\ 2] = [1{,}4\ldots;\ 2]$ ja suurin arvo välillä [2,4]. Molemmat luvut 3 ja 1,5 ovat tällä välillä. Eli yhtälöillä voisi olla ratkaisuja.

Muta kuitenkin esimerkiksi funktio $f(x) = 2$ täyttää tehtävänannon ehdot. Tällä valinnalla yhtälöillä $f(x) = 3$ ja $f(x) = 1{,}5$ ei ole ratkaisuja.

Ei siis voida sanoa, että yhtälöille löytyy ratkaisuja.

659. **a)** Logaritmi on määritelty silloin kun $3x - x^2 > 0$.

$$3x - x^2 = 0$$
$$x(3 - x) = 0$$
$$x = 0 \text{ tai } x = 3$$



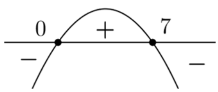
Funktio on siis määritelty kun $0 < x < 3$.

Luonnollinen logaritmi saa suuriman arvonsa, kun se lasketaan mahdollisimman suuresta luvusta. Alaspäin aukeava paraabeli saa suurimman arvonsa huipussa, joka on nollakohtien puolivälissä kohdassa $x = \frac{3}{2}$.

funktion suurin arvo on siis $f(\frac{3}{2}) = \ln(3 \cdot \frac{3}{2} - (\frac{3}{2})^2) = \ln\frac{9}{4}$.

b) Neliöjuuri on määritelty silloin kun $7x - x^2 \geq 0$.

$$7x - x^2 = 0$$
$$x(7 - x) = 0$$
$$x = 0 \text{ tai } x = 7$$



Funktio on siis määritelty kun $0 \leq x \leq 7$.

Neliöjuuri saa suuriman arvonsa, kun se lasketaan mahdollisimman suuresta luvusta. Alaspäin aukeava paraabeli saa suurimman arvonsa huipussa, joka on nollakohtien puolivälissä kohdassa $x = 3\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$.

funktion suurin arvo on siis $f(\frac{7}{2}) = \sqrt{7 \cdot \frac{7}{2} - (\frac{7}{2})^2} = \sqrt{\frac{49}{4}} = \frac{7}{2}$.

660. Merkitään mopoilijan nopeutta x km/h.

Mopoilijalta kului 58 km matkaan $\frac{58}{x}$ h.

Nyt autoilijan nopeus on $2x$ km/h.

Autoilijalta kuluin 58 km matkaan $\frac{58}{2x}\text{ h}=\frac{29}{x}\text{ h}$.

Koska $40\text{ min}=\frac{40}{60}\text{ h}=\frac{2}{3}\text{ h},$ saadaan yhtälö $\frac{58}{x}=\frac{29}{x}+\frac{2}{3}.$ Tämän yhtälön ratkaisu on $x=43,5$ (km/h).

Mopon keskinopeus oli siis 43,5 km/h ja auton 87 km/h.

661. **a)** Merkitään alkuperäistä aineen määrää kirjaimella *M* ja vuotuisen muutoksen prosenttikerrointa kirjaimella *k*. Saadaan yhtälö

$k^{29} \cdot M = \frac{M}{2}$. Tämän yhtälön ratkaisu on $k = \sqrt[29]{\frac{1}{2}} = 0{,}976...$

Aineesta siis häviää 1 – 0,9764… = 0,0236… ≈ 2,4 % vuodessa.

Aine on vähentynyt kolmannekseen, kun $M \cdot \left(\sqrt[29]{\frac{1}{2}}\right)^t = \frac{M}{3}$.

Tämän yhtälön ratkaisu on t= 45,96…
Aikaa kuluu siis noin 46 vuotta.

b) Kohdan *a* perusteella aineenmäärä kuvaa funktio $f(t) = M \cdot \left(\sqrt[29]{\frac{1}{2}}\right)^t$.

Kirjoitetaan tämä lauseke pyydetyssä muodossa.

$$f(t) = M \cdot \left(\sqrt[29]{\frac{1}{2}}\right)^t = M \cdot (e^{\ln \sqrt[29]{\frac{1}{2}}})^t = M \cdot e^{\ln \sqrt[29]{\frac{1}{2}} \cdot t}$$

Siis $-\lambda = \ln \sqrt[29]{\frac{1}{2}}$, mistä saadaan $\lambda = -\ln \sqrt[29]{\frac{1}{2}}$.

Tätä lauseketta voi halutessaan myös sieventää.

$$\lambda = -\ln \sqrt[29]{\frac{1}{2}} = -\ln(\frac{1}{2})^{\frac{1}{29}} = -\frac{1}{29}\ln(\frac{1}{2}) = \frac{1}{29}\ln(\frac{1}{2})^{-1} = \frac{1}{29}\ln 2 = \frac{\ln 2}{29}$$

Toinen tapa:

Kohdan *a* perusteella aineenmäärä kuvaa funktio $f(t)=M\cdot\left(\sqrt[29]{\frac{1}{2}}\right)^t$.

Kirjoitetaan tämä lauseke pyydetyssä muodossa.

$$
\begin{aligned}
f(t) &= M\cdot\left(\sqrt[29]{\frac{1}{2}}\right)^t \\
&= M\cdot\left(e^{\ln\sqrt[29]{\frac{1}{2}}}\right)^t \\
&= M\cdot e^{\ln\sqrt[29]{\frac{1}{2}}\cdot t} \\
&= M\cdot e^{\ln(\frac{1}{2})^{\frac{1}{29}}\cdot t} \\
&= M\cdot e^{\frac{1}{29}\ln(\frac{1}{2})\cdot t} \\
&= M\cdot e^{\frac{1}{29}\ln(2)^{-1}\cdot t} \\
&= M\cdot e^{-\frac{1}{29}\ln 2\cdot t} \\
&= M\cdot e^{-\frac{\ln 2}{29}\cdot t}
\end{aligned}
$$

Siis $\lambda=\frac{\ln 2}{29}$.

662. **a)** Merkitään valon intensiteettiä veden pinnanan tasolla kirjaimella *M* ja jokaisen metrin aiheuttaman muutoksen prosenttikerrointa kirjaimella *k*. Saadaan yhtälö $k^5 \cdot M = \frac{M}{2}$. Tämän yhtälön ratkaisu on

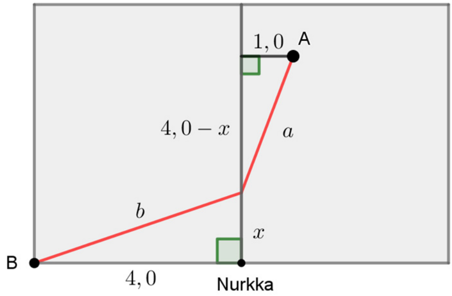
$$k = \sqrt[5]{\frac{1}{2}} = 0{,}870...$$

Valon intensiteetti siis vähenee 1 – 0,870… = 0,129... ≈ 13 % jokaista metriä kohden.

b) 7,5 metrin syvyydessä valonintensiteetti on $M \cdot \left(\sqrt[5]{\frac{1}{2}}\right)^{7{,}5} = M \cdot 0{,}378...$

Eli jäljellä on 38 % vedenpinnan intensiteetistä.

663. Piirretään tilanteesta kuva.



Kuvan merkinnöillä tehtävässä kysytään lukua *x*, kun *a* + *b* = 8.

Kirjoitetaan luvut *a* ja *b* muuttujan *x* avulla.

Pythagoraan lauseella saadaan

$b^2 = 4{,}0^2 + x^2$

$b = \sqrt{16 + x^2}$ (tai $b = -\sqrt{16 + x^2}$).

$a^2 = (4{,}0 - x)^2 + 1{,}0^2$

$a = \sqrt{x^2 - 8x + 17}$ (tai $\mathrm{a} = -\sqrt{x^2 - 8x + 17}$).

Saadaan siis yhtälö $a + b = \sqrt{x^2 - 8x + 17} + \sqrt{16 + x^2} = 8.$ Tämän yhtälön ratkaisu on *x* = 0,129… tai 5,120….
Näistä vaon 0,129… on mahdollinen arvo, sillä seinänkorkeus on 5 m.

Kaapeli on siis nurkan kohdalla 13 cm korkeudella maasta.

664. Logaritmi on määritelty kun $|\sin x| > 0$, eli täsmällen silloin kun $\sin x \neq 0$, eli kun $x \neq n \cdot \pi,\ n \in \mathbb{Z}$.

Yhtälö $\ln |\sin x| = 0$ toteutuu kun $|\sin x| = 1$ eli kun $\sin x = 1$ tai kun $\sin x = -1$.

Nämä yhtälöt toteutuvat, kun $x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi,\ n \in \mathbb{Z}$.

Kaikki nämä kulmat toteuttavat ehdon $x \neq n \cdot \pi,\ n \in \mathbb{Z}$.

Yhtälön $f(x) = 0$ ratkaisu on siis $x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi,\ n \in \mathbb{Z}$.

665.
$$
\begin{aligned}
-1 &\leq \cos 2x \leq 1 \quad \| \cdot 3\\
-3 &\leq 3\cos 2x \leq 3 \quad \| + 4\\
1 &\leq 4 + 3\cos 2x \leq 7
\end{aligned}
$$

Lausekkeen $4 + 3\cos 2x$ arvo on siis välillä $[1, 7]$.

Näin ollen lauseke $\frac{5}{4+3\cos 2x}$ saa suurimmillaan arvon $\frac{5}{1} = 5$ ja pienimillään arvon $\frac{5}{7}$.

Arvo 5 saadaan, kun $4 + 3\cos 2x = 1$, eli kun $\cos 2x = -1$.

Näin käy, kun $2x = \pi + n \cdot 2\pi$, eli $x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi,\ n \in \mathbb{Z}$.

Arvo $\frac{5}{7}$ saadaan kun $4 + 3\cos 2x = 7$, eli kun $\cos 2x = 1$.

Näin käy kun $2x = n \cdot 2\pi$, eli $x = n \cdot \pi,\ n \in \mathbb{Z}$.

666. Lauseke $\sqrt{a+1}$ on määritelty kun $a + 1 \geq 0$ eli kun $a \geq -1$.

Lähdetään ratkaisemaan yhtälöä.

$$\cos x = 2 - \sqrt{a+1}\cos x$$
$$\cos x + \sqrt{a+1}\cos x = 2$$
$$(1+\sqrt{a+1})\cos x = 2$$

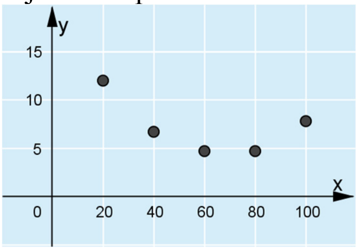
Yhtälö ei toteudu, jos $1+\sqrt{a+1}=0$, eli jos $\sqrt{a+1}=-1$. Näin ei käy millään a:n arvolla, eli kerroin $1+\sqrt{a+1} \neq 0$.

$$(1+\sqrt{a+1})\cos x = 2 \quad \|:(1+\sqrt{a+1})$$
$$\cos x = \frac{2}{1+\sqrt{a+1}}$$

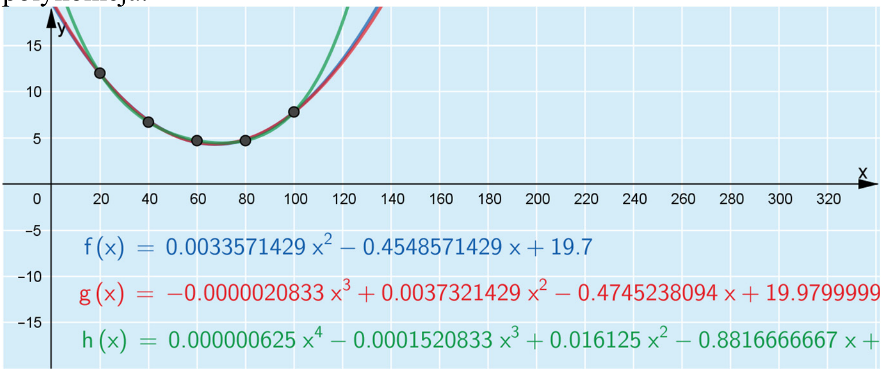
Koska $-1 \leq \cos x \leq 1$, yhtälöllä voi olla ratkaisuja vain kun $-1 \leq \frac{2}{1+\sqrt{a+1}} \leq 1$. Tämän kaksoisepäyhtälön ratkaisu on $a \geq 0$.

Kaikki nämä luvut toteuttavat ehdon $a \geq -1$.
Yhtälöllä on siis ratkaisuja kun $a \geq 0$.

667. Sijoitetaan pisteet koordinaatistoon.



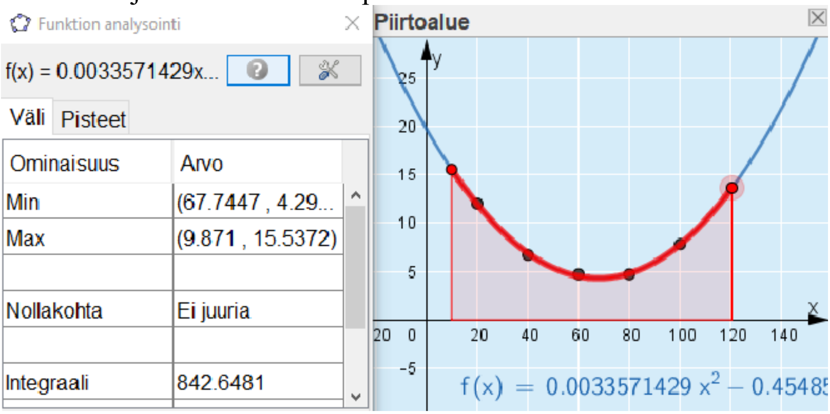
Kuvan perusteella suora ei sovi malliksi. Kokeillaan 2., 3., … asteen polynomeja.



Sekä toisen, että kolmannen asteenpolynomit näyttät kuvaavan tilannetta hyvin. Valitaan malliksi toisen asteen polynomifunktio.

Kun nopeus on 90 km/h mallin mukainen kulutus on
$f(90) = 5{,}95\ldots \approx 6{,}0$ litraa.

Etsitään ohjelman toiminnolla pienin kulutus.



Mallin mukaan kulutus on pienin kun nopeuden ollessa noin 68 km/h.

Vastaukset riippuvat valitus polunomimallin asteesta.

668. Koska kehältä valitun pisteen korkeus nousee ja laskee säännöllisesti ympyrän kehällä, kuvataan sen korkeutta funktion $f(x) = A\sin(Cx + D) + B$ avulla.

Määritetään vakiot A, B, C ja D.

Kehän etäisyys pyörimisakselista, eli kehäympyrän säde on 25 m ja halkaisija 50 m.
Kehän laki on 54 m korkeudessa. Näin ollen alin korkeus on
54 m − 50 m = 4m.

Siis $4 \leq f(x) \leq 54$. Tämän tiedon avulla saadaan vakiot A ja B.

$$
\begin{aligned}
-1 \leq \quad \sin(Cx + D) &\leq 1 \quad \| \cdot 25 \text{ (ympyrän säde)} \\
-25 \leq 25\sin(Cx + D) &\leq 25 \quad \| + 29 \\
4 \leq 25\sin(Cx + D) + 29 &\leq 54
\end{aligned}
$$

Maailmanpyörä pyörähtää täyden kierroksen 6 minuutissa, eli funktion f perusjakso $\frac{2\pi}{C} = 6$, josta $2\pi = 6C$ ja edelleen $C = \frac{\pi}{3}$.

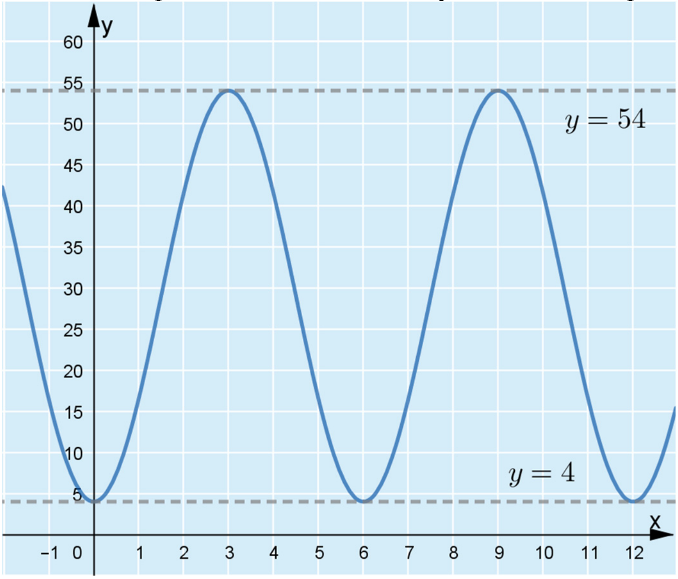
Määritetän vakio D sen tiedon avulla, että $f(0) = 4$.

$$
\begin{aligned}
f(0) = 25\sin(\tfrac{\pi}{3} \cdot 0 + D) + 29 = 25\sin(D) + 29 = 4 \\
25\sin D = -25 \quad \| : 25 \\
\sin D = -1
\end{aligned}
$$

Eräs tämän ehdon täyttävä luku on $\frac{3\pi}{2}$.

Siis $f(x) = 25\sin(\frac{\pi}{3}x + \frac{3\pi}{2}) + 29.$

Tarkistetaan piirtämällä, että kuva näyttää siltä miltä pitääkin.



Määritetään, milloin tarkastelupiste on 20 m korkeudella, eli ratkaistaan yhtälö $25\sin(\frac{\pi}{3}x + \frac{3\pi}{2}) + 29 = 20$.

Kaksi ensimmäistä ratkaisua ovat ensimmäisen kierroksen aikana, joten etsitään yhtälön välillä $0 < x < 6$ olevat ratkaisut.

Saadaan $x = 1{,}148\ldots$ min ≈ 1 min 9 s ja $x = 4{,}851\ldots$ min ≈ 4 min 51 s.

669. **a)** Kuuloskynnyksellä 120 dB saadaanyhtälö $120 = 10\lg\frac{I}{I_0}$. Ratkaistaan tästä kipukynnystä vastaava intensiteetti I.

$$120 = 10\lg\frac{I}{I_0} \quad \| :10$$
$$12 = \log_{10}\frac{I}{I_0}$$
$$\frac{I}{I_0} = 10^{12} \quad \| \cdot I_0$$
$$I = 10^{12} I_0$$

Kipukynnyksen desibelimäärän intensiteetti on siis 10^{12}-kertainen.

b) Intensiteetillä I pätee $L = 10\lg\frac{I}{I_0}$. Kun intensiteetti 1000-kertaistuu lukuun $1000I$ saadaan desibelilukemaksi

$$\begin{aligned}10\lg\frac{1000I}{I_0} &= 10\lg(1000\cdot\frac{I}{I_0})\\ &= 10(\log_{10}1000 + \lg\frac{I}{I_0})\\ &= 10(3 + \lg\frac{I}{I_0})\\ &= 30 + 10\lg\frac{I}{I_0}\\ &= 30 + L\end{aligned}$$

Desibelilukema siis kasvaa 30:llä.

c) Arvolla 85 dB saadaan yhtälö $85 = 10\lg\frac{I_{85}}{I_0}$ ja 5 dB:llä kasvanut 90 dB:n arvolla saadaan yhtälö $90 = 10\lg\frac{I_5}{I_0}$. Ratkaistaan näistä intensiteetit.

$$85 = 10\lg\frac{I_{85}}{I_0} \quad \| :10$$
$$8,5 = \log_{10}\frac{I_{85}}{I_0}$$
$$\frac{I_{85}}{I_0} = 10^{8,5} \quad \| \cdot I_0$$
$$I_{85} = 10^{8,5} I_0$$

$$90 = 10\lg\frac{I_9}{I_0} \quad \| :10$$
$$9 = \log_{10}\frac{I_9}{I_0}$$
$$\frac{I_9}{I_0} = 10^{9} \quad \| \cdot I_0$$
$$I_9 = 10^{9} I_0$$

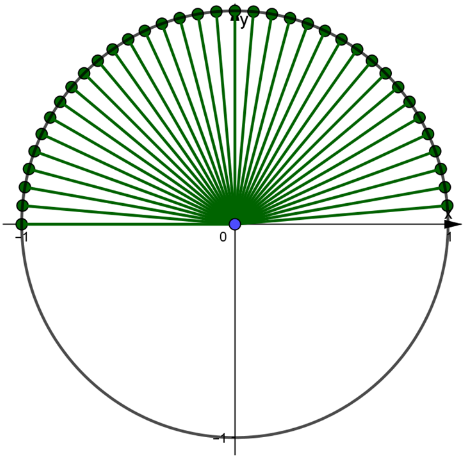
Lasketaan sitten intensiteettien suhde.

$$\frac{I_9}{I_{85}} = \frac{10^9 I_0}{10^{8,5} I_0} = \frac{10^9}{10^{8,5}} = 10^{9-8,5} = 10^{0,5} = 3,162... = 316,2...\%$$

Intensiteetti on siis kasvanut noin 216 %.

SYVENTÄVÄT TEHTÄVÄT

670. Hahmotellaan kulmia 5 asteen välein yksikköympyrään.



(Käytetyt komennot syötekentässä ovat:

x^2+y^2=1

A=(0,0)

Jono((cos(n°),sin(n°)),n,5,180,5)

Jono(Jana(A,L1(n)),n,1,180/5,1)

Koska cos α on kehäpisteen x-koordinaatti, huomataan, että yhteenlaskussa löytyy pareittain kulmat, joiden x-koordinaatit ovat toistensa vastaluvut, eli niiden summa on nolla.

Suplementtikulmien kosinit ovat toistensa vastaluvut, joiden summa on nolla. Näin saadaan
$\cos 1° + \cos 179° = 0$
$\cos 2° + \cos 178° = 0$
$\cos 3° + \cos 177° = 0$
…
$\cos 89° + \cos 91° = 0$

Ainoat kulmat, jotka eivät näin kumoudu ovat $\cos 90° = 0$ ja $\cos 180° = -1$.

Siis $\cos 1° + \cos 2° + \cos 3° + \ldots + \cos 180° = -1$.

671.

$$\begin{aligned} f(a+b)+f(a-b) &= \frac{1}{2}(e^{a+b}+e^{-(a+b)})+\frac{1}{2}(e^{a-b}+e^{-(a-b)}) \\ &= \frac{1}{2}(e^{a+b}+e^{-a-b}+e^{a-b}+e^{-a+b}) \end{aligned}$$

Tarkistetaan sitten, mitä toinen lauseke antaa, jotta tiedetään, mihin tähdätään.

$$\begin{aligned} 2f(a)f(b) &= 2\cdot\frac{1}{2}(e^{a}+e^{-a})\cdot\frac{1}{2}(e^{b}+e^{-b}) \\ &= \frac{1}{2}(e^{a}+e^{-a})(e^{b}+e^{-b}) \\ &= \frac{1}{2}(e^{a}e^{b}+e^{a}e^{-b}+e^{-a}e^{b}+e^{-a}e^{-b}) \\ &= \frac{1}{2}(e^{a+b}+e^{a-b}+e^{-a+b}+e^{-a-b}) \end{aligned}$$

Tämä on täsmälleen sama, kuin edellä, joten on osoitettu, että tällä funktiolla $f(a+b)+f(a-b)=2f(a)f(b)$.

672. **a)** Logaritmi $\log_y x$ on määritelty kun $x > 0$ kun $y > 0$, $y \neq 1$.
Logaritmi $\log_x y$ on määritelty, kun $y > 0$ kun $x > 0$, $x \neq 1$.
Kaikki ehdot ovat voimassa, eli yhtälö muodostaa käyrän, kun $x > 0$, $y > 0$ ja $x \neq 0$ ja $y \neq 0$.

Koordinaatiston ensimmäisessä neljänneksessä on $x > 0$ ja $y < 0$. Näin lausekkeiden määrittelyehdoista nähdään, että käyrä sijaitsee kokonaisuudessaan koordinaatiston ensimmäisessä neljänneksessä.

b) Muokataan yhtälöä kirjoittamalla molemmat logaritmit saman kantaluvun avulla. Valitaan kantaluvuksi x.

$$\log_y x = \log_x y$$
$$\frac{\log_x x}{\log_x y} = \log_x y$$
$$\frac{1}{\log_x y} = \log_x y \quad \| \cdot \log_x y \neq 0$$
$$1 = (\log_x y)^2$$
$$(\log_x y)^2 = 1$$
$$\log_x y = 1 \qquad \log_x y = -1$$
$$y = x^1 \qquad y = x^{-1}$$
$$y = x \qquad y = \frac{1}{x}$$

Käyrä siis koostuu kahdesta osasta, suorasta $y = x$ ja hyperbelistä $y = \frac{1}{x}$, kun $x > 0$ ja $x \neq 1$, mikä kuvastakin näkyy.

Toinen tapa:
Muokataan yhtälöä kirjoittamalla molemmat logaritmit saman kantaluvun avulla. Valitaan kantaluvuksi y.

$$\log_y x = \log_x y$$

$$\log_y x = \frac{\log_y y}{\log_y x}$$

$$\log_y x = \frac{1}{\log_y x} \quad \| \cdot \log_x y \neq 0$$

$$(\log_y x)^2 = 1$$

$$\log_y x = 1 \qquad\qquad \log_y x = -1$$

$$x = y^1 \qquad\qquad x = y^{-1}$$

$$y = x \qquad\qquad x = \frac{1}{y} \quad \| \cdot \frac{y}{x}, x \neq 0, y \neq 0$$

$$y = \frac{1}{x}$$

Käyrä siis koostuu kahdesta osasta, suorasta $y = x$ ja hyperbelistä $y = \frac{1}{x}$, kun $x > 0$ ja $x \neq 1$, mikä kuvastakin näkyy.

Kolmas tapa:
Muokataan yhtälöä kirjoittamalla molemmat logartimit saman kantaluvun avulla. Koska $x \neq 1$ ja $y \neq 1$, kaikilla luvuilla $k > 0$ ja $k \neq 1$ pätee $\log_k x \neq 0$ ja $\log_k y \neq 0$. Kantaluvuksi voidaan siis valita mikä luku $k > 0$, $k \neq 1$ tahansa. Valitaan kantaluvuksi e.

$$\log_y x = \log_x y$$

$$\frac{\ln x}{\ln y} = \frac{\ln y}{\ln x} \quad \|\text{kerrotaan ristiin, } \ln x \neq 0, \ln y \neq +$$

$$(\ln x)^2 = (\ln y)^2$$

$$\ln x = \ln y \qquad\qquad \ln x = -\ln y$$

$$x = y \qquad\qquad \ln x = \ln y^{-1}$$

$$y = x \qquad\qquad x = \frac{1}{y} \quad \| \cdot \frac{y}{x}, x \neq 0, y \neq 0$$

$$y = \frac{1}{x}$$

Käyrä siis koostuu kahdesta osasta, suorasta $y = x$ ja hyperbelistä $y = \frac{1}{x}$, kun $x > 0$ ja $x \neq 1$, mikä kuvastakin näkyy.

673. **a)** Vektorin ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan täsmälleen silloin, kun niiden pistetulo on nolla.

$$
\begin{aligned}
\overline{a}\cdot\overline{b} &= (\cos\varphi-2\sin\varphi)(\cos\varphi+\sin\varphi)+1\cdot1+(\sin\varphi+2\cos\varphi)(\sin\varphi-\cos\varphi)\\
&= \cos^2\varphi+\cos\varphi\sin\varphi-2\sin\varphi\cos\varphi-2\sin^2\varphi+1\\
&\quad +\sin^2\varphi-\sin\varphi\cos\varphi+2\cos\varphi\sin\varphi-2\cos^2\varphi\\
&= 1-\cos^2\varphi-\sin^2\varphi\\
&= 1-(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)\\
&= 1-1\\
&= 0
\end{aligned}
$$

b) Kun $\varphi=0$ saadaan

$$
\begin{aligned}
\overline{a} &= (\cos0-2\sin0)\overline{i}+\overline{j}+(\sin0+2\cos0)\overline{k}\\
&= (1-2\cdot0)\overline{i}+\overline{j}+(0+2\cdot1)\overline{k}\\
&= \overline{i}+\overline{j}+2\overline{k}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{b} &= (\cos0+\sin0)\overline{i}+\overline{j}+(\sin0-\cos0)\overline{k}\\
&= (1+0)\overline{i}+\overline{j}+(0-1)\overline{k}\\
&= \overline{i}+\overline{j}-\overline{k}
\end{aligned}
$$

Nyt

$$
\begin{aligned}
s\overline{a}\cdot t\overline{b} &= s(\overline{i}+\overline{j}+2\overline{k})+t(\overline{i}+\overline{j}-\overline{k})\\
&= (s+t)\overline{i}+(s+t)\overline{j}+(2s-t)-\overline{k}
\end{aligned}
$$

Tästä saadaan yhtälöryhmä $\begin{cases} s+t=1\\ s+t=-1\\ 2s-t=0. \end{cases}$

Kaksi ensimmäistä yhtälöä eivät voi toteutua samoilla vakioiden s ja t arvoilla, joten yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua.

Ei siis ole kertoimia s ja t, joila $\overline{i}-\overline{j}=s\overline{a}\cdot t\overline{b}$.

674. Muokataan funktioin lauseketta taulukosta löytyviä kaavoja käyttäen.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin 3x + \sin 2x + \sin x \\ &= 3\sin x - 4\sin^3 x + 2\sin x \cos x + \sin x \\ &= 4\sin x - 4\sin^3 x + 2\sin x \cos x \\ &= \sin x(4 - 4\sin^2 x + 2\cos x) = 0 \end{aligned}$$

$\sin x = 0$ eli $x = n \cdot \pi,\ n \in \mathbb{Z}$

tai

$$4 - 4\sin^2 x + 2\cos x = 0$$
$$4 - 4(1 - \cos^2 x) + 2\cos x = 0$$
$$4 - 4 + 4\cos^2 x + 2\cos x = 0$$
$$2\cos x(2\cos x + 1) = 0$$

$2\cos x = 0$ tai $2\cos x + 1 = 0$

$\cos x = 0$ $\quad\quad$ $\cos x = -\dfrac{1}{2}$

$x = \dfrac{\pi}{2} + n \cdot \pi,\ n \in \mathbb{Z}$ $\quad\quad$ $x = \dfrac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi$, tai $x = -\dfrac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi\ n \in \mathbb{Z}$

Siis $x = n \cdot \pi$ tai $x = \dfrac{\pi}{2} + n \cdot \pi$ tai $x = \dfrac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi$ tai

$x = -\dfrac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi\ n \in \mathbb{Z}$

675. Taulukosta löytyvän kaavan avulla saadaan

$$\begin{aligned}\sin(2x+\frac{\pi}{6}) &= \sin 2x\cos\frac{\pi}{6}+\cos 2x\sin\frac{\pi}{6}\\ &= \sin 2x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos 2x\cdot\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Koska kaksinkertaisen kulman sinille on vain yksi kaava, muokataan lauseketta seuraavaksi sen avulla.

$$\begin{aligned}\sin 2x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos 2x\cdot\frac{1}{2} &= 2\sin x\cos x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos 2x\cdot\frac{1}{2}\\ &= \sin x\cos x\cdot\sqrt{3}+\cos 2x\cdot\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Tästä päästään eteenpäin tiedon tan $x = 2$, eli $\frac{\sin x}{\cos x}=2,$ avulla, sillä nyt sin x = 2cos$x$.

$$\begin{aligned}\sin x\cos x\cdot\sqrt{3}+\cos 2x\cdot\frac{1}{2} &= 2\cos x\cdot\cos x\cdot\sqrt{3}+\cos 2x\cdot\frac{1}{2}\\ &= 2\sqrt{3}\cos^2 x+\cos 2x\cdot\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Valitaan kaksinkertaisen kulman kosinin kaavoista se, jossa on vain cos^2x.

$$\begin{aligned}2\sqrt{3}\cos^2 x+\cos 2x\cdot\frac{1}{2} &= 2\sqrt{3}\cos^2 x+(2\cos^2 x-1)\cdot\frac{1}{2}\\ &= 2\sqrt{3}\cos^2 x+\cos^2 x-\frac{1}{2}\\ &= (2\sqrt{3}+1)\cos^2 x-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Koska nyt sin x = 2cos$x$ ja aina sin^2x + cos^2 x = 1, saadaan 4cos^2x + cos^2 x = 1, mistä edelleen $\cos^2 x=\frac{1}{5}.$

Siis

$$\begin{aligned}&(2\sqrt{3}+1)\cos^2 x-\frac{1}{2}\\ &=(2\sqrt{3}+1)\cdot\frac{1}{5}-\frac{1}{2}=\frac{2\sqrt{3}+1}{5}-\frac{1}{2}=\frac{4\sqrt{3}+2}{10}-\frac{5}{10}=\frac{4\sqrt{3}-3}{10}\end{aligned}$$

Siis $\sin(2x+\frac{\pi}{6})=\frac{4\sqrt{3}-3}{10}.$

676.

$$\begin{aligned}
\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} &= \frac{2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{1+\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} \\
&= \frac{2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{\frac{\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}+\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} \\
&= \frac{2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{\frac{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} \\
&= \frac{2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}} \\
&= 2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cancel{\cos\frac{x}{2}}}\cdot\frac{\cos^{\cancel{2}}\frac{x}{2}}{1} \\
&= 2\sin\tfrac{x}{2}\cos\tfrac{x}{2} \\
&= \sin(2\cdot\tfrac{x}{2}) \\
&= \sin x
\end{aligned}$$

$$\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{1+\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}$$

$$= \frac{\frac{\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}-\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\frac{\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}+\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}$$

$$= \frac{\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\frac{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}$$

$$= \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cancel{\cos^2\frac{x}{2}}}\cdot\frac{\cancel{\cos^2\frac{x}{2}}}{1}$$

$$= \cos(2\cdot\tfrac{x}{2})$$

$$= \cos x$$

677.

$$\begin{aligned}
\cos 3t &= \cos(t+2t) \\
&= \cos t\cos 2t - \sin t\sin 2t \\
&= \cos t(2\cos^2 t - 1) - \sin t\cdot 2\sin t\cos t \\
&= 2\cos^3 t - \cos t - 2\sin^2 t\cos t \\
&= 2\cos^3 t - \cos t - 2(1-\cos^2 t)\cos t \\
&= 2\cos^3 t - \cos t - 2\cos t + 2\cos^3 t \\
&= 4\cos^3 t - 3\cos t
\end{aligned}$$

$$8x^3 - 6x - 1 = 0$$

$$\begin{aligned}
8\cos^3\frac{\pi}{9} - 6\cos\frac{\pi}{9} - 1 &= 2(4\cos^3\frac{\pi}{9} - 3\cos\frac{\pi}{9}) - 1 \\
&= 2(\cos(3\cdot\frac{\pi}{9})) - 1 \\
&= 2(\cos(\frac{\pi}{3})) - 1 \\
&= 2\cdot\frac{1}{2} - 1 \\
&= 0
\end{aligned}$$

7 Differentiaalilaskenta

7.1 Raja-arvo ja jatkuvuus

LUVUN 7.1 YDINTEHTÄVÄT

701. **a)** $\lim\limits_{x\to 2-} f(x) \approx 3$, $\lim\limits_{x\to 2+} f(x) \approx 1$ ja $f(2) \approx 1$.

b) $\lim\limits_{x\to -2} f(x) \approx 1$, $\lim\limits_{x\to -1} f(x) \approx 1{,}5$ ja $\lim\limits_{x\to 5} f(x) \approx 1$

Raja-arvoa kohdassa 2 ei ole olemassa.

c) Funktio on jatkuva kohdassa $x = 5$. Funktio on epäjatkuva kohdissa $x = -1$ ja $x = 2$. Funktion jatkuvuutta ei voida tarkastella kohdassa $x = -2$, koska funktiota ei ole määritelty tässä kohdassa.

702. **a)** $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}}=\lim\limits_{x\to 2}(x+2)=2+2=4$

b)

$$\lim_{x\to -7}\frac{x+7}{2x^2+10x-28}$$
$$=\lim_{x\to -7}\frac{x+7}{2(x^2+5x-14)}$$
$$=\lim_{x\to -7}\frac{\cancel{x+7}}{2(\cancel{x+7})(x-2)}$$
$$=\lim_{x\to -7}\frac{1}{2(x-2)}$$
$$=\frac{1}{2(-7-2)}$$
$$=-\frac{1}{18}$$

$x^2+5x-14$ voidaan jakaa tekijöihin nollakohtien avulla.

$x^2+5x-14=0$

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{25-4\cdot 1\cdot(-14)}}{2\cdot 1}=\frac{-5\pm 9}{2}$$

$x=2$ tai $x=-7$

c)

$$\lim_{x\to 6}\frac{x^2-6x}{x^3-12x^2+36x}$$
$$=\lim_{x\to 6}\frac{x(x-6)}{x(x^2-12x+36)}$$
$$=\lim_{x\to 6}\frac{\cancel{x}(\cancel{x-6})}{\cancel{x}(x-6)^{\cancel{2}}}$$
$$=\lim_{x\to 6}\frac{1}{x-6}$$

Koska osoittaja on 1 ja nimittäjä lähestyy lukua 0, funktiolla ei ole raja-arvoa kohdassa $x = 6$.

d)

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{1-e^x}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{(e^x-1)}(e^x+1)}{-\cancel{(e^x-1)}}\\
&=\lim_{x\to 0}(-(e^x+1))\\
&=-(e^0+1)\\
&=-(1+1)\\
&=-2
\end{aligned}
$$

703. **a)** $f(x) = \begin{cases} e^{x-1}, \text{kun } x < 1 \\ \ln x + 1, \text{kun } x \geq 1 \end{cases}$

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1-} e^{x-1} = e^{1-1} = e^0 = 1$$
$$\lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1+} (\ln x + 1) = \ln 1 + 1 = 0 + 1 = 1$$
$$\lim_{x \to 1} f(x) = 1$$

Funktio *f* on jatkuva väleillä $x < 1$ ja $x > 1$. Tarkastellaan jatkuvuutta kohdassa $x = 1$.

$f(1) = \ln 1 + 1 = 1$
Funktion arvo ja raja-arvo kohdassa $x = 1$ ovat yhtä suuret, joten funktio *f* on jatkuva myös kohdassa $x = 1$. Funktio *f* on jatkuva.

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}, \text{kun } x < 1 \\ 3, \text{kun } x = 1 \\ \dfrac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}, \text{kun } x > 1 \end{cases}$

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1-} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} = \lim_{x \to 1-} (x+1) = 1 + 1 = 2$$
$$\lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1+} \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \to 1+} \frac{\cancel{(\sqrt{x}-1)}(\sqrt{x}+1)}{\cancel{\sqrt{x}-1}} = \lim_{x \to 1+} (\sqrt{x} + 1) = \sqrt{1} + 1 = 2$$
$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

Funktion arvo kohdassa $x = 1$ on 3 eli $f(1) = 3$.
Funktio ei ole jatkuva kohdassa $x = 1$, joten funktio ei ole jatkuva.

704. Jotta funktio olisi jatkuva kohdassa $x = -2$, tulee olla $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = f(-2)$.

$f(-2) = (-2)^2 + a^2 \cdot (-2) - 1 = 4 - 2a^2 - 1 = 3 - 2a^2$

$$\lim_{x\to -2-} f(x) = \lim_{x\to -2-} (ax^2 + 3) = a \cdot (-2)^2 + 3 = 4a + 3$$

$$\lim_{x\to -2+} f(x) = \lim_{x\to -2+} (x^2 + a^2x - 1) = (-2)^2 + a^2 \cdot (-2) - 1 = 3 - 2a^2$$

Ehdosta $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = f(-2)$ saadaan

$3 - 2a^2 = 4a + 3$
$-2a^2 - 4a = 0$
$-2a(a + 2) = 0$
$-2a = 0$ tai $a + 2 = 0$
$a = 0$ $\quad\quad a = -2.$

Funktio on jatkuva, kun $a = -2$ tai $a = 0$.

705. **a)** Rationaalifunktio on jatkuva määrittelyjoukossaan. Välillä]1, 3[on kohta $x = 2$, jossa funktiota ei ole määritelty. Annettujen tietojen avulla ei voida päätellä, onko funktiolla nollakohtaa välillä]1, 3[.

b) $f(3) > 0$ ja $f(4) < 0$ ja funktio f on jatkuva välillä]3, 4[. Bolzanon lauseen mukaan funktiolla on nollakohta välillä]3, 4[ja siis myös välillä]1, 4[.

c) Nollakohtien lukumäärää ei voida päätellä annettujen tietojen perusteella.

706. Määritetään janan AB pituus.

$$\sqrt{(a-a)^2 + (g(a) - f(a))^2} = |g(a) - f(a)| = \left|\frac{2}{a-1} - \frac{a^2 + a}{a-1}\right| = |-a-2|$$

$$\lim_{a\to 1} |-a-2| = |-1-2| = 3$$

Janan AB pituus lähenee lukua 3.

7.2 Derivaatta

LUVUN 7.2 YDINTEHTÄVÄT

707. **a)** Pisteet A ja B ovat derivaattafunktion $f\,'$ nollakohtia, joten ne ovat funktion f ääriarvokohtia. Siis $A = (1, 0)$ ja $B = (4, 0)$.

b) $f\,'(0) = 4$

c) $f\,'(2) = -2$

d) $f(2) = 1$

708. **a)** $D(3x^5 - 2x + \pi) = 3 \cdot 5x^4 - 2 + 0 = 15x^4 - 2$

b) $D(\sin x \cos x) = \cos x \cos x + \sin x\,(-\sin x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$

c) $D(4x^2 + 5x)^5$
$= 5(4x^2 + 5x)^4\, D(4x^2 + 5x)$
$= 5(4x^2 + 5x)^4(8x + 5)$
$= (40x + 25)(4x^2 + 5x)^4$

709. **a)** $f'(x) = \dfrac{2x(x+1) - x^2 \cdot 1}{(x+1)^2} = \dfrac{2x^2 + 2x - x^2}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$

$f'(-3) = \dfrac{(-3)^2 + 2 \cdot (-3)}{(-3+1)^2} = \dfrac{3}{4}$

b) Paraabelin huippu on derivaatan nollakohdassa.
$D(3x^2 - 12x + 4) = 6x - 12$
$6x - 12 = 0$
$x = 2$
$y = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 4 = -8$

Huipun koordinaatit ovat (2, −8).

c) Tangentin sivuamispisteen y-koordinaatti on $f(1) = e^0 + 3\ln 1 + 2 = 3$.
Tangentin sivuamispiste on (1, 3).
Tangentin kulmakerroin on $f'(1)$.
$f'(x) = e^{2x-2} \cdot 2 + 3 \cdot \dfrac{1}{x} = 2e^{2x-2} + \dfrac{3}{x}$
$f'(1) = 2e^0 + 3 = 2 + 3 = 5$

Tangentin yhtälö on
$y - 3 = 5(x - 1)$
$y = 5x - 2.$

710. Jotta tangentti ei leikkaisi suoraa $y = 2x$, sen tulee olla yhdensuuntainen suoran $y = 2x$ kanssa, eli tangentin kulmakertoimen tulee olla 2.

$f'(x) = -\sin 2x \cdot 2 = -2\sin 2x$

$$-2\sin 2x = 2 \quad \|:(-2)$$
$$\sin 2x = -1$$
$$2x = \frac{3\pi}{2} + n \cdot 2\pi \quad \|:2 \text{ tai } 2x = \pi - \frac{3\pi}{2} + n \cdot 2\pi = -\frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi \quad \|:2$$
$$x = \frac{3\pi}{4} + n \cdot \pi \qquad x = -\frac{\pi}{4} + n \cdot \pi,$$

n on kokonaisluku

Vastaukset voidaan yhdistää.

Funktion f kuvaajalle kohtiin $x = \frac{3\pi}{4} + n \cdot \pi = -\frac{\pi}{4} + n \cdot \pi$, $n \in \mathbb{Z}$, piirretty tangentti ei leikkaa suoraa y.

711. $f'(x) = 2axe^x + ax^2e^x + be^x + bxe^x = ax^2e^x + (2a + b)xe^x + be^x$

$ax^2e^x + (2a + b)xe^x + be^x = 2x^2e^x + xe^x - 3e^x$

On oltava

$a = 2$, $2a + b = 1$ ja $b = -3$

Luvut $a = 2$ ja $b = -3$ toteuttavat myös ehdon $2a + b = 1$.

712.

$$\begin{aligned}
f'(-1) &= \lim_{x\to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} \\
&= \lim_{x\to -1} \frac{x^2 - 3x - ((-1)^2 - 3\cdot(-1))}{x+1} \\
&= \lim_{x\to -1} \frac{x^2 - 3x - 4}{x+1} \\
&= \lim_{x\to -1} \frac{\cancel{(x+1)}(x-4)}{\cancel{x+1}} \\
&= -1 - 4 \\
&= -5
\end{aligned}$$

713. **a)** Muutosnopeuden ilmoittaa derivaatta.
$f'(10) = -2{,}36\ldots \approx -2{,}4$ astetta minuutissa.

b) Ratkaistaan yhtälö $f'(t) = -0{,}5$.
$t = 41{,}08\ldots \approx 41$ minuuttia

c) $f'(0) = -3{,}9$
Ratkaistaan yhtälö $f'(x) = 0{,}5\ f'(0)$.
$x = 13{,}86\ldots \approx 14$ minuuttia

7.3 Funktion tutkiminen derivaatan avulla

LUVUN 7.3 YDINTEHTÄVÄT

714. **a)**]−5, −3[ja]−1, 2[

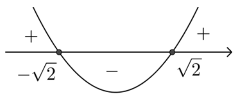
b) $x \approx -5$, $x \approx -3$, $x \approx -1$ ja $x \approx 2$

c) [−6, −5[,]−3, −1[ja]2, 3]

d) Derivaatta on pienin, kun kuvaaja laskee jyrkimmin, eli kohdassa $x \approx 0{,}5$.

715. Tarkastellaan funktion kulkua derivaatan avulla. Funktion f derivaattafunktio on $f'(x) = 3x^2 - 6$.

$f'(x) = 0$, kun
$3x^2 - 6 = 0$
$x^2 = 2$
$x = \sqrt{2}$ tai $x = -\sqrt{2}$



Derivaatta on negatiivinen välillä $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$ ja funktio on vähenevä välillä $[-\sqrt{2},\ \sqrt{2}\,]$.

Funktio saa suljetulla välillä suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteessä tai välille kuuluvassa derivaatan nollakohdassa.

$f(0) = 1$
$f(2) = 2^3 - 6 \cdot 2 + 1 = 8 - 12 + 1 = -3$

Välillä [0, 2] on derivaatan nollakohdista $x = \sqrt{2}$.
$f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^3 - 6 \cdot \sqrt{2} + 1 = 2\sqrt{2} - 6\sqrt{2} + 1 = -4\sqrt{2} + 1 = 1 - 4\sqrt{2}$

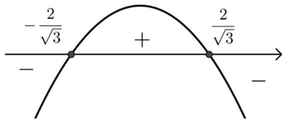
Suurin arvo on $f(0) = 1$ ja pienin $f(\sqrt{2}) = 1 - 4\sqrt{2}$.

716. Suorakulmion paraabelilla olevan kärjen koordinaatit ovat $(x, 4 - x^2)$.
Suorakulmion kanta on x ja korkeus $4 - x^2$.
Pinta-ala on $x(4 - x^2) = 4x - x^3$.
Määritetään pinta-alafunktion $f(x) = 4x - x^3$, $x \geq 0$ suurin arvo.

Tarkastellaan funktion kulkua derivaatan avulla. Nyt $f'(x) = 4 - 3x^2$.

$f'(x) = 0$, kun

$$4 - 3x^2 = 0$$
$$-3x^2 = -4$$
$$x^2 = \frac{4}{3}$$
$$x = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ tai } x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$



		0	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	
$f'(x)$			+	–
$f(x)$			↗	↘

Funktiolla on suurin arvo kohdassa $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

$$f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = 4 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} - \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 \overset{3)}{=} \frac{8}{\sqrt{3}} - \frac{8}{3\sqrt{3}} = \frac{24-8}{3\sqrt{3}} = \frac{16}{3\sqrt{3}}$$

Pinta-alan suurin arvo on $\frac{16}{3\sqrt{3}} = \frac{16\sqrt{3}}{9}$.

717. **a)** Vaakasuoran tangentin kulmakerroin on 0. Määritetään kohdat, joissa funktion *f* derivaatta *f* ′ on 0.

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^3+1}}=(x^3+1)^{-\frac{1}{2}},\ x>-1$$

$$f'(x)=-\frac{1}{2}(x^3+1)^{-\frac{3}{2}}\cdot 3x^2=-\frac{1}{2}\cdot\frac{3x^2}{(x^3+1)^1(x^3+1)^{\frac{1}{2}}}=-\frac{3x^2}{2(x^3+1)\sqrt{x^3+1}}$$

Ratkaistaan yhtälö $f'(x)=0$:

$$-\frac{3x^2}{2(x^3+1)\sqrt{x^3+1}}=0,\ \text{kun}$$

$$3x^2=0$$

$$x=0$$

Kuvaajalla on vaakasuora tangentti kohdassa $x = 0$.

Funktio *f* on monotoninen, jos sen derivaatta ei vaihda merkkiään.
Derivaatan lausekkeessa osoittaja $3x^2 \geq 0$.
Nimittäjässä lauseke $x^3 + 1 > 0$, kun $x > -1$.
Tällöin $f'(x) \leq 0$, kun $x > -1$ ja derivaatta saa arvon 0 vain yksittäisessä kohdassa $x = 0$. Funktio *f* on vähenevä ja siis monotoninen.

b) $$f'(x)=1-\frac{1}{x^2+2}\cdot 2x = {}^{x^2+2)}\frac{1}{1}-\frac{2x}{x^2+2}=\frac{x^2-2x+2}{x^2+2}$$

$$\frac{x^2-2x+2}{x^2+2}=0,\ \text{kun}$$

$$x^2-2x+2=0$$

$$x=\frac{2\pm\sqrt{4-4\cdot1\cdot2}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{-4}}{2}\quad \text{ei ratkaisua}$$

Derivaatalla ei ole nollakohtia, joten funktion *f* kuvaajalla ei ole vaakasuoraa tangenttia missään kohdassa.

Derivaatan lausekkeessa osoittajan $x^2 - 2x + 2$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, jolla ei ole nollakohtia. Lauseke $x^2 - 2x + 2$ saa vain positiivisia arvoja. Myös nimittäjän lauseke $x^2 + 2$ saa vain positiivisia arvoja. Derivaatta on kaikkialla positiivinen, joten funktio on kasvava ja siis monotoninen.

718. Suljetulla välillä jatkuva ja derivoituva funktio saa tällä välillä suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteessä tai välille kuuluvassa derivaatan nollakohdassa.

$$f(0) = \sin 0 + \sqrt{3}\cos 0 = 0 + \sqrt{3}\cdot 1 = \sqrt{3}$$
$$f(2\pi) = \sin(2\pi) + \sqrt{3}\cos(2\pi) = \sqrt{3}$$

$$f'(x) = \cos x - \sqrt{3}\sin x$$
$$\cos x - \sqrt{3}\sin x = 0$$
$$\sqrt{3}\sin x = \cos x \quad \|:\cos x,\ x \neq \frac{\pi}{2} + n\cdot\pi$$
$$\sqrt{3}\,\frac{\sin x}{\cos x} = 1 \quad \|:\sqrt{3}$$
$$\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$x = \frac{\pi}{6} + n\cdot\pi,\ n \in \mathbb{Z}$$

Derivaatan nollakohdista välillä [0, 2π] on $x = \frac{\pi}{6}$ ja $x = \frac{7\pi}{6}$.

$$f(\frac{\pi}{6}) = \sin\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}\cdot\cos\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$$
$$f(\frac{7\pi}{6}) = \sin\frac{7\pi}{6} + \sqrt{3}\cdot\cos\frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2} + \sqrt{3}\cdot(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -2$$

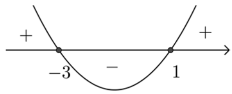
Funktion *f* suurin arvo on 2 ja pienin −2.

719. Tutkitaan funktion kulkua derivaatan avulla.
$f'(x) = 2xe^x + (x^2 - 3)e^x = (x^2 + 2x - 3)e^x$

$e^x > 0$ kaikilla muuttujan x arvoilla.

Derivaatan merkkiin vaikuttaa vain tekijän $x^2 + 2x - 3$ merkki.

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$
$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2}$$
$$x = -3 \text{ tai } x = 1$$



Funktio f on kasvava väleillä $x \leq -3$ ja $x \geq 1$ ja
vähenevä välillä $-3 \leq x \leq 1$.

Kohdassa $x = -3$ derivaattafunktion $f\,'$ merkki vaihtuu positiivisesta negatiiviseksi ja samassa kohdassa funktio f vaihtuu kasvavasta väheneväksi. Kohta $x = 3$ on siis paikallinen maksimikohta. Kohdassa $x = 1$ on paikallinen minimikohta, koska derivaattafunktion $f\,'$ merkki vaihtuu negatiivisesta positiiviseksi ja funktio f vaihtuu vähenevästä kasvavaksi.

Paikallinen maksimiarvo on $f(-3) = ((-3)^2 - 3)e^{-3} = \dfrac{6}{e^3}$.

Paikallinen minimiarvo on $f(1) = (1^2 - 3)e^1 = -2e$.

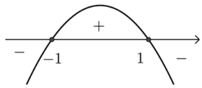
720. Funktio f on määritelty ja jatkuva koko reaalilukujoukossa, koska $x^4 + 3 > 0$ kaikilla muuttujan x arvoilla. Tarkastellaan funktion f kulkua derivaatan avulla.

$$f'(x) = \frac{5(x^4+3) - 5x \cdot 4x^3}{(x^4+3)^2} = \frac{5x^4 + 15 - 20x^4}{(x^4+3)^2} = \frac{-15x^4 + 15}{(x^4+3)^2}$$

Derivaatan lausekkeessa nimittäjä $(x^4 + 3)^2$ on aina positiivinen. Derivaatan merkkiin vaikuttaa vain osoittajan merkki.

$$-15x^4 + 15 = 0$$
$$x^4 = 1$$
$$x = 1 \text{ tai } x = -1$$

Lausekkeen $-15x^4 + 15$ kuvaaja on paraabelin kaltainen.



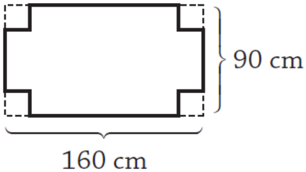
		-1		1	
$f'(x)$	$-$		$+$		$-$
$f(x)$	↘		↗		↘

Funktiolla f on paikallinen minimiarvo $f(-1) = \frac{-5}{1+3} = -\frac{5}{4}$ ja paikallinen maksimiarvo $f(1) = \frac{5}{1+3} = \frac{5}{4}$.

Kun muuttujan x arvot kasvavat rajatta, osoittaja ja nimittäjä ovat positiivisia ja funktio ei voi saada negatiivisia arvoja, vaikka funktion arvo pienenee, kun $x > 1$. Siis $f(-1) = -\frac{5}{4}$ on funktion pienin arvo.
Kun muuttujan arvot pienenevät rajatta, osoittaja $5x$ on negatiivinen ja nimittäjä $x^4 + 3$ positiivinen. Funktion arvot ovat negatiivisia, kun $x < -1$, joten se ei voi saada tällä välillä arvoa $\frac{5}{4}$ suurempia arvoja. Siis $f(1) = \frac{5}{4}$ on funktion suurin arvo. Jatkuva funktio saa suurimman ja pienimmän arvonsa ja kaikki arvot niiden väliltä.

Funktion f arvojoukko on siis $[-\frac{5}{4}, \frac{5}{4}]$.

721.



Merkitään poistetun neliön sivun pituutta kirjaimella x, kun $0 \le x \le 45$.

Laatikon pohjan mitat ovat $160 - 2x$ ja $90 - 2x$ ja laatikon korkeus on x. Laatikon tilavuus on tällöin $(160 - 2x)(90 - 2x)x$.

Määritetään tilavuutta kuvaavan funktion
$V(x) = (160 - 2x)(90 - 2x)x$, kun $0 \le x \le 45$, suurin arvo.

Suljetulla välillä jatkuva ja derivoituva funktio saa tällä välillä suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteessä tai välille kuuluvassa derivaatan nollakohdassa.

$V(0) = 0$
$V(45) = 0$

$V'(x) = 12x^2 - 1000x + 14400$
$12x^2 - 1000x + 14400 = 0$, kun
$x = 18{,}51\ldots$ tai $x = 64{,}82\ldots$

Välillä $0 \le x \le 45$ derivaatan nollakohdista on $x = 18{,}51\ldots$

$V(18{,}51\ldots) = 120\,601{,}5\ldots \approx 121\,000$.

Pois leikattavien sivujen pituus tulee olla noin 18,5 cm. Laatikon suurin tilavuus on noin 121 000 cm^3 = 121 dm^3 eli noin 121 litraa.

Luvun 7 vahvistavat ja syventävät tehtävät

VAHVISTAVAT TEHTÄVÄT

722. f–II, g–I, h–IV

Funktion f kuvaaja näyttää paraabelilta, joten sen derivaattafunktion kuvaaja näyttää suoralta. Funktio f vähenee, kun $x \leq 0$ ja kasvaa, kun $x \geq 0$, joten derivaattafunktion kuvaajan tulee olla nouseva suora, jolla on nollakohta kohdassa $x = 0$.

Funktion g kuvaaja näyttää kolmannen asteen polynomifunktion kuvaajalta, joten sen derivaattafunktion kuvaaja näyttää paraabelilta. Derivaattafunktiolla tulee olla nollakohdat samoissa kohdissa kuin funktiolla g on ääriarvokohdat.

Funktion h kuvaaja näyttää nousevalta suoralta, joten sen derivaattafunktion kuvaaja näyttää vaakasuoralta suoralta, ja derivaattafunktion arvo on positiivinen.

723. **a)** $f'(x) = e^x x^3 + e^x \cdot 3x^2 = e^x(x^3 + 3x^2)$
$f'(2) = e^2(2^3 + 3 \cdot 2^2) = 20e^2$

b) $$f(x) = \frac{3}{x\sqrt{x}} = \frac{3}{x \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{3}{x^{\frac{3}{2}}} = 3x^{-\frac{3}{2}},\ x > 0$$

$$f'(x) = 3 \cdot (-\frac{3}{2})x^{-\frac{3}{2}-1} = -\frac{9}{2}x^{-\frac{5}{2}} = -\frac{9}{2} \cdot \frac{1}{x^{2\frac{1}{2}}} = -\frac{9}{2x^2\sqrt{x}}$$

$$f'(2) = -\frac{9}{2 \cdot 2^2\sqrt{2}} \overset{\sqrt{2})}{=} -\frac{9}{8\sqrt{2}} = -\frac{9\sqrt{2}}{16}$$

c) $f'(x) = \cos(3x - 1) \cdot 3 = 3\cos(3x - 1)$
$f'(2) = 3\cos(3 \cdot 2 - 1) = 3\cos 5$

724. **a)** $De^{x^2-3} = e^{x^2-3} \cdot D(x^2-3) = e^{x^2-3} \cdot 2x = 2xe^{x^2-3}$

b)

$$\begin{aligned} D\sqrt{6-3x} &= D(6-3x)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2}(6-3x)^{-\frac{1}{2}} \cdot D(6-3x) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(6-3x)^{\frac{1}{2}}} \cdot (-3) \\ &= -\frac{3}{2\sqrt{6-3x}},\ x < -2 \end{aligned}$$

c) $D\ln(x^2+1) = \frac{1}{x^2+1} \cdot D(x^2+1) = \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2+1}$

d) $D\ 5\tan x = 5(1+\tan^2 x) = 5 + 5\tan^2 x\ (= \frac{5}{\cos^2 x}),\ x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$

e) $D\frac{\ln x}{x^2} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - \ln x \cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{x - 2x\ln x}{x^4}^{(x} = \frac{1-2\ln x}{x^3},\ x > 0$

f)

$$\begin{aligned} D((3x-1)\sqrt{3x-1}) &= D((3x-1)(3x-1)^{\frac{1}{2}}) \\ &= D(3x-1)^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{3}{2}(3x-1)^{\frac{1}{2}} \cdot D(3x-1) \\ &= \frac{3}{2}(3x-1)^{\frac{1}{2}} \cdot 3 \\ &= \frac{9}{2}\sqrt{3x-1},\ x > \frac{1}{3} \end{aligned}$$

725. **a)** $h'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x\cdot 1}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2},\ x>0$

$h'(2t)=\dfrac{1-\ln(2t)}{(2t)^2}=\dfrac{1-\ln 2t}{4t^2}$

b $f'(x)=\dfrac{\cos x(2+\cos x)-(2+\sin x)(-\sin x)}{(2+\cos x)^2}$

$=\dfrac{2\cos x+\cos^2 x+2\sin x+\sin^2 x}{(2+\cos x)^2}$

$=\dfrac{2\cos x+2\sin x+\overbrace{\sin^2 x+\cos^2 x}^{1}}{(2+\cos x)^2}$

$=\dfrac{2\cos x+2\sin x+1}{(2+\cos x)^2}$

$$f'(\tfrac{\pi}{2})=\frac{2\cos\frac{\pi}{2}+2\sin\frac{\pi}{2}+1}{(2+\cos\frac{\pi}{2})^2}=\frac{2\cdot 0+2\cdot 1+1}{(2+0)^2}=\frac{3}{4}$$

726. **a)** Nollakohdat ovat $x\approx-1$ ja $x\approx 5$.

b) Kohtaan $x = 3$ piirretyn tangentin kulmakerroin on $f'(3) = 2$.

c) Funktio on kasvava, kun $f'(x)\geq 0$, eli välillä $[-3, 5]$.

d) Ääriarvokohdat ovat derivaatan nollakohtia, joissa derivaatan merkki vaihtuu. Kohta $x\approx 5$ on funktion paikallinen maksimikohta, koska derivaatan merkki vaihtuu positiivisesta negatiiviseksi. (Kohta $x\approx-1$ ei ole ääriarvokohta, vaan terassikohta.)

727. Suljetulla välillä jatkuva ja derivoituva funktio saa tällä välillä suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteessä tai välille kuuluvassa derivaatan nollakohdassa.

$f(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 - 15 \cdot 2 + 2 = 8 - 24 - 30 + 2 = -44$
$f(6) = 6^3 - 6 \cdot 6^2 - 15 \cdot 6 + 2 = 0 - 90 + 2 = -88$

$f'(x) = 3x^2 - 12x - 15$
$3x^2 - 12x - 15 = 0 \quad || : 3$
$x^2 - 4x - 5 = 0$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2}$$

$x = -1$ tai $x = 5$

Välillä [2, 6] on nollakohdista $x = 5$.

$f(5) = 5^3 - 6 \cdot 5^2 - 15 \cdot 5 + 2 = 125 - 150 - 75 + 2 = -98$

Suurin arvo on −44 ja pienin −98.

728. **a)**

$$
\begin{aligned}
f'(2) &= \lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{{}^{2)}\frac{1}{x} - {}^{x)}\frac{1}{2}}{x-2} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{\frac{2-x}{2x}}{x-2} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{2-x}{2x} \cdot \frac{1}{x-2} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{-(\cancel{x-2})}{2x(\cancel{x-2})} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{-1}{2x} \\
&= -\frac{1}{2\cdot 2} \\
&= -\frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 2} \frac{{}^{4)}\frac{1}{x^2} - {}^{x^2)}\frac{1}{4}}{x-2} &= \lim_{x\to 2} \frac{\frac{4-x^2}{4x^2}}{x-2} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{4-x^2}{4x^2(x-2)} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{(2-x)(2+x)}{4x^2(x-2)} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{-(\cancel{x-2})(2+x)}{4x^2(\cancel{x-2})} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{-(2+x)}{4x^2} \\
&= \frac{-(2+2)}{4\cdot 2^2} \\
&= -\frac{4}{16} = -\frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

Raja-arvo on funktion $f(x) = \frac{1}{x^2}$ derivaatta kohdassa $x = 2$.

729. **a)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cancel{2\sin x}}{\cancel{2\sin x}\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}=\dfrac{1}{\cos 0}=\dfrac{1}{1}=1$

b)

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{1+\sin x} &= \lim_{x\to\frac{3\pi}{2}}\frac{1-\sin^2 x}{1+\sin x}\\
&= \lim_{x\to\frac{3\pi}{2}}\frac{(1-\sin x)(\cancel{1+\sin x})}{\cancel{1+\sin x}}\\
&= \lim_{x\to\frac{3\pi}{2}}(1-\sin x)\\
&= 1-\sin\frac{3\pi}{2}\\
&= 1-(-1)\\
&= 2
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{\sin x-\cos x} &= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin x-\cos x}\\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\cancel{\cos x-\sin x})(\cos x+\sin x)}{-(\cancel{\cos x-\sin x})}\\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(-\cos x-\sin x)\\
&= -\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\
&= -{}^{\sqrt{2})}\frac{2}{\sqrt{2}}\\
&= -\frac{2\sqrt{2}}{2}\\
&= -\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

730. **a)** $D(3^x - x \ln 3) = 3^x \ln 3 - 1 \cdot \ln 3 = 3^x \ln 3 - \ln 3 = (\ln 3)(3^x - 1)$

b) $$\begin{aligned} D(\cos^3(2x)) &= D((\cos(2x))^3 \\ &= D(\cos 2x)^3 \\ &= 3(\cos 2x)^2 \cdot D(\cos 2x) \\ &= 3(\cos 2x)^2(-\sin(2x) \cdot 2) \\ &= -6(\cos^2 2x)(\sin 2x) \end{aligned}$$

c) $$D2\tan(3x) = 2 \cdot \frac{1}{\cos^2(3x)} \cdot 3 = \frac{6}{\cos^2(3x)} = 6 \cdot \frac{1}{\cos^2 3x} = 6(\tan^2 3x + 1)$$

731. Paraabelin huippu on derivaatan nollakohdassa.

$D(2x^2 + bx + 3) = 4x + b$

$4x + b = 0$

$x = -\dfrac{b}{4}$

Kun $x = -\dfrac{b}{4}$, niin $y = 2 \cdot (-\dfrac{b}{4})^2 + b \cdot (-\dfrac{b}{4}) + 3 = \dfrac{b^2}{8} - {}^{2)} \dfrac{b^2}{4} + 3 = -\dfrac{b^2}{8} + 3$

Paraabelin huipun koordinaatit ovat $(-\dfrac{b}{4}, -\dfrac{b^2}{8} + 3) = (-\dfrac{1}{4}b, -\dfrac{1}{8}b^2 + 3)$.

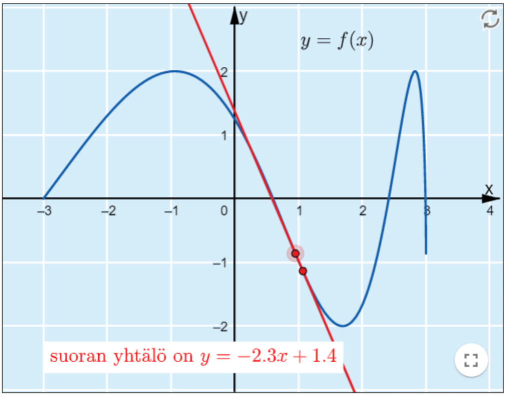
Huippu on paraabelilla $y = -2x^2 + 3$, jos huipun koordinaatit toteuttavat paraabelin yhtälön:

$y = -2 \cdot (\dfrac{b}{4})^2 + 3 = -2 \cdot \dfrac{b^2}{16} + 3 = -\dfrac{b^2}{8} + 3.$

Huipun koordinaatit $(-\dfrac{1}{4}b, -\dfrac{1}{8}b^2 + 3)$ toteuttavat yhtälön $y = -2x^2 + 3$, joten väite on osoitettu.

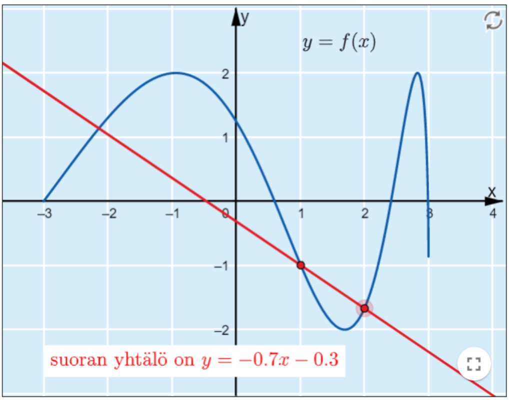
732. **a)** Raja-arvo $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$.

Pisteet tulee asettaa siten, että saadaan määritettyä tangentin kulmakerroin kohdassa $x = 1$ mahdollisimman tarkasti.



$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\approx -2,3$$

b) Erotusosamäärä $\dfrac{f(2)-f(1)}{2-1}$ ilmoittaa kohtien $x = 1$ ja $x = 2$ välille piirretyn sekantin kulmakertoimen.



Erotusosamäärän likiarvo on –0,7.

733. Funktio on jatkuva kohdassa $x = a$ täsmälleen silloin kun $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Määritetään siis raja-arvo $\lim_{x\to \ln 5} f(x)$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to \ln 5} \frac{e^{2x}-25}{e^x-5} &\overset{"\frac{0}{0}"}{=} \lim_{x\to \ln 5} \frac{(e^x)^2-5^2}{e^x-5} \\
&= \lim_{x\to \ln 5} \frac{(e^x+5)\cancel{(e^x-5)}}{\cancel{e^x-5}} \\
&= \lim_{x\to \ln 5} (e^x+5) \\
&= e^{\ln 5}+5 \\
&= 5+5 \\
&= 10
\end{aligned}$$

On siis määriteltävä $f(\ln 5) = 10$.

734. Ratkaistaan käyrien $3x = 4y$ ja $x^2 + 8x - 4y = 0$ leikkauskohdat yhtälöparista $\begin{cases} 3x = 4y \\ x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases}$.

Sijoitetaan $3x$ yhtälöön $x^2 + 8x - 4y = 0$ lausekkeen $4y$ paikalle ja ratkaistaan yhtälö:

$$\begin{aligned} x^2 + 8x - 4y &= 0 \\ x^2 + 8x - 3x &= 0 \\ x^2 + 5x &= 0 \\ x(x + 5) &= 0 \\ x = 0 \text{ tai } x + 5 &= 0 \\ x &= -5 \end{aligned}$$

Paraabelin tangentit ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa, jos ne ovat koordinaattiakseleiden suuntaiset tai jos niiden kulmakertoimien tulo on -1. Tangentin kulmakerroin on derivaatta.

Ratkaistaan paraabelin yhtälöstä y.

$$\begin{aligned} x^2 + 8x - 4y &= 0 \\ 4y &= x^2 + 8x \quad \|:4 \\ y &= \frac{1}{4}x^2 + 2x \end{aligned}$$

Merkitään $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2x$.

$$f'(x) = \frac{1}{2}x + 2$$

Leikkauskohtiin $x = 0$ ja $x = -5$ piirrettyjen tangenttien kulmakertoimet ovat

$$f'(0) = 2$$

$$f'(-5) = \frac{1}{2} \cdot (-5) + 2 = -\frac{5}{2} + \frac{4}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Kulmakertoimien tulo on $2 \cdot (-\frac{1}{2}) = 1$, joten leikkauspisteisiin asetetut tangentit ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa.

735. Koska $x = -4$ on nimittäjän nollakohta, raja-arvo tässä kohdassa voi olla olemassa, vain jos kohta $x = -4$ on myös osoittajan nollakohta.
On siis oltava
$a \cdot (-4)^2 - 6 \cdot (-4) + 8 = 0$. Tämän yhtälön ratkaisu on $a = -2$.

Tällöin saadaan

$$\lim_{x \to -4} \frac{-2x^2 - 6x + 8}{x + 4} = \lim_{x \to -4} \frac{-2(x-1)\cancel{(x+4)}}{\cancel{x+4}} = \lim_{x \to -4} (-2x + 2) = 10.$$

Raja-arvo on siis olemassa kun $a = -2$, ja tällöin raja-arvo on 10.

736. Leikkauskohtaan piirrettyjen tangenttien kulmakertoimien arvot lasketaan derivaattojen arvoina leikkauskohdassa. Ratkaistaan käyrien $y = kx^2$ ja $y = k(x - 2)^2$ leikkauskohta yhtälöstä $kx^2 = k(x - 2)^2$.

$$
\begin{aligned}
kx^2 &= k(x-2)^2 \\
kx^2 &= k(x^2 - 4x + 4) \\
kx^2 &= kx^2 - 4kx + 4k \\
4kx - 4k &= 0 \\
4k(x-1) &= 0 \\
4k = 0 \text{ tai } x - 1 &= 0 \\
x &= 1
\end{aligned}
$$

Jos $k = 0$ käyrät ovat muotoa $y = 0$ ja $y = 0$. Tällöin käyrät yhtyvät kuten myös niiden kaikki tangentit. On siis oltava $k \neq 0$.

Käyrät siis leikkaavat kohdassa $x = 1$ vakion $k \neq 0$ arvosta riippumatta.

Määritetään tangenttien kulmakertoimet leikkauskohdassa $x = 1$. Tangentin kulmakerroin on derivaatta.

Merkitään $f(x) = kx^2$ ja $g(x) = k(x - 2)^2 = kx^2 - 4kx + 4k$.

$f'(x) = 2kx$ $\qquad$ $g'(x) = 2kx^2 - 4k$

$f'(1) = 2k$ $\qquad$ $g'(1) = 2k - 4k = -2k$

Tangentit ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa, jos ne ovat koordinaattiakseleiden suuntaiset tai jos niiden kulmakertoimien tulo on -1.

Koska $k \neq 0$, kumpikaan tangenteista ei ole x-akselin suuntainen. Määritetään millä vakion k arvoilla kulmakertoimien tulo on -1.

$$
\begin{aligned}
2k \cdot (-2k) &= -1 \\
-4k^2 &= -1 \quad \| : (-4) \\
k^2 &= \frac{1}{4} \\
k &= \pm\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Tangentit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan kun $k = \frac{1}{2}$ tai $k = -\frac{1}{2}$.

737. Ratkaistaan käyrien $y = x^2 + x$ ja $y = -x^3 + 3x^2$ yhteiset pisteet.

$$x^2 + x = -x^3 + 3x^2$$
$$x^3 - 2x^2 + x = 0$$
$$x(x^2 - 2x + 1) = 0$$
$$x = 0 \text{ tai } x^2 - 2x + 1 = 0$$
$$x = 1$$

On siis osoitettu, että käyrillä on kaksi yhteistä pistettä.

Leikkauspisteisiin piirretyt tangentit yhtyvät, jos niillä on sama kulmakerroin. Tangentin kulmakerroin on derivaatta.

Merkitään $f(x) = x^2 + x$ ja $g(x) = -x^3 + 3x^2$

$f'(x) = 2x + 1$ $\quad$ $g'(x) = -3x^2 + 6x$
$f'(0) = 1$ $\quad$ $g'(0) = 0$
$f'(1) = 3$ $\quad$ $g'(1) = 3$

Tangentit siis yhtyvät kohdassa $x = 1$.

738. Ohjelma antaa funktion arvoksi molemmissa kohdissa $\frac{1}{3}$, joten tutkitaan asiaa derivaatan avulla.
Funktio f on määritelty kaikilla muuttujan x arvoilla. Jos funktio on kasvava välillä $[a, b]$, niin $f(b)$ on suurempi. Jos funktio on vähenevä, niin $f(a)$ on suurempi.

$$f'(x) = \frac{-2x(x^4 - 1)}{(x^4 + x^2 + 1)^2}$$
$f'(x) > 0$ kun $0 < x < 1$ tai $x < -1$.
$f'(x) < 0$ kun $-1 < x < 0$ tai $x > 1$.

Luvut a ja b ovat suurempia kuin 1. Koska $f'(x) < 0$, kun $x > 1$, niin funktio f on vähenevä välillä $[a, b]$. Näin ollen luku $f(a)$ on suurempi.

739. **a)** Koska polynomifunktiot ovat kaikkialla jatkuvia, niin $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ kaikilla muuttujan x arvoilla. Väite on siis tosi.

b) Väite on epätosi. Esimerkiksi funktio $f(x) = \dfrac{1}{x}$ on (määrittelyjoukossaan) jatkuva, mutta se ei ole jatkuva välillä $[-1, 1]$.

c) Funktion arvolla kohdassa $x = 2$ ei ole väliä raja-arvon kannalta. Jos arvot kaikkialla muualla ovat samat, niin myös raja-arvo kohdassa $x = 2$ ovat samat. Väite on siis tosi.

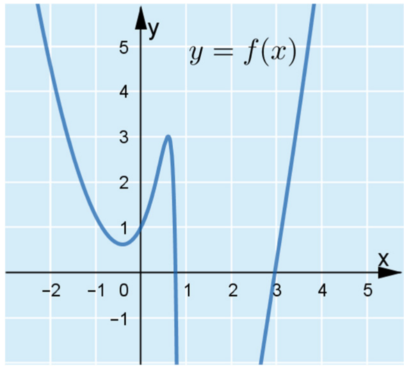
740. **a)** Kun $n = 7$ saadaan

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^7 - 60x - 8}{x^2 - 4}$$
$$\overset{"\frac{0}{0}"}{=} \lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x^6 + 2x^5 + 4x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 32x + 4)}{(x+2)\cancel{(x-2)}}$$
$$= \lim_{x \to 2} \frac{x^6 + 2x^5 + 4x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 32x + 4}{x+2}$$
$$= 97$$

b) Koska lausekkeen $\dfrac{x^n - 60x - 8}{x^2 - 4}$ nimittäjän nollakohta on $x = 2$, raja-arvo voi olla olemassa vain jos nimittäjän tekijä $x - 2$ supistuu pois. Näin käy vain, kun $x = 2$ on myös osoittajan nollakohta.

On siis oltava $2^n - 60 \cdot 2 - 8 = 0$ eli $2^n = 128$. Tämän yhtälön ratkaisu on $n = 7$. Osoittajalla on siis nollakohta $x = 2$ vain ja ainoastaan kun $n = 7$. Näin ollen raja-arvoa ei ole olemassa, kun $n \neq 7$.

741. Funktio f on määritelty, kun nimittäjä $x^2 - 2x + 1 \neq 0$ mistä saadaan $x \neq 1$. Rationaalifunktio f on siis jatkuva väleillä [0, 1[ja]1, 2].



Funktiolla f on nollakohta välillä [0, 1[, jos se saa tällä välillä sekä positiivisia että negatiivisia arvoja.

Valitaan tarkastelukohdat kuvan perusteella.
$f(0) = 1$
$f(0{,}9) = -53{,}0\ldots$

Funktiolla f on siis ainakin yksi nollakohta välillä]0; 0,9[, joten sillä on nollakohta välillä [0, 2].

742. Sijoitetaan vektorit $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ lausekkeeseen.

$$
\begin{aligned}
\overline{c}_t &= t\overline{a} + (1-t)\overline{b} \\
&= t(\overline{i} + 2\overline{j} + 3\overline{k}) + (1-t)(2\overline{i} + 5\overline{k}) \\
&= t\overline{i} + 2t\overline{j} + 3t\overline{k} + 2\overline{i} + 5\overline{k} - 2t\overline{i} - 5t\overline{k} \\
&= (2-t)\overline{i} + 2t\overline{j} + (5-2t)\overline{k}
\end{aligned}
$$

Vektorin $\overline{c}_t$ pituus on

$$
\begin{aligned}
\sqrt{(2-t)^2 + (2t)^2 + (5-2t)^2} &= \sqrt{4 - 4t + t^2 + 4t^2 + 25 - 20t + 4t^2} \\
&= \sqrt{9t^2 - 24t + 29}.
\end{aligned}
$$

Juuren arvo on pienin, kun juurrettava on pienin.

Koska $9t^2 - 24t + 29$ on ylöspäin aukeava paraabeli, se saa pienimmän arvonsa huipussaan eli derivaatan nollakohdassa. Määritään derivaatan nollakohta ja tutkitaan, onko se välillä [−2, 2].

$$
\begin{aligned}
\mathrm{D}(9t^2 - 24t + 29) &= 18t - 24 \\
18t - 24 &= 0 \\
18t &= 24 \quad \|:18 \\
t &= \frac{24}{18}^{(6} = \frac{4}{3} = 1,3...
\end{aligned}
$$

Tämä on välillä [−2, 2], joten vektorin pituus on siis pienin kun $t = \frac{4}{3}$.

743. Käyrän $x = y^2$ pisteet ovat muotoa (y^2, y). Lasketaan käyrän pisteen ja pisteen (2, 0) välinen etäisyys.

$$\sqrt{(2-y^2)^2+(0-y)^2}=\sqrt{y^4-3y^2+4}$$

Juuren arvo on pienin, kun juurrettava on pienin
Merkitään $f(y) = y^4 - 3y^2 + 4$.

$$f'(y)=4y^3-6y$$

$f'(y) = 0$ kun $y=\frac{\sqrt{6}}{2}\approx 1{,}22$ tai $y=-\frac{\sqrt{6}}{2}\approx -1{,}22$

		$-\frac{\sqrt{6}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{6}}{2}$
$f'(y)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(y)$	↘	↗	↘	↗

y	$f'(y)$	Merkki
-2	-20	$-$
-1	2	$+$
1	-2	$-$
2	20	$+$

Näin ollen etäisyys on pienin kun $y=-\frac{\sqrt{6}}{2}$ tai kun $y=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Tällöin $x=y^2=(\pm\frac{\sqrt{6}}{2})^2=\frac{3}{2}$.

Siis käyrän pisteet $(\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{6}}{2})$ ja $(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{6}}{2})$ ovat lähimpänä pistettä (2, 0).

744. Tutkitaan funktion f kulkua derivaatan avulla.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= (2x-1)e^{-x} + (x^2 - x - 5)\, e^{-x} \cdot (-1) \\
&= e^{-x}\,(2x - 1 - (x^2 - x - 5) \\
&= e^{-x}\,(-x^2 + 3x + 4)
\end{aligned}
$$

Derivaatan lausekkeessa e^{-x} on positiivinen kaikilla muuttujan x arvoilla, joten derivaatan merkkiin vaikuttaa vain lausekkeen $-x^2 + 3x + 4$ arvo.
$-x^2 + 3x + 4 = 0$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{-2} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{-2} = \frac{-3 \pm 5}{-2}$$

$x = 4$ tai $x = -1$

		0	4
$-x^2 + 3x + 4$		+	−
$f'(x)$		+	−
$f(x)$		↗	↘

Kulkukaavion perusteella jatkuvan funktion f suurin arvo on $f(4) = (4^2 - 4 - 5)e^{-4} = 7e^{-4}$.

Tutkitaan, onko funktiolla pienintä arvoa.
$f(0) = -5e^0 = -5$.
Kulkukaavion perusteella tätä pienempiä arvoja voidaan saada vain kun $x > 4$.

Funktion lausekeessa $(x^2 - x - 5)\, e^{-x}$ eksonenttifunktio e^{-x} saa vain positiivisia arvoja. Selvitetään mitä arvoja polynomi $x^2 - x - 5$ saa.

$x^2 - x - 5 = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+20}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$$

$x = -1{,}7\ldots$ tai $x = 2{,}7\ldots$

Polynomin $x^2 - x - 5$ kuvaaja on yläspäin aukeava paraabeli ja sen arvot ovat positiivisia kun $x > 2{,}7\ldots$ ja siten myös kun $x > 4$.
Näin ollen funktion f arvot ovat kahden positiivisien luvun tulona positiivisia, kun $x > 4$. Funktio f ei voi saada arvoa -5 pienempiä arvoja, kun $x > 4$.
Suurin arvo on siis $7e^{-4}$ ja pienin arvo -5.

745. Funktio on määritelty, kun $x > 0$.
Tangentti leikkaa x-akselin 60 asteen kulmassa, jos sen suuntakulma on 60 astetta tai -60 astetta. Suuntakulmalle α pätee $\tan \alpha = k$, missä k on tangentin kulmakerroin.

Nyt siis $k = \tan 60° = \sqrt{3}$ tai $k = \tan(-60°) = -\sqrt{3}$.

Merkitään $f(x) = x\ln x,\ \ x > 0$.

Tangentin kulmakerroin on derivaatta. On siis ratkaistava millä muuttujan x arvoilla $f'(x) = \sqrt{3}$ tai $-\sqrt{3}$.

$f'(x) = \ln x + 1$
Yhtälön $\ln x + 1 = \sqrt{3}$ ratkaisu on $x = e^{\sqrt{3}-1}$ ja
yhtälön $\ln x + 1 = -\sqrt{3}$ ratkaisu on $x = e^{-\sqrt{3}-1}$.
Tällöin $f(e^{\sqrt{3}-1}) = e^{\sqrt{3}-1}(\sqrt{3}-1)$ ja $f(e^{-\sqrt{3}-1}) = e^{-\sqrt{3}-1}(-\sqrt{3}-1)$).

Kysytty piste on siis $(e^{\sqrt{3}-1}, e^{\sqrt{3}-1}(\sqrt{3}-1))$ ja $(e^{-\sqrt{3}-1}, e^{-\sqrt{3}-1}(-\sqrt{3}-1))$.

746. Merkitään $f(x) = x^3 + 1$.
$f(1) = 1^3 + 1 = 2$, joten piste (1, 2) on käyrällä $y = x^3 + 1$.
Piste (1, 2) on siis käyrän ja sen tangentin leikkauspiste.

Tutkitaan, löytyykö muita leikkauspisteitä.
Määritetään tangentin yhtälö.

Tangentin kulmakerroin on derivaatta kohdassa $x = 1$.
$f'(x) = 3x^2$
$f'(1) = 3$

Tangentin yhtälö on
$y - 2 = 3(x - 1)$, mistä saadaan
$y - 2 = 3x - 3$ ja edelleen
$y = 3x - 1$.

Lasketaan tangentin ja $y = x^3 + 1$ leikkauspisteet.

$$x^3 + 1 = 3x - 1$$
$$x^3 - 3x + 2 = 0$$
$$x^3 - x - 2x + 2 = 0$$
$$x(x^2 - 1) - 2(x - 1) = 0$$
$$x(x + 1)(x - 1) - 2(x - 1) = 0$$
$$(x - 1)(x(x + 1) - 2) = 0$$
$$(x - 1)(x^2 + x - 2) = 0$$

$x - 1 = 0$ tai $x^2 + x - 2 = 0$

$x = 1$ $\qquad x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \dfrac{-1 \pm 3}{2}$

$x = -2$ tai $x = 1$

Lasketaan kohtaa $x = -2$ vastaava leikkauspiste:
$f(-2) = (-2)^3 + 1 = -8 + 1 = -7$.

Toinen leikkauspiste on $(-2, -7)$.

747. Elmerin ratkaisu on väärin, sillä hän unohti sisäfunktion derivaatan.
Korjattu ratkaisu:
$f(x) = e^x$
$f'(x) = e^x$
$g'(x) = 4x$
Joten $h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = 4e^x \cdot e^x = 4e^{2x}$

Uolevin ratkaisu on väärin. Hän sievensi potenssin $(e^x)^2$ väärin.
Korjattu ratkaisu:
$h(x) = g(f(x)) = 2(e^x)^2 + 1 = 2e^{2x} + 1$
$h'(x) = 2e^{2x} \cdot 2 = 4e^{2x}$

Marin ratkaisu on oikein, kuten yllä korjatuista ratkaisuista nähdään.

748. Huipun x-koordinaatti on derivaatan nollakohta.
$f'(x) = x + b$
$f'(x) = 0$, kun $x = -b$

Huipun y-koordinaatti on tällöin
$f(-b) = -\frac{1}{2}b^2 + 3 = -\frac{1}{2}(-b)^2 + 3.$

Siis $f(-b) = -\frac{1}{2}(-b)^2 + 3$ eli muuttujan x avulla esitettynä
$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3.$

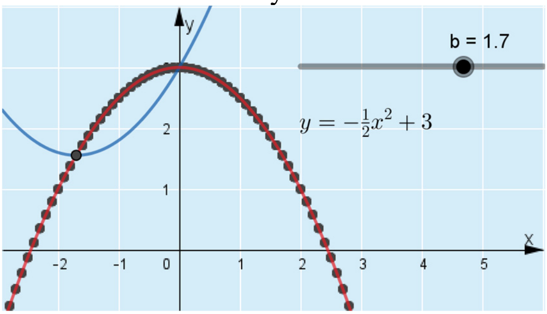
Huippu piirtää siis paraabelin $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3.$

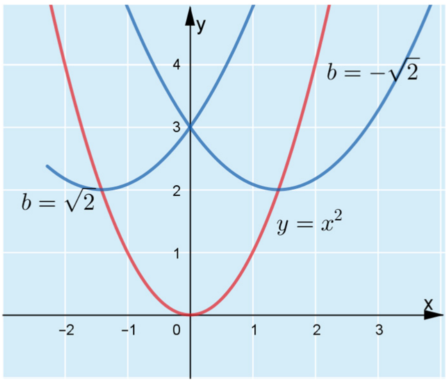
Koska huippu piirtää paraabelin $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3,$ niin ratkaistaan milloin tämä paraabeli leikkaa paraabelin $y = x^2$.

$$-\frac{1}{2}x^2 + 3 = x^2$$
$$\frac{3}{2}x^2 = 3 \quad \| \cdot \frac{2}{3}$$
$$x^2 = 2$$
$$x = \sqrt{2} \text{ tai } x = -\sqrt{2}$$

Koska alkuperäisen paraabelin huipun y-koordinaatti on $-\frac{1}{2}b^2+3$, niin huippu on paraabelilla $y=x^2$ täsmälleen silloin kun vakio $b=\sqrt{2}$ tai $b=-\sqrt{2}$.

Tarkistetaan tulokset dynaamisen matematiikan ohjelmalla.





749. **a)** Kirjotetaan ympyrän yhtälö ohjelman avulla keskpistemuotoon.

$(x-1)^2+(y-2a)^2=-a^2-2a+1.$

Tämä yhtälö esittää ympyrää täsmälleen silloin kun $-a^2-2a+1>0$.
Tämän epäyhtälön ratkaisuksi saadaan ohjelman avulla
$-\sqrt{2}-1<a<\sqrt{2}-1.$

b) Ympyrän pinta-ala on suurin mahdollinen kun sen säde $\sqrt{-a^2-2a+1}$ on suurin. Juuren arvo on suurin kun juurrettava $-a^2-2a+1$ on suurin. Lausekkeen $-a^2-2a+1$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, joka saa suurimman arvonsa derivaatan nollakohdassa.
Nyt $D(-a^2-2a+1)=-2a-2$.
Derivaatan nollakohta on $a=-1$.

Ympyrän pinta-ala on suurin mahdollinen, kun $a=-1$:
Pinta-ala on tällöin $\pi\sqrt{-(-1)^2-2\cdot(-1)+1}^{\,2}=2\pi.$

750. Funktio on määritelty, kun $x^3 - x > 0$.

$$x^3 - x = 0$$
$$x(x^2 - 1) = 0$$
$$x = 0 \text{ tai } x^2 - 1 = 0$$
$$x = 1 \text{ tai } x = -1$$

$-1 \qquad 0 \qquad 1$

x	$-$	$-$	$+$	$+$
$x^2 - 1$	$+$	$-$	$-$	$+$
$x(x^2 - 1)$	$-$	$+$	$-$	$+$

$x^3 - x > 0$, eli funktio on määritelty kun $-1 < x < 0$ tai $x > 1$.

Selvitetään ääriarvot derivaatan avulla.
Merkitään $f(x) = \ln(x^3 - x)$.

$$f'(x) = \frac{1}{x^3 - x} \cdot (3x^2 - 1) = \frac{3x^2 - 1}{x^3 - x}$$

$$\frac{3x^2 - 1}{x^3 - x} = 0$$
$$3x^2 - 1 = 0$$
$$3x^2 = 1 \quad \| : 3$$
$$x^2 = \frac{1}{3}$$
$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \approx \pm 0{,}6$$

Kohta $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ei kuulu määrittelyalueeseen.

Derivaatan lausekkeessa nimittäjä $x^3 + x$ on koko määrittelyalueessa positiivinen.

$-1 \qquad -\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad 0 \qquad 1$

$3x^2 - 1$		$+$	$-$		$+$
$x^3 - x$		$+$	$+$		$+$
$f'(x)$		$+$	$-$		$+$
$f(x)$		↗	↘		↗

Funktiolla *f* on paikallinen maksimi kohdassa $x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$:

$$\begin{aligned}
f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) &= \ln((-\frac{1}{\sqrt{3}})^3-(-\frac{1}{\sqrt{3}}))\\
&= \ln(-\frac{1}{(\sqrt{3})^3}+\frac{1}{\sqrt{3}})\\
&= \ln(-\frac{1}{3\sqrt{3}}+{}^{3)}\frac{1}{\sqrt{3}})\\
&= \ln(-\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{3}{3\sqrt{3}})\\
&= \ln\frac{2}{3\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

751. $f(x) = \cos^2 x + \sin x = (1 - \sin^2 x) + \sin x = -\sin^2 x + \sin x + 1$
sin x on jaksollinen funktio ja sen perusjakso on 2π. Funktio f saa siis kaikki arvonsa välillä $[0, 2\pi]$.

Derivoituva funktio saa suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteessä tai välille kuuluvassa derivaatan nollakohdassa.
$f(0) = 1$
$f(2\pi) = 1$
$f'(x) = (1 - 2\sin x) \cos x$

Välille $]0, 2\pi[$ kuuluvat derivaatan nollakohdat ovat
$x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{5\pi}{6}$ ja $x = \frac{3\pi}{2}$

$$f(\frac{\pi}{6}) = \frac{5}{4}$$
$$f(\frac{\pi}{2}) = 1$$
$$f(\frac{5\pi}{6}) = \frac{5}{4}$$
$$f(\frac{3\pi}{2}) = -1$$

Välillä $[0, 2\pi]$ ja siten myös koko reaalilukujoukossa funktion f suurin arvo on $\frac{5}{4}$ ja pienin arvo on 1.

Jatkuvana funktiona f saa kaikki arvonsa suurimman ja pienimmän arvonsa väliltä, joten sen arvojoukko on $[-1, \frac{5}{4}]$.

752. Funktio f on määritelty, kun $x > 0$. Funktio f on jatkuva ja derivoituva välillä $[\frac{1}{e^2}, 1]$, joten se saa suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteessä tai välille kuuluvassa derivaatan nollakohdassa.

$$f(\frac{1}{e^2}) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{e^2}}} + \ln\frac{1}{e^2} = \frac{1}{\frac{1}{e}} + \ln e^{-2} = e - 2 \approx 0,7$$

$$f(1) = \frac{1}{\sqrt{1}} + \ln 1 = 1 + 0 = 1$$

$$f(x) = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} + \ln x = x^{-\frac{1}{2}} + \ln x$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{x} = -\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{x} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} + \frac{1}{x}$$

$$-\frac{1}{2x\sqrt{x}} + \frac{1}{x} = 0$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2x\sqrt{x}} \quad \| \cdot 2x\sqrt{x} \neq 0$$

$$2\sqrt{x} = 1 \quad \| : 2$$

$$\sqrt{x} = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{4}$$

$$f(\frac{1}{4}) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}}} + \ln\frac{1}{4} = \frac{1}{\frac{1}{2}} + \ln\frac{1}{4} = 2 + \ln\frac{1}{4} \approx 0,6$$

Välillä $[\frac{1}{e^2},\ 1]$ funktion suurin arvo on 1 ja pienin $2 + \ln\frac{1}{4}$.

Pienin arvo voidaan kirjoittaa halutessa eri muodoissa.

$$\underline{2 + \ln\frac{1}{4}} = 2 + \ln 4^{-1} = \underline{2 - \ln 4} = 2 - \ln 2^2 = \underline{2 - 2\ln 2}$$

753. Funktio f on määritelty kaikilla muuttujan x arvoilla.
Tutkitaan funktion f kulkua derivaatan avulla.

$$f'(x) = -\frac{3x^4 - 1}{2(x^4+1)^2}$$

$f'(x) = 0$, kun $x = -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ $(\approx -0{,}8)$ tai $x = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ $(\approx 0{,}8)$

		$-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$	$\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	↘	↗	↘
		min.	maks.

x	$f'(x)$	Merkki
-1	$-0{,}25$	$-$
0	$0{,}5$	$+$
1	$-0{,}25$	$-$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right) = -\frac{\sqrt[4]{27}}{8}$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right) = \frac{\sqrt[4]{27}}{8}$$

Kulkukaavion perusteella funktio f voi saada minimiään
$f\left(-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right) = -\frac{\sqrt[4]{27}}{8}$ pienempiä arvoja vain kun $x > \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$. Tällöin funktion arvot ovat kuitenkin kahden positiivisen luvun osamääränä positiivisia.
Funktion f pienin arvo on siis $-\frac{\sqrt[4]{27}}{8}$.

Kulkukaavion perusteella funktio f voi saada maksimiaan $f\left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right) = \frac{\sqrt[4]{27}}{8}$ suurempia arvoja vain kun $x < -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$. Tällöin funktion arvot ovat kuitenkin negatiivisen ja positiivisen luvun osamääränä negatiivisia.
Funktion f suurin arvo on siis $\frac{\sqrt[4]{27}}{8}$.

Koska funktio f on jatkuva, se saa kaikki arvot suurimman ja pienimmän arvonsa väliltä, eli väliltä $[-\frac{\sqrt[4]{27}}{8}, \frac{\sqrt[4]{27}}{8}]$.

754. Funktio $f(x)=\sqrt{3x}+\sqrt{15-3x}$ on määritelty, kun $3x \geq 0$ ja $15-3x \geq 0$, eli välillä $0 \leq x \leq 5$.

Suljetulla välillä jatkuva ja derivoituva funktio saa suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteessä tai välille kuuluvassa derivaatan nollakohdassa.

$$f(0)=\sqrt{0}+\sqrt{15}=\sqrt{15}$$
$$f(5)=\sqrt{15}+\sqrt{0}=\sqrt{15}$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{-\sqrt{3}\sqrt{x}+\sqrt{3}\sqrt{-x+5}}{\sqrt{x}\sqrt{-x+5}}$$

$f'(x) = 0$, kun $x=\frac{5}{2}$.

$$f\left(\frac{5}{2}\right)=\sqrt{30}$$

Funktion suurin arvo on $\sqrt{30}$ ja pienin $\sqrt{15}$.

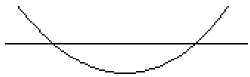
755. Kuvaajilla on yksi leikkauspiste, jos yhtälöllä $-2x^3 + 3x - 1 = x^3 - 2x^2 + 2x$ eli yhtälöllä $3x^3 - 2x^2 - x + 1 = 0$ on täsmälleen yksi ratkaisu.

Selvitetään yhtälön ratkaisujen lukumäärä tutkimalla funktion $h(x) = 3x^3 - 2x^2 - x + 1$ nollakohtien lukumäärää derivaatan avulla.
$h'(x) = 9x^2 - 4x - 1$
$h'(x) = 0$, kun

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16+36}}{18} = \frac{4 \pm \sqrt{52}}{18} = \frac{4 \pm \sqrt{4 \cdot 13}}{18} = \frac{4 \pm 2\sqrt{13}}{18} = \frac{2 \pm \sqrt{13}}{9}.$$

$$\frac{2-\sqrt{13}}{9} \qquad \frac{2+\sqrt{13}}{9}$$

$h'(x)$	+	−	+
$h(x)$	↗	↘	↗



Otetaan derivaatan nollakohdista likiarvot sijoittamisen helpottamiseksi.

$$\frac{2-\sqrt{13}}{9} \approx -0{,}178 \text{ ja } \frac{2+\sqrt{13}}{9} \approx 0{,}623$$

Määritetään näiden avulla funktion h ääriarvot (likiarvot).
$h(-0{,}178) = 3 \cdot (-0{,}178)^3 - 2 \cdot (-0{,}178)^2 - (-0{,}178) + 1 = 1{,}0977 > 0$
$h(0{,}623) = 3 \cdot (0{,}623)^3 - 2 \cdot (0{,}623)^2 - 0{,}623 + 1 = 0{,}326 > 0$

Kulkukaavion ja laskettujen arvojen perusteella kaikkialla jatkuvalla funktiolla h ei voi olla nollakohtia kun $x > \frac{2-\sqrt{13}}{9}$.
$h(-10) = 3 \cdot (-10)^3 - 2 \cdot (-10)^2 - (-10) + 1 = -3189 < 0$
Näin ollen funktiolla h on ainakin yksi nollakohta välillä $\left]-10, \frac{2-\sqrt{13}}{9}\right[$.
Kulkukavion perusteella funktiolla h on korkeintaan yksi nollakohta kun $x < \frac{2-\sqrt{13}}{9}$.

Funktiolla h on siis täsmälleen yksi nollakohta, joten yhtälöllä $3x^3 - 2x^2 - x + 1 = 0$ on yksi ratkaisu ja funktioiden f ja g kuvaajilla on täsmälleen yksi leikkauspiste.

756. **a)** $f(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}$

$$f'(x)=\frac{e^x\cdot(1+e^x)-e^x\cdot e^x}{(1+e^x)^2}=\frac{e^x+e^{2x}-e^{2x}}{(1+e^x)^2}=\frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

Kahden positiivisen luvun osamääränä derivaatta on aina positiivinen, ja näin ollen funktio f on kasvava, kun $x\in\mathbb{R}$.

b) $f(x) = -2^x + x^2$
$f'(x) = -2^x \ln 2 + 2x$
$2^x > 0$ ja $\ln 2 > 0$, joten aina $-2^x \ln 2 < 0$.

Kun $x \le 0$ myös $2x \le 0$.
Näin ollen välillä $x \le 0$ pätee $f'(x) = -2^x \ln 2 + 2x \le 0$.

Funktio f on siis vähenevä, kun $x \le 0$.

757. Yhtälön $e^{x+a} = x$ eli yhtälön $e^{x+a} - x = 0$ ratkaisut ovat samat kuin funktion $f(x) = e^{x+a} - x$ nollakohdat. Funktio $e^{x+a} - 1$ on jatkuva funktio. Tutkitaan funktion f kulkua derivaatan avulla.
$f'(x) = e^{x+a} - 1$
$f'(x) = 0$, kun $x = -a$.

	$-a$	
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	↘	↗

Funktion f pienin arvo saavutetaan derivaatan nollakohdassa ja se on $f(-a) = 1 + a$.

Jos funktion f pienin arvo on positiivinen, funktiolla ei ole nollakohtia. Funktion pienin arvo $1 + a$ on positiivinen eli $1 + a > 0$ kun $a > -1$.

Jos funktion f pienin arvo on 0, funktiolla on nollakohta. Funktion pienin arvo $1 + a$ on 0 eli $1 + a = 0$ kun $a = -1$.

Jos funktion f pienin arvo on negatiivinen, funktiolla voi kulkukaavion perusteella olla nollakohtia nolla, yksi tai enintään kaksi. Funktion pienin arvo $1 + a$ on negatiivinen eli $1 + a < 0$ kun $a < -1$.

Tarkastellaan nyt tapausta $a < -1$:
Funktiolla voi olla nollakohta väleillä $x < -a$ ja $x > -a$.
Tarkastellaan ensin väliä $x < -a$.
Kun $a < -1$, niin minimikohta $x = -a$ on positiivinen. Tällöin kohta $x = 0$ on välillä $x < -a$.

Nyt $f(0) = e^{0+a} - 0 = e^a$, joka on positiivinen, kun $a < -1$.
Funktiolla f on siis nollakohta välillä $]0, -a[$, koska välin päätepisteissä jatkuvan funktion arvot ovat erimerkkiset. Funktiolla on siis tarkalleen yksi nollakohta välillä $x < -a$.

Tarkastellaan sitten väliä $x > -a$.
Koska $a < -1$, niin $-a < -2a$, joten $x = -2a$ on välillä $x > -a$.

$f(-2a) = e^{-2a+a} - (-2a) = e^{-a} + 2a$, kun $a < -1$.
Lausekkeen $e^{-a} + 2a$ merkkiä ei voi määrittää suoraan.

Merkitään $g(a) = f(-2a) = e^{-a} + 2a$ ja tutkitaan näin saadun funktion g merkkiä derivaatan g' avulla.
$g'(a) = -e^{-a} + 2$
Selvitetään derivaattafunktion g' merkki, kun $a < -1$.
$g'(a) = 0$, kun $a = -\ln 2$ $(= -0{,}69\ldots)$.
Derivaattafunktiolla ei ole nollakohtaa välillä $a < -1$, joten se on tällä välillä kaikkialla saman merkkinen.
Koska $g'(-2) = -5{,}39 < 0$, niin funktio g on vähenevä välillä $a < -1$.

		-1
$g'(x)$:	$-$	|
$g(x)$:	$\searrow$	|

Funktion g pienin arvo saavutetaan kohdassa $x = -1$.
Nyt $g(-1) = e^{-(-1)} + 2 \cdot (-1) = e - 2 = 0{,}718\ldots > 0$
Koska funktion g pienin arvo on siis positiivinen, eli $g(a) > 0$, on siten myös $f(-2a) > 0$.
Koska $f(-2a) > 0$ ja $f(-a) < 0$, niin funktiolla f on nollakohta välillä $]-a, -2a[$, kun $a < -1$.

Funktiolla f on siis nollakohdat väleillä $x < -a$ ja $x > -a$, eli funktiolla f on kaksi nollakohtaa, kun $a < -1$.

Edellä olleen perusteella voidaan todeta, että yhtälöllä $e^{x+a} = x$
- ei ole ratkaisuja, kun $a > -1$
- on yksi ratkaisu, kun $a = -1$
- on kaksi ratkaisua, kun $a < -1$.

758. Kirjoitetaan funktion lauseke ilman itseisarvoja.

$$f(x) = e^x - a|x-1|$$

$$= \begin{cases} e^x - a(x-1), & \text{kun } x-1 \geq 0 \\ e^x - a(-(x-1)), & \text{kun } x-1 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} e^x - ax + a, & \text{kun } x \geq 1 \\ e^x + ax - a, & \text{kun } x < 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} e^x - a, & \text{kun } x > 1 \\ e^x + a, & \text{kun } x < 1 \end{cases}$$

Jotta funktio f olisi jatkuva, kun $x > 1$ on oltava $e^x - a > 0$ eli $e^x > a$ kaikilla $x > 1$.
Koska e^x on kasvava, niin välillä $x > 1$ kaikille e^x pätee $e^x > e^1$ eli eli $e^x > e$. Ehto $e^x > a$ toteutuu tällä välillä, kun $a \leq e$.

Kun $x < 1$ on oltava $e^x + a > 0$ kaikilla $x < 1$.
Jos $a \geq 0$, niin summa $e^x + a > 0$.
Jos $a < 0$, yhtälöllä $e^x + a = 0$ on ratkaisu, joten epäyhtälö $e^x + a > 0$ ei toteudu kaikilla x:n arvoilla.

Yhdistämällä edellä päätellyt ehdot saadaan $0 \leq a \leq e$.

759. $f(t)=\dfrac{10e^{0,05t}}{e^{0,05t}+4}$

$$f'(t)=\frac{2e^{\frac{t}{20}}}{(e^{\frac{t}{20}}+4)^2}$$

Selvästi $f'(t)>0$ kaikilla t, eli se kasvaa kaikkialla.
Funktio kasvaa nopeimmin silloin, kun derivaatan f' arvo on suurin.
Tutkitaan, milloin näin käy funktion f toisen derivaatan avulla.

$$f''(t)=\frac{-e^{\frac{t}{20}}(e^{\frac{t}{20}}-4)}{10(e^{\frac{t}{20}}+4)^3}$$

$f''(t)=0$, kun $t=40\ln 2\approx 27{,}7\ldots$

	40 ln 2	
$f''(t)$	+	−
$f'(t)$	↗	↘

	$f''(t)$	Merkki
20	0,001…	+
30	−00003…	−

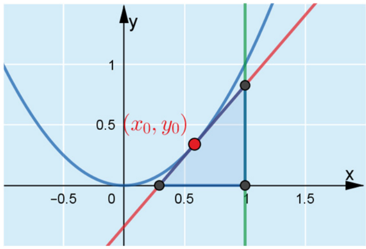
Derivaatta saa suurimman arvon, eli funktio kasvaa nopeiten, kun
$t=40\ln 2=27{,}7\ldots$ eli 28. päivän aikana.

$f'(40\ln 2)=\dfrac{1}{8}=0{,}125.$ Koska yksikkönä on tuhannet yksilöt, populaatio kasvaa tällöin 125 yksilöä vuorokaudessa.

760. Muodostetaan pisteen (x_0, y_0) kautta kulkevan tangentin yhtälö.
$f(x) = x^2$
$f'(x) = 2x$
$f'(x_0) = 2x_0$

Tangentin yhtälö on siis
$y - y_0 = 2x_0(x - x_0)$.

Muodostuvan suorakulmaisen kolmion kateetit ovat pisteen (1, 0) ja tangentin ja x-akselin leikkauskohdan välinen jana sekä pisteen (1, 0) ja sen tangentin pisteen, jossa $x = 1$, välinen etäisyys.



Ratkaistaan, missä tangentti leikkaa x-akselin.

$0 - y_0 = 2x_0(x - x_0)$, mistä saadaan $x = x_0 - \dfrac{y_0}{2x_0}$.

Koska välillä]0, 1] paraabeli $y = x^2$ on kasvava, tangentti on nouseva suora ja siten tämä leikkauskohta on kohdan $x = 1$ vasemmalla puolella.

x-akselilla olevan janan pituus on siis $1-(x_0 - \dfrac{y_0}{2x_0}) = 1 - x_0 + \dfrac{y_0}{2x_0}$.

Kun $x = 1$ tangentille pätee $y - y_0 = 2x_0(1 - x_0)$, mistä saadaan $y = -2x_0^2 + 2x_0 + y_0$. Toisen kateetin pituus on siis $-2x_0^2 + 2x_0 + y_0$.

Kolmion pinta-ala on siis

$$\frac{1}{2}(1 - x_0 + \frac{y_0}{2x_0}) \cdot (-2x_0^2 + 2x_0 + y_0) = \frac{(2x_0^2 - 2x_0 - y_0)^2}{4x_0}$$

Koska piste (x_0, y_0) on käyrällä $y = x^2$, niin $y_0 = x_0^2$. Näin kolmion pinta-alan lauseke saadaan muotoon $A(x_0) = \dfrac{x_0(x_0-2)^2}{4}$.

Etsitään funktion suurin arvo derivaatan avulla.

$$A'(x_0) = \frac{(x_0 - 2)(3x_0 - 2)}{4}$$

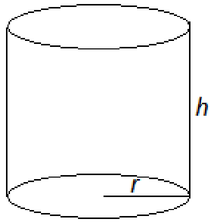
$A'(x_0) = 0$, kun $x_0 = \dfrac{2}{3}$ tai kun $x_0 = 2$.

	0	$\frac{2}{3}$	1	
$A'(x_0)$		+	−	
$A(x_0)$		↗	↘	

x_0	$A'(x_0)$	Merkki
0,3	0,4…	+
0,8	−0,1…	−

Pinta-ala on suurin kun $x_0 = \dfrac{2}{3}$.

761. Muki on mahdollisimman kevyt, kun siihen kuluu mahdollisimman vähän materiaalia, eli kun sen pinta-ala on mahdollisimman pieni.



Pohjan pinta-ala on $A_P = \pi r^2$ (cm)
Vaipan pinta-ala on $A_V = 2\pi rh$ (cm).
Mukin pinta-ala on siis
$\pi r^2 + 2\pi rh$.

Eliminoidaan toinen muuttujista r ja h sen tiedon avulla, että tölkin tilavuus on 1 l = 1 dm^3 = 1000 cm^3.

$$\pi r^2 h = 1000 \quad \| : \pi r^2$$
$$h = \frac{1000}{\pi r^2}$$

Etsitään siis funktion $f(r) = \pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{1000}{\pi r^2} = \pi r^2 + \frac{2000}{r}$ pienin arvo derivaatan avulla.

$$f'(r) = 2\pi r - \frac{2000}{r^2}$$

$f'(r) = 0$, kun $r = \frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}$ $(\approx 6{,}8...)$

	0		$\frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}$
$f'(r)$		$-$	$+$
$f(r)$		↘	↗

r	$f'(r)$	Merkki
4	$-99{,}8\ldots$	$-$
7	$3{,}1\ldots$	$+$

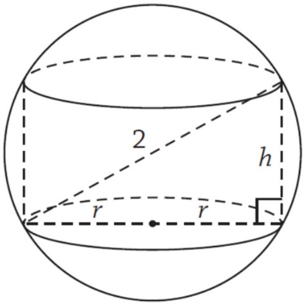
Pinta-ala on pienin kun $r = \frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}$ $(\approx 6{,}82...\text{ cm})$

Tällöin $h = \frac{1000}{\pi r^2} = \frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}$ $(\approx 6{,}82...\text{ cm})$.

Mukin pohjan halkaisija on siis $2 \cdot \frac{10}{\sqrt[3]{\pi}} = 13{,}65.... \approx 13{,}7$ (cm) ja korkeus

$\frac{10}{\sqrt[3]{\pi}} = 6{,}82... \approx 6{,}8$ (cm).

762. Olkoon r lieriön pohjaympyrän säde ja h lieriön korkeus. Lieriön tilavuus on tällöin $V = \pi r^2 h$.



Koska pallon sisällä oleva kappale on suora ympyräpohjainen lieriö, niin Pythagoraan lauseen nojalla saadaan

$$(r+r)^2 + h^2 = (1+1)^2$$
$$(2r)^2 + h^2 = 2^2$$
$$r^2 = \frac{4-h^2}{4}.$$

Lieriön tilavuus voidaan nyt esittää korkeuden h avulla:

$$V(h) = \pi \frac{4-h^2}{4} \cdot h,\ h > 0.$$

Etsitään tilavuusfunktion V suurin arvo derivaatan avulla.

$$V'(h) = \frac{-(3h^2-4)\pi}{4}$$

$V'(h) = 0$, kun ($h = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$) tai kun $h = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ($\approx 1,15$)

	0		$\frac{2\sqrt{3}}{3}$		1
$V'(h)$		+		−	
$V(h)$		↗		↘	

h	$V'(h)$	Merkki
1	0,7…	+
1,2	−0,2…	−

Tilavuus on suurin kun $h = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

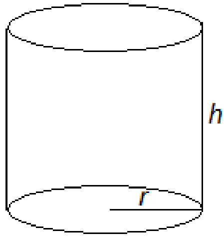
Tällöin $r^2 = \frac{4-h^2}{4} = \frac{2}{3}$, joten $r = \frac{\sqrt{6}}{3}$ (tai $r = -\frac{\sqrt{6}}{3}$).

Siis lieriön korkeus on $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ja pohjaympyrän säde $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Lieriön tilavuus on tällöin $V(\frac{2\sqrt{3}}{3}) = \frac{4\pi\sqrt{3}}{9}$ ja ympyrän tilavuus on $V_{\mathrm{Y}} = \frac{4}{3}\pi \cdot 1^3 = \frac{4}{3}\pi$.

Tilavuuksien suhde on $\frac{\frac{4\pi\sqrt{3}}{9}}{\frac{4}{3}\pi} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3} : 3$.

763. Pohjien yhteispinta-ala on $A_\text{P} = 2\pi r^2 (\text{cm}^2)$
Vaipan pinta-ala on $A_\text{V} = 2\pi rh\ (\text{cm}^2)$.



Pohjamateriaalin hinta 2 €/m² on kaksinkertainen verrattuna vaippamateriaalin hintaan 1 €/m². Tehtävässä ei tarvitse määrittää tölkin materiaaleihin menevää hintaa, joten riittää huomioida, että pohjien materiaali on kaksi kertaa kalliimpaa kuin vaipan materiaali. Tutkitaan siis lauseketta $2 \cdot 2\pi r^2 + 2\pi rh = 4\pi r^2 + 2\pi rh$.

Eliminoidaan toinen muuttujista r ja h sen tiedon avulla, että tölkin tilavuus on 1000 cm³.

$$\pi r^2 h = 1000 \quad \| : \pi r^2$$
$$h = \frac{1000}{\pi r^2}$$

Etsitään siis funktion $f(r) = 4\pi r^2 + 2r\pi \cdot \frac{1000}{\pi r^2} = 4\pi r^2 + \frac{2000}{r}$ pienin arvo derivaatan avulla.

$$f'(r) = 8\pi r - \frac{2000}{r^2}$$

$f'(r) = 0$, kun $r = 5\sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}$ $(\approx 4{,}3...)$

	0		$5\sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}$
$f'(r)$		$-$	$+$
$f(r)$		$\searrow$	$\nearrow$

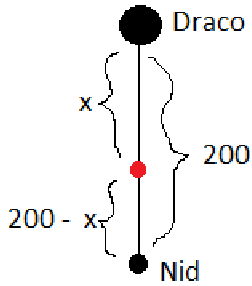
r	$f'(r)$	Merkki
2	−449,7…	$-$
5	45,6…	$+$

Materiaalinhinta on pienin kun $r = 5\sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}$.

Tällöin $h = \frac{1000}{\pi r^2} = 20\sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}$.

Korkeuden ja pohjan halkaisijan suhde on tällöin $\frac{h}{2r} = \frac{20\sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}}{2 \cdot 5\sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}} = \frac{2}{1} = 2:1$

764. Merkitään etäisyyttä isommasta Dracosta kirjaimella x, jolloin etäisyys Nidistä on $200 - x$.



Koska tulisuihkun vaikutus on suoraan verrannollinen lohikäärmeen kokoon ja kääntäen verrannollinen etäisyyden kolmanteen potenssiin vaikutuksille saadaan seuraavat lausekkeet:

Draco: $\dfrac{2a}{x^3}$

Nid: $\dfrac{a}{(200-x)^3}$

missä a on verrannollisuuskerroin, $a > 0$.

Molempien tulisuihkujen yhteisvaikutusta voida kuvata funktiolla

$$f(x) = \frac{2a}{x^3} + \frac{a}{(200-x)^3}.$$

Selvitetään, milloin yhteisvaikutus on pienin derivaatan avulla.

$$f'(x) = \frac{3a}{(x-200)^4} + \frac{6a}{x^4}$$

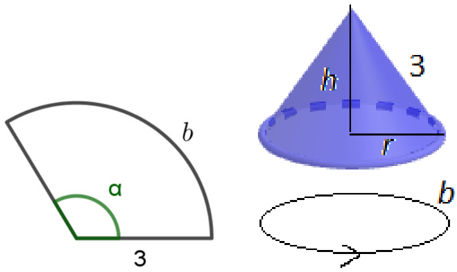
$f'(x) = 0$, kun $x = 108{,}6\ldots$ tai $x = 1257{,}04\ldots$

	0		108,6…	200
$f'(x)$		$-$	$+$	
$f(x)$		↘	↗	

x	$f'(x)$	Merkki
100	$-\frac{3a}{10^8}$	$-$
150	$\frac{79a}{1{,}6\ldots\cdot 10^8}$	$+$

Tulisuihkujen vaikutus on pienin kun kulkijan etäisyys Dracosta on noin 109 kyynärää.

765. Sektorin kaari on kartion pohjaympyrän kehä. Sektorin säde on kartion sivujana.



Kirjoitetaan ensin kaaren pituus b kulman α avulla.

Kun käytetään kulman α yksikkönä radiaaneja pätee $\alpha = \frac{b}{3}$, mistä saadaan $b = 3\alpha$.

Koska tämä on kartion pohjaympyrän kehän pituus, kartion pohjaympyrän säteeksi r saadaan

$$2\pi r = b \quad \| 2\pi$$

$$r = \frac{b}{2\pi}$$

$$r = \frac{3\alpha}{2\pi}.$$

Kartion korkeus saadaan Pythagoraan lauseen avulla:

$$h^2 = 3^2 - r^2$$

$$h^2 = 9 - (\frac{3\alpha}{2\pi})^2$$

$$h = \sqrt{9 - \frac{9\alpha^2}{4\pi^2}} \quad (\text{tai } h = \sqrt{9 - \frac{9\alpha^2}{4\pi^2}}).$$

Kartion tilavuus on nyt

$$V(\alpha) = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi \cdot (\frac{3\alpha}{2\pi})^2 \cdot \sqrt{9 - \frac{9\alpha^2}{4\pi^2}} = \frac{9\alpha^2\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}}{8\pi^2}.$$

Selvitetään, milloin kartion tilavuus on suurin derivaatan avulla.

$$V'(\alpha) = \frac{9\alpha\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}}{4\pi^2} - \frac{9\alpha^3}{8\pi^2\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}}$$

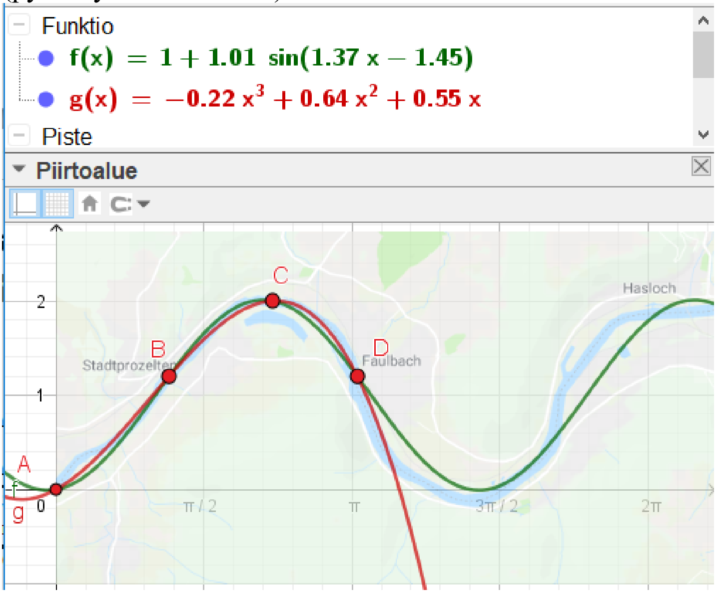
$V'(\alpha) = 0$, kun $(\alpha = -\frac{2\pi\sqrt{6}}{3})$ tai kun $\alpha = 0$ tai kun $\alpha = \frac{2\pi\sqrt{6}}{3}$ $(\approx 5{,}1)$.

α	$V'(\alpha)$	Merkki
4	2,9…	+
6	−10,6…	−

	0	$\frac{2\pi\sqrt{6}}{3}$	2π	
$V'(\alpha)$		+	−	
$V(\alpha)$		↗	↘	

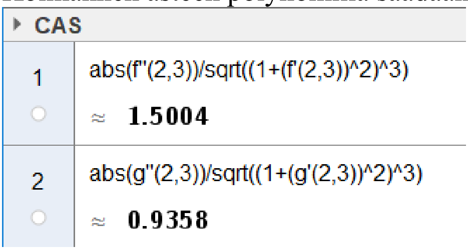
Kartion tilavuus on suurin, kun kulma $\alpha = \frac{2\pi\sqrt{6}}{3}$.

766. **a)** Sovitetaan ohjelman komennoilla pisteisiin sinikäyrä ja kolmannen asteen polynomi. Kertoimet on määritetty 2 desimaalin tarkkuudella (pyöristys 2 desimaalia).



b) Lasketaan ohjelmaan tallennettujen funktioiden avulla kysytyt kaarevuudet.

Sinikäyrällä saadaan $k_S(2{,}3) = 1{,}500\ldots$
Kolmannen asteen polynomilla saadaan $k_P(2{,}3) = 0{,}935\ldots$



Sinikäyrällä on siis suurempi kaarevuus.

767. Ratkaistaan yhtälöstä $2x^2 + y^2 = 6$ muuttuja y, jolloin saadaan
$y = \sqrt{6-2x^2}$ tai $y = -\sqrt{6-2x^2}$.
Koska näin halutaan määrittää funktio $y(x)$, jolle $y(1) = -2$, niin valitaan
$y(x) = -\sqrt{6-2x^2}$. Tällöin $y(1) = -\sqrt{6-2\cdot 1^2} = -2$.

Tangentti kulkee pisteen $(1, -2)$ kautta ja sen kulmakerroin on $y'(1)$.

$$y'(x) = \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{3-x^2}}$$

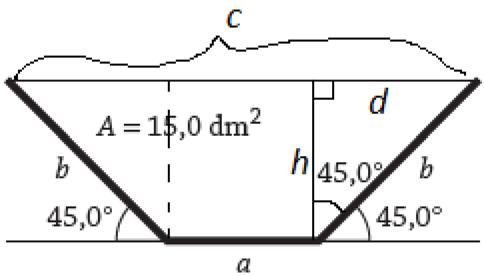
$y'(1) = 1$

Tangentin yhtälö on siis $y - (-2) = 1(x - 1)$, mistä saadaan $y = x - 3$.

Tangentti leikkaa x-akselin, kun $y = 0$:
Yhtälön $0 = x - 3$ ratkaisu on $x = 3$, joten tangentti leikkaa x-akselin pisteessä $(3, 0)$.

768. Muuttujien a ja b välille saadaan yhteys puolisuunnikkaan pinta-alan avulla:

$$\frac{a+c}{2}\cdot h = 15$$



Kuvan suorakulmaisesta kolmiosta saadaan

$\cos 45° = \frac{h}{b}$, josta saadaan $h = b\cos 45° = \frac{b\sqrt{2}}{2}$

Sivun c pituus on $a + 2d$. Tässä myös d saadaan samasta suorakulmaisesta kolmiosta.

$\sin 45° = \frac{d}{b}$, josta saadaan $d = b\sin 45° = \frac{b\sqrt{2}}{2}$

Sivun c pituus on siis $a + 2\cdot\frac{b\sqrt{2}}{2}$ ja korkeus h on $\frac{b\sqrt{2}}{2}$, joten suunnikkaan pinta-alasta saadaan yhtälö

$$\frac{a+a+2\cdot\frac{b\sqrt{2}}{2}}{2}\cdot\frac{b\sqrt{2}}{2} = 15.$$

Ratkaistaan ohjelmalla tästä yhtälöstä a.

Saadaan $a = \frac{-(b^2-30)\sqrt{2}}{2b}$.

Nyt $a + 2b = \frac{-(b^2-30)\sqrt{2}}{2b} + 2b$, joten virtausvastusta kuvaa funktio

$$f(b) = \frac{-(b^2-30)\sqrt{2}}{2b} + 2b.$$

Etsitään funktion $f(b)=\dfrac{-(b^2-30)\sqrt{2}}{2b}+2b$ pienin arvo derivaatan avulla.

$$f'(b)=\frac{-(b^2(\sqrt{2}-4)+30\sqrt{2})}{2b^2}$$

$f'(b) = 0$, kun $b = -4{,}0\ldots$ tai kun $b = 4{,}0506\ldots$

	0		4,0…
$f'(b)$		$-$	$+$
$f(b)$		↘	↗

b	$f'(b)$	Merkki
2	$-4{,}0\ldots$	$-$
6	$0{,}7..$	$+$

Lausekkeen $a + 2b$ arvo on pienin kun $b = 4{,}0506\ldots$ (dm).

$$a=\frac{-(b^2-30)\sqrt{2}}{2b}=2{,}372...\text{ (dm)}$$

Siis $a \approx 23{,}7$ cm ja $b \approx 40{,}5$ cm.

SYVENTÄVÄT TEHTÄVÄT

769. Jos funktio f on derivoituva kohdassa $x = a$, niin raja-arvo

$f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ on olemassa.

Funktio on derivoituva kohdassa $x = -a$, mikäli raja-arvo

$\lim\limits_{x\to -a}\dfrac{f(x)-\overbrace{f(-a)}^{=-f(a)}}{x-(-a)}=\lim\limits_{x\to -a}\dfrac{f(x)+f(a)}{x+a}$ on olemassa.

Jotta päästään käyttämään tietoa derivaatan $f'(a)$ olemassaolosta, tehdään muuttujanvaihto: merkitään $x = -y$. Tällöin $x \to -a$ tarkoittaa samaa kuin $y \to a$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -a}\frac{f(x)+f(a)}{x+a}&=\lim_{y\to a}\frac{\overbrace{f(-y)}^{=-f(y)}+f(a)}{-y+a}\\&=\lim_{y\to a}\frac{-f(y)+f(a)}{-y+a}\\&=\lim_{y\to a}\frac{-(f(y)-f(a))}{-(y-a)}\\&=\lim_{y\to a}(\underbrace{\frac{f(y)-f(a)}{y-a}}_{\to f'(a)})\\&=f'(a)\end{aligned}$$

On siis osoitettu, että $f'(-a)=\lim\limits_{x\to -a}\dfrac{f(x)-f(-a)}{x-(-a)}=f'(a)$ eli että funktio f on derivoituva kohdassa $x = -a$ ja $f'(-a) = f'(a)$.

770. Koska kyseessä on toisen asteen yhtälö, on oltava $a \neq 0$. Yhtälön ratkaisuksi saadaan tällöin ohjelmalla $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-a}}{a}$.

Koska $|a| < 1$, niin tällöin $1 - a > 0$, ja yhtälöllä on kaksi ratkaisua eli juurta.

Lasketaan ohjelmalla yhtälön juurten raja-arvo kun $a \to 0$.

$\lim\limits_{a \to 0} \frac{-1+\sqrt{1-a}}{a} = -\frac{1}{2}$

$\lim\limits_{a \to 0} \frac{-1-\sqrt{1-a}}{a}$ ei raja-arvoa

Kun $a = 0$, yhtälö on muotoa $2x + 1 = 0$, jonka ratkaisu on $x = -\frac{1}{2}$.

Ratkaisun $\frac{-1+\sqrt{1-a}}{a}$ raja-arvo on siis sama kuin arvoa $a = 0$ vastaavan yhtälön juuri.

771. Funktio f on jatkuva kohdassa $x = b$, jos $f(b) = \lim_{x \to b-} f(x) = \lim_{x \to b+} f(x)$.

$f(b) = ab^2 + 3b$

$\lim_{x \to b-} f(x) = -b^2 + a^2 b$

$\lim_{x \to b+} f(x) = ab^2 + 3b$

Funktio on siis jatkuva kohdassa $x = b$, jos $ab^2 + 3b = -b^2 + a^2 b$. Selvitetään tästä ehto vakiolle b.

$$ab^2 + 3b = -b^2 + a^2 b$$
$$ab^2 + 3b + b^2 - a^2 b = 0$$
$$b(ab + 3 + b - a^2) = 0$$
$$b = 0 \text{ tai } ab + 3 + b - a^2 = 0$$
$$(a+1)b = a^2 - 3$$

Jos $a \neq -1$, saadaan b ratkaistua yhtälöstä $(a + 1)b = a^2 - 3$:

$$(a+1)b = a^2 - 3 \quad \| : (a+1)$$
$$b = \frac{a^2 - 3}{a+1}$$

Jos $a = -1$, yhtälöstä $(a + 1)b = a^2 - 3$ tulee yhtälö $0 = 2$, jolla ei ole ratkaisuja.

Funktio f on siis jatkuva, kun $b = 0$, jolloin a voi olla mikä tahansa reaaliluku, sekä kun $b = \frac{a^2 - 3}{a+1}$, missä $a \neq -1$.

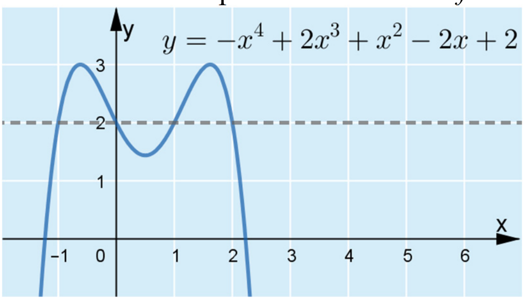
772. **a)** Epäyhtälö $f(x) \geq 2$ voidaan kirjoittaa myös muodossa $f(x) - 2 \geq 0$. Merkitään $g(x) = f(x) - 2$ ja päätellään funktioksi g sopiva funktio.

Koska epäyhtälön $g(x) \geq 0$ ratkaisu on $-1 \leq x \leq 0$ tai $1 \leq x \leq 2$, niin funktion g nollakohdat ovat $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ ja $x = 2$. Eräs funktio, jolla on nämä nollakohdat eikä muita, on $(x + 1)\, x\, (x - 1)\, (x - 2)$. Tehdään tämän funktion merkkikaavio ja katsotaan, kelpaako se.

		-1	0	1	2
$x + 1$	−	+	+	+	+
x	−	−	+	+	+
$x - 1$	−	−	−	+	+
$x - 2$	−	−	−	−	+
$g(x)$	+	−	+	−	+

Merkit ovat juuri toisinpäin kuin mitä haluttiin.
Voidaan siis valita
$g(x) = -(x + 1)\, x\, (x - 1)\, (x - 2) = -x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x$.

Tällöin $f(x) = g(x) + 2 = -x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x + 2$.
Tarkistetaan vielä piirtämällä funktion f kuvaaja.



Rationaalifunktio on funktio, joka voidaan esittää kahden polynomin osamääränä. Kaikki polynomifunktiot ovat myös rationaalifunktioita, sillä nimittäjäksi voidaan valita vakiofunktio 1. Funktio f on siis pyydettyä tyyppiä.

b) Koska funktio g ei saa negatiivisia arvoja, ja sen derivaatalla tulee olla kaksi nollakohtaa, valitaan funktioksi g neljännen asteen polynomi, jolloin sen derivaatta on kolmannen asteen polynomi.

Kokeillaan funktiota $g(x) = x^4 + x^2$, joka selvästi saa vain ei-negatiivisia arvoja.
Nyt $g'(x) = 4x^3 + 2x = 2x(2x^2 + 1)$. Tällä on kuitenkin vain yksi nollakohta.

Mietitään sitten derivaatan g' kautta:
Derivaatalla tulee olla kaksi nollakohtaa, joten valitaan esimerkiksi $g'(x) = x^2(x - 1) = x^3 - x^2$.
Nyt derivaatan nollakohdat ovat $x = 0$ ja $x = 1$.
Nyt saadaan $g(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + C$.
Murtolukujen välttämiseksi valitaan kuitenkin
$g'(x) = 12x^2(x - 1) = 12x^3 - 12x^2$, jolloin saadaan
$g(x) = 3x^4 - 4x^3 + C$.

Valitaan vakio C siten että funktion g pienin arvo ei ole negatiivinen.

		0		1	
$g'(x)$	$-$		$-$		$+$
$g(x)$	$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$g(1) = 3 - 4 + C = -1 + C$
Voidaan siis valita esimerkiksi $g(x) = 3x^4 - 4x^3 + 1$.

773. **a)** Funktio g on derivoituva kohdassa $x = 0$, mikäli raja-arvo

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}$ on olemassa.

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x\,f(x)-0\cdot f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\,f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}f(x)$$

Koska funktio f on jatkuva kohdassa $x = 0$, on $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$.

Siis $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$.

On siis osoitettu, että funktio g on derivoituva kohdassa $x = 0$ ja että $g'(0)=f(0)$.

b) Kohdan a mukaisesti:

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x\,f(x)-0\cdot f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\,f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}f(x)$$

Nyt, koska funktiosta f ei tiedetä muuta kuin että $-2 \le f(x) \le 2$, niin ei tiedetä, onko raja-arvo $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ olemassa vai ei.

Funktion g derivoituvuudesta kohdassa $x = 0$ ei siis voida sanoa mitään annettujen tietojen perusteella.

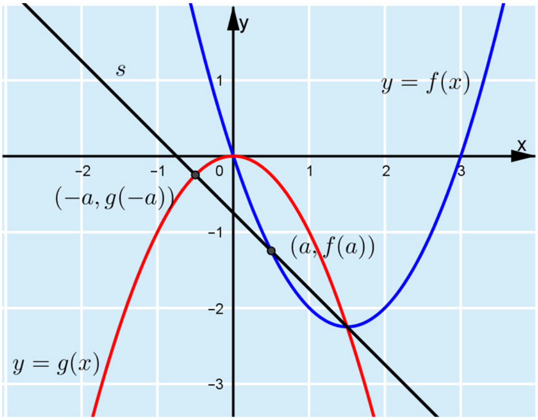
$$\lim_{x\to 0}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\,f(x)-0^2\cdot f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\,f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}(xf(x))$$

Koska $-2 \le f(x) \le 2$ eli $|f(x)| \le 2$ kaikilla x, niin $0 \le |x\,f(x)| \le 2|x|$ kaikilla x ja koska $\lim\limits_{x\to 0}2|x|=0$, myös $\lim\limits_{x\to 0}|xf(x)|=0$. Niinpä $\lim\limits_{x\to 0}(xf(x))=0$.

Siis $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{h(x)-h(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}(xf(x))=0$.

On siis osoitettu, että funktio h on derivoituva kohdassa $x = 0$ ja että $h'(0)=0$.

774. Piirretään ensin kuva. Kuvassa $a > 0$.



Suora s kulkee pisteiden $(a, f(a))$ ja $(-a, g(-a))$ kautta ja kun $a \neq 0$, sen kulmakerroin on

$$\frac{f(a)-g(-a)}{a-(-a)} = \frac{2a^2-3a}{2a} = a - \frac{3}{2}.$$

Määritetään raja-arvo, kun $a \to 0$.

$$\lim_{a\to 0}(a - \frac{3}{2}) = -\frac{3}{2}.$$

775. Tutkitaan funktion f kulkua derivaatan avulla.

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax - a^2$$

Jos $a = 0$, derivaatta $f'(x) = 3x^2$ on aina ei-negatiivinen ja sillä on vain yksi nollakohta $x = 0$, joten funktio f on kasvava. Tällöin funktiolla f ei voi olla kolmea nollakohtaa.

Jos $a \neq 0$, derivaatan nollakohdat, eli yhtälön $3x^2 + 2ax - a^2 = 0$ ratkaisut saadaan ohjelmalla, ja ne ovat $x = -a$ ja $x = \frac{a}{3}$.

Kulkukaaviolle on kaksi vaihtoehtoa riippuen siitä, onko luku a positiivinen vai negatiivinen.

Tarkastetaan ensin vaihtoehto $a > 0$. Derivaatan f' kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, joten derivaatta on negatiivinen nollakohtiensa välissä ja positiivinen muualla.

	$-a$		$\frac{a}{3}$	
$f'(x)$	+		−		+

$f'(x)$	+	−	+
$f(x)$	↗	↘	↗

$f(-a) = a^3 + 1$ ja $f(\frac{a}{3}) = 1 - \frac{5}{27}a^3$

Koska f on kolmannen asteen polynomi, sillä on kolme nollakohtaa, jos

$$\begin{cases} f(-a) > 0 \\ f(\frac{a}{3}) < 0. \end{cases}$$

Ohjelmalla tämän epäyhtälöryhmän ratkaisuksi saadaan

$$a > \frac{3}{\sqrt[3]{5}} \quad (\approx 1{,}75)$$

Kaikki nämä luvut toteuttavat ehdon $a > 0$, joten funktiolla on kolme nollakohtaa, kun $a > \frac{3}{\sqrt[3]{5}}$.

Tarkastetaan sitten vaihtoehto $a < 0$.

	$\frac{a}{3}$		$-a$
$f'(x)$	+	−	+
$f(x)$	↗	↘	↗

$f(\frac{a}{3}) = 1 - \frac{5}{27}a^3$ ja $f(-a) = a^3 + 1$

Koska f on kolmannen asteen polynomi, nollakohtia on nyt kolme, jos
$$\begin{cases} f(\frac{a}{3}) > 0 \\ f(-a) < 0. \end{cases}$$
Ohjelmalla tämän epäyhtälöryhmän ratkaisuksi saadaan $a < -1$.
Kaikki nämä luvut toteuttavat ehdon $a < 0$, joten funktiolla on kolme nollakohtaa, kun $a < -1$.

Funktiolla f on siis kolme nollakohtaa, kun $a < -1$ tai $a > \frac{3}{\sqrt[3]{5}}$.

776. Esimerkiksi funktio $f(x) = x^3$ on pariton ja kasvava:
$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$
$f'(x) = 3x^2 \geq 0$ kaikilla x ja derivaatta on 0 vain, kun $x = 0$, joten f on kasvava.

Esimerkiksi sinifunktio on pariton, mutta ei kasvava:
$\sin(-x) = -\sin x$, joten sini on pariton funktio. Sini saa samat arvot aina 2π välein, joten se ei ole kasvava.

Oletetaan, että f on pariton ja jatkuva. Tällöin
$$\underbrace{\lim_{x\to 0} f(-x)}_{f(0)} = \lim_{x\to 0}(-f(x)) = -\underbrace{\lim_{x\to 0}(f(x))}_{f(0)}$$

Yhtälöstä $f(0) = -f(0)$ saadaan $2f(0) = 0$ ja edelleen $f(0) = 0$.

777. Yhtälön $x^7 + x^2 + 6x = a$ eli yhtälön $x^7 + x^2 + 6x - a = 0$ ratkaisut ovat samat kuin funktion $f(x) = x^7 + x^2 + 6x - a$ nollakohdat. Tutkitaan funktion f kulkua.

$f'(x) = 7x^6 + 2x + 6$
Pakollisten kurssien tiedoilla derivaatan nollakohtia ei osata määrittää. Tutkitaan derivaattafunktion f' kulkua sen derivaatan f'' avulla.

$f''(x) = 42x^5 + 2$
Toisen derivaatan f'' nollakohta on yhtälön $42x^5 + 2 = 0$ ratkaisu.

$$42x^5 + 2 = 0$$

$$x = \sqrt[5]{-\frac{1}{21}} \approx -0,54$$

		$\sqrt[5]{-\frac{1}{21}}$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f'(x)$	↘	↗

x^5 on kasvava

Tarkistetaan, mikä on derivaatan merkki minimikohdassaan.

$$f'(\sqrt[5]{-\frac{1}{21}}) = 7\cdot(\sqrt[5]{-\frac{1}{21}})^6 + 2\cdot\sqrt[5]{-\frac{1}{21}} + 6 \approx 5,1 > 0$$

Koska derivaattafunktion f' pienin arvo on positiivinen, derivaatta saa vain positiivisia arvoja. Näin ollen funktio f on kasvava ja näin ollen sillä on enintään yksi nollakohta.

Koska f on seitsemännen asteen polynomifunktio, sillä on ainakin yksi nollakohta.

Koska funktiolla f on näin näytetty olevan tasan 1 nollakohta vakion a arvosta riippumatta, yhtälöllä $x^7 + x^2 + 6x = a$ on aina yksi ratkaisu.

778. Tehtäväannon perusteella tiedetään siis seuraavat asiat:

$f(x+y) = f(x)f(y)$

$f(0) = 1$

raja-arvo $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0)$ on olemassa.

Tarkastellaan sitten erotusosamäärän raja-arvoa kohdassa $x = a$.

$\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Jotta päästään käyttämään tietoa derivaatan $f'(0)$ olemassaolosta, tehdään muuttujanvaihto: merkitään $x = a + h$. Tällöin $x \to a$ tarkoittaa samaa kuin $h \to 0$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)+f(a)}{a+h-a} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(a)f(h)+f(a)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(a)(f(h)+1)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} f(a)\frac{f(h)+f(0)}{h-0}
\end{aligned}$$

Koska $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0)$, nyt saadaan

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0} f(a)\frac{f(h)+f(0)}{h-0} = f(a)f'(0) = f'(0)f(a)$$

On siis osoitettu, että f on derivoituva kohdassa $x = a$ ja $f'(a) = f'(0)f(a)$. Koska luvusta a ei oletettu mitään, tämän perusteella funktio f on derivoituva kaikkialla ja $f'(x) = f'(0)f(x)$ kaikilla x.

Mikä tahansa muotoa a^x oleva funktio ($a > 0$) toteuttaa tehtävänannon ehdot. Valitaan vaikkapa $f(x) = e^x$:

$e^{x+y} = e^x e^y$

$e^0 = 1$

ja e^x on eksponenttifunktiona derivoituva, kun $x = 0$.

Toinen tapa:

Käytetään derivaatan määritelmän muotoa $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x)f(h)-f(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0} f(x)\frac{f(h)-1}{h}\\ &= \lim_{h\to 0} f(x)\frac{f(0+h)-f(0)}{h}\\ &= f(x)f'(0)\end{aligned}$$

Mikä tahansa muotoa a^x oleva funktio toteuttaa tehtävänannon ehdot.
Valitaan vaikkapa $f(x) = e^x$:
$e^{x+y} = e^x e^y$
$e^0 = 1$
ja e^x on eksponenttifunktiona derivoituva, kun $x = 0$.

779. **a)**

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{1+|x|}-\frac{0}{1+|0|}}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{1+|x|}-0}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+|x|}$$
$$=\frac{1}{1+0}=1$$

Koska erotusosamäärällä on raja-arvo, funktio f on derivoituva, kun $x = 0$.

b) Kohdan a laskun perusteella $f'(0) = 1$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-1}{x}$$

Muodostetaan derivaattafunktion f' lauseke.

$$f(x)=\frac{x}{1+|x|}=\begin{cases}\frac{x}{1+x}, & \text{kun } x\ge 0\\ \frac{x}{1-x}, & \text{kun } x<0\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{(x+1)^2}, & \text{kun } x>0\\ 1, & \text{kun } x=0\\ \frac{1}{(x-1)^2}, & \text{kun } x<0\end{cases}$$

Funktion $g(x) = f'(x)$ erotusosamäärän raja-arvo kohdassa nolla on siis määritettävä toispuolisten raja-arvojen avulla.

$$\lim_{x\to 0-}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\frac{f'(x)-1}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{\frac{1}{(x-1)^2}-1}{x}=2$$
$$\lim_{x\to 0+}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0+}\frac{f'(x)-1}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{(x+1)^2}-1}{x}=-2$$

Koska toispuoliset raja-arvot ovat eri suuret, erotusosamäärällä ei ole raja-arvoa ja funktio g ei siten ole derivoituva kohdassa $x = 0$.

780. Derivaatan määritelmän mukaan $f'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$.

Koska välillä $-1 < x < 1$ pätee $f(x) = 1 + 2x + x^2 f(x^2)$, saadaan $f(0) = 1 + 0 + 0 \cdot f(0) = 1$.

Siis $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - 1}{x}$.

Koska tarkastellaan raja-arvoa, kun x lähestyy nollaa, rajoitutaan välille $-1 < x < 1$, jolloin saadaan

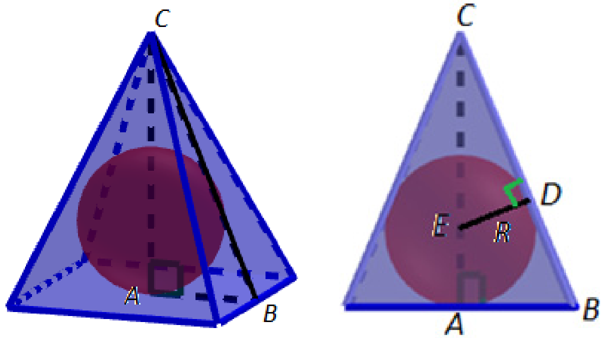
$$\begin{aligned}\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - 1}{x} &= \lim_{x \to 0} \frac{1 + 2x + x^2 f(x^2) - 1}{x} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{2x + x^2 f(x^2)}{x} \\ &= \lim_{x \to 0} (2 + x f(x^2))\end{aligned}$$

Koska $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$ ja $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$, saadaan $\lim_{x \to 0} f(x^2) = 1$.

Näin saadaan $\lim_{x \to 0} (2 + x f(x^2)) = 2 + 0 \cdot 1 = 2$.

Siis $f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} (2 + x f(x^2)) = 2$.

781. Oletetaan, että ”mahdollisimman pieni” tarkoittaa, että pyramidi on tilavuudeltaan mahdollisimman pieni.



Pallon tilavuus on $V_{\text{Pallo}} = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Kuvan merkinnöillä pyramidin tilavuus on $V_{\text{Pyramidi}} = \frac{1}{3}\cdot(2AB)^2 \cdot AC$.

Pyritään ilmoittamaan pituudet AB ja AC kirjaimen R avulla.

Kuvassa olevat kolmiot ABC ja DEC ovat yhdenmuotoisia, sillä ne molemmat ovat suorakulmaisia ja niissä on yhteinen kulma C.

Merkitään $AC = h$. Tällöin $EC = h - R$.
Pythagoraan lauseella saadaan kolmiosta EDC
$EC^2 = DC^2 + ED^2$
$DC^2 = EC^2 - ED^2$
$DC^2 = (h - R)^2 - R^2$
$DC = \sqrt{h^2 - 2hR}$ (tai $DC = -\sqrt{h^2 - 2hR}$).

Vastinosien suhteena saadaan $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DC}$ eli

$\frac{AB}{R} = \frac{h}{\sqrt{h^2 - 2hR}}$, josta edelleen

$AB = \frac{hR}{\sqrt{h^2 - 2hR}}$.

Pyramidin tilavuus on siis

$$V_{\text{Pyramidi}} = \frac{1}{3}\cdot(2AB)^2 \cdot AC = \frac{1}{3}\cdot\left(2\frac{hR}{\sqrt{h^2-2hR}}\right)^2 \cdot h = -\frac{4h^2R^2}{3(2R-h)}.$$

Etsitään funktion $V(h) = -\dfrac{4h^2R^2}{3(2R-h)}$ pienin arvo derivaatan avulla.

$$V'(h) = \frac{4h(h-4R)R^2}{3(h-2R)^2}$$

$V'(h) = 0$, kun h = 4R tai h = 0.

	0	4R	
$V'(h)$		−	+
$V(h)$		↘	↗

h	$V'(h)$	Merkki
R	$-4R^2$	−
$5R$	$\dfrac{20R^2}{27}$	+

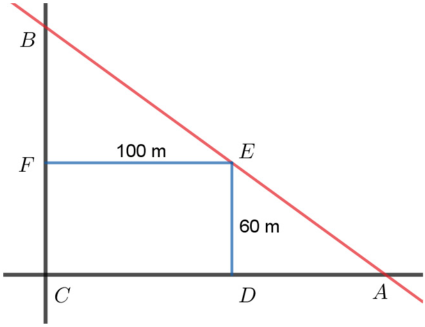
Pyramidin tilavuus on siis pienin, kun h = 4R. Tällöin tilavuus on

$$V(4R) = \frac{32R^3}{3}.$$

Pallon ja pyramidin tilavuuksien suhde on

$$\frac{V_{\text{Pallo}}}{V_{\text{Pyramidi}}} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{32R^3}{3}} = \frac{\pi}{8} = \pi : 8$$

782. Kuvan merkinnöillä halutaan siis määrittää kulma $\sphericalangle EAD$ kun janan AB pituus on mahdollisimman pieni.



Kulmat $\sphericalangle EFB$ ja $\sphericalangle ADE$ ovat suoria, koska puun etäisyys käytävistä mitataan aina kohtisuorasti.

Kolmiot DAE ja FEB ovat yhdenmuotoisia, sillä niissä on molemmissa suora kulma ja kulmat A ja E ovat samankohtaisina kulmina yhtä suuret.

Vastinosien suhteena saadaan $\dfrac{BE}{EA} = \dfrac{100}{DA}$.

DA saadaan Pythagoraan lauseen avulla.

$DA^2 = EA^2 - 60^2$

$DA = \sqrt{EA^2 - 3600}$ (tai $DA = -\sqrt{EA^2 - 3600}$)

Nyt siis $\dfrac{BE}{EA} = \dfrac{100}{\sqrt{EA^2 - 3600}}$. Ratkaistaan tästä BE:

$BE = \dfrac{100EA}{\sqrt{EA^2 - 3600}}$.

Oikopolun pituus on nyt $BE + EA = \dfrac{100EA}{\sqrt{EA^2 - 3600}} + EA$, missä $EA > 60$.

Merkitään selvyyden vuoksi $EA = x$, jolloin oikopolun pituuden kertoo funktio

$f(x) = \dfrac{100x}{\sqrt{x^2 - 3600}} + x$.

Etsitään tämän funktion pienin arvo derivaatan avulla.

$$f'(x) = 1 - \frac{360000}{(x^2 - 3600)\sqrt{x^2 - 3600}}.$$

$f'(x) = 0$, kun $x = -93{,}0\ldots$ tai $x = 93{,}0\ldots$

		60	93,0…
$f'(x)$		$-$	$+$
$f(x)$		↘	↗

x	$f'(x)$	Merkki
70	−6,6…	−
100	0,2…	+

Oikopolun pituus on siis pienin,
kun $x = 93{,}0\ldots$ (m).

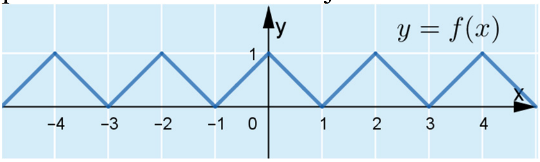
Nyt kysytty kulma saadaan kolmiosta *DAE* sinin avulla.

$$\sin(\sphericalangle EAD) = \frac{60}{93{,}0\ldots}$$

$$\sphericalangle EAD = 40{,}14\ldots^\circ$$

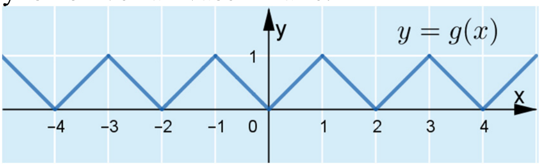
$$\sphericalangle EAD \approx 40^\circ$$

783. Piirretään funktion f kuvaaja. Piirretään kuvaaja ensin yhdellä jakson pituisella välillä $-1 \leq x \leq 1$ ja toistetaan tätä molempiin suuntiin.



Funktio f ei ole derivoituva kohdissa $x = n$, missä n on kokonaisluku, koska niissä kohdissa funktion erotusosamäärän toispuoliset raja-arvot ovat erisuuret. Kuvassa tämä näkyy siten, että funktion kuvaajassa on näissä kohdissa kulma: nouseva suora vaihtuu laskevaksi tai laskeva suora vaihtuu nousevaksi.

Funktio g saa kohdassa x saman arvon kuin funktio f saa kohdassa $x + 1$. Funktion g kuvaaja saadaan funktion f kuvaajasta siirtämällä sitä yhden yksikön verran vasemmalle.



Myöskään funktio g ei ole derivoituva kohdissa $x = n$, missä n on kokonaisluku.

Funktiota h varten tarkastellaan erikseen välit $-1 \leq x \leq 0$ ja $0 \leq x \leq 1$. Muualla kuvaaja toistuu samanlaisena jaksollisuuden vuoksi.

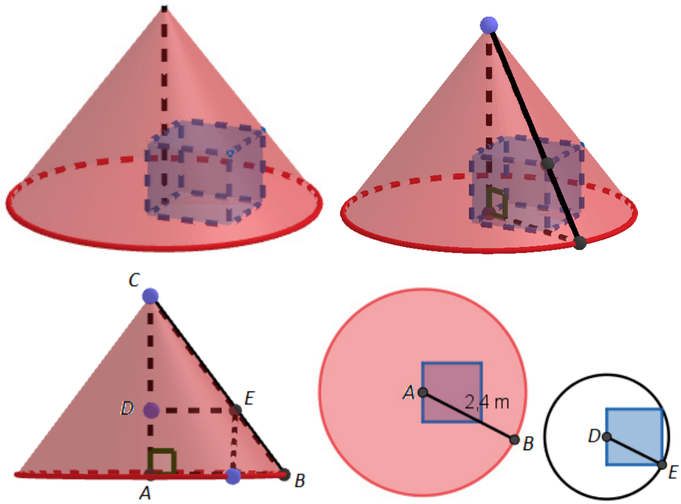
Kun $-1 \leq x \leq 0$, niin $0 \leq x + 1 \leq 1$, joten funktion h lausekkeeksi saadaan $f(x) + f(x + 1) = 1 + x + 1 - (x + 1) = 1$.

Kun $0 \leq x \leq 1$, niin $1 \leq x + 1 \leq 2$.
Välillä $1 \leq x \leq 2$ funktion f kuvaaja on nouseva suora, joka kulkee pisteiden $(1, 0)$ ja $(2, 1)$ kautta, joten sen yhtälö on $y = x - 1$.
Välillä $1 \leq x \leq 2$ funktion f arvot lasketaan siis lausekkeella $x - 1$.

Nyt saadaan välillä $0 \leq x \leq 1$ funktion h lausekkeeksi
$f(x) + f(x + 1) = (1 - x) + ((x + 1) - 1) = 1$.

Näin ollen $h(x) = 1$, kun $-1 \leq x \leq 1$, ja jaksollisuuden vuoksi $h(x) = 1$ kaikilla x. Koska funktion h lauseke sievenee vakiofunktioksi, se on derivoituva kaikilla luvuilla x.

784. Hahmotellaan tilanteesta kuvia.



Kuvan merkinnöillä kolmiot ABC ja DEC ovat yhdenmuotoisia, sillä niissä molemmissa on suora kulma, ja kulmat B ja E ovat samankohtaisina kulmina yhtä suuret.

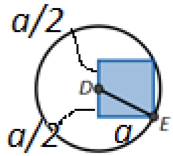
Vastinosien suhteesta saadaan $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DC}$ eli $\frac{2,4}{DE} = \frac{AC}{DC}$.

Kartion korkeus AC saadaan Pythagoraan lauseen avulla.
$AC^2 = 4,0^2 - 2,4^2$
$AC = 3,2$ (tai $AC = -3,2$)

Siis $\frac{2,4}{DE} = \frac{3,2}{DC}$.

Merkitään suorakulmaisen särmiön pohjaneliön sivun pituutta kirjaimella a ja särmiön korkeutta kirjaimella h.
Näillä merkinnöillä $DC = 3,2 - h$.

DE voidaan kirjoittaa kirjaimen *a* avulla, kun apuna käytetään Pythagoraan lausetta.



$$DE^2 = a^2 + (\frac{a}{2})^2$$

$$DE = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

Näin ollen verrannosta $\frac{2,4}{DE} = \frac{3,2}{DC}$ saadaan $\frac{2,4}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{3,2}{3,2-h}$.

Ratkaistaan tästä *h*, jolloin ohjelmalla saadaan $h = -2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{3}a + \frac{16}{5}$.

Suorakulmaisen särmiön tilavuus on nyt $V(a) = a^2 \cdot h = -\frac{2}{3}\sqrt{5}\,a^3 + \frac{16}{5}a^2$.

Etsitään tämän suurin arvo derivaatan avulla.

$$V'(a) = \frac{1}{5}\left(-10\sqrt{5}\,a^2 + 32\,a\right)$$

$V'(a) = 0$, kun $a = 0$ tai $a = 16 \cdot \frac{\sqrt{5}}{25} \approx 1,43...$

	0	1,43…	
$f'(x)$		+	−
$f(x)$		↗	↘

x	$f'(x)$	Merkki
1	1,9…	+
2	−5,0	−

Tilavuus on siis suurin, kun
a = 1,43… (m).
Korkeus on tällöin $h = 1,0666...$ (m)
ja tilavuus V(1,432…) = 2,184… (m^3)

Suorakulmaisen särmiön pohjasärmä on siis 1,4 m, korkeus 1,1 m ja tilavuus 2,2 m^3.

8 Integraalilaskenta

8.1 Integraalifunktio

LUVUN 8.1 YDINTEHTÄVÄT

801. Funktio g on funktion h integraalifunktio, jos $g'(x) = h(x)$ kaikissa pisteissä x, joissa funktio h on määritelty.
$g'(x) = \mathrm{D}(4x + \sin 3x + 2) = 4 + \cos 3x \cdot 3 = 3 \cos 3x + 4 = h(x)$

Funktio g on siis funktion h integraalifunktio.

802. **a)**

$$\int (4x^6 - 2x^3 + 3x)\mathrm{d}x$$
$$= 4 \cdot \frac{1}{7}x^7 - 2 \cdot \frac{1}{4}x^4 + 3 \cdot \frac{1}{2}x^2 + C$$
$$= \frac{4}{7}x^7 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{3}{2}x^2 + C$$

$$\mathrm{D}(\frac{4}{7}x^7 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{3}{2}x^2 + C) = \frac{4}{7} \cdot 7x^6 - \frac{1}{2} \cdot 4x^3 + \frac{3}{2} \cdot 2x + 0$$
$$= 4x^6 - 2x^3 + 3x$$

b) $\int (x^2 - 1)^2 \mathrm{d}x = \int (x^4 - 2x^2 + 1)\mathrm{d}x$
$$= \frac{1}{5}x^5 - 2 \cdot \frac{1}{3}x^3 + x + C$$
$$= \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + x + C$$

$$\mathrm{D}(\frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + x + C) = \frac{1}{5} \cdot 5x^4 - \frac{2}{3} \cdot 3x^2 + 1 + 0$$
$$= x^4 - 2x^2 + 1$$
$$= (x^2 - 1)^2$$

c) $\int(\frac{1}{x^3}+\sqrt{x})\mathrm{d}x=\int(x^{-3}+x^{\frac{1}{2}})\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{-2}x^{-2}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C\\&=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}+\frac{2}{3}x^1x^{\frac{1}{2}}+C\\&=-\frac{1}{2x^2}+\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{D}(-\frac{1}{2x^2}+\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C)&=\mathrm{D}(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}+\frac{2}{3}x^1x^{\frac{1}{2}}+C)\\&=\mathrm{D}(-\frac{1}{2}x^{-2}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C)\\&=-\frac{1}{2}\cdot(-2)x^{-3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}+0\\&=x^{-3}+x^{\frac{1}{2}}\\&=\frac{1}{x^3}+\sqrt{x}\end{aligned}$$

d) $\int(2x+t)\mathrm{d}x=2\cdot\frac{1}{2}x^2+tx+C=x^2+tx+C$

$\mathrm{D}(x^2+tx+C)=2x+t$

e) $\int(2x+t)\mathrm{d}t=\int(t+2x)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}t^2+2xt+C$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{1}{2}t^2+2xt+C)=\frac{1}{2}\cdot 2t+2x+0=t+2x=2x+t$

f) $\int(a+b+t)\mathrm{d}t=\int(t+a+b)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}t^2+at+bt+C$

$$\begin{aligned}\mathrm{D}(\frac{1}{2}t^2+at+bt+C)&=\frac{1}{2}\cdot 2t+a+b+0\\&=t+a+b\\&=a+b+t\end{aligned}$$

803. **a)** $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}
&=\int(\sqrt{x}(x-2))\mathrm{d}x\\
&=\int(x^{\frac{1}{2}}(x-2))\mathrm{d}x\\
&=\int(x^{\frac{3}{2}}-2x^{\frac{1}{2}})\mathrm{d}x\\
&=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-2\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C\\
&=\frac{2}{5}x^{2}\cdot x^{\frac{1}{2}}-\frac{4}{3}x\cdot x^{\frac{1}{2}}+C\\
&=\frac{2}{5}x^{2}\sqrt{x}-\frac{4}{3}x\sqrt{x}+C
\end{aligned}$$

b) Määritetään vakion C arvo tiedosta $F(4) = 7$.

$$\begin{aligned}
\frac{2}{5}\cdot 4^{2}\sqrt{4}-\frac{4}{3}\cdot 4\cdot\sqrt{4}+C&=7\\
\frac{2}{5}\cdot 16\cdot 2-\frac{16}{3}\cdot 2+C&=7\\
{}^{3)}\frac{64}{5}-{}^{5)}\frac{32}{3}+C&=7\\
\frac{192}{15}-\frac{160}{15}+C&=7\\
\frac{32}{15}+C&=7\\
C&={}^{15)}\frac{7}{1}-\frac{32}{15}\\
C&=\frac{105}{15}-\frac{32}{15}\\
C&=\frac{73}{15}
\end{aligned}$$

Kysytty integraalifunktio on siis $F(x)=\frac{2}{5}x^{2}\sqrt{x}-\frac{4}{3}x\cdot\sqrt{x}+\frac{73}{15}$.

804. **a)** $\int e^{4x}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int 4\cdot e^{4x}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}e^{4x} + C$

$$\begin{aligned}\mathrm{D}(\frac{1}{4}e^{4x} + C) &= \frac{1}{4}\mathrm{D}e^{4x} + \mathrm{D}C\\ &= \frac{1}{4}\cdot(e^{4x}\cdot \mathrm{D}4x) + 0\\ &= \frac{1}{4}\cdot e^{4x}\cdot 4\\ &= e^{4x}\end{aligned}$$

b) $\int 6\sin\frac{x}{2}\mathrm{d}x = 12\int\frac{1}{2}\cdot\sin(\frac{1}{2}x)\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}&= 12\cdot(-\cos\frac{x}{2}) + C\\ &= -12\cos\frac{x}{2} + C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{D}(-12\cos\frac{x}{2} + C) &= -12\mathrm{D}\cos\frac{x}{2} + 0\\ &= -12\cdot((-\sin\frac{x}{2})\cdot\mathrm{D}\frac{x}{2})\\ &= 12\cdot\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}\\ &= 6\sin\frac{x}{2}\end{aligned}$$

c) $\int (4x-1)^5\,\mathrm{d}x = \int\frac{1}{4}\cdot 4\cdot(4x-1)^5\,\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{4}\int 4\cdot(4x-1)^5\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}(4x-1)^6 + C\\ &= \frac{1}{24}(4x-1)^6 + C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{D}(\frac{1}{24}(4x-1)^6 + C) &= \frac{1}{24}\cdot 6(4x-1)^5\cdot\mathrm{D}(4x-1) + 0\\ &= \frac{6}{24}\cdot(4x-1)^5\cdot 4\\ &= \frac{24}{24}\cdot(4x-1)^5\\ &= (4x-1)^5\end{aligned}$$

d) $$\int \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int x(x^2+1)^{-1}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\int 2x(x^2+1)^{-1}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}\ln|\underbrace{x^2+1}_{>0}|+C$$
$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$$

$$\mathrm{D}(\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}\cdot\mathrm{D}(x^2+1)+0$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x$$
$$= \frac{x}{x^2+1}$$

e) $$\int \frac{e^x-1}{(e^x-x)^4}\,\mathrm{d}x = \int (e^x-1)(e^x-x)^{-4}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{-3}(e^x-x)^{-3}+C$$
$$= -\frac{1}{3(e^x-x)^3}+C$$

$$\mathrm{D}(-\frac{1}{3(e^x-x)^3}+C) = \mathrm{D}(-\frac{1}{3}(e^x-x)^{-3}+0$$
$$= -\frac{1}{3}\cdot(-3)(e^x-x)^{-4}\cdot\mathrm{D}(e^x-x)$$
$$= \frac{1}{(e^x-x)^4}\cdot(e^x-1)$$
$$= \frac{e^x-1}{(e^x-x)^4}$$

f) $$\begin{aligned}\int (2x^3+x)\sqrt{x^4+x^2+1}\,\mathrm{d}x &= \int (2x^3+x)(x^4+x^2+1)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int 2(2x^3+x)(x^4+x^2+1)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int (4x^3+2x)(x^4+x^2+1)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(x^4+x^2+1)^{\frac{3}{2}}+C \\ &= \frac{1}{3}(x^4+x^2+1)^1(x^4+x^2+1)^{\frac{1}{2}}+C \\ &= \frac{1}{3}(x^4+x^2+1)\sqrt{x^4+x^2+1}+C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{D}\left(\frac{1}{3}(x^4+x^2+1)\sqrt{x^4+x^2+1}+C\right) \\ &= \mathrm{D}\left(\frac{1}{3}(x^4+x^2+1)^1(x^4+x^2+1)^{\frac{1}{2}}\right)+0 \\ &= \mathrm{D}\left(\frac{1}{3}(x^4+x^2+1)^{\frac{3}{2}}\right) \\ &= \frac{1}{3}\mathrm{D}(x^4+x^2+1)^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}(x^4+x^2+1)^{\frac{1}{2}}\cdot\mathrm{D}(x^4+x^2+1) \\ &= \frac{1}{2}(x^4+x^2+1)^{\frac{1}{2}}\cdot(4x^3+2x) \\ &= \frac{1}{2}\cdot(4x^3+2x)\sqrt{x^4+x^2+1} \\ &= (2x^3+x)\sqrt{x^4+x^2+1}\end{aligned}$$

805. A: $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x\int(x^2-1)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3-x+C$, joten eräs funktion *f*

(x) = x^2 – 1 integraalifunktio on $F(x)=\frac{1}{3}x^3-x+\pi$.

Siis A–II

B: Funktioiden *F* ja *f* välillä on voimassa $F'(x) = f(x)$.
Nyt $F'(x)$ = D(sin x) = cos x.
Siis B-I

C: $F(x)=\int 3x^2\mathrm{d}x=x^3+C$

Koska $F(0) = 1$, niin $C = 1$. Kysytty funktion $f(x) = 3x^2$ integraalifunktio on $F(x) = x^3 + 1$.
Siis C–III

D: Integraalifunktion *F* muutosnopeus kohdassa $x = 0$ on

$F'(0)=f(0)=e^{0^2}=e^0=1.$

Siis D–III

E: $f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int(x+1)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2+x+C$

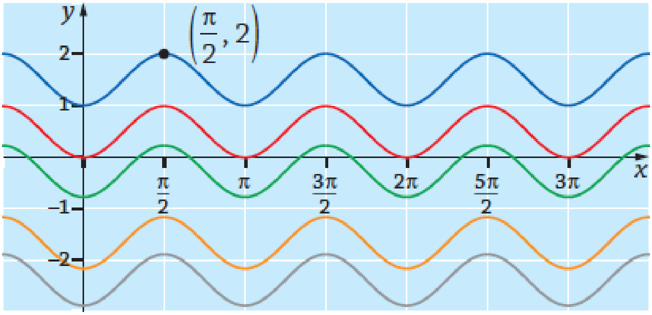
Tiedosta $f(4) = 3$ saadaan yhtälö $\frac{1}{2}\cdot 4^2+4+C=3,$ josta ratkaistaan C:n arvo:

$$\frac{1}{2}\cdot 4^2+4+C=3$$
$$\frac{1}{2}\cdot 16+4+C=3$$
$$C=-9$$

Koska funktio nyt $f(x)=\frac{1}{2}x^2+x-9,$ niin $f(2)=\frac{1}{2}\cdot 2^2+2-9=-5.$

Siis E–I

806. $\int \sin 2x \mathrm{d}x = -\frac{\cos 2x}{2} + C$



8.2 Määrätty integraali

LUVUN 8.2 YDINTEHTÄVÄT

807. **a)** $\int_0^1 (e^x - 1)\mathrm{d}x = \overset{1}{\underset{0}{/}}(e^x - x) = (e^1 - 1) - (e^0 - 0) = e - 1 - 1 = e - 2$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)\mathrm{d}x = \overset{\frac{\pi}{2}}{\underset{0}{/}}(-\cos x + \sin x)$

$$\begin{aligned}
&= (-\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}) - (-\cos 0 + \sin 0) \\
&= (-0 + 1) - (-1 + 0) \\
&= 1 + 1 \\
&= 2
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} (1 - \cos 3x)\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi} 1\mathrm{d}x - \int_0^{\pi} \cos 3x\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi} 1\mathrm{d}x - \int_0^{\pi} \frac{1}{3} \cdot 3\cos 3x\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi} 1\mathrm{d}x - \frac{1}{3}\int_0^{\pi} 3\cos 3x\mathrm{d}x \\
&= \overset{\pi}{\underset{0}{/}} x - \frac{1}{3}\overset{\pi}{\underset{0}{/}} \sin 3x \\
&= (\pi - 0) - \frac{1}{3}(\sin 3\pi - \sin 3 \cdot 0) \\
&= \pi - \frac{1}{3}(0 - 0) \\
&= \pi
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}\int_0^1 (xe^{-x^2})\mathrm{d}x &= \int_0^1 (-\frac{1}{2}\cdot(-2x)e^{-x^2})\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^1 (-2xe^{-x^2})\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{2}\Big/_0^1 e^{-x^2} \\ &= -\frac{1}{2}(e^{-1^2}-e^{-0^2}) \\ &= -\frac{1}{2}(e^{-1}-e^{0}) \\ &= -\frac{1}{2}(\frac{1}{e}-1) \\ &= -\frac{1}{2e}+\frac{1}{2}\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}\int_1^e \frac{1}{4x}\mathrm{d}x &= \int_1^e (\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x})\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4}\int_1^e \frac{1}{x}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4}\Big/_1^e \ln|x| \\ &= \frac{1}{4}(\ln|e|-\ln|1|) \\ &= \frac{1}{4}(\ln e-\ln 1) \\ &= \frac{1}{4}(1-0) \\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned}
\int_1^6 \sqrt{3x-2}\,\mathrm{d}x &= \int_1^6 (3x-2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x \\
&= \int_1^6 \frac{1}{3}\cdot 3\cdot (3x-2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3}\int_1^6 3\cdot (3x-2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3}\,\overset{6}{\underset{1}{/}}\,\frac{2}{3}(3x-2)^{\frac{3}{2}} \\
&= \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\,\overset{6}{\underset{1}{/}}(3x-2)^{\frac{3}{2}} \\
&= \frac{2}{9}\,\overset{6}{\underset{1}{/}}((3\cdot 6-2)^{\frac{3}{2}} - ((3\cdot 1-2)^{\frac{3}{2}}) \\
&= \frac{2}{9}(16^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}) \\
&= \frac{2}{9}(16^{1}\cdot 16^{\frac{1}{2}} - 1^{1}\cdot 1^{\frac{1}{2}}) \\
&= \frac{2}{9}(16\cdot\sqrt{16} - 1\cdot\sqrt{1}) \\
&= \frac{2}{9}(16\cdot 4 - 1\cdot 1) \\
&= \frac{2}{9}(64-1) \\
&= \frac{126}{9} \\
&= 14
\end{aligned}$$

808. **a)** Paraabeli leikkaa x-akselin kohdissa $x = 4$ ja $x = –1$. Paraabeli $y = (x – 4)(x + 1) = x^2 – 3x – 4$ on ylöspäin aukeva, joten paraabeli ja x-akseli rajoittavat paraabelin leikkauskohtien välissä tasoalueen x-akselin alapuolelle.

$$
\begin{aligned}
A &= -\int_{-1}^{4}(x^2-3x-4)\mathrm{d}x \\
&= -\mathop{/}_{-1}^{4}\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2-4x\right) \\
&= -\left(\left(\frac{1}{3}\cdot 4^3-\frac{3}{2}\cdot 4^2-4\cdot 4\right)-\left(\frac{1}{3}\cdot(-1)^3-\frac{3}{2}\cdot(-1)^2-4\cdot(-1)\right)\right) \\
&= -\left(\left(\frac{1}{3}\cdot 64-\frac{3}{2}\cdot 16-16\right)-\left(\frac{1}{3}\cdot(-1)-\frac{3}{2}\cdot 1+4\right)\right) \\
&= -\left(\left(\frac{1}{3}\cdot 64-24-16\right)-\left(-{}^{2)}\frac{1}{3}-{}^{3)}\frac{3}{2}+4\right)\right) \\
&= -\left(\left(\frac{64}{3}-40\right)-\left(-\frac{2}{6}-\frac{9}{6}+4\right)\right) \\
&= -\left(\left(\frac{64}{3}-\frac{120}{3}\right)-\left(-\frac{11}{6}+\frac{24}{6}\right)\right) \\
&= -\left(-{}^{2)}\frac{56}{3}\right)-\left(\frac{13}{6}\right)) \\
&= -\left(-{}^{2)}\frac{112}{6}-\frac{13}{6}\right) \\
&= -\left(-\frac{125}{6}\right) \\
&= \frac{125}{6}
\end{aligned}
$$

b) Ratkaistaan suoran ja paraabelin leikkauskohdat yhtälöparista.

$$
\begin{cases} y = x-1 \\ y = -x^2+2x+1 \end{cases}.
$$

$$
\begin{aligned}
x - 1 &= -x^2 + 2x + 1 \\
x^2 - x - 2 &= 0 \\
x &= \frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-2)}}{2\cdot 1} \\
x &= \frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2} \\
x &= \frac{1\pm\sqrt{9}}{2} = \frac{1\pm 3}{2} \\
x &= 2 \quad \text{tai} \quad x = -1
\end{aligned}
$$

Leikkauskohtien välissä eli välillä]–1, 2[alaspäin aukeava paraabeli on suoran yläpuolella.
Käyrien rajoittaman tasoalueen pinta-ala saadaan määrätystä integraalista:

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^{2} ((-x^2+2x+1)-(x-1))\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{2} (-x^2+2x+1-x+1)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{2} (-x^2+x+2)\mathrm{d}x \\
&= \Big/_{-1}^{2} (-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x) \\
&= (-\frac{1}{3}\cdot 2^3+\frac{1}{2}\cdot 2^2+2\cdot 2)-(-\frac{1}{3}\cdot(-1)^3+\frac{1}{2}\cdot(-1)^2+2\cdot(-1)) \\
&= (-\frac{1}{3}\cdot 8+\frac{1}{2}\cdot 4+4)-(-\frac{1}{3}\cdot(-1)+\frac{1}{2}\cdot 1-2) \\
&= (-{}^{2)}\frac{8}{3}+2+4)-({}^{2)}\frac{1}{3}+{}^{3)}\frac{1}{2}-2) \\
&= (-\frac{16}{6}+6)-(\frac{2}{6}+\frac{3}{6}-2) \\
&= -\frac{16}{6}+6-\frac{2}{6}-\frac{3}{6}+2 \\
&= -\frac{21}{6}^{(3}+8 \\
&= -\frac{7}{2}+\frac{16}{2} \\
&= \frac{9}{2}
\end{aligned}$$

809. Määritetään paraabelien leikkauskohdat.

$$x^2 - x + 1 = -x^2 + 3x + 1$$
$$2x^2 - 4x = 0$$
$$2x(x - 2) = 0$$
$$2x = 0 \text{ tai } x - 2 = 0$$
$$x = 0 \qquad x = 2$$

Leikkauskohtien välissä alaspäin aukeava paraabeli $y = -x^2 + 3x + 1$ on ylöspäin aukeavaa paraabelia ylempänä, joten paraabelien rajoittaman alueen pinta-ala saadaan määrätystä integraalista:

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^2 ((-x^2 + 3x + 1) - (x^2 - x + 1))\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^2 (-x^2 + 3x + 1 - x^2 + x - 1)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^2 (-2x^2 + 4x)\,\mathrm{d}x \\
&= \Big/_0^2 (-2 \cdot \frac{1}{3}x^3 + 4 \cdot \frac{1}{2}x^2) \\
&= \Big/_0^2 (-\frac{2}{3}x^3 + 2x^2) \\
&= (-\frac{2}{3} \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^2) - 0 \\
&= -\frac{2}{3} \cdot 8 + 2 \cdot 4 \\
&= -\frac{16}{3} + 8 \\
&= -\frac{16}{3} + \frac{24}{3} \\
&= \frac{8}{3}
\end{aligned}
$$

810. **a)** Ratkaistaan käyrien $y = x^3 - x^2 - 2x$ ja $y = 0$ (x-akseli) leikkauskohdat.

$$x^3 - x^2 - 2x = 0$$
$$x(x^2 - x - 2) = 0$$
$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x^2 - x - 2 = 0$$
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1}$$
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$$
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2}$$
$$x = \frac{1+3}{2} \quad \text{tai} \quad x = \frac{1-3}{2}$$
$$x = 2 \qquad\qquad x = -1$$

Käyrät leikkaavat toisensa kohdissa $x = -1$, $x = 0$ ja $x = 2$.
Selvitetään miten käyrä $y = x^3 - x^2 - 2x$ sijaitsee x-akseliin nähden väleillä]–1, 0[ja]0, 2[.

Lasketaan välin]–1, 0[testikohdassa $x = -\frac{1}{2}$ lausekkeen $x^3 - x^2 - 2x$ arvo:

$$(-\frac{1}{2})^3 - (-\frac{1}{2})^2 - 2 \cdot (-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{8} - {}^{2)}\frac{1}{4} + 1 = -\frac{1}{8} - \frac{2}{8} + 1 = -\frac{3}{8} + 1 = \frac{5}{8}.$$

Kun $-1 < x < 0$, niin käyrä $y = x^3 - x^2 - 2x$ on x-akselin yläpuolella.

Välillä]0, 2[käyrä $y = x^3 - x^2 - 2x$ on x-akselin alapuolella, sillä testikohdassa $x = 1$ lausekkeen lausekkeen $x^3 - x^2 - 2x$ arvo on negatiivinen:
$1^3 - 1^2 - 2 \cdot 1 = -2$.

Kaksiosaisen alueen pinta-ala saadaan siis määrätyistä integraaleista summana:

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^{0} (x^3 - x^2 - 2x)\mathrm{d}x + (-\int_{0}^{2} (x^3 - x^2 - 2x)\mathrm{d}x) \\
&= \mathop{/}_{-1}^{0} (\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2) - \mathop{/}_{0}^{2} (\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2) \\
&= (0 - (\frac{1}{4}\cdot(-1)^4 - \frac{1}{3}\cdot(-1)^3 - (-1)^2)) - ((\frac{1}{4}\cdot 2^4 - \frac{1}{3}\cdot 2^3 - 2^2) - 0) \\
&= (-(\frac{1}{4}\cdot 1 - \frac{1}{3}\cdot(-1) - 1)) - ((\frac{1}{4}\cdot 16 - \frac{1}{3}\cdot 8 - 4) - 0) \\
&= (-({}^{3)}\frac{1}{4} + {}^{4)}\frac{1}{3} - 1)) - (\frac{16}{4} - {}^{4)}\frac{8}{3} - 4) \\
&= (-(\frac{3}{12} + \frac{4}{12} - 1)) - (4 - \frac{32}{12} - 4) \\
&= -(-\frac{5}{12}) + \frac{32}{12} \\
&= \frac{5}{12} + \frac{32}{12} \\
&= \frac{37}{12}
\end{aligned}
$$

b) Ratkaistaan käyrien $y = 3x$ ja $y = x^3 + 2x^2$ leikkauskohdat.

$$
\begin{aligned}
x^3 + 2x^2 &= 3x \\
x^3 + 2x^2 - 3x &= 0 \\
x(x^2 + 2x - 3) &= 0
\end{aligned}
$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\cdot 1\cdot(-3)}}{2\cdot 1} \\
x &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} \\
x &= \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2}
\end{aligned}
$$

$$x = \frac{-2+4}{2} \quad \text{tai} \quad x = \frac{-2-4}{2}$$

$$x = 1 \qquad\qquad x = -3$$

Käyrät siis leikkaavat toisensa kohdissa $x = –3$, $x = 0$ ja $x = 1$. Selvitetään miten käyrät $y = 3x$ ja $y = x^3 + 2x^2$ sijaitsevat toisiinsa nähden väleillä]–3, 0[ja]0, 1[.

Lasketaan välin]–3, 0[testikohdassa $x = -1$ lausekkeiden $3x$ ja $x^3 + 2x^2$ arvot:

$3x$: $3 \cdot (-1) = -3$
$x^3 + 2x^2$: $(-1)^3 + 2 \cdot (-1)^2 = -1 + 2 = 1$

Kun $-3 < x < 0$, niin käyrä $y = x^3 + 2x^2$ on käyrän $y = 3x$ yläpuolella.

Lasketaan välin]0, 1[testikohdassa $x = \frac{1}{2}$ lausekkeiden $3x$ ja $x^3 + 2x^2$ arvot:

$3x$: $3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$x^3 + 2x^2$: $(\frac{1}{2})^3 + 2 \cdot (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{8} + {}^{2)}\frac{2}{4} = \frac{1}{8} + \frac{4}{8} = \frac{5}{8}$

Kun $0 < x < 1$, niin käyrä $y = 3x$ on käyrän $y = x^3 + 2x^2$ yläpuolella.

Kaksiosaisen alueen pinta-ala saadaan siis määrätyistä integraaleista summana $\int_{-3}^{0}(x^3+2x^2-3x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}(3x-(x^3+2x^2)\mathrm{d}x.$

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-3}^{0}(x^3+2x^2-3x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}(3x-(x^3+2x^2)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-3}^{0}(x^3+2x^2-3x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}(3x-x^3-2x^2)\mathrm{d}x \\
&= \underset{-3}{\overset{0}{/}}(\frac{1}{4}x^4+2\cdot\frac{1}{3}x^3-3\cdot\frac{1}{2}x^2)+\underset{0}{\overset{1}{/}}(3\cdot\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4-2\cdot\frac{1}{3}x^3) \\
&= (0-(\frac{1}{4}\cdot(-3)^4+2\cdot\frac{1}{3}\cdot(-3)^3-3\cdot\frac{1}{2}\cdot(-3)^2)+(3\cdot\frac{1}{2}\cdot 1^2-\frac{1}{4}\cdot 1^4-2\cdot\frac{1}{3}\cdot 1^3-0) \\
&= -\frac{81}{4}-\frac{2}{3}\cdot(-27)+\frac{3}{2}\cdot 9+\frac{3}{2}-\frac{1}{4}-\frac{2}{3} \\
&= -\frac{81}{4}+\frac{54}{3}+\frac{27}{2}+\frac{3}{2}-\frac{1}{4}-\frac{2}{3} \\
&= -{}^{3)}\frac{82}{4}+{}^{4)}\frac{52}{3}+\frac{30}{2} \\
&= -\frac{246}{12}+\frac{208}{12}+15 \\
&= -\frac{38}{12}+15 \\
&= -3\frac{1}{6}+15 \\
&= 11\frac{5}{6} \\
&= \frac{71}{6}
\end{aligned}
$$

811. **a)** Välillä $[-1, 2]$ $f(x) \geq 0$, joten integraalin arvo on sama kuin funktion kuvaajan ja x-akselin rajaaman alueen pinta-ala.

$$\int_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x = 3.$$

b) Välillä $[2, 6]$, $f(x) \leq 0$, joten integraalin arvo on funktion kuvaajan ja x-akselin rajaaman alueen pinta-alan vastaluku.

$$\int_{2}^{6} f(x)\mathrm{d}x = -4.$$

c) $$\int_{-1}^{6} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x + \int_{2}^{6} f(x)\mathrm{d}x = 3 + (-4) = -1$$

d) $$2\int_{6}^{10} f(x)\mathrm{d}x = 2 \cdot 8 = 16$$

e) $$\int_{10}^{6} f(x)\mathrm{d}x = -\int_{6}^{10} f(x)\mathrm{d}x = -8$$

f) $$F(10) - F(2) = \int_{2}^{10} f(x)\mathrm{d}x = \int_{2}^{6} f(x)\mathrm{d}x + \int_{6}^{10} f(x)\mathrm{d}x = -4 + 8 = 4$$

812. Lasketaan funktion $f(x)=x\sqrt{x+1}$ ja x-akselin leikkauskohdat.

$$
\begin{aligned}
&x\sqrt{x+1}=0\\
&x=0 \text{ tai } \sqrt{x+1}=0\\
&\qquad\qquad x+1=0\\
&\qquad\qquad\quad x=-1
\end{aligned}
$$

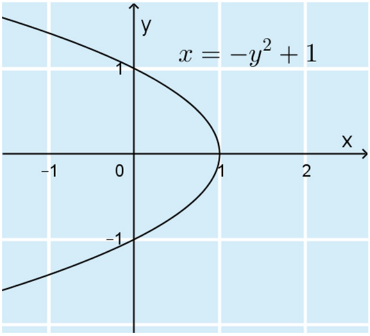
Pyörähdyskappaleen, joka muodostuu funktion f kuvaajan pyörähtäessä x-akselin ympäri välillä $[a, b]$, tilavuus on määrätty integraali

$$V=\pi\int_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x.$$

Nyt

$$
\begin{aligned}
V&=\pi\int_{-1}^{0}(x\sqrt{x+1})^2\,\mathrm{d}x\\
&=\pi\int_{-1}^{0}x^2(x+1)\mathrm{d}x\\
&=\pi\int_{-1}^{0}(x^3+x^2)\mathrm{d}x\\
&=\pi\mathop{/}_{-1}^{0}(\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3)\\
&=\pi(0-(\frac{1}{4}\cdot(-1)^4+\frac{1}{3}\cdot(-1)^3))\\
&=\pi({}^{3)}-\frac{1}{4}+{}^{4)}\frac{1}{3})\\
&=\pi(-\frac{3}{12}+\frac{4}{12})\\
&=\frac{\pi}{12}
\end{aligned}
$$

813. **a)**



Käyrä $x + y^2 - 1 = 0$ eli $x = -y^2 + 1$ leikkaa y-akselin, kun $x = 0$.
Yhtälön $-y^2 + 1 = 0$ ratkaisut ovat $y = -1$ tai $y = 1$.
Kysytyn alueen pinta-ala saadaan määrättynä integraalina

$$A = \int_{-1}^{1} (-y^2 + 1)\,\mathrm{d}y = \frac{4}{3}.$$

b) Pyörähdyskappaleen, joka muodostuu funktion f kuvaajan pyörähtäessä y-akselin ympäri välillä $[a, b]$, on määrätty integraali

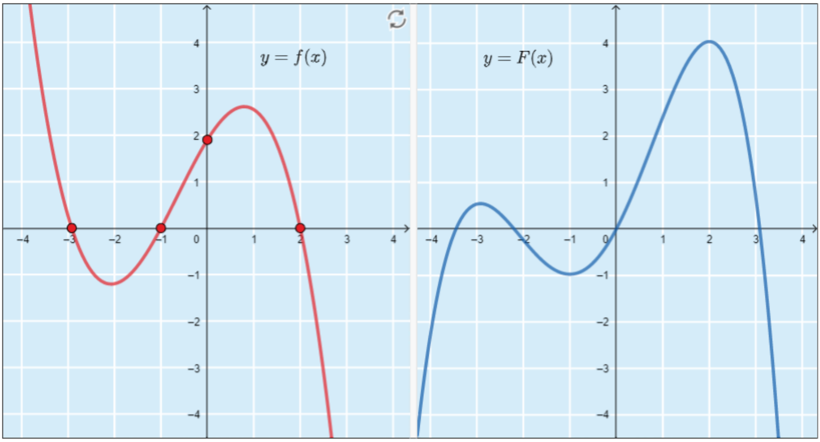
$$V = \pi\int_{a}^{b} f(y)^2\,\mathrm{d}y.$$

Nyt $V = \pi\int_{-1}^{1} (-y^2 + 1)^2\,\mathrm{d}y = \dfrac{16\pi}{15}.$

Luvun 8 vahvistavat ja syventävät tehtävät

VAHVISTAVAT TEHTÄVÄT

814. Funktio *f* on funktion *F* derivaattafunktio. Väleillä, joilla funktio *F* on kasvava, on derivaattafunktion arvot negatiivisia ja derivaattafunktion *f* kuvaaja *x*-akselin alapuolella.



815. A: Määrätty integraali $\int_1^6 f(x)\mathrm{d}x$ kertoo kuvassa II esitetyn väritetyn alueen pinta-alan, koska $f(x) \geq 0$ välillä [1, 6]. Siis A-II

B: Määrätty integraali $-\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x$ kuvaa funktion f kuvaajan välillä [1, 3] rajaaman alueen pinta-alan vastaluvun, koska tällä välillä $f(x) \leq 0$. Välillä [3, 6] määrätty integraali $\int_3^6 f(x)\mathrm{d}x$ kuvaa ei-negatiivisen funktion f kuvaajan rajaaman alueen pinta-alaa. Kuva I liittyy edellä kuvattuun tilanteeseen. Siis B-I.

C: Määrätty integraali $-\int_1^6 f(x)\mathrm{d}x$ kuvaa funktion f kuvaajan välillä [1, 6] rajaaman alueen pinta-alan vastaluvun, koska tällä välillä $f(x) \leq 0$. Kuva III liittyy edellä kuvattuun tilanteeseen. Siis C-III.

D: Määrätty integraali $\int_1^4 f(x)\mathrm{d}x$ kuvaa funktion f kuvaajan välillä [1, 4] rajaaman alueen pinta-alan, koska tällä välillä $f(x) \geq 0$. Välillä [4, 6] määrätty integraali $-\int_4^6 f(x)\mathrm{d}x$ kuvaa funktion f kuvaajan rajaaman alueen pinta-alan vastaluvun, koska tällä välillä $f(x) \leq 0$. Kuva IV liittyy edellä kuvattuun tilanteeseen. Siis D-IV.

816. **a)**
$$\begin{aligned}\int(2x+1)(2x-1)\mathrm{d}x &= \int(4x^2-2x+2x-1)\mathrm{d}x\\ &= \int(4x^2-1)\mathrm{d}x\\ &= 4\cdot\frac{1}{3}x^3-x+C\\ &= \frac{4}{3}x^3-x+C\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\int\sin x\cos x\mathrm{d}x &= \int\cos x(\sin x)^1\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}(\sin x)^2+C\\ &= \frac{\sin^2 x}{2}+C\end{aligned}$$

Toinen tapa:

$$\begin{aligned}\int\sin x\cos x\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int 2\sin x\cos x\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\int\sin 2x\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int\underbrace{2}_{s'(x)}\cdot\underbrace{\sin 2x}_{u(s(x))}\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{4}\cdot(-\cos 2x)+C\\ &= -\frac{1}{4}\cos 2x+C\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\int\frac{x^4-1}{x^2+1}\mathrm{d}x &= \int\frac{\cancel{(x^2+1)}(x^2-1)}{\cancel{x^2+1}}\mathrm{d}x\\ &= \int(x^2-1)\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{3}x^3-x+C\end{aligned}$$

d)

$$
\begin{aligned}
\int (\frac{x+1}{x})^2 \mathrm{d}x &= \int \frac{x^2+2x+1}{x^2}\mathrm{d}x \\
&= \int (\frac{x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}+\frac{1}{x^2})\mathrm{d}x \\
&= \int (1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2})\mathrm{d}x \\
&= \int (1+2\cdot\frac{1}{x}+x^{-2})\mathrm{d}x \\
&= x+2\ln|x|+(\frac{1}{-1}\cdot x^{-1}) \\
&= x+2\ln x-\frac{1}{x}+C,\ x>0
\end{aligned}
$$

817. $F(x)=\int F'(x)+C=\int (1+\frac{1}{x})\mathrm{d}x = x+\ln|x|+C = x+\ln(-x)+C,\ x<0$

Ehdosta $F(–1) = 1$ määritetään integroimisvakion C arvo.
$F(–1) = –1 + \ln(–(–1) + C = –1 + \ln 1 + C = –1 + C$

Koska $F(–1) = 1$, niin saadaan yhtälö $–1 + C = 1$, josta $C = 2$.

Kysytty funktio F on siis $F(x) = x + \ln(–x) + 2$.

818. **a)** $\int_0^a (2x+a)\mathrm{d}x = \underset{0}{\overset{a}{/}}(x^2+ax) = a^2+a\cdot a-0 = 2a^2$

Ehdosta $\int_0^a (2x+a)\mathrm{d}x = 1$ saadaan yhtälö $2a^2 = 1$, jonka ratkaisut ovat

$a=\frac{1}{\sqrt{2}}$ tai $a=-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

b) Jos funktio $h(x)$ on funktion $g(x)$ integraalifunktio, niin on voimassa $h'(x) = g(x)$.
$h'(x) = \mathrm{D}\sin^2 x = \mathrm{D}\,(\sin x)^2 = 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x$.

Koska $h'(x) = g(x)$, niin funktio $h(x)$ on funktion $g(x)$ integraalifunktio.

819. Matti: Lisätty kerroin 2, jotta on saatu sisäfunktion derivaatta, mutta ei ole lisätty korjauskerrointa 2.

Teppo: Kerroin $\frac{1}{5}$ on väärä, tulisi olla $\frac{1}{6}$.

Oikea ratkaisu:

$$\begin{aligned}\int x(x^2+1)^5\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int 2x\cdot(x^2+1)^5\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}(x^2+1)^6+C\\ &= \frac{1}{12}(x^2+1)^6+C\end{aligned}$$

820. **a)** Funktio $F(x)$ on funktion $f(x)$ integraalifunktio, jos on voimassa $F'(x)=f(x)$.

Nyt

$$F_1'(x)=\frac{0\cdot(1-x)-1\cdot(-1)}{(1-x)^2}=\frac{1}{(1-x)^2} \text{ ja}$$

$$F_2'(x)=\frac{1\cdot(1-x)-x\cdot(-1)}{(1-x)^2}=\frac{1-x+x}{(1-x)^2}=\frac{1}{(1-x)^2},$$

joten molemmat funktiot $F_1(x)$ ja $F_2(x)$ ovat funktion f integraalifunktioita, kun $x>1$.

b) $F_1(x)-F_2(x)=\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{x}{1-x}=\dfrac{1-x}{1-x}=1.$

c) Funktio $f(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}$, kun $x>1$, saa positiivisia arvoja, joten kysytyn alueen pinta-ala saadaan määrättynä integraalina $\int_2^5 f(x)\mathrm{d}x$.

Nyt

$$\begin{aligned}\int_2^5 f(x)\mathrm{d}x &= \int_2^5 \frac{1}{(1-x)^2}\mathrm{d}x \\ &= \Big/_{2}^{5} \frac{1}{1-x} \\ &= \frac{1}{1-5}-\frac{1}{1-2} \\ &= -\frac{1}{4}-(-1) \\ &= 1-\frac{1}{4} \\ &= \frac{3}{4}\end{aligned}$$

821. **a)** Funktio $\sqrt{5-x}$ on määritelty, kun $5 - x \geq 0$ eli $x \leq 5$.
Funktio $\sqrt{x+2}$ on määritelty, kun $x + 2 \geq 0$ eli $x \geq -2$.

Käyrät $y=\sqrt{5-x}$ ja $y=\sqrt{x+2}$ rajaavat suoran $y = 0$ eli x-akselin kanssa alueen välillä [–2, 5]. Lasketaan käyrien $y=\sqrt{5-x}$ ja $y=\sqrt{x+2}$ leikkauskohta yhtälöstä $\sqrt{5-x}=\sqrt{x+2}$.

Välillä [–2, 5] yhtälön molemmat puolet ovat määriteltyjä ja ei-negatiivisia, joten yhtälö voidaan korottaa puolittain neliöön.

$$\begin{aligned}
\sqrt{5-x} &= \sqrt{x+2} \\
(\sqrt{5-x})^2 &= (\sqrt{x+2})^2 \\
5-x &= x+2 \\
5-2 &= x+x \\
2x &= 3 \quad \| :2 \\
x &= \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Käyrät siis leikkaavat toisensa kohdassa $x=\frac{3}{2}$.

Välillä $[-2, \frac{3}{2}]$ käyrä $y=\sqrt{5-x}$ on ylempänä kuin käyrä $y=\sqrt{x+2}$, sillä esimerkiksi testikohdassa $x = 0$ on $\sqrt{5-0}=\sqrt{5} > \sqrt{0+2}=\sqrt{2}$.

Välillä $[\frac{3}{2}, 5]$ käyrä $y=\sqrt{5-x}$ on alempana kuin käyrä $y=\sqrt{x+2}$, sillä esimerkiksi testikohdassa $x = 3$ on $\sqrt{5-3}=\sqrt{2} < \sqrt{3+2}=\sqrt{5}$.

Lasketaan käyrien $y=\sqrt{5-x}$ ja $y=\sqrt{x+2}$ sekä suoran $y = 0$ rajoittaman alueen pinta-ala kahtena alueena määrättyjen integraalien

$A_1=\int_{-2}^{\frac{3}{2}}\sqrt{x+2}\mathrm{d}x$ ja $A_2=\int_{\frac{3}{2}}^{5}\sqrt{5-x}\mathrm{d}x$ summana.

$$
\begin{aligned}
A_1&=\int_{-2}^{\frac{3}{2}}\sqrt{x+2}\mathrm{d}x\\
&=\int_{-2}^{\frac{3}{2}}(x+2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\\
&=\int_{-2}^{\frac{3}{2}}(x+2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\\
&=\Big/_{-2}^{\frac{3}{2}}\frac{2}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}\\
&=\Big/_{-2}^{\frac{3}{2}}\frac{2}{3}(x+2)^{1+\frac{1}{2}}\\
&=\Big/_{-2}^{\frac{3}{2}}\frac{2}{3}(x+2)^{1}(x+2)^{\frac{1}{2}}\\
&=\Big/_{-2}^{\frac{3}{2}}\frac{2}{3}(x+2)\sqrt{x+2}\\
&=\frac{2}{3}\Big/_{-2}^{\frac{3}{2}}(x+2)\sqrt{x+2}\\
&=\frac{2}{3}((\frac{3}{2}+\frac{4}{2})\sqrt{\frac{3}{2}+\frac{4}{2}}-(-2+2)\sqrt{-2+2})\\
&=\frac{\cancel{2}}{3}\cdot\frac{7}{\cancel{2}}\sqrt{\frac{7}{2}}-0\\
&=\frac{7\sqrt{7}}{3\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_2 &= \int_{\frac{3}{2}}^{5} \sqrt{5-x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\frac{3}{2}}^{5} (5-x)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x \\
&= -1 \cdot \int_{\frac{3}{2}}^{5} (-1)\cdot(5-x)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x \\
&= -\int_{\frac{3}{2}}^{5} (-1)\cdot(5-x)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x \\
&= -\mathop{/}_{\frac{3}{2}}^{5} \frac{2}{3}(5-x)^{\frac{3}{2}} \\
&= -\mathop{/}_{\frac{3}{2}}^{5} \frac{2}{3}(5-x)^{1+\frac{1}{2}} \\
&= -\mathop{/}_{\frac{3}{2}}^{5} \frac{2}{3}(5-x)^{1}(5-x)^{\frac{1}{2}} \\
&= -\frac{2}{3}\mathop{/}_{\frac{3}{2}}^{5}(5-x)\sqrt{5-x} \\
&= -\frac{2}{3}((5-5)\sqrt{5-5} - (\frac{10}{2}-\frac{3}{2})\sqrt{\frac{10}{2}-\frac{3}{2}}) \\
&= -\frac{2}{3}(0\cdot\sqrt{0} - \frac{7}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}) \\
&= -\frac{\cancel{2}}{3}(-\frac{7\sqrt{7}}{\cancel{2}\sqrt{2}}) \\
&= \frac{7\sqrt{7}}{3\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

Kysytyn alueen pinta-ala on summa $A_1 + A_2$:

$$
A_1 + A_2 = \frac{7\sqrt{7}}{3\sqrt{2}} + \frac{7\sqrt{7}}{3\sqrt{2}} = {}^{\sqrt{2})} \frac{14\sqrt{7}}{3\sqrt{2}} = \frac{14\sqrt{7}\cdot\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\overset{7}{\cancel{14}}\sqrt{14}}{3\cdot\cancel{2}} = \frac{7\sqrt{14}}{3}.
$$

b) Lasketaan käyrän $y = 2x^3 + x^2 – 6x$ ja x-akselin leikkauskohdat yhtälöstä $2x^3 + x^2 – 6x = 0$:

$$2x^3 + x^2 – 6x = 0$$
$$x(2x^2 + x – 6) = 0$$
$$x = 0 \quad \text{tai} \quad 2x^2 + x – 6 = 0$$
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6)}}{2 \cdot 2}$$
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 48}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{4}$$
$$x = \frac{-1 \pm 7}{4}$$
$$x = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \quad \text{tai} \quad x = -2$$

Käyrän leikkaa x-akselin kohdissa $x = –2$, $x = 0$ ja $x = \frac{3}{2}$.

Lasketaan lausekkeen merkki välille $]–2, 0[$ testikohdan $x = –1$ avulla. Kohdassa $x = –1$ lausekkeen arvo on
$2 \cdot (−1)^3 + (−1)^2 – 6 \cdot (−1) = 2 \cdot (−1) + 1^2 + 6 = –2 + 1 + 6 = 5$, joten välillä $[–2, 0]$ lauseke $2x^3 + x^2 − 6x$ saa ei-negatiivisia arvoja.
Välillä $[0, \frac{3}{2}]$ lauseke $2x^3 + x^2 – 6x$ saa negatiivisia arvoja, sillä esimerkiksi testikohdassa $x = 1$ lausekkeen arvo on
$2 \cdot 1^3 + 1^2 – 6 \cdot 1 = 2 \cdot 1 + 1 – 6 = 2 + 1 – 6 = –3$.

Kysytyn alueen pinta-ala saadaan siis määrättyjen integraalien

$\int_{-2}^{0} (2x^3 + x^2 - 6x)\mathrm{d}x$ ja $-\int_{0}^{\frac{3}{2}} (2x^3 + x^2 - 6x)\mathrm{d}x$ summana.

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-2}^{0} (2x^3 + x^2 - 6x)\mathrm{d}x + \left(-\int_{0}^{\frac{3}{2}} (2x^3 + x^2 - 6x)\mathrm{d}x\right) \\
&= \int_{-2}^{0} (2x^3 + x^2 - 6x)\mathrm{d}x - \int_{0}^{\frac{3}{2}} (2x^3 + x^2 - 6x)\mathrm{d}x \\
&= \Big/_{-2}^{0} \left(2 \cdot \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 6 \cdot \frac{1}{2}x^2\right) - \Big/_{0}^{\frac{3}{2}} \left(2 \cdot \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 6 \cdot \frac{1}{2}x^2\right) \\
&= \Big/_{-2}^{0} \left(\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 3x^2\right) - \Big/_{0}^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 3x^2\right) \\
&= \left(0 - \left(\frac{1}{2} \cdot (-2)^4 + \frac{1}{3} \cdot (-2)^3 - 3 \cdot (-2)^2\right)\right) - \left(\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^4 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 0\right) \\
&= -\left(\frac{1}{2} \cdot 16 - \frac{8}{3} - 12\right) - \left(\frac{81}{32} + {}^{4)}\frac{9}{8} - {}^{8)}\frac{27}{4}\right) \\
&= -\left(8 - \frac{8}{3} - 12\right) - \left(\frac{81}{32} + \frac{36}{32} - \frac{216}{32}\right) \\
&= -8 + \frac{8}{3} + 12 - \left(-\frac{99}{32}\right) \\
&= 4 + {}^{32)}\frac{8}{3} + {}^{3)}\frac{99}{32} \\
&= {}^{96)}\frac{4}{1} + \frac{256}{96} + \frac{297}{96} \\
&= \frac{384}{96} + \frac{256}{96} + \frac{297}{96} \\
&= \frac{937}{96} \\
&= 9\frac{73}{96}
\end{aligned}
$$

822. Paraabelin $y = 9 - x^2$ ja x-akselin leikkauskohdat saadaan yhtälöstä $9 - x^2 = 0$, josta saadaan $x = 3$ tai $x = -3$.

Alaspäin aukeavan paraabelin $y = 9 - x^2$ ja x-akselin rajaaman alueen pinta-ala on $\int_{-3}^{3} (9 - x^2)\mathrm{d}x = 36$.

Paraabelin $y = 9 - x^2$ ja suoran $x - y + 7 = 0$ eli $y = x + 7$ leikkauskohdat saadaan yhtälöstä $9 - x^2 = x + 7$, josta $x = -2$ tai $x = 1$.

Välillä]–2, 1[paraabeli on suoraa ylempänä, sillä esimerkiksi kohdassa $x = 0$ on paraabelin piste $(0, 9 - 0^2) = (0, 9)$ kun suoran piste on vastaavassa kohdassa $(0, 0 + 7) = (0, 7)$.

Käyrien rajaaman alueen pinta-ala saadaan siis määrätystä integraalista $\int_{-2}^{1} ((9 - x^2) - (x + 7))\mathrm{d}x = \frac{9}{2}$.

Suoran $y = x + 7$ alapuolella olevan paraabelin ja x-akselin rajaaman alueen pinta-ala on $36 - \frac{9}{2} = \frac{63}{2}$. Kysytty pinta-alojen suhde on $\frac{\frac{9}{2}}{\frac{63}{2}} = \frac{1}{7}$.

823. Paraabelin yhtälö on muotoa $y = ax(x - 4)$. Paraabeli kulkee pisteen (1, 3) kautta, joten tämä piste toteuttaa paraabelin yhtälön.

$$\begin{aligned} a(1-4) &= 3 \\ -3a &= 3 \\ a &= -1 \end{aligned}$$

Paraabelin yhtälö on siis $y = -x(x - 4) = -x^2 + 4x$.

Suora $y = kx + b$ kulkee pisteiden (1, 3) ja (2, 0) kautta.
Suoran kulmakerroin on $\frac{0-3}{2-1} = -3$.
Suoran yhtälö on

$$\begin{aligned} y - 0 &= -3(x - 2) \\ y &= -3x + 6. \end{aligned}$$

Paraabeli $y = -x^2 + 4x$ rajoittaa x-akselin kanssa alueen, jonka pinta-ala saadaan määrätystä integraalista ja se on $\int_0^4 (-x^2 + 4x)\mathrm{d}x = \frac{32}{3}$.

Välillä [0, 1] paraabelin ja x-akselin väliin jäävän alueen pinta-ala on $\int_0^1 (-x^2 + 4x)\mathrm{d}x = \frac{5}{3}$ ja välillä [1, 2] suoran ja x-akselin väliin jäävän alueen pinta-ala $\int_1^2 (-3x + 6)\mathrm{d}x = \frac{3}{2}$.

Kysytyn alueen pinta-ala on siis $\frac{32}{3} - \frac{5}{3} - \frac{3}{2} = \frac{15}{2}$.

824. Funktion $f(x) = -2x + 4$ integraalifunktiot ovat muotoa $\int(-2x+4)\mathrm{d}x = -x^2 + 4x + C$. Integraalifunktioiden kuvaajat ovat paraabeleja, joten funktion suurin arvo saavutetaan paraabelin huipussa, kohdassa joka on funktion derivaatan nollakohta.
Siis $F'(x) = -2x + 4$, josta $F'(x) = 0$ kun $x = 2$.
Integraalifunktion suurin arvo saavutetaan kohdassa $x = 2$, joten nyt oltava $F(2) = 5$.
$-2^2 + 4 \cdot 2 + C = 5$, josta $C = 1$

Kysytty integraalifunktio on siten $F(x) = -x^2 + 4x + 1$.

825. Ratkaistaan käyrien $y = \sin x$ ja $y = \sin 2x$ välillä $[0, \pi]$ olevat leikkauskohdat.

$$\sin x = \sin 2x$$

$$x = 2x + n \cdot 2\pi \quad \text{tai} \quad x = \pi - 2x + n \cdot 2\pi$$

$$x - 2x = n \cdot 2\pi \qquad x + 2x = \pi + n \cdot 2\pi$$

$$-x = n \cdot 2\pi \;\| : (-1) \qquad 3x = \pi + n \cdot 2\pi \;\| : 3$$

$$x = n \cdot 2\pi \qquad x = \frac{\pi}{3} + n \cdot \frac{2\pi}{3},\; n \in \mathbb{Z}$$

Välillä $[0, \pi]$ on nollakohdista ainoastaan kohta $x = \frac{\pi}{3}$.

Selvitetään välin $]0, \frac{\pi}{3}[$ testikohdan avulla, kumpi käyristä on ylempänä välillä $]0, \frac{\pi}{3}[$. Valitaan testikohdaksi $x = \frac{\pi}{4}$.

$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ja $\sin(2 \cdot \frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$, joten välillä $]0, \frac{\pi}{3}[$ käyrä $y = \sin 2x$ on ylempänä.

Välillä $]\frac{\pi}{3}, \pi[$ testikohdaksi voidaan valita esimerkiksi kohta $x = \frac{\pi}{2}$.

Nyt $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ ja $\sin(2 \cdot \frac{\pi}{2}) = \sin(\pi) = 0$, joten välillä $]\frac{\pi}{3}, \pi[$ käyrä $y = \sin x$ on ylempänä.

Kaksiosaisen alueen pinta-ala voidaan laskea määrättyjen integraalien $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 2x - \sin x)\,dx$ ja $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (\sin x - \sin 2x)\,dx$ summana $A_1 + A_2$.

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 2x - \sin x)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 2x\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} 2\cdot\sin 2x\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\Big/_0^{\frac{\pi}{3}}(-\cos 2x) - \Big/_0^{\frac{\pi}{3}}(-\cos x) \\
&= -\frac{1}{2}\Big/_0^{\frac{\pi}{3}}(\cos 2x) + \Big/_0^{\frac{\pi}{3}}(\cos x) \\
&= -\frac{1}{2}(\cos\frac{2\pi}{3} - \cos(2\cdot 0)) + (\cos\frac{\pi}{3} - \cos 0) \\
&= -\frac{1}{2}(\cos\frac{2\pi}{3} - \cos 0) + \cos\frac{\pi}{3} - \cos 0 \\
&= -\frac{1}{2}(-\frac{1}{2} - 1) + \frac{1}{2} - 1 \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_2 &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (\sin x - \sin 2x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \sin x\mathrm{d}x - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \sin 2x\mathrm{d}x \\
&= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \sin x\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} 2\cdot\sin 2x\mathrm{d}x \\
&= \Big/_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}(-\cos x) - \frac{1}{2}\Big/_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}(-\cos 2x) \\
&= -\Big/_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\cos x + \frac{1}{2}\Big/_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\cos 2x \\
&= -(\cos\pi - \cos\frac{\pi}{3}) + \frac{1}{2}(\cos(2\cdot\pi) - \cos(2\cdot\frac{\pi}{3}) \\
&= -\cos\pi + \cos\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}(\cos 2\pi - \cos\frac{2\pi}{3}) \\
&= -(-1) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1-(-\frac{1}{2})) \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}) \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \\
&= 2\frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

Kysytyn alueen pinta-ala on summa

$$A_1 + A_2 = \frac{1}{4} + 2\frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = \frac{10}{4}^{(2} = \frac{5}{2}.$$

826.

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 x^n \mathrm{d}x + \int_0^1 \sqrt[n]{x}\mathrm{d}x &= \int_0^1 x^n \mathrm{d}x + \int_0^1 x^{\frac{1}{n}} \mathrm{d}x \\
&= \Big/_0^1 \frac{1}{n+1} x^{n+1} + \Big/_0^1 \frac{1}{\frac{1}{n}+1} x^{\frac{1}{n}+1} \\
&= \Big/_0^1 \frac{1}{n+1} x^{n+1} + \Big/_0^1 \frac{1}{\frac{1}{n}+\frac{n}{n}} x^{\frac{1}{n}+\frac{n}{n}} \\
&= \Big/_0^1 \frac{1}{n+1} x^{n+1} + \Big/_0^1 \frac{1}{\frac{n+1}{n}} x^{\frac{n+1}{n}} \\
&= \Big/_0^1 \frac{1}{n+1} x^{n+1} + \Big/_0^1 \frac{n}{n+1} x^{\frac{n+1}{n}} \\
&= \frac{1}{n+1}(1^{n+1} - 0^{n+1}) + \frac{n}{n+1}(1^{\frac{n+1}{n}} - 0^{\frac{n+1}{n}}) \\
&= \frac{1}{n+1} \cdot 1 + \frac{n}{n+1} \cdot 1 \\
&= \frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1} \\
&= \frac{1+n}{n+1} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Lausekkeen arvo on positiivisen kokonaisluvun n arvosta riippumatta aina 1.

827. a)

$$f(x) = |x-1| + 1$$
$$= \begin{cases} (x-1)+1, & \text{kun } x-1 \geq 0 \\ -(x-1)+1, & \text{kun } x-1 < 0 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} x, & \text{kun } x \geq 1 \\ -x+2, & \text{kun } x < 1 \end{cases}$$

b)

$$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 (-x+2)\mathrm{d}x + \int_1^2 x\mathrm{d}x$$
$$= \mathop{/}_0^1 (-\frac{1}{2}x^2 + 2x) + \mathop{/}_1^2 \frac{1}{2}x^2$$
$$= (-\frac{1}{2}\cdot 1^2 + 2\cdot 1 - 0) + (\frac{1}{2}\cdot 2^2 - \frac{1}{2}\cdot 1^2)$$
$$= -\frac{1}{2}\cdot 1 + 2 + \frac{1}{2}\cdot 4 - \frac{1}{2}$$
$$= -\frac{1}{2} + 2 + 2 - \frac{1}{2}$$
$$= 3$$

828. Puistoa rajaavat käyrät $y = –0,12x^2 + 1,09x + 2$ ja $y = 0,012x^4 - 0,19x^3 + x^2 - 1,3x + 0,6$ sekä suora $x = 0$ (y-akseli).

a) Käyrät leikkaavat toisensa kohdissa $x = -0,472\ldots$ ja $x = 6,766\ldots$.
Näistä vain kohta $x = 6,766\ldots \approx 6,8$ on 1. neljänneksessä.
Leikkauspisteen y-koordinaatti on arvo $f(6,766\ldots)$ tai $g(6,766\ldots)$.
Nyt $f(6,766\ldots) = 3,881\ldots \approx 3,9$, joten leikkauspiste on (6,8; 3,9).

b) Käyrien ja suoran $x = 0$ rajoittaman alueen pinta-ala on määrätty integraali $\int_0^{6,76...} (f(x) - g(x))\mathrm{d}x$.

Nyt

$$\int_0^{6,76...} (-0,12x^2 + 1,09x + 2 - (0,012x^4 - 0,19x^3 + x^2 - 1,3x + 0,6)\mathrm{d}x$$

$= 14,056...$ (pinta-alayksikköä)

Yksi pinta-alayksikkö eli ruudun pinta-ala on $10\text{ m} \cdot 10\text{ m} = 100\text{ m}^2$.

Kysytyn alueen pinta-ala on siis
$14,056\ldots \cdot 100\text{ m}^2 = 1405,6\ldots\text{ m}^2 \approx 1400\text{ m}^2 = 14\text{ a}$ (14 aaria).

829. Vallin reunaa kuvaava paraabeli $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, voidaan sijoittaa koordinaatistoon esimerkiksi siten, että kuvaajaparaabeli kulkee pisteiden (–2, 0), (0, 3) ja (2, 0) kautta. Näistä tiedoista saadaan yhtälöryhmä ja sen ratkaisuna tarvittavat kertoimet a, b ja c:

$$\begin{cases} 0 = a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c \\ 3 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \\ 0 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c \end{cases}, \text{ josta } \begin{cases} a = -\dfrac{3}{4} \\ b = 0 \\ c = 3 \end{cases}.$$

Paraabelin yhtälö on siis $y = -\frac{3}{4}x^2 + 3$.

Poikkileikkauksen pinta-ala on määrätty integraali

$$\int_{-2}^{2} (-\frac{3}{4}x^2 + 3)\mathrm{d}x = 8 \text{ (m}^2\text{)}.$$

Meluvallin tilavuus on tällöin $V = 8 \text{ m}^2 \cdot 75 \text{ m} = 600 \text{ m}^3$. Meluvalliin tarvitaan täyttömaata $\dfrac{600 \text{ m}^3}{12 \text{ m}^3\text{/kuorma}} = 50$ kuormaa.

830. Tunnelin poikkileikkausta kuvaava paraabeli on muotoa $y = ax^2 + bx + c$, $a < 0$. Paraabeli voidaan sijoittaa koordinaatistoon esimerkiksi siten, että kuvaajaparaabeli kulkee pisteiden (–5, 0) ja (5, 0) kautta. Toisen asteen polynomin nollakohtiensa avulla kirjoitettuna yhtälö on $y = a(x - 5)(x - (-5))$, joka sievenee muotoon $y = ax^2 - 25a$.

Koska tehtävänannon mukaan poikkileikkauksen pinta-ala on 25,0 (m²), saadaan määrätty integraali $\int_{-5}^{5} (ax^2 - 25a)\mathrm{d}x = 25$, josta saadaan $a = -\frac{3}{20}$.

Paraabeli on siis $y = -\frac{3}{20}x^2 - 25 \cdot (-\frac{3}{20}) = -\frac{3}{20}x^2 + \frac{15}{4}$.

Koska nollakohdat ovat $x = -5$ ja $x = 5$, niin paraabelin huippu sijaitsee y-akselilla ($x = 0$). Lasketaan huipun y-koordinaatti, joka on kysytty tunnelin korkeus: $y(0) = -\frac{3}{20} \cdot 0^2 + \frac{15}{4} = \frac{15}{4} = 3{,}75$ (m).

831. **a)**

$$\int_t^{t+1}(x^2+x)\mathrm{d}x = \Big/_{t}^{t+1}\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right)$$
$$=\left(\frac{1}{3}(t+1)^3+\frac{1}{2}(t+1)^2\right)-\left(\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2\right)$$
$$=\frac{1}{3}(t^2+2t+1)(t+1)+\frac{1}{2}(t^2+2t+1)-\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2$$
$$=\frac{1}{3}(t^3+t^2+2t^2+2t+t+1)+\frac{1}{2}t^2+t+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2$$
$$=\frac{1}{3}(t^3+3t^2+3t+1)+\frac{1}{2}t^2+t+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2$$
$$=\cancel{\frac{1}{3}t^3}+t^2+t+\frac{1}{3}+\cancel{\frac{1}{2}t^2}+t+\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{3}t^3}-\cancel{\frac{1}{2}t^2}$$
$$=t^2+2t+{}^{2)}\frac{1}{3}+{}^{3)}\frac{1}{2}$$
$$=t^2+2t+\frac{2}{6}+\frac{3}{6}$$
$$=t^2+2t+\frac{5}{6}$$

Määritetään vakion t arvo tiedosta $t^2+2t+\frac{5}{6}=\frac{5}{6}$.

$$t^2+2t+\frac{5}{6}=\frac{5}{6}$$
$$t^2+2t=0$$
$$t(t+2)=0$$
$$t=0 \quad \text{tai} \quad t+2=0$$
$$t=-2$$

b) Määrätty integraalia kuvaa lauseke $t^2+2t+\frac{5}{6}$, jonka kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. Lausekkeen pienin arvo saavutetaan derivaatan nollakohdassa:

$D(t^2+2t+\frac{5}{6})=2t+2$, joten ratkaistaan yhtälö $2t+2=0$.

$$2t+2=0$$
$$2t=-2 \quad \|:2$$
$$t=-1$$

832. $\overline{OP} = (t+1)\bar{i} + t^2\bar{j}, \quad -1 \le t \le 1$

Päätepisteen P koordinaatit ovat $(t + 1, t^2)$. Paikkavektorin päätepisteen (x, y) koordinaatit ovat $\begin{cases} x = t+1 \\ y = t^2 \end{cases}$. Koska vakion t arvot ovat välillä $[-1, 1]$, niin x-koordinaatille on voimassa $0 \le x \le 2$.

Yhtälöstä $x = t + 1$ saadaan $t = x - 1$. Sijoitetaan yhtälöparin alempaan yhtälöön t:n paikalle lauseke $x - 1$, jolloin saadaan $y = (x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$, kun $0 \le x \le 2$.

Välillä $[0, 2]$ funktio $x^2 - 2x + 1$ saa ei-negatiivisia arvoja, joten kysytyn alueen pinta-ala on määrätty integraali

$$\begin{aligned}\int_0^2 (x^2 - 2x + 1)\mathrm{d}x &= \mathop{/}_0^2 \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 + x\right) \\ &= \frac{1}{3}\cdot 2^3 - 2^2 + 2 \\ &= \frac{8}{3} - 4 + 2 \\ &= \frac{8}{3} - 2 \\ &= \frac{8}{3} - \frac{6}{3} \\ &= \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

833. Koska $g'(x) = f(x)$, niin funktio $g(x)$ on funktion $f(x)$ integraalifunktio.

a) $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x = \Big/_1^3 g(x) = g(3) - g(1) = 1 - 3 = -2$

b) $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = g(1) - g(0) = 3 - 3 = 0$

834. Kysytyn pyörähdyskappaleen tilavuus saadaan kaavasta

$$V = \pi \int_{-\pi}^{\pi} (\sin x)^2 \mathrm{d}x = \pi \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x \mathrm{d}x.$$

Integrointia varten lauseke $\sin^2 x$ muokataan kaksinkertaisen kulman kaavalla $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ muotoon, josta integrointi ilman apuvälinettä on mahdollinen:

$$\begin{aligned} \cos 2x &= 1 - 2\sin^2 x \\ 2\sin^2 x &= 1 - \cos 2x \quad \|:2 \\ \sin^2 x &= \frac{1-\cos 2x}{2} \end{aligned}$$

Nyt

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-\pi}^{\pi} (\sin x)^2 \mathrm{d}x \\ &= \pi \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x \mathrm{d}x \\ &= \pi \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right) \mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2x) \mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{2} \int_{-\pi}^{\pi} 1 \mathrm{d}x - \frac{\pi}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2x \mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{2} \int_{-\pi}^{\pi} 1 \mathrm{d}x - \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} 2 \cdot \cos 2x \mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{2} \Big/_{-\pi}^{\pi} x - \frac{\pi}{4} \Big/_{-\pi}^{\pi} \sin 2x \\ &= \frac{\pi}{2}(\pi - (-\pi)) - \frac{\pi}{4}(\sin(2 \cdot \pi) - \sin(2 \cdot (-\pi))) \\ &= \frac{\pi}{2}(\pi + \pi) - \frac{\pi}{4}(\sin(2\pi) - \sin(-2\pi)) \\ &= \frac{\pi}{2}(2\pi) - \frac{\pi}{4}(0 - 0) \\ &= \pi^2 \end{aligned}$$

835. **a)**

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{8} f(x)\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{3} f(x)\mathrm{d}x + \int_{3}^{8} f(x)\mathrm{d}x \\ &= -\underbrace{\frac{(3-(-1))\cdot 2}{2}}_{\text{kolmion pinta-ala}} + \underbrace{\frac{(8-3)+1}{2}\cdot 2}_{\text{puolisuunnikkaan pinta-ala}} \\ &= -\frac{4\cdot 2}{2} + \frac{6}{2}\cdot 2 \\ &= -4+6 \\ &= 2\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{8} |f(x)|\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{3} |f(x)|\mathrm{d}x + \int_{3}^{8} f(x)\mathrm{d}x \\ &= \Big|-\underbrace{\frac{(3-(-1))\cdot 2}{2}}_{\text{kolmion pinta-ala}}\Big| + \underbrace{\frac{(8-3)+1}{2}\cdot 2}_{\text{puolisuunnikkaan pinta-ala}} \\ &= \Big|-\frac{4\cdot 2}{2}\Big| + \frac{6}{2}\cdot 2 \\ &= |-4|+6 \\ &= 4+6 \\ &= 10\end{aligned}$$

c) Funktion f integraalifunktio on kasvava väleillä, joilla sen derivaattafunktio f saa ei-negatiivisia arvoja. Nyt $f(x) \geq 0$, kun $3 \leq x \leq 8$.

d) Välillä [2, 3] funktion F derivaattafunktio f saa ei-positiivisia arvoja. Tällä perusteella tällä välillä funktio F on vähenevä ja $F(2) > F(3)$.

e) Kohtaan $x = 3$ funktion f kuvaajalle piirretyn tangentin kulmakerroin on positiivinen ja kuvan perusteella se on noin 1. Vastaavasti kohtaan $x = 7$ piirretyn tangentin kulmakerroin on negatiivinen ja kuvan perusteella se on noin –1. Siis väite $f'(3) < f'(7)$ on epätosi.

836. Kysytty polynomifunktio on muotoa $|a|(x-(-1))(x-1) = a(x^2-1)$. Pinta-alaehdosta saadaan määrätyn integraalin avulla yhtälö, josta esimerkiksi vakion a voidaan määrittää.

$\int_{-1}^{1} |a|(x^2-1)\mathrm{d}x = 5$, josta $a = -\frac{15}{4}$ tai $a = \frac{15}{4}$.

837. Ratkaisuissa käytetään kaavoja
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ja $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$.

$$\begin{aligned}
I_1 + I_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x + \sin^2 x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,\mathrm{d}x \\
&= \mathop{/}_0^{\frac{\pi}{2}} x \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_1 - I_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x - \sin^2 x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cdot(\cos 2x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\mathop{/}_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \\
&= \frac{1}{2}(\sin(2\cdot\frac{\pi}{2}) - \sin(2\cdot 0)) \\
&= \frac{1}{2}(\sin\pi - \sin 0) \\
&= \frac{1}{2}(0-0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Integraalien summasta ja erotuksesta saadaan yhtälöpari, josta saadaan ratkaistua integraalien I_1 ja I_2 arvot.

$$+\begin{cases} I_1 + I_2 = \dfrac{\pi}{2} \\ I_1 - I_2 = 0 \end{cases}$$

$$2I_1 = \frac{\pi}{2} \quad \|:2$$

$$I_1 = \frac{\pi}{4}$$

Koska $I_1 - I_2 = 0$, niin $I_1 = I_2$. Siis $I_1 = I_2 = \dfrac{\pi}{4}$.

838. **a)** Funktiolla f on paikallinen maksimikohta kohdassa $x = a$, jos derivaattafunktion merkki vaihtuu positiivisesta negatiiviseksi tässä kohdassa. Paikallisessa terassikohdassa derivaatan arvo on nolla, mutta kohdassa derivaatan merkki ei vaihdu. Derivaatan merkki voi olla kaikkialla ei-negatiivinen tai ei-positiivinen.

Haetun funktion f integraalifunktiolla on paikallinen maksimikohta $x = 1$ ja terassikohta $x = 2$. Funktion f integraalifunktion tapauksessa kohdat ovat integraalifunktion derivaattafunktion nollakohtia eli nyt funktion f nollakohtia. Ehdot täyttävä funktio f voisi olla esimerkiksi binomin $1 – x$ (kuvaaja laskeva suora) ja binomin neliön $(x – 2)^2$ (kuvaaja ylöspäin aukeava paraabeli) tulo. Näiden binomien tapauksessa funktion f merkki vaihtuu positiivisesta negatiiviseksi kohdassa $x = 1$, jossa laskeva suora $y = –x + 1$ leikkaa x-akselin. Lisäksi funktion $(x – 2)^2$ merkki on kaikkialla ei-negatiivinen ja arvo 0 saavutetaan kohdassa $x = 2$, jossa ylöspäin aukeava paraabeli sivuaa x-akselia.

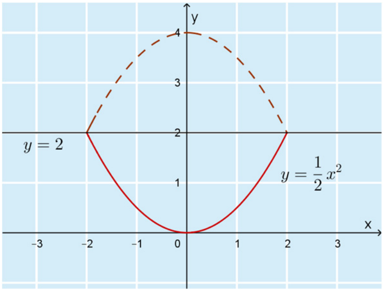
Ehdot täyttävä funktio f on esimerkiksi
$f(x) = (1 – x)(x – 2)^2 = −(x – 1)(x – 2)^2 = –x^3 + 5x^2 – 8x + 4.$

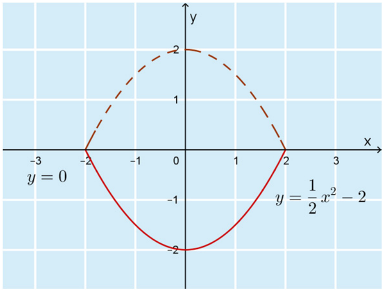
b) Välin $[–1, 1]$ pituus on $1 – (–1) = 2$, joten pinta-alaehto 20 toteutuu suorakulmiolla, jonka kanta on 2 ja korkeus 10.
Eräs ehdot täyttävä funktio f on esimerkiksi $f(x) = 10$.

c) Määrätty integraali yli välin $[1, 3]$ on 0, jos esimerkiksi sekä funktion kuvaajan ja x-akselin alapuolelle että funktion kuvaajan ja x-akselin yläpuolella jäävien alueiden pinta-alat ovat yhtä suuret. Jos funktion kuvaaja olisi nouseva tai laskeva suora, niin funktion nollakohta olisi tällöin kohdassa $x = 2$.

Eräs ehdot täyttävä funktio f on $f(x) = x – 2$.

839. Paraabelin $y=\frac{1}{2}x^2$ ja suoran $y = 2$ rajoittaman alueen pyörähtäessä suoran $y = 2$ ympäri syntyneen pyörähdyskappaleen tilavuus on sama kuin pyörähdyskappaleella, joka syntyy paraabelin $y=\frac{1}{2}x^2-2$ ja suoran $y = 0$ rajoittaman alueen pyörähtäessä suoran $y = 0$ eli x-akselin ympäri.





Paraabeli $y=\frac{1}{2}x^2$ leikkaa suoran $y = 2$ kohdissa $x = –2$ ja $x = 2$.

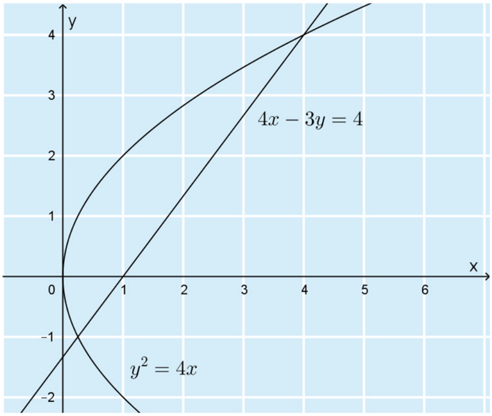
Vastaavasti paraabeli $y=\frac{1}{2}x^2-2$ leikkaa suoran $y = 0$ myös kohdissa $x = –2$ ja $x = 2$.

Syntyvän pyörähdyskappaleen tilavuus saadaan kaavasta

$$V=\pi\int_{-2}^{2}(\frac{1}{2}x^2-2)^2\mathrm{d}x=\frac{128}{15}\pi.$$

840. Paraabelin $y^2 = 4x$ ja suoran $4x - 3y = 4$ leikkauspisteet saadaan yhtälöparista $\begin{cases} y^2 = 4x \\ 4x - 3y = 4 \end{cases}$.

Yhtälöparin ratkaisu on $\begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \end{cases}$ tai $\begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ y = -1 \end{cases}$.



Paraabelin ja suoran rajoittaman alueen pinta-ala voidaan laskea helpommin integroimalla muuttujan y suhteen. Ratkaistaan kummankin käyrän yhtälö muuttujan x suhteen eli ilmaistaan muuttuja x muuttujan y avulla:

paraabeli: $y^2 = 4x$, josta $x = \frac{1}{4}y^2$

suora: $4x - 3y = 4$, josta $x = \frac{3}{4}y + 1$

Integroimisrajat muuttujan y suhteen integroitaessa ovat $y = -1$ ja $y = 4$. Valitaan väliltä $[-1, 4]$ testikohdaksi $y = 0$ ja selvitetään testikohdan avulla kumpi funktio muuttujan y suhteen saa suurempia arvoja välillä $[-1, 4]$:

paraabeli: $x = \frac{1}{4} \cdot 0^2 = 0$

suora: $x = \frac{3}{4} \cdot 0 + 1 = 1$

Paraabelin ja suoran väliin jäävän rajoitetun alueen pinta-ala on

$$\int_{-1}^{4} \left(\frac{3}{4}y + 1 - \frac{1}{4}y^2\right) dy = \frac{125}{24} = 5{,}208... \approx 5{,}21.$$

841. Funktio $f(x)=1+15(x+1)^{-2}=1+\dfrac{15}{(x+1)^2}$ saa tarkasteluvälillä $x \geq 0$ positiivisia arvoja, joten koordinaattiakselien, suoran $x = 4$ ja käyrän $y=1+\dfrac{15}{(x+1)^2}$ rajoittaman alueen pinta-ala on $\int_0^4 (1+\dfrac{15}{(x+1)^2})\mathrm{d}x=16.$

Alue voidaan jakaa kahteen pinta-alaltaan yhtä suureen osaan (8 pinta-alayksikköä ja 8 pinta-alayksikköä) äärettömän monella tavalla. Jaetaan alue kahteen pinta-alaltaan yhtä suureen osaan y-akselin suuntaisen suoran $x = a$, $a > 0$ avulla:

$\int_0^a (1+\dfrac{15}{(x+1)^2})\mathrm{d}x=8,$ josta $a=-2\sqrt{6}-4<0$ tai $a=2\sqrt{6}-4.$

Suora $x=2\sqrt{6}-4$ jakaa alueen kahteen pinta-alaltaan yhtä suureen osaan.

842. Koska käyrä pyörähtää y-akselin, on käyrän yhtälö $y = 2\ln(x + 1)$, $0 \leq x \leq e - 1$, saatava muotoon $x = g(y)$.

$y = 2\ln(x + 1)$, josta saadaan $x=e^{\frac{y}{2}}-1.$

Määritetään muuttujan y suhteen tapahtuvan integroinnin rajat tiedosta $0 \leq x \leq e-1.$

Kun $x = 0$, niin $y = 2\ln(0 + 1) = 2\ln 1 = 0$.
Kun $x = e - 1$, niin $y = 2\ln(e - 1 + 1) = 2\ln e = 2$.

Kysytyn pyörähdyskappaleen tilavuus on

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_0^2 (e^{\frac{y}{2}}-1)^2\mathrm{d}y \\ &= (e^2-4e+5)\pi \\ &= 4{,}762... \\ &\approx 4{,}76. \end{aligned}$$

843. Funktion sin x kuvaaja leikkaa x-akselin välillä $[0, 2\pi]$ kohdissa $x = 0$, $x = \pi$ ja $x = 2\pi$. Välillä $[0, \pi]$ on $\sin x \geq 0$ ja välillä $[\pi, 2\pi]$ $\sin x \leq 0$.

Välillä $[0, \pi]$ käyrä $y = f(x) + \sin x$ on ylempänä kuin käyrä $y = f(x)$, joten tällä välillä käyrien rajaaman alueen pinta-ala on

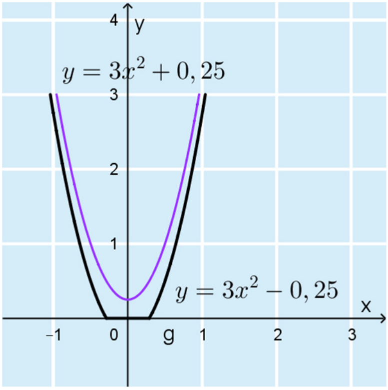
$$\int_0^\pi (f(x) + \sin x - f(x))\mathrm{d}x = \int_0^\pi \sin x \mathrm{d}x = 2.$$

Välillä $[\pi, 2\pi]$ käyrä $y = f(x)$ on ylempänä kuin käyrä $y = f(x) + \sin x$, joten tällä välillä käyrien rajaaman alueen pinta-ala on

$$\int_\pi^{2\pi} (f(x) - (f(x) + \sin x))\mathrm{d}x = \int_\pi^{2\pi} (-\sin x)\mathrm{d}x = 2.$$

Välillä $[0, 2\pi]$ käyrien rajaaman alueen pinta-ala on siis $2 + 2 = 4$.

844. Hahmotellaan tilanteesta mallikuva.



Lasimaljakon ulkopinnan muodostaman pyörähdyskappaleen tilavuus on $\pi\int_0^3 g(y)^2 \mathrm{d}y$. Kirjoitetaan yhtälö $y = 3x^2 - 0,25$ suoraan muotoon $x^2 = g(y)^2$:

$$\begin{aligned} y &= 3x^2 - 0,25 \\ y + 0,25 &= 3x^2 \quad \| :3 \\ x^2 &= \frac{y+0,25}{3} \end{aligned}$$

Ulkopinnan muodostaman pyörähdyskappaleen tilavuus on siis

$$\pi\int_0^3 \frac{y+0,25}{3}\mathrm{d}y = \frac{7\pi}{4}.$$

Maljakon sisäpinnan käyrä kohdassa $x = 0$ on pisteessä (0; 0,25), joten sisäpinnan muodostaman pyörähdyskappaleen tilavuus on $\pi\int_{0,25}^3 g(y)^2 \mathrm{d}y$.

Nyt $y = 3x^2 + 0,25$, josta saadaan $x^2 = \frac{y-0,25}{3}$.

Sisäpinnan muodostaman pyörähdyskappaleen tilavuus on siis

$$\pi\int_{0,25}^3 \frac{y-0,25}{3}\mathrm{d}y = \frac{121\pi}{96}.$$

Maljakon lasiosan tilavuus on siis $\frac{7\pi}{4}-\frac{121\pi}{96}=\frac{47\pi}{96}=1,53...$ tilavuuden yksikköä. Koska koordinaatiston yksikkö on 10 cm, niin tilavuuden yksikkö on $(10\text{ cm})^3 = 1000\text{ cm}^3 = 1\text{ dm}^3$.

Maljakon lasin tilavuus on siten 1,53… dm^3 ja maljakon massa $2{,}5\text{ kg/dm}^3 \cdot 1{,}53\ldots\text{ dm}^3 = 3{,}84\ldots\text{ kg} \approx 3{,}8\text{ kg}$.

845. Funktion *f* integraalifunktiot *F* ovat muotoa
$F(x)=\int(x+1)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2+x+C.$

Integraalifunktion *F* kuvaajalla $y=\frac{1}{2}x^2+x+C$ ja funktion *f* kuvaajalla $y = x + 1$ on sivuamisen myötä yksi yhteinen piste. Tämä sivuamiskohta on yhtälön $\frac{1}{2}x^2+x+C=x+1$ ainoa ratkaisu. Toisen asteen yhtälöllä $\frac{1}{2}x^2+x+C=x+1$ eli yhtälöllä $\frac{1}{2}x^2+C-1=0$ on yksi ratkaisu, kun diskriminantti on 0.

Nyt $D=0^2-4\cdot\frac{1}{2}(C-1)=-2C+2,$ joten $D = 0$, kun $C = 1$.

Haettu integraalifunktio on siis $F(x)=\frac{1}{2}x^2+x+1.$

846. Käyrän $y = x^3 + 1$ yhtälö on kirjoitettava y-akselin suuntaisen pyörähdyksen takia muotoon $x = g(y)$.

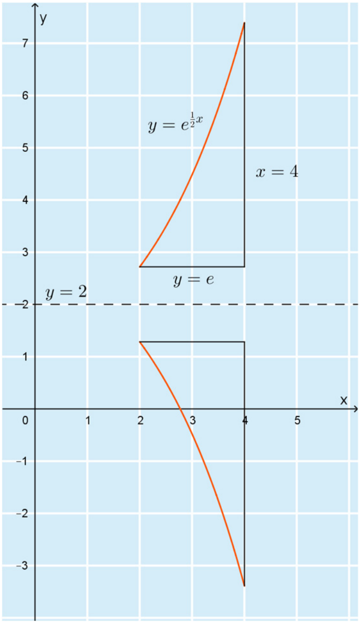
Nyt $y = x^3 + 1$, josta $x = \sqrt[3]{y-1}$.

Käyrän $x = \sqrt[3]{y-1}$ pyörähdys suoran $x = 3$ ympäri ja näin muodostuvan pyörähdyskappaleen tilavuus on yhtä suuri kuin käyrän $x = \sqrt[3]{y-1} - 3$ pyörähdys suoran $x = 3 - 3 = 0$ eli y-akselin ympäri.

Integroimisrajat muuttujan y suhteen ovat $y = 0$ ja $y = 9$, joten muodostuvan pyörähdyskappaleen tilavuus on

$$\pi\int_0^9 (\sqrt[3]{y-1} - 3)^2\,\mathrm{d}y = \frac{333\pi}{10}.$$

847. Hahmotellaan tilanteesta mallikuva.



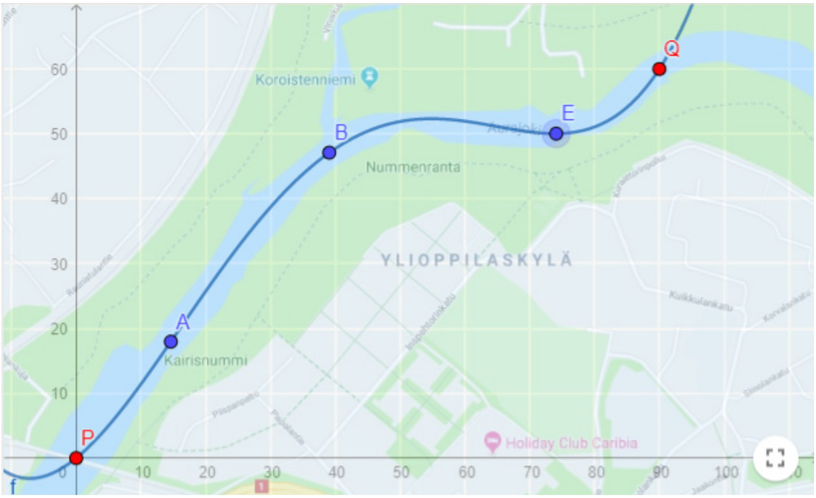
On huomattava, että muodostuva pyörähdyskappale on ontto, sillä kappaleen keskellä on ympyrälieriön muotoinen ontto tila.

Käyrän $y = e^{\frac{1}{2}x}$ ja suoran $y = e$ leikkauskohta saadaan yhtälöstä $e^{\frac{1}{2}x} = e$, ja yhtälön ratkaisu on $x = 2$. Käyrän pyörähdys x-akselin suuntaisen suoran ympäri tapahtuu välillä [2, 4]. Käyrän $y = e^{\frac{1}{2}x}$ pyörähdys välillä [2, 4] suoran $y = 2$ ympäri muodostaa pyörähdyskappaleen, jolla on sama tilavuus kuin pyörähdyskappaleella, joka syntyy käyrän $y = e^{\frac{1}{2}x} - 2$ pyörähtäessä välillä [2, 4] suoran $y = 2 - 2 = 0$ ympäri.

Nyt $\pi\int_2^4 (e^{\frac{1}{2}x} - 2)^2 \,\mathrm{d}y = (e^4 - 9e^2 + 8e + 8)\pi.$

Lasketusta pyörähdyskappaleesta on vähennettävä onton osan tilavuus, joka saadaan kaavalla $\pi(e - 2)^2 \cdot (4 - 2) = 2(e - 2)^2\pi$.
Tehtävänannon mukaisen pyörähdyskappaleen tilavuus on siis
$(e^4 - 9e^2 + 8e + 8)\pi - 2(e-2)^2\pi = (e^4 - 11e^2 + 16e)\pi.$

848. **a)** Esimerkiksi:



Funktio

$f(x) = 0.0000069683\,x^4 - 0.001128925\,x^3 + 0.0435446756\,x^2 + 0.8120686551\,x$

Piste

$A = (14.60732368,\ 17.9520435254)$

$B = (39.0579902359,\ 47.09723806)$

$E = (74.071344744,\ 50.0313180467)$

$P = (0,\ 0)$

$Q = (90,\ 60)$

b) Olkoon a-kohdassa määritelty funktio $f(x)$.

Joen pituus on $\int_0^{90} \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx = 117{,}44\ldots\ (\mathrm{m})$.

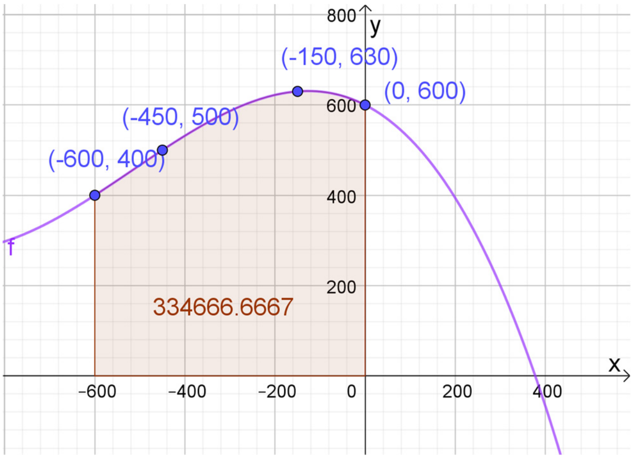
Koska koordinaatiston yksikkö on 10 m, on joen pituus
$10 \cdot 117{,}44\ldots\ \mathrm{m} = 1174{,}4\ldots\ \mathrm{m} \approx 1200\ \mathrm{m}$.

SYVENTÄVÄT TEHTÄVÄT

849. Asetetaan aluetta rajaavat pisteet koordinaatistoon ja sovitetaan kolmannen asteen polynomi pisteisiin.

Alueen pinta-ala saadaan määrättynä integraalina $\int_{-600}^{0} f(x)\mathrm{d}x$.

Integraalin arvo on 334 666,66…, joten alueen pinta-ala on noin 330 000 m^2.



Vastauksesi kelpaavat myös muut järkevällä sovituksella saadut arviot.

850. **a)** Välillä [0, 1] funktio kulkee pisteiden (0, 0) ja (1, 1) kautta, ja tämän puolisuoran kulmakerroin on $k=\frac{1-0}{1-0}=1.$ Käyrän yhtälö on siis $y = x$.

Välillä [1, 2] funktio saa vakioarvon 1, joten tällä välillä käyrän yhtälö on siis $y = 1$.

Välillä [2, 4] funktio kulkee pisteiden (2, 1) ja (3, 0) kautta, ja tämän puolisuoran kulmakerroin on $k=\frac{0-1}{3-2}=-1.$ Puolisuora on osa suoraa, joka kulkee pisteen (3, 0) kautta ja jonka kulmakerroin on –1. Käyrän yhtälö on siis $y - 0 = -(x - 3)$ eli $y = -x + 3$.

Derivaatan $f'(x)$ lauseke välillä $0 \le x \le 4$ on siis

$$f'(x)=\begin{cases} x, & \text{kun } 0\le x\le 1\\ 1, & \text{kun } 1<x\le 2.\\ -x+3, & \text{kun } 2<x\le 4\end{cases}$$

b) Integroimalla funktion f' lausekkeet, saadaan funktion f lauseke osaväleittäin.

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x^2+C_1, & \text{kun } 0\le x\le 1\\ x+C_2, & \text{kun } 1<x\le 2.\\ -\frac{1}{2}x^2+3x+C_3, & \text{kun } 2<x\le 4\end{cases}$$

Koska integraalifunktio on jatkuva ja lisäksi $f(0) = 0$, niin näillä tiedoilla määritetään integroimisvakioiden C_1, C_2 ja C_3 arvot.

kohta $x = 0$:
$f(0) = 0$, joten $C_1 = 0$

kohta $x = 1$:

$$f(1) = \frac{1}{2}\cdot 1^2 + C_1 = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 1^-}(\frac{1}{2}x^2) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 1^+}(x + C_2) = 1 + C_2$$

Funktiolla *f* on raja-arvo kohdassa $x = 1$, jos $\frac{1}{2} = 1 + C_2$. Yhtälön ratkaisu on $C_2 = -\frac{1}{2}$. Funktio on myös jatkuva kohdassa $x = 1$, sillä $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$.

kohta $x = 2$:

$$f(2) = 2 + C_2 = 2 + (-\frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to 2^-}(x - \frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to 2^+}(-\frac{1}{2}\cdot 2^2 + 3\cdot 2 + C_3) = 4 + C_3$$

Funktiolla *f* on raja-arvo kohdassa $x = 2$, jos $\frac{3}{2} = 4 + C_3$. Yhtälön ratkaisu on $C_3 = -\frac{5}{2}$. Funktio on myös jatkuva kohdassa $x = 2$, sillä $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$.

Funktion $f(x)$ lauseke välillä $0 \le x \le 4$ on siis

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2, & \text{kun } 0 \le x \le 1 \\ x - \frac{1}{2}, & \text{kun } 1 < x \le 2 \\ -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{5}{2}, & \text{kun } 2 < x \le 4 \end{cases}.$$

c) Funktio f on derivoituva välillä $0 < x < 4$ ja $f'(x) = 0$ vain, kun $x = 3$. Funktion f mahdolliset ääriarvokohdat välillä $0 \leq x \leq 4$ ovat suljetun välin päätepisteet $x = 0$ tai $x = 4$ tai välille kuuluva derivaattafunktion nollakohta $x = 3$.

$f(0) = 0$

$f(4) = \frac{3}{2}$

$f(3) = 2$

Funktion f arvoista suurin arvo on 2 ja pienin arvo 0.

851. Kirjoitetaan lauseke $|t - 1|$ osaväleittäin ilman itseisarvomerkkejä.

$$|t-1| = \begin{cases} t-1, & \text{kun } t-1 \geq 0 \\ -(t-1), & \text{kun } t-1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} t-1, & \text{kun } t \geq 1 \\ -t+1, & \text{kun } t < 1 \end{cases}$$

Määritetään integraali osissa.

Kun $0 \leq x < 1$, niin $\int_0^x (-t+1)\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}x^2 + x.$

Kun $1 \leq x \leq 2$, niin $\int_0^x |t-1|\mathrm{d}t = \int_0^1 (-t+1)\mathrm{d}t + \int_1^x (t-1)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}x^2 - x + 1.$

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + x, & \text{kun } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2}x^2 - x + 1, & \text{kun } 1 < x \leq 2 \end{cases}.$$

852. **a)** Sinifunktion kuvaajan perusteella voidaan todeta, että

$$\int_0^{\pi} \sin t \,\mathrm{d}t = -\int_{\pi}^{2\pi} \sin t \,\mathrm{d}t.$$

Koska $\int_0^{\pi} \sin t \,\mathrm{d}t = -\int_{\pi}^{2\pi} \sin t \,\mathrm{d}t$, niin $\int_0^{\pi} |\sin t| \,\mathrm{d}t = \int_{\pi}^{2\pi} |\sin t| \,\mathrm{d}t$.

Nyt $f(\pi) = \int_0^{\pi} |\sin t| \,\mathrm{d}t$, joten tämän perusteella saadaan

$$f(2\pi) = \int_0^{\pi} |\sin t| \,\mathrm{d}t + \int_{\pi}^{2\pi} |\sin t| \,\mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi} |\sin t| \,\mathrm{d}t = 2f(\pi).$$

b) Tarkastellaan väli $[0, 2\pi]$ osaväleinä $[0, \pi]$ ja $[\pi, 2\pi]$.
Väli $0 \le x \le \pi$, jolloin $0 \le t \le \pi$ ja $|\sin t| = \sin t$.
Väli $\pi \le x \le 2\pi$, jolloin $\pi \le t \le 2\pi$ ja $|\sin t| = -\sin t$.
Määrätty integraali välillä $[0, \pi]$ on $\int_0^{x} |\sin t| \,\mathrm{d}t = \int_0^{x} \sin t \,\mathrm{d}t = 1 - \cos x$.

Kun x on välillä $[\pi, 2\pi]$, niin

$$\int_0^{x} |\sin t| \,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \sin t \,\mathrm{d}t + \int_{\pi}^{x} (-\sin t) \,\mathrm{d}t = 3 + \cos x.$$

Funktio $f(x)$, kun $0 \le x \le 2\pi$, on $f(x) = \begin{cases} 1 - \cos x, & \text{kun } 0 \le x \le \pi \\ 3 + \cos x, & \text{kun } \pi \le x \le 2\pi \end{cases}$.

853. Funktio $f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int(1+\frac{1}{x})\mathrm{d}x=x+\ln|x|+C.$ Kohdassa, jossa funktion kuvaaja sivuaa suoraa $y = 2$, on voimassa $f'(x) = 0$.
Sivuamiskohta saadaan yhtälöstä $1+\frac{1}{x}=0,$ josta $x=-1.$

Koska funktion kuvaaja sivuaa suoraa $y = 2$, niin on oltava $f(-1) = 2$.
Tämän tiedon perusteella saadaan yhtälö $-1 + \ln|-1| + C = 2$, josta $C = 3$.

Kysytty funktion f lauseke on siis $f(x) = x + \ln|x| + 3$.

854. **a)** $\int_1^4 f(t)\mathrm{d}t=F(4)-F(1)=1-(-1)=2$

b) Funktio $f(x)$ on vakio, kun sen integraalifunktio on lineaarinen eli integraalifunktion kuvaaja on suora. Kuvaajan perusteella integraalifunktion F kuvaaja on suora väleillä [2, 3], [3; 4,5] ja [10, 12].

c) Funktion $F(x)$ kuvaajalle kohtaan $x = a$ piirretyn tangentin kulmakertoimelle on voimassa: $k_T = f(a)$.

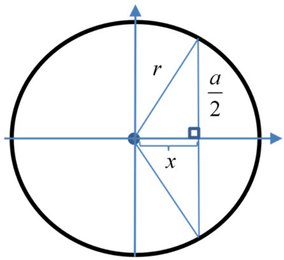
Funktio $f(x)$ on aidosti vähenevä, kun tangentin kulmakertoimen arvot pienenevät. Kuvaajan perusteella tangentin kulmakertoimen arvot pienenevät eli funktio $f(x)$ on aidosti vähenevä, kun $6{,}2 \le x \le 8{,}8$.

Huomautus: Tehtävässä on käytetty termiä ”aidosti kasvava” samassa merkityksessä kuin Juuressa käytetään termiä ”kasvava”.

855. Olkoon juustopalan suoran sivun päätepisteet $(0, r)$ ja $(0, –r)$. Juustopalan pohjana oleva puoliympyrä kulkee pisteiden $(0, r)$, $(0, –r)$ ja $(r, 0)$ kautta. Määritetään juustopalan tilavuus integroimalla suorakulmioiden, joiden kanta on y-akselin suuntainen, pinta-aloja. Suorakulmioiden korkeudet ovat tällöin välillä $[0, h]$, kun suorakulmion etäisyys y-akselista on välillä $[0, r]$.

Määritetään suorakulmion kannan pituus a etäisyydellä x Pythagoraan lauseen avulla.

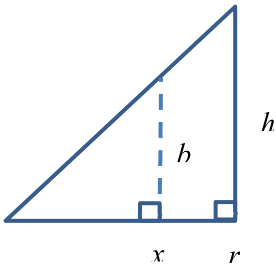
$r^2 = x^2 + (\frac{a}{2})^2$, josta $a = 2\sqrt{r^2 - x^2}$.



Määritetään suorakulmion korkeus b verrannon avulla yhdenmuotoisista suorakulmaisista kolmioista.

Nyt $\frac{h}{r} = \frac{b}{x}$, josta $b = \frac{hx}{r}$.

Suorakulmion kannan a pituus on muuttujan x funktio aivan kuten suorakulmion korkeus b.

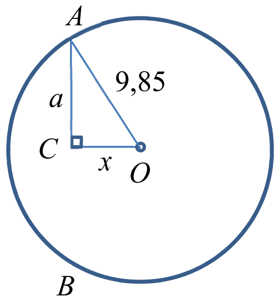


Nyt suorakulmion pinta-ala on muuttujan x funktio:

$A(x) = 2\sqrt{r^2 - x^2} \cdot \frac{hx}{r}$, jossa $0 \le x \le r$.

Juustopalan tilavuus on $\int_0^r A(x)\mathrm{d}x = \int_0^r 2\sqrt{r^2 - x^2} \cdot \frac{hx}{r} = \frac{2}{3}r^2 h$.

856. Tarkastellaan rakennusta siten, että rakennuksen pohjaympyrän keskipiste on O. Pohjaympyrän tietyn halkaisijan suuntainen taso erottaa pohjaympyrästä halkaisijan suuntaisen jänteen AB. Olkoon jänteen AB keskipiste C. Olkoon suorakulmion kannan pituus $2a$, jolloin $AC = a$.



Muodostetaan suorakulmio, jonka kanta on janan AB suuntainen ja se on etäisyydellä x, $0 \le x \le 9{,}85$, pohjaympyrän keskipisteestä. Tehtävänannon mukaan suorakulmion korkeus on puolet kannasta.

Pythagoraan lauseen avulla saadaan $9{,}85^2 = x^2 + a^2$, josta $a = \sqrt{9{,}85^2 - x^2}$ ja edelleen suorakulmion kanta $2a = 2\sqrt{9{,}85^2 - x^2}$. Suorakulmion korkeus on tällöin $a = \sqrt{9{,}85^2 - x^2}$.

Suorakulmion pinta-ala A etäisyydellä x ympyrän keskipisteestä saadaan lausekkeesta $2\sqrt{9{,}85^2 - x^2} \cdot \sqrt{9{,}85^2 - x^2} = 2(9{,}85^2 - x^2)$. Suorakulmion pinta-alaa kuvaa siis funktio $A(x) = 2(9{,}85^2 - x^2)$, $0 \le x \le 9{,}85$.

Integroimalla pinta-alan lauseke yli välin [0; 9,85] saadaan tuloksena puolet rakennuksen tilavuudesta. Koko rakennuksen tilavuus saadaan määrätyn integraalin tuloksesta kertomalla se luvulla 2:

$$V = 2 \cdot \int_0^{9{,}85} 2(9{,}85^2 - x^2)\,\mathrm{d}x = 2548{,}45\ldots\ (\mathrm{m}^3) \approx 2550\ (\mathrm{m}^3).$$

9 Lukujonot

9.1 Lukujono

LUVUN 9.1 YDINTEHTÄVÄT

901. **a)** Aritmeettisessa lukujonossa peräkkäisten jäsenten erotus on aina sama vakio. Nyt $d = 7 - 4 = 3$.

Lukujonon sadas jäsen a_{100} saadaan, kun ensimmäiseen jäseneen 4 lisätään 99 kertaa luku 3:
$a_{100} = 4 + 99 \cdot 3 = 301$

Lukujonon yleinen jäsen a_n:
$a_n = a_1 + (n - 1)d = 4 + (n - 1) \cdot 3 = 3n + 1.$
Selvitetään, onko luku 100 jäsenenä lukujonossa eli onko $a_n = 100$ jollakin positiivisella kokonaisluvulla n.

$$\begin{aligned} a_n &= 100 \\ 3n + 1 &= 100 \\ 3n &= 99 \quad \| :3 \\ n &= 33 \end{aligned}$$

Luku 100 on siis lukujonon 33. jäsen, eli se on lukujonossa.

b) Geometrisessa lukujonossa peräkkäisten jäsenten suhde on aina sama vakio. Nyt $q = \frac{6}{3} = 2.$

Lukujonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 3$ ja suhdeluku $q = 2$, joten yleinen jäsen $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 3 \cdot 2^{n-1}$.
Selvitetään yhtälön $3 \cdot 2^{n-1} = 49152$ avulla, kuinka mones lukujonon jäsen on 49152:

$$\begin{aligned} 3 \cdot 2^{n-1} &= 49152 \quad \| :3 \\ 2^{n-1} &= 16384 \\ 2^{n-1} &= 2^{14} \\ n - 1 &= 14 \\ n &= 15 \end{aligned}$$

Lukujonon $(a_n) = (3, 6, \ldots)$ 15. jäsen on 49152.

902. **a)** Lukujono on aritmeettinen, jos sen peräkkäisten jäsenten erotus $a_{n+1} - a_n$ on vakio eli ei riipu järjestysnumerosta n.

$a_{n+1} - a_n = (2 - 3(n + 1)) - (2 - 3n) = 2 - 3n - 3 - 2 + 3n = -3$

Peräkkäisten jäsenten erotus –3 on vakio, joten lukujono on aritmeettinen.

b) Lukujono on geometrinen, jos sen peräkkäisten jäsenten suhde $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ on vakio eli ei riipu järjestysnumerosta n.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{-4 \cdot 5^{(n+1)-1}}{-4 \cdot 5^{n-1}} = \frac{5^n}{5^{n-1}} = 5^{n-(n-1)} = 5^1 = 5$$

Peräkkäisten jäsenten suhde 5 on vakio, joten lukujono on geometrinen.

903. **a)** Aritmeettisen lukujonon tapauksessa tutkitaan peräkkäisten jäsenten erotuksia:

$$a_2 - a_1 = {}^{2)}\frac{7}{6} - {}^{3)}\frac{7}{4} = \frac{14}{12} - \frac{21}{12} = -\frac{7}{12}$$

$$a_3 - a_2 = {}^{2)}\frac{7}{9} - {}^{3)}\frac{7}{6} = \frac{14}{18} - \frac{21}{18} = -\frac{7}{18}$$

Peräkkäisten jäsenten erotus ei ole sama vakio, joten lukujono $(a_n) = \left(\frac{7}{4}, \frac{7}{6}, \frac{7}{9}, \ldots\right)$ ei ole aritmeettinen.

Geometrisen lukujonon tapauksessa tutkitaan peräkkäisten jäsenten suhteita:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{7}{6}}{\frac{7}{4}} = \frac{7}{6} \cdot \frac{4}{7} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{\frac{7}{9}}{\frac{7}{6}} = \frac{7}{9} \cdot \frac{6}{7} = \frac{2}{3}$$

Peräkkäisten jäsenten suhde näyttäisi olevan sama vakio, joten lukujono $(a_n) = \left(\frac{7}{4}, \frac{7}{6}, \frac{7}{9}, \ldots\right)$ voisi olla geometrinen.

Jos lukujono on geometrinen, niin lukujonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = \frac{7}{4}$ ja suhdeluku $q = \frac{2}{3}$, jolloin yleisen jäsen kaavalla $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ saadaan $a_n = \frac{7}{4} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$.

b) Aritmeettisen lukujonon tapauksessa tutkitaan peräkkäisten jäsenten erotuksia:

$$a_2 - a_1 = \frac{3}{7} - \frac{1}{7} = \frac{2}{7}$$

$$a_3 - a_2 = \frac{5}{7} - \frac{3}{7} = \frac{2}{7}$$

Peräkkäisten jäsenten erotus näyttäisi olevan sama vakio, joten lukujono $(a_n) = \left(\frac{1}{7}, \frac{3}{7}, \frac{5}{7}, \ldots\right)$ voisi olla aritmeettinen.

Geometrisen lukujonon tapauksessa tutkitaan peräkkäisten jäsenten suhteita:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{3}{7}}{\frac{1}{7}} = \frac{3}{7} \cdot \frac{7}{1} = 3$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{\frac{5}{7}}{\frac{3}{7}} = \frac{5}{7} \cdot \frac{7}{3} = \frac{5}{3}$$

Peräkkäisten jäsenten suhde ei ole sama vakio, joten lukujono $(a_n) = \left(\frac{1}{7}, \frac{3}{7}, \frac{5}{7}, \ldots\right)$ ei voi olla geometrinen.

Jos lukujono on aritmeettinen, niin lukujonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = \frac{1}{7}$ ja erotusluku $d = \frac{2}{7}$, jolloin yleisen jäsen kaavalla $a_n = a_1 + (n - 1)d$ saadaan

$$a_n = \frac{1}{7} + (n-1) \cdot \frac{2}{7} = \frac{1}{7} + \frac{2}{7}n - \frac{2}{7} = \frac{2}{7}n - \frac{1}{7}.$$

904. **a)** Lukujono on aritmeettinen, jos sen peräkkäisten jäsenten erotus $a_{n+1} - a_n$ on vakio.

Nyt
$a_2 - a_1 = x - 2$ ja
$a_3 - a_2 = 8 - x$,
joten erotuslukujen yhtäsuuruudesta saadaan yhtälö $x - 2 = 8 - x$.

Ratkaistaan luku x yhtälöstä $x - 2 = 8 - x$:

$$x - 2 = 8 - x$$
$$x + x = 8 + 2$$
$$2x = 10 \quad \| : 2$$
$$x = 5$$

b) Lukujono on geometrinen, jos sen peräkkäisten jäsenten suhde $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ on vakio.

Nyt
$\frac{a_2}{a_1} = \frac{x}{2}$ ja $\frac{a_3}{a_2} = \frac{8}{x}$,

joten suhdelukujen yhtäsuuruudesta saadaan yhtälö $\frac{x}{2} = \frac{8}{x}$.

Ratkaistaan luku x yhtälöstä $\frac{x}{2} = \frac{8}{x}$:

$$\frac{x}{2} = \frac{8}{x}$$
$$x^2 = 2 \cdot 8$$
$$x^2 = 16$$
$$x = \sqrt{16} \quad \text{tai} \quad x = -\sqrt{16}$$
$$x = 4 \qquad\qquad x = -4$$

905. **a)** Lukujono on aritmeettinen, joten yleinen jäsen on $a_n = a_1 + (n - 1)d$.

Lukujonon jäsenten $a_3 = -3$ ja $a_{15} = 6$ tiedoilla saadaan yhtälöpari ja sen ratkaisuna a_1 ja d.

$\begin{cases} a_3 = a_1 + (3-1)d = a_1 + 2d \\ a_{15} = a_1 + (15-1)d = a_1 + 14d \end{cases}$ eli nyt $\begin{cases} a_1 + 2d = -3 \\ a_1 + 14d = 6 \end{cases}$, josta ratkaisuna

saadaan $\begin{cases} a_1 = -\dfrac{9}{2} \\ d = \dfrac{3}{4} \end{cases}$.

Yleinen jäsen on $a_n = -\dfrac{9}{2} + (n-1)\cdot\dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{4}n - \dfrac{21}{4}$.

Toinen tapa:
Koska lukujono on aritmeettinen, lukujonon jäsen saadaan lisäämällä edelliseen sama vakio d.

Siis $a_{15} = a_3 + 12d$ 2eli $6 = -3 + 12d$. Tästä saadaan $d = \dfrac{3}{4}$.

Nyt $a_1 = a_3 - 2d = -3 - 2\cdot\dfrac{3}{4} = -\dfrac{9}{2}$.

Yleinen jäsen on nyt $a_n = -\dfrac{9}{2} + (n-1)\cdot\dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{4}n - \dfrac{21}{4}$.

b) Lukujono on geometrinen, joten yleinen jäsen on $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

Lukujonon jäsenten $a_2 = \dfrac{9}{4}$ ja $a_6 = \dfrac{4}{9}$ tiedoilla saadaan yhtälöpari ja sen ratkaisuna a_1 ja q.

$\begin{cases} a_2 = a_1 \cdot q^{2-1} \\ a_6 = a_1 \cdot q^{6-1} \end{cases}$ eli nyt $\begin{cases} a_1 \cdot q = \dfrac{9}{4} \\ a_1 \cdot q^5 = \dfrac{4}{9} \end{cases}$, josta ratkaisuna saadaan

$\begin{cases} a_1 = \dfrac{27}{8} \\ q = \dfrac{2}{3} \end{cases}$ tai $\begin{cases} a_1 = -\dfrac{27}{8} \\ q = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$.

Yleinen jäsen on joko $a_n = \dfrac{27}{8}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$ tai $a_n = -\dfrac{27}{8}\cdot\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$

Toinen tapa:
Koska lukujono on geometrinen, lukujonon jäsen saadaan kertomalla edellinen samalla vakiolla q.

Siis $a_6 = a_2 \cdot q^4$ eli $\frac{4}{6} = \frac{9}{4} \cdot q^4$. Tästä saadaan $q = \pm\frac{2}{3}$.

Jos $q = \frac{2}{3}$, niin $a_1 = \frac{a_2}{q} = \frac{\frac{9}{4}}{\frac{2}{3}} = \frac{27}{8}$.

Jos $q = -\frac{2}{3}$, niin $a_1 = \frac{a_2}{q} = \frac{\frac{9}{4}}{-\frac{2}{3}} = -\frac{27}{8}$.

Yleinen jäsen on siis joko $a_n = \frac{27}{8} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ tai $a_n = -\frac{27}{8} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

906. **a)**

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = \sqrt{1+3a_1} = \sqrt{1+3\cdot 1} = \sqrt{4} = 2$$
$$a_3 = \sqrt{1+3a_2} = \sqrt{1+3\cdot 2} = \sqrt{7}$$
$$a_4 = \sqrt{1+3a_3} = \sqrt{1+3\cdot\sqrt{7}} = \sqrt{1+3\sqrt{7}}$$

b)

1	1
2	2
3	2.64575
4	2.98952
5	3.1573
6	3.23603
7	3.27232
8	3.28892
9	3.29648
10	3.29991
11	3.30148

Lukujonon 11. jäsen on ensimmäinen, joka ylittää luvun 3,3.

907. Ensimmäinen välille [999, 9999] sijoittuva luvulla 7 jaollinen kokonaisluku on 1001, sillä $\frac{1001}{7}=143$.

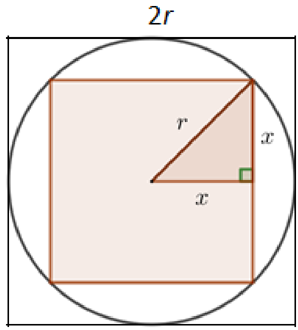
Kaikki luvulla 7 jaolliset välillä [999, 9999] olevat kokonaisluvut voidaan esittää muodossa $a_n = 1001 + (n - 1) \cdot 7 = 7n + 994$.

Selvitetään, kuinka mones lukujonon (a_n) jäsen ei vielä ylitä lukua 9999 hakemalla epäyhtälön $7n + 994 < 9999$ suurin positiivinen kokonaislukuratkaisu.

Epäyhtälön ratkaisu on $x < 1286{,}42\ldots$ Suurin tämän ehdon täyttävä kokonaisluku on siis 1286, joten lukujonon 1286. jäsen on suurin välille [999, 9999] sijoittuva luvulla 7 jaollinen kokonaisluku ($a_{1286} = 7 \cdot 1286 + 994 = 9996$).

Välillä [999, 9999] on siis 1286 luvulla 7 jaollista kokonaislukua.

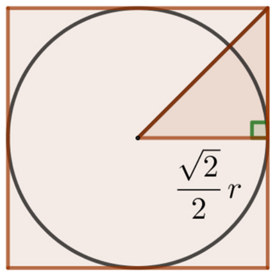
908. Olkoon isoimman neliön sivun pituus $2r$, $r > 0$, jolloin isoimman ympyrän säde on r ja sen pinta-ala πr^2.



Isoimman ympyrän, jonka säde on r, sisälle piirretyn neliön sivun pituuden puolikas x, $x > 0$, saadaan Pythagoraan lauseen avulla:

$x^2 + x^2 = r^2$, josta $x = \frac{\sqrt{2}}{2}r$.

Neliön sivun puolikas on samalla neliön sisälle piirretyn ympyrän säde.
Toiseksi isoimman ympyrän pinta-ala on siis $\pi(\frac{\sqrt{2}}{2}r)^2 = \frac{\pi r^2}{2}$.



Koska kuviota toistetaan täsmälleen samanlaisina, ympyröiden pinta-alat muodostavan geometrisen lukujonon $\pi r^2, \frac{\pi r^2}{2}, \frac{\pi r^2}{4}, \ldots$ jonka suhdeluku $q = \frac{1}{2}$.

Lukujonon yleinen jäsen on siis $a_n = \pi r^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Selvitetään, mikä on pienin kokonaisluku n, jolla $a_n < \frac{1}{1000\,000} \cdot \pi r^2$.

Ratkaistaan n yhtälöstä $\pi r^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{1000\,000} \cdot \pi r^2$ ja päätellään yhtälön ratkaisusta pienin ehdot täyttävä kokonaisluku.
Yhtälön ratkaisu on $n = 20{,}93\ldots$, josta pienin ehdot täyttävä kokonaisluku on 21.

Siis 21. ympyrä on ensimmäinen, jonka pinta-ala on alle miljoonasosa alkuperäisen ympyrän pinta-alasta.

9.2 Summa

LUVUN 9.2 YDINTEHTÄVÄT

909. **a)** Yhteenlaskettavat ovat aritmeettisen lukujonon $a_n = -2n + 5$ ensimmäiset jäsenet 3, 1, –1, –3, …, $-2n + 5$, … ja 3113.

Selvitetään yhtälön $-2n + 5 = -3113$ avulla, kuinka mones aritmeettisen lukujonon (3, 1, –1, 3, …) jäsen luku 3113 on.

$$-2n + 5 = -3113$$
$$-2n = -3118 \quad \| : (-2)$$
$$n = 1559$$

Summassa on siis 1559 ensimmäistä aritmeettisen lukujonon $a_n = -2n + 5$ jäsentä.

Summa $3 + 1 - 1 - 3 - \ldots + (-2n + 5) + \ldots - 3113$ on siis

$$S_{1559} = 1559 \cdot \frac{3 + (-3113)}{2} = -2\ 424\ 245.$$

b) Yhteenlaskettavat ovat geometrisen lukujonon $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ ensimmäiset jäsenet $3, 3 \cdot 2, 3 \cdot 2^2, 3 \cdot 2^3, \ldots, 3 \cdot 2^{n-1}, \ldots$ ja $3 \cdot 2^{10}$.

Lukujonon suhdeluku $q = \dfrac{3 \cdot 2}{3} = 2.$

Selvitetään yhtälön $3 \cdot 2^{n-1} = 3 \cdot 2^{10}$ avulla, kuinka mones geometrisen lukujonon $(3, 3 \cdot 2, 3 \cdot 2^2, 3 \cdot 2^3, \ldots)$ jäsen luku $3 \cdot 2^{10}$ on.

$$3 \cdot 2^{n-1} = 3 \cdot 2^{10} \quad \| : 3$$
$$2^{n-1} = 2^{10}$$
$$n - 1 = 10$$
$$n = 11$$

Summassa on siis 11 ensimmäistä geometrisen lukujonon $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ jäsentä.
Summa $3 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \ldots + 3 \cdot 2^{n-1} + \ldots + 3 \cdot 2^{10}$ on siis

$$S_{11} = \frac{3 \cdot (1 - 2^{11})}{1 - 2} = 6141.$$

Toinen tapa:
Yhteenlaskettavat ovat geometrisen lukujonon $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ ensimmäiset jäsenet $3, 3 \cdot 2, 3 \cdot 2^2, 3 \cdot 2^3, \ldots, 3 \cdot 2^{n-1}, \ldots$ ja $3 \cdot 2^{10}$.

Lausekkeesta $3 \cdot 2^{n-1}$ nähdään, että $q = 2$.
Koska $3 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \ldots + 3 \cdot 2^{n-1} + \ldots + 3 \cdot 2^{10}$
$= 3 \cdot 2^0 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \ldots + 3 \cdot 2^{n-1} + \ldots + 3 \cdot 2^{10}$
nähdään, että yhteenlaskettavia on 11.

Summa $3 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \ldots + 3 \cdot 2^{n-1} + \ldots + 3 \cdot 2^{10}$ on siis

$$S_{11} = \frac{3 \cdot (1 - 2^{11})}{1 - 2} = 6141.$$

910.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{6} \frac{3}{k} &= \frac{3}{1} + \frac{3}{2} + \frac{3}{3} + \frac{3}{4} + \frac{3}{5} + \frac{3}{6} \\
&= 3 + \frac{3}{2} + 1 + \frac{3}{4} + \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \\
&= 4 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + {}^{5)}\frac{3}{4} + {}^{4)}\frac{3}{5} \\
&= 4 + \frac{4}{2} + \frac{15}{20} + \frac{12}{20} \\
&= 6 + \frac{15}{20} + \frac{12}{20} \\
&= 6 + \frac{27}{20} \\
&= 7\frac{7}{20}
\end{aligned}$$

911. **a)** Yhteenlaskettavat ovat aritmeettisen lukujonon (5, 7, 9, …) ensimmäiset jäsenet.

Lukujonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 5$ ja erotusluku $d = 7 - 5 = 2$.
Lukujonon yleinen jäsen on $a_n = 5 + (n - 1) \cdot 2 = 5 + 2n - 2 = 2n + 3$.

Summassa on 15 yhteenlaskettavaa.
Summa voidaan kirjoittaa ∑-merkkiä käyttäen siis muodossa
$$\sum_{n=1}^{15}(2n+3).$$

Aritmeettisen summan kaavalla saadaan
$$S_{15} = 15 \cdot \frac{5+33}{2} = 285.$$

b) Yhteenlaskettavat ovat geometrisen lukujonon (1, 3, 9, ...) ensimmäiset jäsenet.

Lukujonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 1$ ja suhdeluku $q = 3$. Lukujonon yleinen jäsen on siis $a_n = 1 \cdot 3^{n-1} = 3^{n-1}$.

Selvitetään yhtälön $3^{n-1} = 3^{20}$ avulla, kuinka mones geometrisen lukujonon (1, 3, 9, …) jäsen luku 3^{20} on.
$$\begin{aligned} 3^{n-1} &= 3^{20} \\ n - 1 &= 20 \\ n &= 21 \end{aligned}$$

(tai $1 + 3 + 9 + \ldots 3^{20} = 3^0 + 3^1 + 3^2 + \ldots 3^{20}$, joten summassa on 21 yhteenlaskettavaa)

Summa voidaan kirjoittaa ∑-merkkiä käyttäen siis muodossa $\sum\limits_{n=1}^{21} 3^{n-1}$.

Geometrisen summan kaavalla saadaan
$$S_{21} = \frac{1(1-3^{21})}{1-3} = 5\ 230\ 176\ 601.$$

912. **a)** Kaikki luvuilla 2 ja 3 jaolliset luvut ovat jaollisia luvulla 2 · 3 = 6.
Ensimmäinen kolminumeroinen luvulla 6 jaollinen luku on 102, sillä
$\frac{102}{6}=17.$

Luvulla 6 jaolliset kolminumeroiset luvut ovat siis muotoa
$a_n = 102 + 6(n - 1) = 6n + 96.$
Selvitetään epäyhtälön avulla, mikä on suurin kokonaisluku, jolle
$6n + 96 \leq 999.$

$$
\begin{aligned}
6n + 96 &\leq 999 \\
6n &\leq 903 \quad \| :6 \\
n &\leq 150{,}5
\end{aligned}
$$

Suurin epäyhtälön toteuttava kokonaisluku on siis 150, joten kolminumeroisia luvulla 6 jaollisia lukuja on 150.

Lukujonon $a_n = 6n + 96$ 150. jäsen on $a_{150} = 6 \cdot 150 + 96 = 996.$

Ehdot täyttävien lukujen summa on siis $S_{150} = 150 \cdot \frac{102+996}{2} = 82350.$

b) Summassa 1 + 2 + 3 + 4 + … + 1000 on 1000 ensimmäistä positiivista kokonaislukua ja tämä aritmeettinen summa on
$S_{1000} = 1000 \cdot \frac{1+1000}{2} = 500500.$

Summassa 1 + 2 + 3 + 4 + … + 1000 on viidellä jaolliset luvut 5, 10, 15, …, 995 ja 1000. Nämä luvut voidaan esittää muodossa $a_n = 5n$.
Luku 1000 on lukujonon (a_n) 200. jäsen, sillä $a_{200} = 5 \cdot 200 = 1000.$

Viidellä jaollisten lukujen 5, 10, …, 995 ja 1000 aritmeettinen summa on $S_{200} = 200 \cdot \frac{5+1000}{2} = 100500.$

Jäljelle jäävien yhteenlaskettavien summa on siis
500500 – 100500 = 400000.

913. **a)** Summa $-1 + 2 + 5 + \ldots + 3n - 4 = 146\,171$ on aritmeettisen lukujonon $(-1, 2, 5, \ldots, 3n - 4, \ldots)$ n:n ensimmäisen jäsenen summa.

Ratkaistaan lukujonon jäsenten lukumäärä n, $n > 0$, aritmeettisen summan kaavalla $S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$:

$n \cdot \frac{-1+(3n-4)}{2} = 146171$, josta $n = 313$ (tai $n = -311{,}3\ldots$)

b) Summa $4 + 16 + \ldots + 4^n = 89\,478\,484$ on geometrisen lukujonon $(4, 16, \ldots, 4^n, \ldots)$ n:n ensimmäisen jäsenen summa.
Lukujonon suhdeluku on $q = \frac{16}{4} = 4$.

Ratkaistaan lukujonon jäsenten lukumäärä n, $n > 0$ summakaavasta
$S_n = \frac{a_1 \cdot (1-q^n)}{1-q}$.

Yhtälön $\frac{4(1-4^n)}{1-4} = 89\,478\,484$ ratkaisu on $n = 13$.

914. Säilyketölkit kerroksittain muodostavat aritmeettisen lukujonon $(1, 2, 3, \ldots)$, jossa lukujonon yleinen jäsen on $a_n = n$.

Summakaavasta $S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$ saadaan yhtälö $n \cdot \frac{1+n}{2} = 1000$, jonka ratkaisuna saadaan kerrosten lukumäärä n, $n > 0$.

Yhtälön ratkaisut ovat $n = 44{,}22\ldots$ (tai $n = -45{,}22\ldots$).
Säilyketölkeistä voidaan pinota siis 44 kerrosta.
Tähän rakennelmaan menee yhteensä $S_{44} = 44 \cdot \frac{1+44}{2} = 990$ tölkkiä, joten tölkkejä jää yli 10.

915. Vuosittaiset hiilidioksidipäästöt muodostavat geometrisen lukujonon. Valitaan jonon ensimmäiseksi jäseneksi vuoden 2018 hiilidioksidipäästö $0{,}95 \cdot 56$ (milj. tonnia).

Lasketaan taulukkolaskentaohjelmalla vuosien 2018–2050 hiilidioksidipäästöt ja näiden kokonaissumma, kun päästöt vähenevät 5 % vuodessa, eli tulevat 0,95.kertaisiksi.

Taulukkolaskenta

	A	B
1	Vuosi	Hiilidioksidipäästöt (milj. tonnia)
2	2018	53.2
3	2019	50.54
4	2020	48.01
5	2021	45.61
6	2022	43.33
7	2023	41.17
8	2024	39.11
9	2025	37.15
10	2026	35.29
11	2027	33.53
12	2028	31.85
13	2029	30.26
14	2030	28.75
15	2031	27.31
16	2032	25.94
17	2033	24.65
18	2034	23.41
19	2035	22.24
20	2036	21.13
21	2037	20.08
22	2038	19.07
23	2039	18.12
24	2040	17.21
25	2041	16.35
26	2042	15.53
27	2043	14.76
28	2044	14.02
29	2045	13.32
30	2046	12.65
31	2047	12.02
32	2048	11.42
33	2049	10.85
34	2050	10.31
35		
36		Vuosien 2018-2050 päästöt yht.
37		868.2

Vuoden 2050 hiilidioksidipäästöt ovat 10,3 miljoonaa tonnia, jos päästöjen väheneminen jatkuu samalla tavalla.

Vuosien 2018–2050 päästöt ovat yhteensä 868 miljoonaa tonnia.

Toinen tapa:
Vuosittaiset hiilidioksidipäästöt muodostavat geometrisen lukujonon. Valitaan jonon ensimmäiseksi jäseneksi vuoden 2018 hiilidioksidipäästö $0{,}95 \cdot 56 = 53{,}2$ (milj. tonnia).

Nyt $a_n = 53{,}2 \cdot 0{,}95^{n-1}$.
Vuonna 2050 päästöt ovat
$a_{33} = 53{,}2 \cdot 0{,}95^{32} = 10{,}305\ldots \approx 10{,}3$ miljoonaa tonnia.

Vuosien 2018 -2050 päästöt ovat yhteensä

$$S_{33} = \frac{53{,}2(1-0{,}95^{33})}{1-0{,}95} = 868{,}19\ldots \approx 868 \text{ miljoonaa tonnia.}$$

916. **a)** Aritmeettisen lukujonon 12. jäsen a_{12} voidaan esittää lukujonon 3. jäsenen a_3 ja erotusluvun d avulla:
$a_{12} = a_3 + 9d$ eli $166 = 13 + 9d$, josta $d = 17$.

$a_{12} = a_3 + 9d$ eli $166 = 13 + 9d$, josta $d = 17$.

Koska $a_3 = a_1 + 2d$, niin $13 = a_1 + 2 \cdot 17$ mistä $a_1 = -21$.

Lukujonon yleinen jäsen $a_n = a_1 + (n-1)d$ on siten
$a_n = -21 + (n-1) \cdot 17 = 17n - 38$.

Lukujonon (a_n) jäsenten $a_{15}, a_{16}, \ldots, a_{30}$ summa voidaan laskea lukujonon summien S_{30} ja S_{14} erotuksena. Lasketaan summissa tarvittavat lukujonon jäsenet a_{30} ja a_{14}:
$a_{30} = -21 + (30-1) \cdot 17 = 472$
$a_{14} = -21 + (14-1) \cdot 17 = 200$

$$S_{30} = 30 \cdot \frac{-21 + 472}{2} = 6765$$

$$S_{14} = 14 \cdot \frac{-21 + 200}{2} = 1253$$

Lukujonon (a_n) jäsenten $a_{15}, a_{16}, \ldots, a_{30}$ summa on siis
$S_{30} - S_{14} = 6765 - 1253 = 5512$.

Toinen tapa:
Koska lukujono on aritmeettinen, lukujonon jäsen saadaan lisäämällä edelliseen vakio d.
$a_{12} = a_3 + 9d$ eli $166 = 13 + 9d$, josta $d = 17$.

Nyt $a_{15} = a_{12} + 3d = 166 + 3 \cdot 17 = 217$ ja
$a_{30} = a_{12} + 18d = 166 + 18 \cdot 17 = 472$.

Summan ensimmäinen yhteenlaskettava on $a_{15} = 217$, viimeinen $a_{30} = 472$, ja yhteenlaskettavia lukuja on 16.
Aritmeettisen summan kaavalla saadaan

$$16 \cdot \frac{217 + 472}{2} = 5512.$$

b) Geometrisen lukujonon yleinen jäsen on $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, joten tiedoista $a_5 = 163\ 840$ ja $a_{10} = -5120$ saadaan yhtälöpari ja sen ratkaisuna a_1 ja q:

$$\begin{cases} a_1 \cdot q^{5-1} = 163\ 840 \\ a_1 \cdot q^{10-1} = -5120 \end{cases},$$

josta $a_1 = 2\ 621\ 440$ ja $q = -\frac{1}{2}$.

Lukujonon (a_n) jäsenten $a_{15}, a_{16}, \ldots, a_{30}$ summa voidaan laskea lukujonon summien S_{30} ja S_{14} erotuksena:

$$\begin{aligned} S_{30} - S_{14} &= \frac{2\ 621\ 440 \cdot (1-(-\frac{1}{2})^{30})}{1-(-\frac{1}{2})} - \frac{2\ 621\ 440 \cdot (1-(-\frac{1}{2})^{14})}{1-(-\frac{1}{2})} \\ &= \frac{109225}{1024} \\ &= 106\frac{681}{1024} \end{aligned}$$

Lukujonon (a_n) jäsenten $a_{15}, a_{16}, \ldots, a_{30}$ summa on siis $S_{30} - S_{14} = 6765 - 1253 = 5512$.

Toinen tapa:

Koska lukujono on geometrinen, lukujonon jäsen saadaan kertomalla edellinen vakiolla q.

$a_{10} = a_5 \cdot q^5$ eli $-5120 = 163840 \cdot q^5$, josta $q = -\frac{1}{2}$.

Nyt $a_{15} = a_{10} \cdot q^5 = -5120 \cdot (-\frac{1}{2})^5 = 160$.

Summan ensimmäinen yhteenlaskettava on $a_{15} = 160$,

yhteenlaskettavia lukuja on 16 ja $q = -\frac{1}{2}$.

Geometrisen summan kaavalla saadaan

$$\frac{160(1-(-\frac{1}{2})^{16})}{1-(-\frac{1}{2})} = \frac{109225}{1024} = 106\frac{681}{1024}.$$

Luvun 9 vahvistavat ja syventävät tehtävät

VAHVISTAVAT TEHTÄVÄT

917. **a)** Aritmeettisesta lukujonosta tiedetään $a_3 = 6$ ja $a_5 = 12$. Lukujonon viides jäsen saadaan, kun kolmanteen jäseneen lisätään erotusluku d kaksi kertaa: $a_5 = a_3 + 2d$.
Nyt $12 = 6 + 2d$, josta $2d = 6$ ja edelleen $d = 3$.

Lukujonon kolmas jäsen saadaan, kun ensimmäiseen jäseneen lisätään erotusluku d kaksi kertaa: $a_3 = a_1 + 2d$.
Siis $6 = a_1 + 2 \cdot 3$, josta $a_1 = 0$.

Lukujonon toinen jäsen saadaan, kun ensimmäiseen jäseneen lisätään erotusluku d: $a_2 = a_1 + d$.
Siis $a_2 = 0 + 3 = 3$.

Loput puuttuvat lukujonon jäsenet ovat
$a_4 = a_3 + d = 6 + 3 = 9$
$a_6 = a_5 + d = 12 + 3 = 15$
$a_7 = a_6 + d = 15 + 3 = 18$.

Siis $\underline{0}$, $\underline{3}$, 6, $\underline{9}$, 12, $\underline{15}$, $\underline{18}$, …

Aritmeettisen lukujonon yleinen jäsen $a_n = a_1 + (n - 1)d$ on siten
$a_n = 0 + (n - 1) \cdot 3 = 3n - 3$ ja $a_{10} = 3 \cdot 10 - 3 = 27$.
Lukujonon kymmenen ensimmäisen jäsenen summa on

$$S_{10} = 10 \cdot \frac{0 + 27}{2} = 135.$$

Toinen tapa:
Aritmeettisesta lukujonosta tiedetään $a_3 = 6$ ja $a_5 = 12$. Lukujonon viides jäsen saadaan, kun kolmanteen jäseneen lisätään erotusluku d kaksi kertaa: $a_5 = a_3 + 2d$.
Nyt $12 = 6 + 2d$, josta $2d = 6$ ja edelleen $d = 3$.

$a_2 = a_3 - d = 6 - 3 = 3$
$a_1 = a_2 - d = 3 - 3 = 0$
$a_4 = a_3 + d = 6 + 3 = 9$
$a_6 = a_5 + d = 12 + 3 = 15$
$a_7 = a_6 + d = 15 + 3 = 18.$

Siis $\underline{0}$, $\underline{3}$, 6, $\underline{9}$, 12, $\underline{15}$, $\underline{18}$, …

$a_{10} = a_7 + 3d = 18 + 3 \cdot 3 = 27.$
Lukujonon kymmenen ensimmäisen jäsenen summa on
$S_{10} = 10 \cdot \frac{0+27}{2} = 135.$

b) Geometrisesta lukujonosta tiedetään $a_3 = 6$ ja $a_5 = 12$. Lukujonon viides jäsen saadaan, kun kolmas jäsen kerrotaan suhdeluvulla q kaksi kertaa: $a_5 = a_3 \cdot q^2$.
Nyt $12 = 6 \cdot q^2$, josta $q^2 = 2$ ja edelleen $q = \sqrt{2}$ tai $q = -\sqrt{2}$.

Tapaus $q = \sqrt{2}$:
Lukujonon kolmas jäsen saadaan, kun ensimmäinen jäsen kerrotaan suhdeluvulla q kaksi kertaa: $a_3 = a_1 \cdot q^2$.
Siis $6 = a_1 \cdot (\sqrt{2})^2$, josta $6 = a_1 \cdot 2$ ja edelleen $a_1 = 3$.

Lukujonon toinen jäsen saadaan, kun ensimmäinen jäsen kerrotaan suhdeluvulla q: $a_2 = a_1 \cdot q$.
Siis $a_2 = 3 \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.

Loput puuttuvat lukujonon jäsenet ovat

$a_4 = a_3 \cdot q = 6 \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

$a_6 = a_5 \cdot q = 12 \cdot \sqrt{2} = 12\sqrt{2}$

$a_7 = a_6 \cdot q = 12\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 24.$

Siis $\underline{3}, \underline{\ 3\sqrt{2}}, \ 6, \underline{\ 6\sqrt{2}}, \ 12, \underline{12\sqrt{2}}, \ 24, \ ...$

Lukujonon kymmenen ensimmäisen jäsenen summa on

$$\begin{aligned} S_{10} &= \frac{3(1-(\sqrt{2})^{10})}{1-\sqrt{2}} \\ &= \frac{3(1-((\sqrt{2})^2)^5}{1-\sqrt{2}} \\ &= \frac{3(1-2^5)}{1-\sqrt{2}} \\ &= \frac{3(1-32)}{1-\sqrt{2}} \\ &= \frac{-93}{-(\sqrt{2}-1)} \\ &= \frac{93}{\sqrt{2}-1}. \end{aligned}$$

Tapaus $q = -\sqrt{2}$:

Lukujonon kolmas jäsen saadaan, kun ensimmäinen jäsen kerrotaan suhdeluvulla q kaksi kertaa: $a_3 = a_1 \cdot q^2$.

Siis $6 = a_1 \cdot (-\sqrt{2})^2$, josta $6 = a_1 \cdot 2$ ja edelleen $a_1 = 3$.

Lukujonon toinen jäsen saadaan, kun ensimmäinen jäsen kerrotaan suhdeluvulla q: $a_2 = a_1 \cdot q$.

Siis $a_2 = 3 \cdot (-\sqrt{2}) = -3\sqrt{2}$.

Loput puuttuvat lukujonon jäsenet ovat

$a_4 = a_3 \cdot q = 6 \cdot (-\sqrt{2}) = -6\sqrt{2}$

$a_6 = a_5 \cdot q = 12 \cdot (-\sqrt{2}) = -12\sqrt{2}$

$a_7 = a_6 \cdot q = -12\sqrt{2} \cdot (-\sqrt{2}) = 24.$

Siis $\underline{3}, \underline{\ -3\sqrt{2}}, \ 6, \underline{\ -6\sqrt{2}}, \ 12, \underline{-12\sqrt{2}}, \ 24, \ ...$

Lukujonon kymmenen ensimmäisen jäsenen summa on

$$\begin{aligned}
S_{10} &= \frac{3(1-(-\sqrt{2})^{10})}{1-(-\sqrt{2})} \\
&= \frac{3(1-((-\sqrt{2})^2)^5}{1+\sqrt{2}} \\
&= \frac{3(1-2^5)}{1+\sqrt{2}} \\
&= \frac{3(1-32)}{1+\sqrt{2}} \\
&= \frac{-93}{\sqrt{2}+1} \\
&= -\frac{93}{\sqrt{2}+1}.
\end{aligned}$$

Toinen tapa:
Geometrisesta lukujonosta tiedetään $a_3 = 6$ ja $a_5 = 12$. Lukujonon viides jäsen saadaan, kun kolmas jäsen kerrotaan suhdeluvulla q kaksi kertaa: $a_5 = a_3 \cdot q^2$.
Nyt $12 = 6 \cdot q^2$, josta $q^2 = 2$ ja edelleen $q = \sqrt{2}$ tai $q = -\sqrt{2}$.

Tapaus $q = \sqrt{2}$:

$$a_2 = \frac{a_3}{q} \overset{\sqrt{2})}{=} \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

$$a_1 = \frac{a_2}{q} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 3$$

$$a_4 = a_3 \cdot q = 6 \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

$$a_6 = a_5 \cdot q = 12 \cdot \sqrt{2} = 12\sqrt{2}$$

$$a_7 = a_6 \cdot q = 12\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 24.$$

Siis $\underline{3}$, $\underline{3\sqrt{2}}$, 6, $\underline{6\sqrt{2}}$, 12, $\underline{12\sqrt{2}}$, 24, ...

Lukujonon kymmenen ensimmäisen jäsenen summa on

$$S_{10} = \frac{3(1-(\sqrt{2})^{10})}{1-\sqrt{2}} = \frac{-93}{1-\sqrt{2}} = \frac{93}{-(1-\sqrt{2})} = \frac{93}{\sqrt{2}-1}.$$

Tapaus $q = -\sqrt{2}$:

$$a_2 = \frac{a_3}{q} = {}^{\sqrt{2})}\ \frac{6}{-\sqrt{2}} = -\frac{6\sqrt{2}}{2} = -3\sqrt{2}$$

$$a_1 = \frac{a_2}{q} = \frac{-3\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = 3$$

$$a_4 = a_3 \cdot q = 6 \cdot (-\sqrt{2}) = -6\sqrt{2}$$

$$a_6 = a_5 \cdot q = 12 \cdot (-\sqrt{2}) = -12\sqrt{2}$$

$$a_7 = a_6 \cdot q = -12\sqrt{2} \cdot (-\sqrt{2}) = 24.$$

Siis $\underline{3}$, $\underline{-3\sqrt{2}}$, 6, $\underline{-6\sqrt{2}}$, 12, $\underline{-12\sqrt{2}}$, 24, ...

Lukujonon kymmenen ensimmäisen jäsenen summa on

$$S_{10} = \frac{3(1-(-\sqrt{2})^{10})}{1-(-\sqrt{2})} = \frac{-93}{1+\sqrt{2}} = -\frac{93}{\sqrt{2}+1}.$$

918. A: Jos lukujono on aritmeettinen peräkkäisten jäsenten erotus on vakio, joka ei riipu järjestysnumerosta n.
$a_{n+1} - a_n = (3 - (n + 1)) - (3 - n) = 3 - n - 1 - 3 + n = -1$

Peräkkäisten jäsenten erotus on vakio, joka ei riipu järjestysnumerosta n. Lukujono $a_n = 3 - n$ on siis aritmeettinen.

Jos lukujono on geometrinen, niin peräkkäisten jäsenten suhde on vakio, joka ei riipu järjestysnumerosta n.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3-(n+1)}{3-n} = \frac{2-n}{3-n}$$

Peräkkäisten jäsenten suhde riippuu järjestysnumerosta n. Lukujono $a_n = 3 - n$ ei siis voi olla geometrinen.

Koska lukujono on aritmeettinen ja erotusluku $d = -1$, niin lukujono $a_n = 3 - n$ ei voi olla vakiojono.

Siis A–I

B: Aloitetaan tutkimalla peräkkäisten jäsenten erotusta
$a_{n+1} - a_n = \sin(\pi(n + 1)) - \sin(\pi n) = \sin(k\pi) = 0$
Peräkkäisten jäsenten erotus on vakio 0, joka ei riipu järjestysnumerosta n.
Lukujono $a_n = \sin(\pi n)$ on aritmeettinen.

Koska lukujonon $a_n = \sin(\pi n)$ jokainen jäsen on 0, ei peräkkäisten jäsenten suhdetta voi määrittää. Lukujono $a_n = \sin(\pi n)$ ei siis voi olla geometrinen.

Lukujono $a_n = \sin(\pi n)$ on vakiojono (0, 0, 0, 0, …).

Siis B–I, III

C: $a_{n+1} - a_n = e^{n+1} - e^n$, joka riippuu järjestysnumerosta n. Lukujono $a_n = e^n$ ei voi olla aritmeettinen.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e^{n+1}}{e^n} = e^{n+1-n} = e^1 = e$$

Peräkkäisten jäsenten suhde on vakio eli sen arvo ei riipu järjestysnumerosta n. Lukujono $a_n = e^n$ on siis geometrinen.

Lukujono on e, e^2, e^3, … ei voi olla vakiojono.

Siis C–II

D: Osamäärä on $\frac{a_{100}}{a_{99}} = \frac{\cancel{5} \cdot 7^{100}}{\cancel{5} \cdot 7^{99}} = 7^{100-99} = 7^1 = 7.$

Siis D–II

Toinen tapa:
Lausekkeesta $a_n = 5 \cdot 7^n$ nähdään, että lukujono on geometrinen ja $q = 7$. Näin ollen peräkkäisten jäsenten a_{100} ja a_{99} suhde on 7.

E: Erotus
$$\begin{aligned} a_{100} - a_{99} &= (5 + 7 \cdot 100) - (5 + 7 \cdot 99) \\ &= 5 + 7 \cdot 100 - 5 - 7 \cdot 99 \\ &= 100 \cdot 7 - 99 \cdot 7 \\ &= (100 - 99) \cdot 7 \\ &= 1 \cdot 7 \\ &= 7. \end{aligned}$$

Siis E–II

Toinen tapa:
Lausekkeesta $a_n = 5 + 7n$ nähdään, että lukujono on aritmeettinen ja $d = 7$. Näin ollen peräkkäisten jäsenten a_{100} ja a_{99} erotus on 7.

F: Summa $1 + 2 + 3 + \ldots + 99 + 100$ on aritmeettisen lukujonon $(1, 2, 3, \ldots, 99, 100, \ldots)$ sadan ensimmäisen jäsenen summa.

$$S_{100} = 100 \cdot \frac{1+100}{2} = 5050.$$

Siis F–III

919. **a)** Lukujono (5, 10, 15, 20, …, 5n) on aritmeettinen. Määritetään n:n, $n \geq 1$, arvo summakaavan $S_n = n \cdot \frac{5+5n}{2}$ ja tiedon $S_n = 1050$ avulla.

$$
\begin{aligned}
n \cdot \frac{5+5n}{2} &= 1050 \quad \| \cdot 2 \\
n(5+5n) &= 2 \cdot 1050 \\
5n^2 + 5n - 2100 &= 0 \quad \| :5 \\
n^2 + n - 420 &= 0 \\
n &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-420)}}{2 \cdot 1} \\
n &= \frac{-1 \pm \sqrt{1681}}{2} \\
n &= \frac{-1 \pm 41}{2} \\
n &= \frac{-1+41}{2} \quad (\text{tai } n = \frac{-1-41}{2}) \\
n &= 20
\end{aligned}
$$

b) Kirjoitetaan yhtälön vasemmanpuolen lauseke tulomuotoon:
$3^x + 2 \cdot 3^x + 3 \cdot 3^x + 4 \cdot 3^x + \ldots + 30 \cdot 3^x = (1 + 2 + 3 + \ldots + 30) \cdot 3^x$.

Summa $1 + 2 + 3 + \ldots + 30$ on

$S_{30} = 30 \cdot \frac{1+30}{2} = 465$, joten yhtälö

$3^x + 2 \cdot 3^x + 3 \cdot 3^x + 4 \cdot 3^x + \ldots + 30 \cdot 3^x = 15 \cdot 31 \cdot 81$
voidaan kirjoittaa muotoon
$465 \cdot 3^x = 15 \cdot 31 \cdot 81$ josta saadaan $3^x = 81$.

Koska $3^4 = 81$, niin yhtälön ratkaisu on $x = 4$.

c) Geometrisen lukujonon ensimmäinen jäsen $a_1 = \frac{3}{100}$ ja suhdeluku

$$q = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{3}{100}} = \frac{3}{10} \cdot \frac{100}{3} = 10.$$

Geometrisen lukujonon yleinen jäsen on

$$a_n = \frac{3}{100} \cdot 10^{n-1} = \frac{3}{100} \cdot 10^n \cdot 10^{-1} = \frac{3}{100} \cdot 10^n \cdot \frac{1}{10} = \frac{3}{1000} \cdot 10^n.$$

Selvitetään kysytty *n*:n arvo yleisen termin $\frac{3}{1000} \cdot 10^n$ avulla.

Funktio 10^x on kasvava funktio, joten lausekkeen $\frac{3}{1000} \cdot 10^n$ arvot kasvavat tuntemattoman *n* kasvaessa.

Koska $\frac{3}{1000} \cdot 10^9 = 3\ 000\ 000$ ja $\frac{3}{1000} \cdot 10^{10} = 30\ 000\ 000,$ niin pienin ehdot täyttävä kokonaisluku *n* on 10.

Toinen tapa:
Geometrisen lukujonon

ensimmäinen jäsen $a_1 = \frac{3}{100}$ ja suhdeluku $q = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{3}{100}} = 10.$

Lukujonon yleinen jäsen on siis $a_n = \frac{3}{100} \cdot 10^{n-1}$

Selvitetään kysytty *n*:n arvo yhtälön avulla.

$$\begin{aligned}
\frac{3}{100} \cdot 10^{n-1} &= 3\ 000\ 001 \quad \| \cdot \frac{100}{3} \\
10^{n-1} &= \frac{300000100}{3} \\
n-1 &= \log_{10} \frac{300000100}{3} \\
n-1 &= 8{,}0000001.... \\
n &= 9{,}0000001...
\end{aligned}$$

Koska lukujonon jäsen saadaan kertomalla edellistä luvulla 10, lukujonon jäsenet ovat sitä suurempia mitä suurempi *n* on. Siis ensimmäisen luvun 3000001 ylittävä jäsen on lukujonon 10. luku.

920. **a)** Kolmion kaksi muuta kulmaa ovat 100° + *d* ja 100° + 2*d*.
Koska kolmion kulmien summa on 180°, saadaan yhtälö
$100 + (100 + d) + (100 + 2d) = 180$, josta $d = -40$.

Kysytyt kulmat ovat siis
100°, 100° – 40° = 60° ja 100° – 2 · 40° = 20°.

Toinen tapa:
Kolmion suurin kulma on 100°, joten kolmion kulmat ovat 100° – 2*d*, 100° – *d* ja 100°.

Koska kolmion kulmien summa on 180°, saadaan yhtälö
$(100 - 2d) + (100 - d) + 100 = 180$, josta $d = 40$.

Kysytyt kulmat ovat siis
100° – 2 · 40° = 20°, 100° – 40° = 60° ja 100°.

b) Kolmion kaksi muuta kulmaa ovat $\frac{9\pi}{13} \cdot q$ ja $\frac{9\pi}{13} \cdot q^2$.
Koska kolmion kulmien summa on π, saadaan yhtälö
$\frac{9\pi}{13} + \frac{9\pi}{13} \cdot q + \frac{9\pi}{13} \cdot q^2 = \pi$, josta $q = -\frac{4}{3}$ tai $q = \frac{1}{3}$.

Koska kulmat positiivisia, niin $q = \frac{1}{3}$.

Kysytyt kulmat ovat $\frac{9\pi}{13}$, $\frac{9\pi}{13} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3\pi}{13}$ ja $\frac{9\pi}{13} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{9\pi}{13} \cdot \frac{1}{9} = \frac{\pi}{13}$.

Toinen tapa:

$\frac{9\pi}{13}=\frac{9\cdot 180°}{13}=124,6...°$, joten $\frac{9\pi}{13}$ on kolmion suurin kulma.

Kolmion kulmat ovat siis $\frac{\frac{9\pi}{13}}{q^2}$, $\frac{\frac{9\pi}{13}}{q}$, ja $\frac{9\pi}{13}$.

Koska kolmion kulmien summa on π, saadaan yhtälö

$\frac{\frac{9\pi}{13}}{q^2}+\frac{\frac{9\pi}{13}}{q}+\frac{9\pi}{13}=\pi$, josta $q = 3$.

Kysytyt kulmat ovat siis $\frac{\frac{9\pi}{13}}{3^2}=\frac{\pi}{13}$, $\frac{\frac{9\pi}{13}}{3}=\frac{3\pi}{13}$ ja $\frac{9\pi}{13}$.

921. **a)** Nyt $a_1 = -5$ ja $a_n = a_{n-1} + 2$, josta $a_n - a_{n-1} = 2$. Koska peräkkäisten jäsenten erotus on vakio, joka ei riipu järjestysluvusta n, lukujono on aritmeettinen. Lukujonon yleinen jäsen on siis
$a_n = -5 + (n - 1) \cdot 2 = 2n - 7$.

b) Lueteltujen jäsenten perusteella juurrettavana oleva luku on edellinen juurrettava kaksinkertaisena.
Siis

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = \sqrt{2 \cdot a_1} = \sqrt{2 \cdot 1} = \sqrt{2}$$
$$a_3 = \sqrt{2 \cdot a_2} = \sqrt{2 \cdot \sqrt{2}} = \sqrt{2\sqrt{2}}$$
$$a_4 = \sqrt{2 \cdot a_3} = \sqrt{2 \cdot \sqrt{2\sqrt{2}}} = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}},$$

joten rekursiokaava on $a_1 = 1$ ja $a_n = \sqrt{2 \cdot a_{n-1}}$, $n = 2, 3, \ldots$

922. **a)** Lukujonon jäsenten osoittajat näyttäisivät olevan aritmeettisen lukujonon (1, 2, 3, …) jäseniä ja nimittäjät aritmeettisen lukujonon (3, 5, 7, …) jäseniä.

Osoittaja: Lukujono on muotoa $a_n = n$.

Nimittäjä: Ensimmäinen jäsen on $a_1 = 3$ ja erotusluku $d = 7 - 5 = 2$. Lukujonon yleinen jäsen on $a_n = 3 + (n - 1) \cdot 2 = 2n + 1$.

Lukujonon $(a_n) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \frac{5}{11}, ...\right)$ analyyttinen sääntö on esimerkiksi $a_n = \frac{n}{2n+1}$.

Lukujonon 100. jäsen on tällöin $a_{100} = \frac{100}{2 \cdot 100 + 1} = \frac{100}{201}$.

b) Lukujono (2, 0, 2, …) voidaan kirjoittaa muotoon (1 + 1, 1 − 1, 1 + 1, 1 − 1 …), jolloin nähdään, että jokaisessa jäsenessä on ensin luku 1, johon sitten joko lisätään tai vähennetään luku 1, Luvut 1, −1, 1, −1, … ovat lukujonon $(-1)^{n-1}$ jäseniä.

Lukujonon $(a_n) = (2, 0, 2, 0, …)$ analyyttinen sääntö on esimerkiksi $a_n = 1 + (-1)^{n-1}$.

Lukujonon 100. jäsen on tällöin
$a_{100} = 1 + (-1)^{100-1} = 1 + (-1)^{99} + 1 = 1 - 1 = 0$.

923. **a)** Lukujono on geometrinen, jos sen peräkkäisten jäsenten suhde on vakio, joka ei riipu järjestysnumerosta n.

Nyt $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{\dfrac{3^{(n+1)-1}}{4^{n+1}}}{\dfrac{3^{n-1}}{4^n}} = \dfrac{3}{4}$, joka ei riipu järjestysnumerosta n.

Lukujono $a_n = \dfrac{3^{n-1}}{4^n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ on siis geometrinen.

Ensimmäinen jäsen, joka alittaa luvun 0,001 saadaan epäyhtälön $\dfrac{3^{n-1}}{4^n} < 0{,}001$ avulla. Epäyhtälön ratkaisu on $n > 20{,}19\ldots$
Siis jäsenestä 21 alkaen kaikki lukujonon jäsenet ovat pienempiä kuin 0,001.

21. jäsen alittaa ensimmäisenä luvun 0,001.

b) Lukujono on aritmeettinen, jos sen peräkkäisten jäsenten erotus on vakio joka ei riipu järjestysnumerosta n.

Nyt $a_{n+1} - a_n = (3 + 2(n + 1)) - (3 + 2n) = 2$, joka ei riipu järjestysnumerosta n.
Lukujono $a_n = 3 + 2n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ on siis aritmeettinen.

Lukujonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 3 + 2 \cdot 1 = 5$ ja $d = 2$.
Lasketaan peräkkäisten jäsenten $a_{25}, a_{26}, \ldots, a_{90}$ summa summien S_{90} ja S_{24} erotuksena.

Nyt $a_{90} = 3 + 2 \cdot 90 = 183$ ja $a_{24} = 3 + 2 \cdot 24 = 51$, joten
$S_{90} = 90 \cdot \dfrac{5+183}{2} = 8460$ ja $S_{24} = 24 \cdot \dfrac{5+51}{2} = 672$, joten peräkkäisten jäsenten $a_{25}, a_{26}, \ldots, a_{90}$ summa on $S_{90} - S_{24} = 8460 - 672 = 7788$.

Toinen tapa:
Lukujono on aritmeettinen, jos sen peräkkäisten jäsenten erotus on vakio joka ei riipu järjestysnumerosta n.

Nyt $a_{n+1} - a_n = (3 + 2(n + 1)) - (3 + 2n) = 2$, joka ei riipu järjestysnumerosta n.
Lukujono $a_n = 3 + 2n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ on siis aritmeettinen.

Aritmeettisessa summassa $a_{25} + a_{26} + \ldots + a_{90}$ ensimmäinen yhteenlaskettava on $a_{25} = 3 + 2 \cdot 25 = 53$, viimeinen yhteenlaskettava on $a_{90} = 3 + 2 \cdot 90 = 183$ ja yhteenlaskettavia lukuja on 66.
Summa on siis $66 \cdot \frac{53+183}{2} = 7788$.

924. Olkoon $P(x) = ax + b$, $a \neq 0$.
Osoitetaan, että peräkkäisten jäsenten $P(x + 1)$ ja $P(x)$ erotus on aina vakio, kun x on positiivinen kokonaisluku.

Nyt $P(x + 1) = a(x + 1) + b = ax + a + b$ ja $P(x) = ax + b$, joten
$P(x + 1) - P(x) = (ax + a + b) - (ax + b) = ax + a + b - ax - b = a$.

Koska a on jokin reaaliluku eli vakio, niin lukujono $P(1), P(2), P(3), \ldots$ on aritmeettinen.

925. Kun rekursiokaavan yhtälö $a_n = -2 \cdot a_{n-1}$ kirjoitetaan muotoon $\frac{a_n}{a_{n-1}} = -2$, nähdään peräkkäisten jäsenten suhteen olevan järjestysnumerosta riippumaton vakio –2.

Lukujono (a_n) on siis geometrinen ja sen ensimmäinen jäsen $a_1 = 3$ ja $q = -2$. Lukujonon yleinen jäsen on $a_n = 3 \cdot (-2)^{n-1}$.

$$\sum_{n=1}^{15} a_n = \sum_{n=1}^{15} 3 \cdot (-2)^{n-1} = \frac{3 \cdot (1-(-2)^{15})}{1-(-2)} = 32769.$$

926. **a)** Lasketaan tilanne istutuksen jälkeen, lisäämällä istutusta edeltävään tilanteeseen 150 taimenta. Ennen istutusta taimenista on jäljellä kolmen neljännestä eli 75 %.

Taulukkolaskenta

	A	B	C
1	Istutuksen numero	Taimenia ennen istutusta	Taimenia istutuksen jälkeen
2	1	0	150
3	2	112.5	262.5
4	3	196.88	346.88
5	4	260.16	410.16
6	5	307.62	457.62
7	6	343.21	493.21
8	7	369.91	519.91
9	8	389.93	539.93
10	9	404.95	554.95
11	10	416.21	566.21

Taimenia on siis juuri ennen 10:tä istutusta 416.

b) Ennen toista istutusta taimenia on
$0{,}75 \cdot 150$
ja istutuksen jälkeen $0{,}75 \cdot 150 + 150$.

Ennen kolmatta istutusta taimenia on
$0{,}75 \cdot (0{,}75 \cdot 150 + 150) = 0{,}75^2 \cdot 150 + 0{,}75 \cdot 150$
ja kolmannen istutuksen jälkeen $0{,}75^2 \cdot 150 + 0{,}75 \cdot 150 + 150$.

Ennen neljättä istutusta taimenia on
$0{,}75 \cdot (0{,}75^2 \cdot 150 + 0{,}75 \cdot 150 + 150)$
$= 0{,}75^3 \cdot 150 + 0{,}75^2 \cdot 150 + 0{,}75 \cdot 150$.

Koska taimenten lukumäärän laskeminen jatkuu samalla tavalla, yhteenlaskettavat voidaan ajatella geometrisen lukujonon $(0{,}75 \cdot 150,\ 0{,}75^2 \cdot 150,\ 0{,}75^3 \cdot 150,\ 0{,}75^3 \cdot 150,\ \ldots)$ jäseneksi.

Huomaa, että ensimmäinen yhteenlaskettava on tässä 2. vuoden taimenkannan suuruus ennen 2. vuoden istutusta.

Geometrisen summan kaavalla voidaan muodostaa lauseke taimenten lukumääräksi, jossa lukujonon n:s jäsen on taimenten lukumäärä juuri ennen $n + 1$:ttä istutusta:

$$a_n = \frac{0,75 \cdot 150 \cdot (1 - 0,75^n)}{1 - 0,75} = 450 - 450 \cdot 0,75^n.$$

Nyt taimenten lukumäärä juuri ennen 10:ttä istutusta on

$$a_9 = 450 - 450 \cdot 0,75^9 = 416,2...$$

Taimenia on siis juuri ennen 10:ttä istutusta 416.

927. **a)** Lukujono $(a_n) = (1, 3, 5, \ldots)$ on muotoa $a_n = 1 + (n - 1) \cdot 2 = 2n - 1$. Lukujonon (b_n) 10. jäsen on $b_{10} = 2^{2 \cdot 10 - 1} = 2^{19} = 524\,288$.

Osoitetaan, että lukujonon (b_n) peräkkäisten jäsenten suhde on vakio järjestysnumerosta n riippumatta:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{2^{a_{n+1}}}{2^{a_n}} = \frac{2^{2(n+1)-1}}{2^{2n-1}} = \frac{2^{2n+1}}{2^{2n-1}} = 2^{2n+1-(2n-1)} = 2^{2n+1-2n+1} = 2^2 = 4.$$

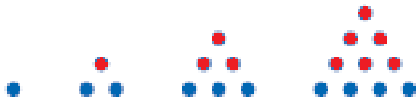
Lukujonon (b_n) peräkkäisten jäsenten suhde on järjestysnumerosta n riippumaton vakio 4, joten lukujono on geometrinen.

b) Aritmeettisen lukujonon (x_n) yleinen jäsen on $x_n = x_1 + (n - 1)d$. Osoitetaan, että lukujonon (y_n) peräkkäisten jäsenten suhde on vakio järjestysnumerosta n riippumatta:

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{k^{x_1 + (n+1-1)d}}{k^{x_1 + (n-1)d}} = k^d.$$

Koska $k \neq 0$ ja $d \in \mathbb{R}$, niin k^d on nollasta eroava vakio. Siis lukujonon (y_n) peräkkäisten jäsenten suhde on vakio järjestysnumerosta n riippumatta, joten lukujono (y_n) on geometrinen.

928. **a)** Huomataan, että seuraava kolmio saadaan, kun edelliseen kolmioon lisätään uusi rivi.



$a_1 = 1$
$a_2 = 1 + 2 = 3$
$a_3 = 1 + 2 + 3 = 6$
$a_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$
…

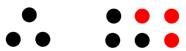
Kolmioluku on aritmeettisen lukujonon ensimmäisten jäsenten summa $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots$ Jossa lukujonon jäsen $a_n = n$.

Nyt n:s kolmioluku voidaan esittää summana
$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + n$, jossa on n yhteenlaskettavaa.
Aritmeettisen summan kaavalla saadaan

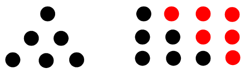
$$S_{100} = 100 \cdot \frac{1+100}{2} = 5050 \text{ ja}$$

$$S_n = n\frac{1+n}{2} = \frac{n+n^2}{2}.$$

Toinen tapa:
Hahmotellaan kolmiolukujen sääntöjä pisteiden avulla.
Kun $n = 2$, niin pisteitä on kolme. Sijoitetaan pisteet toisella tapaa ja lisätään kuvioon samat pisteet toisella värillä:



Kun $n = 3$, niin pisteitä on kuusi. Sijoitetaan pisteet toisella tapaa ja lisätään kuvioon samat pisteet toisella värillä:



Kuvioiden perusteella nähdään, että pisteiden määrä on puolet muodostuvan suorakulmion pinta-alasta. Suorakulmion kanta on $n + 1$ ja korkeus n.

Kun $n = 2$, niin pisteiden määrä on $\frac{2 \cdot 1}{2} = 1$.

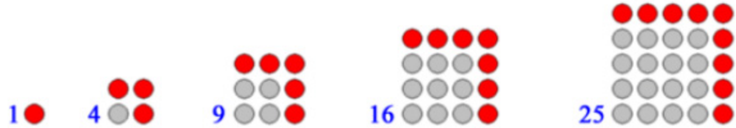
Kun $n = 2$, niin pisteiden määrä on $\frac{3 \cdot 2}{2} = 3$.

Kun $n = 3$, niin pisteiden määrä on $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$.

100:s kolmioluku on siten $\frac{101 \cdot 100}{2} = 5050$.

n:s kolmioluku on $\frac{(n+1)n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$.

b) Neliöluvut voidaan nähdä summina oheisten kuvien mukaisesti.



$a_1 = 1$
$a_2 = 4 = 1 + 3$
$a_3 = 9 = 1 + 3 + 5$
$a_4 = 16 = 1 + 3 + 5 + 7$
$a_5 = 25 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$
…

Neliöluku on aritmeettisen lukujonon ensimmäisten jäsenten summa
$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots$
Lukujonon yleinen jäsen $a_n = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots + (2n - 1)$.

Nyt n:s neliöluku n^2 voidaan esittää summana
$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots + (2n - 1)$, jossa on n yhteenlaskettavaa.
Aritmeettisen summan kaavalla saadaan $S_n = n\frac{1+(2n-1)}{2} = n\frac{2n}{2} = n^2$.

929. Olkoon aritmeettisen lukujonon kolme peräkkäistä jäsentä $a - d$, a ja $a + d$. Nyt jäsenten $a - d$ ja $a + d$ keskiarvo on $\frac{(a-d)+(a+d)}{2} = \frac{2a}{2} = a$.
Siis kahden muun jäsenen keskiarvo on yhtä suuri kuin keskimmäisin jäsen.

930. Summassa $\ln 2 + \ln 4 + \ln 8 + \ldots + \ln 2^n + \ldots + \ln 2^{100}$ on yhteensä 100 yhteenlaskettavaa.

$\ln 2 + \ln 2^2 + \ln 2^3 + \ldots + \ln 2^n + \ldots + \ln 2^{100}$
$= 1 \cdot \ln 2 + 2 \cdot \ln 2 + 3 \cdot \ln 2 + \ldots + n \cdot \ln 2 + \ldots + 100 \cdot \ln 2$
$= (1 + 2 + 3 + \ldots + n + \ldots + 100)\ln 2$
$= (100 \cdot \frac{1+100}{2})\ln 2 = 5050 \ln 2$

931. Lukujono on aritmeettinen, jos peräkkäisten jäsenten erotus on vakio. Ehdosta saadaan yhtälö ln $(3^x - 3) - \ln 3 = \ln (3^x + 3) - \ln (3^x - 3)$. Ratkaistaan tästä x.

$$\ln(3^x - 3) - \ln 3 = \ln(3^x + 3) - \ln(3^x - 3)$$
$$\ln\left(\frac{3^x - 3}{3}\right) = \ln\left(\frac{3^x + 3}{3^x - 3}\right)$$
$$\frac{3^x - 3}{3} = \frac{3^x + 3}{3^x - 3}$$
$$(3^x - 3)(3^x - 3) = 3(3^x + 3)$$
$$(3^x)^2 - 2 \cdot 3^x \cdot 3 + 3^2 = 3 \cdot 3^x + 9$$
$$3^{2x} - 2 \cdot 3^{x+1} = 3^{x+1}$$
$$3^{2x} = 3^{x+1} + 2 \cdot 3^{x+1}$$
$$3^{2x} = 3 \cdot 3^{x+1}$$
$$3^{2x} = 3^{x+2}$$
$$2x = x + 2$$
$$x = 2$$

Toinen tapa ratkaista yhtälö:

$$\ln(3^x - 3) - \ln 3 = \ln(3^x + 3) - \ln(3^x - 3)$$
$$\ln\left(\frac{3^x - 3}{3}\right) = \ln\left(\frac{3^x + 3}{3^x - 3}\right)$$
$$\frac{3^x - 3}{3} = \frac{3^x + 3}{3^x - 3}$$
$$(3^x - 3)(3^x - 3) = 3(3^x + 3)$$
$$(3^x)^2 - 2 \cdot 3^x \cdot 3 + 3^2 = 3 \cdot 3^x + 9$$
$$(3^x)^2 - 6 \cdot 3^x - 3 \cdot 3^x = 0$$
$$(3^x)^2 - 9 \cdot 3^x = 0$$
$$3^x(3^x - 9) = 0$$

$3^x = 0$ tai $3^x - 9 = 0$

ei ratkaisua $\quad 3^x = 9$

$$3^x = 3^2$$
$$x = 2$$

932. **a)** Koska jokainen uusi kierros on yhtä paljon edellistä pidempi, on kehän pituudet, kuten myös halkaisijat aritmeettisen lukujonon jäseniä.

Ensimmäisen kierroksen halkaisija on 24 (cm) ja kuudennen kierroksen 76 (cm). Halkaisijat ovat aritmeettisen lukujonon ensimmäinen jäsen a_1 ja kuudes jäsen a_6.
Nyt $a_6 = a_1 + 5d$, eli$76 = 24 + 5d$, josta $d = 10{,}4$ (cm).

Letkun pituus on summa $\pi \cdot 24 + \pi \cdot 34{,}4 + \ldots + \pi \cdot 76$, joka voidaan laskea aritmeettisen summan kaavalla.

$$S_6 = 6 \cdot \frac{\pi \cdot 24 + \pi \cdot 76}{2} = 300\pi = 942{,}4...$$

Letkun pituus on siis 942,4… cm ≈ 942 cm.

b) Ulkoympyrän kehän pituus on $\pi \cdot 110$ (mm) ja sisäympyrän kehän pituus $\pi \cdot 45$ (mm).

Jokaisella kierroksella olevan paperin pituus lyhenee saman verran, joten kierrosten paperin pituudet muodostavat aritmeettisen lukujonon. Paperin yhteispituus on 12,3 m = 12 300 mm.

Aritmeettisen summan ensimmäinen yhteenlaskettava on 110π ja viimeinen 45π. Summa on 12 300, joten summakaavalla saadaan

$$n \cdot \frac{110\pi + 45\pi}{2} = 12\ 300,\ \text{josta } n = 50{,}5.$$

Paperirullassa on noin 50 kierrosta paperia.

933. **a)** Koska lukujono on aritmeettinen, lukujonon jäsen saadaan lisäämällä edelliseen vakio d.
Nyt $a_{10} = a_5 + 5d$ eli $2 = 10 + 5d$, mistä saadaan $d = -1,6$.
Nyt jäsen $a_{11} = 2 - 1,6 = 0,4$ on viimeinen positiivinen, sillä $a_{12} = 0,4 - 1,6 = -1,2$.

Lukujonossa on siis 11 positiivista jäsentä.

b) Funktio $2 \cdot (\frac{11}{10})^n$ on kasvava, koska eksponenttifunktion kantaluku $\frac{11}{10} > 1$ ja kerroin $2 > 0$.

Selvitetään, mikä on järjestysnumeron pienin luku n, jolla lukujonon jäsen $a_n = 2 \cdot \left(\frac{11}{10}\right)^n$ on arvoltaan suurempi kuin 10. Epäyhtälön $2 \cdot \left(\frac{11}{10}\right)^n > 10$ ratkaisuna saadaan $x > 16,88\ldots$. Ensimmäinen lukujonon jäsen, joka on suurempi kuin 10, on 17. lukujonon jäsen.

Vastaavasti epäyhtälön $2 \cdot \left(\frac{11}{10}\right)^n < 100$ ratkaisu on $x < 41,04\ldots$ Suurin epäyhtälön toteuttava positiivinen kokonaisluku on 41. Lukujonon jäsenten lukumäärästä 41 vähennetään ne 16 jäsentä, jotka eivät toteuta kaksoisepäyhtälöä. Ehdot täyttäviä lukujonon jäseniä on siis $41 - 16 = 25$.

Toinen tapa:

Epäyhtälön $10 < 2 \cdot (\frac{11}{12})^n < 100$ ratkaisu on $16,8\ldots < n < 41,94\ldots$.

Tämän ehdon toteuttavat luvut positiiviset kokonaisluvut ovat 17, 18, … ja 41, joita on yhteensä $41 - 16 = 27$.

934.

$x_1 = 2$
$x_2 = 2$
$x_3 = x_2 - x_1 = 2 - 2 = 0$
$x_4 = x_3 - x_2 = 0 - 2 = -2$
$x_5 = x_4 - x_3 = -2 - 0 = -2$
$x_6 = x_5 - x_4 = -2 - (-2) = 0$
$x_7 = x_6 - x_5 = 0 - (-2) = 2$
$x_8 = x_7 - x_6 = 2 - 0 = 2$

$x_9 = x_8 - x_7 = 2 - 2 = 0$
$x_{10} = x_9 - x_8 = 0 - 2 = -2$
$x_{11} = x_{10} - x_9 = -2 - 0 = -2$
$x_{12} = x_{11} - x_{10} = -2 - (-2) = 0$
$x_{13} = x_{12} - x_{11} = 0 - (-2) = 2$
$x_{14} = x_{13} - x_{12} = 2 - 0 = 2$
$x_{15} = x_{14} - x_{13} = 2 - 2 = 0$
$x_{16} = x_{15} - x_{14} = 0 - 2 = -2$

tai taulukkolaskennassa

	A
1	2
2	2
3	0
4	-2
5	-2
6	0
7	2
8	2
9	0
10	-2
11	-2
12	0
13	2
14	2
15	0
16	-2

Olkoon $x_1 = x_2 = a$, jolloin
$x_1 = a$
$x_2 = a$
$x_3 = x_2 - x_1 = a - a = 0$
$x_4 = x_3 - x_2 = 0 - a = -a$
$x_5 = x_4 - x_3 = -a - 0 = -a$
$x_6 = x_5 - x_4 = -a - (-a) = 0$
$x_7 = x_6 - x_5 = 0 - (-a) = a$
$x_8 = x_7 - x_6 = a - 0 = a$

Tämän jälkeen kierto alkaa alusta, sillä lukujonon jäsen lasketaan kahden edellisen perusteella, ja nyt kaksi peräkkäistä jäsentä ovat täsmälleen samat kuin alussa,

Ilmiö eli $x_1 = x_7$, $x_2 = x_8$, $x_3 = x_9$, … toteutuu siis aina kun $x_1 = x_2$.

Jos $x_1 \neq x_2$, niin merkitään $x_1 = a$ ja $x_2 = b$ missä $a \neq b$, jolloin
$x_1 = a$
$x_2 = b$
$x_3 = x_2 - x_1 = b - a$
$x_4 = x_3 - x_2 = b - a - b = -a$
$x_5 = x_4 - x_3 = -a - (b - a) = -b$
$x_6 = x_5 - x_4 = -b - (-a) = a - b$
$x_7 = x_6 - x_5 = a - b - (-b) = a$
$x_8 = x_7 - x_6 = a - (a - b) = b$

Tämän jälkeen kierto alkaa alusta, sillä lukujonon jäsen lasketaan kahden edellisen perusteella, ja nyt kaksi peräkkäistä jäsentä ovat täsmälleen samat kuin alussa,

Ilmiö eli $x_1 = x_7$, $x_2 = x_8$, $x_3 = x_9$, … toteutuu myös, jos $x_1 \neq x_2$.

935. Ratkaistaan tehtävä laskemalla luvut taulukkolaskentaohjelmassa.

Taulukkolaskenta

	A	B	C
1	Talletusvuosi	Talletus vuoden alussa	Talletus vuoden lopussa
2	1	4000	4120
3	2	8120	8363.6
4	3	12363.6	12734.51
5	4	16734.51	17236.54
6	5	21236.54	21873.64
7	6	25873.64	26649.85
8	7	30649.85	31569.34
9	8	35569.34	36636.42
10	9	40636.42	41855.52
11	10	45855.52	47231.18
12	11	51231.18	52768.12
13	12	56768.12	58471.16
14	13	62471.16	64345.3
15	14	68345.3	70395.66
16	15	74395.66	76627.53
17	16	80627.53	83046.35
18	17	87046.35	89657.74
19	18	93657.74	96467.47
20	19	100467.47	103481.5

Vuoden alussa tilillä edellisen vuoden lopussa olevaan summaan lisätään 4000 euroa.
Vuoden lopussa tilillä vuoden alussa oleva rahasumma kasvaa 3 % eli tulee 1,03-kertaiseksi.

Säästösumma kasvaa kymmenen vuoden kuluessa saldoon 47231,18 €.
Säästösumma on kasvanut 100 000 €:n suuruiseksi 19 vuoden kuluttua.

936. Koska kolmio on tasasivuinen, taulukosta löytyvien kaavojen perusteella sen sisälle piirretyn ympyrän säde on $\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Isoimman ympyrän pinta-ala on siis $A_1 = \pi \cdot (\frac{a\sqrt{3}}{6})^2 = \frac{1}{12} \cdot \pi a^2$.

Taulukosta löytyvien kaavojen perusteella tasasivuisenkolmion, jonka sivun pituus on x, ympäri piirretyn ympyrän säde on $\frac{x\sqrt{3}}{3}$. Ensimmäisen ympyrän, jonka säde siis on $\frac{a\sqrt{3}}{6}$, sisällä olevan toiseksi suurimman tasasivuisen kolmion sivun pituus x saadaan yhtälöstä $\frac{x\sqrt{3}}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, jonka ratkaisu on $x = \frac{a}{2}$.

Koska toisen tasasivuisen kolmion sivun pituus on $\frac{a}{2}$, niin sen sisälle piirretyn ympyrän säde on $\frac{\frac{a}{2}\sqrt{3}}{6} = \frac{a\sqrt{3}}{12}$. Toiseksi isoimman ympyrän pinta-ala on tällöin $A_2 = \pi \cdot (\frac{a\sqrt{3}}{12})^2 = \frac{1}{48} \cdot \pi a^2 = \frac{1}{4} \cdot \underbrace{\frac{1}{12} \cdot \pi a^2}_{A_1} = \frac{1}{4} \cdot A_1$.

Seuraavat kolmioiden sivut, ympyröiden säteet ja pinta-alat saadaan samalla päättelyllä. Näin ollen ympyröiden pinta-alat ovat

$A_1,\ \frac{1}{4}A_1,\ \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}A_1,\ \ldots$

Kyseessä on geometrinen lukujono $(A_1,\ \frac{1}{4}A_1,\ \frac{1}{16}A_1,\ ...),$ jossa A_1 on isoimman ympyrän pinta-ala ja $q=\frac{1}{4}.$ Sadan suurimman ympyrän pinta-alojen summa saadaan geometrisen summan kaavalla

$$S_{100}=\frac{A_1(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{100})}{1-\frac{1}{4}}$$

$$=\frac{\frac{1}{12}\cdot\pi a^2\cdot(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{100}}{1-\frac{1}{4}}$$

$$=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{3}{4}}\cdot\pi a^2\cdot(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{100}$$

$$=(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{100})\cdot\frac{\pi a^2}{9}.$$

937. Jos louhintatahti on a tonnia/vuosi, niin nykyisellä louhintatahdilla kivihiilivarat olisivat riittäneet 50 vuotta. Siis kivihiilivarat ovat vuoden 2015 alussa $50a$ tonnia.

Jos määrää lisätään vuosittain 2,5 % edellisen vuoden louhintamäärään verrattuna, niin ensimmäisten vuosien louhintamäärät olisivat

Vuosi	**Louhintamäärä vuoden lopussa**	**Louhintamäärä yhteensä**
2015	a	a
2016	$1{,}025a$	$a + 1{,}025a$
2017	$1{,}025^2a$	$a + 1{,}025a + 1{,}025^2a$
…	…	…
$2015 + t$	$1{,}025^ta$	$a + 1{,}025a + 1{,}025^2a + \ldots + 1{,}025^ta$

Louhintamäärä yhteensä on geometrinen summa, jossa $a_1 = a$ ja $q = 1{,}025$. Koska summa on oltava $50a$, niin geometrisen summan kaavalla saadaan yhtälö ja sen ratkaisuna haettu t:n arvo.

$$\frac{a(1-1{,}025^t)}{1-1{,}025} = 50a,\ \text{ josta } t = 32{,}84\ldots$$

Laskennallisesti ajankohta olisi vuonna 2015 + 32,84… = 2047,84…
Kivihiilivarat loppuisivat vuoden 2047 aikana.

SYVENTÄVÄT TEHTÄVÄT

938. **a)**

$$\sum_{k=1}^{15}(2^k+2k)$$
$$=(2^1+2\cdot 1)+(2^2+2\cdot 2)+\ldots+(2^{15}+2\cdot 15)$$
$$=2^1+2^2+\ldots+2^{15}+2\cdot 1+2\cdot 2+\ldots+2\cdot 15$$
$$=\underbrace{2^1+2^2+\ldots+2^{15}}_{\substack{\text{geometrinen summa,}\\ \text{jossa } a_1=2 \text{ ja } q=2}}+2(\underbrace{1+2+\ldots+15}_{\substack{\text{aritmeettinen summa,}\\ \text{jossa } a_1=1 \text{ ja } a_{15}=15}})$$
$$=\frac{2(1-2^{15})}{1-2}+2(15\cdot\frac{1+15}{2})$$
$$=\frac{2(-32767)}{-1}+2\cdot 120$$
$$=65\ 774$$

b)

$$\sum_{k=1}^{20}(2^k-2^{k-1})$$
$$=(2^1-2^{1-1})+(2^2-2^{2-1})+(2^3-2^{3-1})+\ldots+(2^{19}-2^{19-1})+(2^{20}-2^{20-1})$$
$$=(\cancel{2^1}-2^0)+(\cancel{2^2}-\cancel{2^1})+(\cancel{2^3}-\cancel{2^2})+\ldots+(\cancel{2^{19}}-\cancel{2^{18}})+(2^{20}-\cancel{2^{19}})$$
$$=-2^0+2^{20}$$
$$=1\ 048\ 575$$

c)

$$\sum_{k=1}^{100}(k^3-(k-1)^3)$$
$$=(1^3-(1-1)^3)+(2^3-(2-1)^3)+\ldots+(99^3-(99-1)^3)+(100^3-(100-1)^3)$$
$$=(\cancel{1^3}-0^3\cancel{+2^3}\cancel{-1^3}\cancel{+3^3}\cancel{-2^3}+\ldots\cancel{+99^3}\cancel{-98^3}+100^3\cancel{-99^3}$$
$$=100^3$$
$$=1\ 000\ 000$$

939. Geometrisen lukujonon (a_n) yleinen jäsen on $a_n = a_1q_1^{n-1}$ ja geometrisen lukujonon (b_n) yleinen jäsen $b_n = b_1q_2^{n-1}$, missä $q_1 \neq 0$ ja $q_2 \neq 0$.

Tulojonon $(c_n) = (a_nb_n)$ yleinen jäsen on
$c_n = a_nb_n = a_1q_1^{n-1}b_1q_2^{n-1} = (a_1b_1)q_1^{n-1}q_2^{n-1} = (a_1b_1)(q_1q_2)^{n-1}$.
Merkitään $a_1b_1 = c$ ja $q_1q_2 = q \neq 0$, jolloin tulojonon (c_n) yleinen jäsen on $c_n = cq^{n-1}$. Tulojono (c_n) on siis geometrinen.

Osamääräjonon $(d_n) = (a_n/b_n)$ yleinen jäsen on

$$d_n = \frac{a_1q_1^{n-1}}{b_1q_2^{n-1}} = \frac{a_1}{b_1}\cdot\frac{q_1^{n-1}}{q_2^{n-1}} = \frac{a_1}{b_1}\cdot\left(\frac{q_1}{q_2}\right)^{n-1}.$$

Merkitään $a_1b_1 = d$ ja $\left(\frac{q_1}{q_2}\right) = q \neq 0,$ jolloin osamääräjonon (d_n) yleinen jäsen on $d_n = dq^{n-1}$. Osamääräjono (d_n) on siis geometrinen.

940. **a)** Korkotekijä on $q = 1{,}015$.

Tammikuun alussa talletettu summa kasvaa korkoa koko vuoden eli talletuksen tuottama korko on $0{,}015 \cdot 200$ (€).

Helmikuun alussa talletettu summa 200 (€) kasvaa korkoa $\frac{11}{12}$ – osan vuoden korosta eli talletuksen tuottama korko on $\frac{11}{12} \cdot 0{,}015 \cdot 200$ (€).

Samalla tavalla jatkuen marraskuun alussa talletettu summa 200 (€) kasvaa korkoa $\frac{2}{12}$ – osan vuoden korosta eli talletuksen tuottama korko on $\frac{2}{12} \cdot 0{,}015 \cdot 200$ (€) ja joulukuun alussa talletettu summa tuottaa korkoa $\frac{1}{12} \cdot 0{,}015 \cdot 200$ (€).

Yhden vuoden aikana korkoa kertyy kaiken kaikkiaan

$$\frac{12}{12} \cdot 0{,}015 \cdot 200 + \frac{11}{12} \cdot 0{,}015 \cdot 200 + \ldots + \frac{2}{12} \cdot 0{,}015 \cdot 200 + \frac{1}{12} \cdot 0{,}015 \cdot 200$$
$$= \left(\frac{12}{12} + \frac{11}{12} + \ldots + \frac{2}{12} + \frac{1}{12}\right) \cdot 0{,}015 \cdot 200$$
$$= \frac{78}{12} \cdot 0{,}015 \cdot 200$$
$$= 19{,}5 \text{ (€)}.$$

Yhden vuoden aikana talletetaan 12 · 200 € = 2400 €, joten yhden vuoden aikana talletuksista kertyy pääomaa 2419,50 €.

Merkitään tätä pääomaa kirjaimella K.
Ensimmäisen vuoden jälkeen tilillä oleva pääoma K kasvaa vuosittain korkoa korolle 1,5 % 17 vuoden ajan, joten 18 vuoden kuluttua tämä ensimmäisen vuoden aikana säästetty pääoma on $1{,}025^{17} \cdot K$.

Toisen vuoden loppuun mennessä sinä vuonna tehdyistä talletuksista ja korosta kertynyt pääoma K on pojan täyttäessä 18 vuotta ehtinyt kasvaa korkoa korolle 16 vuotta eli toisen vuoden aikana säästetty pääoma on tällöin $1{,}025^{16} \cdot K$.

Jokaisen vuoden aikana kertyy ensimmäisen vuoden tapaan pääoma K joka kasvaa korkoa seuraavat vuodet siihen saakka, kun poika täyttää 18 vuotta.

Kun poika täyttää 18 vuotta, on tilillä rahaa kaiken kaikkiaan
$1{,}015^{17} \cdot K + 1{,}015^{16} \cdot K + 1{,}015^{15} \cdot K + \ldots + 1{,}015^{1} \cdot K + K$
$= (1 + 1{,}015 + \ldots + 1{,}015^{15} + 1{,}015^{16} + 1{,}015^{17})K$

$$= \frac{1(1-1{,}015^{18})}{1-1{,}015} \cdot K$$

$$= \frac{1(1-1{,}015^{18})}{1-1{,}015} \cdot 2419{,}50$$

$$= 49574{,}044...$$

$$\approx 49574{,}04 \text{ (€)}.$$

b) Kaksion hinta 135 000 € edellyttää n vuoden säästöaikaa. Ratkaistaan n yhtälöstä $= \frac{1(1-1{,}015^{n})}{1-1{,}015} \cdot 2419{,}50 = 135\ 000$, josta $n = 40{,}84\ldots \approx 41$.

Aikaa tarvitaan siis 41 vuotta.

941. **a)** Koska lukujono (a_n) on geometrinen, niin peräkkäisten jäsenten suhde on vakio eli $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, kuten myös $\frac{a_n}{a_{n-1}}$.

Koska suhdeluku $q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n}{a_{n-1}}$, niin $a_n^2 = a_{n-1}a_{n+1}$.

Koska lukujonon kaikki jäsenet ovat positiivisia tästä saadaan
$a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}$.

Toinen tapa:

Koska lukujono (a_n) on geometrinen, niin $a_{n-1} = \frac{a_n}{q}$ ja $a_{n+1} = a_n q$,

missä $q \neq 0$ kun $n = 2, 3, \ldots$

Nyt $\sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+2}} = \sqrt{\frac{a_n}{q} \cdot a_n q} = \sqrt{a_n^2} = |a_n| = a_n$.

b) Koska $b_n = \sqrt{b_{n-1}b_{n+1}}$, ja koska lukujonon kaikki jäsenet ovat positiivisia, niin $b_n^2 = (\sqrt{b_{n-1}b_{n+1}})^2 = b_{n-1}b_{n+1}$. Muokataan tätä yhtälöä.

$$b_n^2 = b_{n-1}b_{n+1} \quad \| : b_n b_{n-1} \neq 0$$

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

Koska peräkkäisten jäsenten b_n ja b_{n-1} (tai b_{n+1} ja b_n) suhde on vakio, lukujono on geometrinen.

942. Lasketaan lukujonon $a_1 = 2$ ja $a_n = \frac{2}{3}a_{n-1} + 1$, kun $n = 2, 3, 4, \dots$

ensimmäisiä jäseniä:

$a_1 = 2$

$$a_2 = \frac{2}{3}a_1 + 1 = \frac{2}{3}\cdot 2 + 1$$

$$a_3 = \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot 2 + 1\right) + 1 = \left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot 2 + \frac{2}{3} + 1$$

$$a_4 = \frac{2}{3}\cdot\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot 2 + \frac{2}{3} + 1\right) + 1 = \left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot 2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} + 1$$

$$a_5 = \frac{2}{3}\cdot\left(\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot 2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} + 1\right) + 1$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^4\cdot 2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}\cdot 1 + 1$$

…

$$a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\cdot 2 + \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-3} + \ldots + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} + 1}_{\text{geometrinen summa, jossa } a_1=1,\ q=\frac{2}{3} \text{ ja yhteenlaskettavia on } n-1}$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\cdot 2 + \frac{1\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right)}{1 - \frac{2}{3}}$$

$$= 3 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}, \text{ kun } n = 1,\ 2,\ \ldots$$

943. Geometrisen lukujonon ensimmäinen jäsen on a_1, toinen jäsen $a_2 = a_1q$, kolmas jäsen $a_3 = a_1q^2$ ja neljäs jäsen $a_4 = a_1q^3$.

Tehtävänannon tiedoista saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} a_1 + a_1q = 1 \\ a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 = 5 \end{cases}, \text{ josta saadaan}$$

$$\begin{cases} a_1 = -1 \\ q = -2 \end{cases} \text{ tai } \begin{cases} a_1 = \dfrac{1}{3} \\ q = 2 \end{cases}.$$

Kun $a_1 = -1$ ja $q = -2$, niin $S_8 = \dfrac{-1(1-(-2)^8)}{1-(-2)} = 85.$

Kun $a_1 = \dfrac{1}{3}$ ja $q = 2$, niin $S_8 = \dfrac{\frac{1}{3}(1-2^8)}{1-2} = 85.$

944. Summa $\dfrac{1}{3} + \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 + \ldots + \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ on geometrinen, jossa $a_1 = \dfrac{1}{3}$, $q = \dfrac{1}{3}$ ja summassa on n yhteenlaskettavaa. Summakaavalla

$$S_n = \frac{\frac{1}{3}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3^n - 1}{2\cdot 3^n}.$$

Koska $0 < 2 \cdot 3^n < 3 \cdot 3^n = 3^{n+1}$, niin $\dfrac{3^n-1}{2\cdot 3^n} > \dfrac{3^n-1}{3\cdot 3^n} = \dfrac{3^n-1}{3^{n+1}}$.

Koska $2 \cdot 3^n > 3^n > 0$, niin $\dfrac{3^n-1}{2\cdot 3^n} < \dfrac{3^n-1}{3^n}$.

Kaksoisepäyhtälönä saadaan $\dfrac{3^n-1}{3^{n+1}} < \dfrac{3^n-1}{2\cdot 3^n} < \dfrac{3^n-1}{3^n}$ eli

$$\frac{3^n-1}{3^{n+1}} < \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{3}\right)^n < \frac{3^n-1}{3^n} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

10 Todennäköisyyslaskenta ja tilastot

10.1 Todennäköisyys ja kombinatoriikka

LUVUN 10.1 YDINTEHTÄVÄT

1001. **a)** Ensimmäisen nopan heitossa on kuusi alkeistapausta, joista tapahtumalle suotuisia on yksi. Kysytty todennäköisyys on siten $\frac{1}{6}$.

b) Ensimmäisen nopan heitossa tapahtuman “silmäluku on viisi” todennäköisyys on $\frac{1}{6}$. Toisen nopan heitossa tapahtuman “silmäluku on viisi” todennäköisyys on myös $\frac{1}{6}$. Tapahtuma “kummankin nopan silmäluku on viisi” tarkoittaa ensimmäisen nopan silmälukua viisi ja toisen nopan silmälukua viisi. Kertolaskusäännön perusteella kysytyn tapahtuman todennäköisyys on $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$.

Toinen tapa:
Kummassakin heitossa on kuusi alkeistapausta, joten heitoissa on yhteensä $6 \cdot 6 = 36$ alkeistapausta. Suotuisia alkeistapauksia tapahtumalle “kummankin nopan silmäluku viisi” on ainoastaan yksi, joten kysytty todennäköisyys on $\frac{1}{36}$.

c) Taulukoidaan kaikki kahden nopan tulosvaihtoehdot ja poimitaan näistä suotuisat alkeistapaukset.

6	x	x	x	x		x
5						
4	x	x	x	x		x
3	x	x	x	x		x
2	x	x	x	x		x
1	x	x	x	x		x
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

Suotuisia alkeistapauksia on kaiken kaikkiaan 25, joten kysytty todennäköisyys on $\frac{25}{36}$.

d) Tapahtuman "ainakin yhden nopan silmäluku on viisi" vastatapahtuma on "kummankaan nopan silmäluku ei ole viisi", jonka todennäköisyys laskettiin c-kohdassa. Kysytty todennäköisyys on komplementtisäännön mukaan $1-\frac{25}{36}=\frac{36}{36}-\frac{25}{36}=\frac{11}{36}$.

Toinen tapa:
Taulukoidaan kaikki kahden nopan tulosvaihtoehdot ja poimitaan näistä suotuisat alkeistapaukset.

6					x	
5	x	x	x	x	x	x
4					x	
3					x	
2					x	
1					x	
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

Suotuisia alkeistapauksia on kaiken kaikkiaan 11, joten kysytty todennäköisyys on $\frac{11}{36}$.

e) Taulukoidaan kaikki kahden nopan tulosvaihtoehdot ja poimitaan näistä suotuisat alkeistapaukset.

6	7	8	9	10	11	12
5	6	7	8	9	10	11
4	5	6	7	8	9	10
3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

Suotuisia alkeistapauksia on kaiken kaikkiaan 10, joten kysytty todennäköisyys on $\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$.

1002. **a)** $\text{P(molemmat toimivat virheettömästi)}=0{,}75\cdot 0{,}92=0{,}69.$

b)

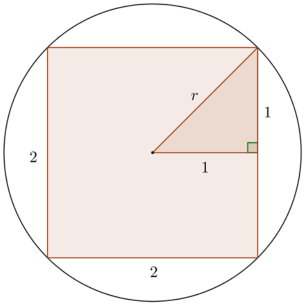
$$\begin{aligned}&\text{P(vähintään toinen toimii virheettömästi)}\\&=1-\text{P(kumpikaan ei toimi virheettömästi)}\\&=1-0{,}25\cdot 0{,}08)\\&=0{,}98\end{aligned}$$

1003. Palloja on yhteensä 3 + 4 + 5 = 12, joista nostetaan kaksi palloa.

P(nostetut kaksi palloa ovat samanväriset)
= P(kumpikin pallo on punainen tai kumpikin pallo on sininen tai kumpikin pallo on musta)
= P(kaksi punaista) + P(kaksi sinistä) + P(kaksi mustaa)

$$\begin{aligned}&=\frac{3}{12}\cdot\frac{2}{11}+\frac{4}{12}\cdot\frac{3}{11}+\frac{5}{12}\cdot\frac{4}{11}\\&=\frac{19}{66}\\&=0{,}287...\\&\approx 0{,}29\end{aligned}$$

1004. Piirretään tilannetta havainnollistava kuva.



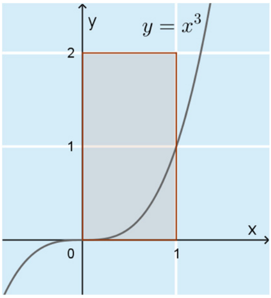
Neliön ympäri piirretyn ympyrän säde r, $r > 0$, saadaan Pythagoraan lauseella:

$r^2 = 1^2 + 1^2$, josta $r = \sqrt{2}$.

Koko kuvion pinta-ala on ympyrän pinta-ala $\pi r^2 = \pi(\sqrt{2})^2 = 2\pi$.
Tapahtumaa vastaavan alueen pinta-ala on neliön pinta-ala $2 \cdot 2 = 4$.

Kysytty todennäköisyys on siis $\frac{4}{2\pi} = \frac{2}{\pi} = 0,636... \approx 0,64$.

1005. **a)** Piirretään tilannetta havainnollistava kuva.



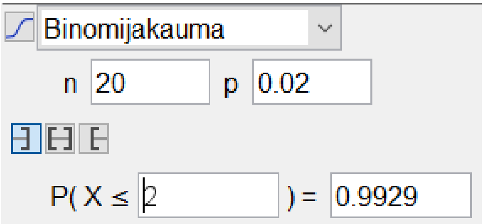
Lasketaan tapahtumaa ”piste käyrän $y = x^3$ alapuolella” vastaavan alueen pinta-ala:

$$\int_0^1 x^3 \mathrm{d}x = \Big/_0^1 \frac{1}{4}x^4 = \frac{1}{4}.$$

Koko kuvion eli suorakulmion pinta-ala on $1 \cdot 2 = 2$, joten kysytty todennäköisyys on $\frac{\frac{1}{4}}{2} = \frac{1}{8}$.

b) Käyrän $y = x^3$ pinta-ala on nolla, joten P(piste on käyrällä $y = x^3$) = 0.

1006. Tulkitaan 20 kappaleen tutkiminen toistokokeeksi.
Toistokokeessa jokaisen yksittäisen toiston todennäköisyys pysyy samana eli nyt P(virheellinen yksilö) = 0,02.
Toistoja on siis 20 ja virheellisen tuotteen todennäköisyys on 0,02.
Todennäköisyyslaskurilla saadaan $\mathrm{P}(X \leq 2) = 0{,}992\ldots \approx 0{,}99$.



Toinen tapa:
Tulkitaan 20 kappaleen tutkiminen toistokokeeksi.
Toistokokeessa jokaisen yksittäisen toiston todennäköisyys pysyy samana eli nyt P(virheellinen yksilö) = 0,02.
Toistoja on siis 20 ja virheellisen tuotteen todennäköisyys on 0,02.

Tapahtuma ”enintään kaksi virheellistä yksilöä” sisältää tapaukset 0 virheellistä yksilöä, 1 virheellinen yksilö ja 2 virheellistä yksilöä.

Olkoon satunnaismuuttuja X virheellisten yksilöiden lukumäärä.
Lasketaan jokaisen satunnaismuuttujan X arvon todennäköisyys binomitodennäköisyyden kaavalla.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(X \leq 2) &= \mathrm{P}(X = 0) + \mathrm{P}(X = 1) + \mathrm{P}(X = 2) \\
&= \binom{20}{0} 0{,}02^0 \cdot 0{,}98^{20} + \binom{20}{1} 0{,}02^1 \cdot 0{,}98^{19} + \binom{20}{2} 0{,}02^2 \cdot 0{,}98^{18} \\
&= 0{,}992\ldots \\
&\approx 0{,}99
\end{aligned}
$$

1007. **a)** Puheenjohtaja voidaan valita kaikista yhdistyksen 23 jäsenestä.
Puheenjohtajan valinnan jälkeen sihteeri voidaan valita kaikista jäljellä olevista 22 jäsenestä.
Sihteerin valinnan jälkeen jäljellä on 21 jäsentä, joista kuka tahansa voidaan valita rahastonhoitajaksi.

Valinta voidaan tehdä tuloperiaatteen mukaan $23 \cdot 22 \cdot 21 = 10\,626$ eri tavalla.

b) Kaupungissa asuvista puheenjohtaja voidaan valita 17 jäsenen joukosta.
Puheenjohtajan valinnan jälkeen sihteeri voidaan valita jäljellä olevista 16 kaupunkilaisjäsenestä.
Sihteerin valinnan jälkeen jäljellä on 15 kaupungissa asuvaa jäsentä, joista kuka tahansa voidaan valita rahastonhoitajaksi.

Kaupunkilaisten kesken valinta voidaan tehdä tuloperiaatteen mukaan $17 \cdot 16 \cdot 15 = 4080$ eri tavalla.

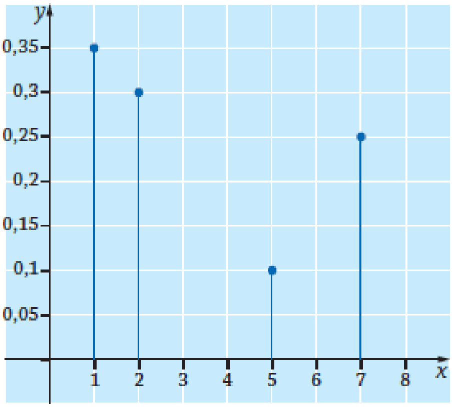
Kysytty todennäköisyys on siis $\frac{4080}{10626} = \frac{680}{1771} = 0{,}383... \approx 0{,}38$.

10.2 Jakauma

LUVUN 10.2 YDINTEHTÄVÄT

1008. **a)** Jakauman todennäköisyyksien summa on 1.
$P(X = 2) = 1 – 0{,}35 – 0{,}1 – 0{,}25 = 0{,}3$

b)

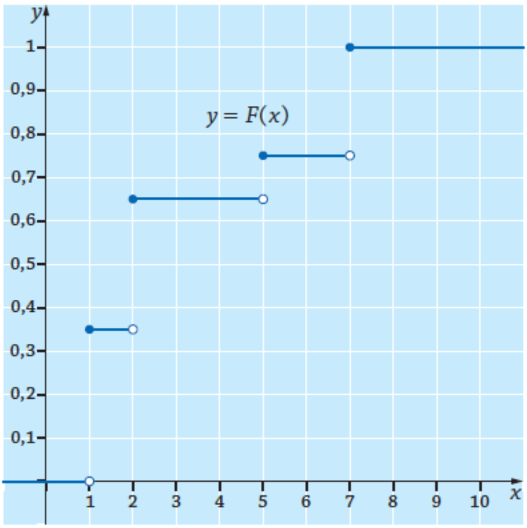


c) Satunnaismuuttujan X pienin arvo on 1, joten kertymäfunktion F arvo on nolla kaikilla $x < 1$. Kertymäfunktion arvo kasvaa hyppäyksittäin kohdissa $x = 1$, $x = 2$, $x = 5$ ja $x = 7$. Kertymäfunktion arvo on vakio näiden kohtien välillä.

$F(1) = P(X \le 1) = P(X = 1) = 0{,}35$
$F(2) = P(X \le 2) = P(X = 1) + P(X = 2) = 0{,}35 + 0{,}3 = 0{,}65$
$F(5) = P(X \le 5) = 0{,}35 + 0{,}3 + 0{,}1 = 0{,}75$
$F(7) = P(X \le 7) = 0{,}35 + 0{,}3 + 0{,}1 + 0{,}25 = 1$

Lisäksi kaikilla $x > 7$ on $F(x) = P(X \le x) = 1$, koska satunnaismuuttujan X arvo on korkeintaan 7.

Kertymäfunktion lauseke on siis $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 1 \\ 0{,}35, & \text{kun } 1 \le x < 2 \\ 0{,}65, & \text{kun } 2 \le x < 5 \\ 0{,}75, & \text{kun } 5 \le x < 7 \\ 1, & \text{kun } x \ge 7 \end{cases}$.



d) $F(2) = P(X \le 2) = 0{,}65$.
$F(3) = P(X \le 3) = 0{,}65$.

1009. **a)** Taulukoidaan alkeistapaukset eli silmälukuparit, joita on yhteensä $4 \cdot 4 = 16$. Merkitään kunkin kohdalle silmälukujen summa.

4	5	6	7	8
3	4	5	6	7
2	3	4	5	6
1	2	3	4	5
	1	**2**	**3**	**4**

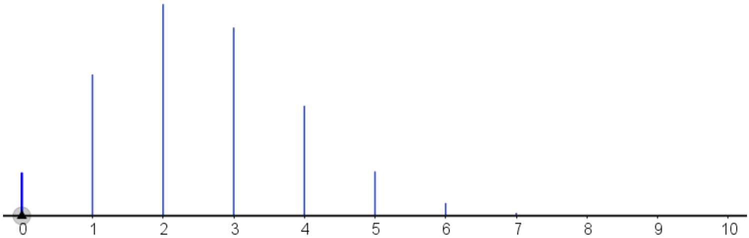
x	$P(X=x)$
2	$1/16 = 0{,}0625$
3	$2/16 = 0{,}125$
4	$3/16 = 0{,}1875$
5	$4/16 = 0{,}3125$
6	$3/16 = 0{,}1875$
7	$2/16 = 0{,}125$
8	$1/16 = 0{,}0625$

b)

$$E(X) = \frac{1}{16}\cdot 2 + \frac{2}{16}\cdot 3 + \frac{3}{16}\cdot 4 + \frac{4}{16}\cdot 5 + \frac{3}{16}\cdot 6 + \frac{2}{16}\cdot 7 + \frac{1}{16}\cdot 8 = 5$$

$$D(X) = \sqrt{\frac{1}{16}\cdot(2-5)^2 + \frac{2}{16}\cdot(3-5)^2 + \ldots + \frac{2}{16}\cdot(7-5)^2 + \frac{1}{16}\cdot(8-5)^2}$$
$$= \frac{\sqrt{10}}{2}$$

1010. **a)** Havainnollistetaan satunnaismuuttujan X jakaumaa todennäköisyyslaskurilla.



Toinen tapa:
Lasketaan satunnaismuuttujan X arvojen todennäköisyyksiä binomitodennäköisyyden kaavalla ja piirretään havainnollistava kuva näiden perusteella.

$$P(X=0)=\binom{10}{0}(\frac{1}{4})^0(\frac{3}{4})^{10}=\frac{59049}{1048576}=0,056...\approx 0,05$$

$$P(X=1)=\binom{10}{1}(\frac{1}{4})^1(\frac{3}{4})^{9}=\frac{98415}{524288}=0,187...\approx 0,19$$

$$P(X=2)=\binom{10}{2}(\frac{1}{4})^2(\frac{3}{4})^{8}=\frac{295245}{1048576}=0,281...\approx 0,28$$

$$P(X=3)=\binom{10}{3}(\frac{1}{4})^3(\frac{3}{4})^{7}=\frac{32805}{131072}=0,250...\approx 0,25$$

$$P(X=4)=\binom{10}{4}(\frac{1}{4})^4(\frac{3}{4})^{6}=\frac{76545}{524288}=0,145...\approx 0,15$$

$$P(X=5)=\binom{10}{5}(\frac{1}{4})^5(\frac{3}{4})^{5}=\frac{15309}{262144}=0,058...\approx 0,06$$

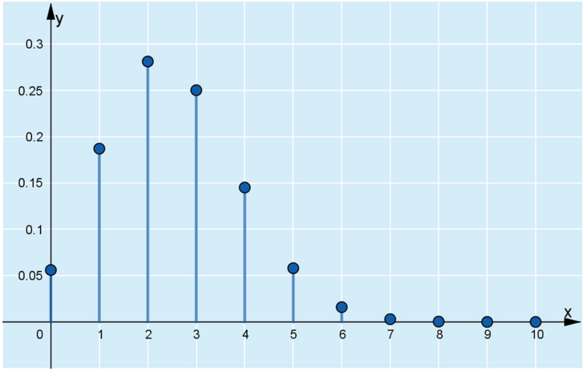
$$P(X=6)=\binom{10}{6}(\frac{1}{4})^6(\frac{3}{4})^{4}=\frac{8505}{524288}=0,016...\approx 0,02$$

$$P(X=7)=\binom{10}{7}(\frac{1}{4})^7(\frac{3}{4})^{3}=\frac{405}{131072}=0,0030...\approx 0,003$$

$$P(X=8)=\binom{10}{8}(\frac{1}{4})^8(\frac{3}{4})^{2}=\frac{405}{1048576}=3,86...\cdot 10^{-4}\approx 0,0004$$

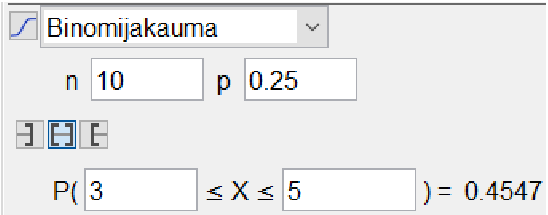
$$P(X=9)=\binom{10}{9}(\frac{1}{4})^9(\frac{3}{4})^{1}=\frac{15}{524288}=2,86...\cdot 10^{-5}\approx 0,00003$$

$$P(X=10)=\binom{10}{10}(\frac{1}{4})^{10}(\frac{3}{4})^{0}=\frac{1}{1048576}=9,53...\cdot 10^{-7}\approx 0,0000010$$



b) Todennäköisyyslaskurilla saadaan

$P(3 \le X \le 5) = 0,454... \approx 0,46.$



Toinen tapa:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(3 \le X \le 5) &= \mathrm{P}(X=3) + \mathrm{P}(X=4) + P(X=5) \\
&= \frac{32805}{131072} + \frac{76545}{524288} + \frac{15309}{262144} \\
&= \frac{238383}{524288} = 0,454... \\
&\approx 0,45
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= np = 10 \cdot \frac{1}{4} = \frac{10}{4} \\
&= 2,5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{D}(X) &= \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{10 \cdot \frac{1}{4} \cdot (1 - \frac{1}{4})} = \frac{\sqrt{30}}{4} \\
&= 1,369... \\
&\approx 1,37
\end{aligned}
$$

1011. Tiheysfunktiolle f on voimassa
1) $f(x) \geq 0$
2) funktion f kuvaajan ja x-akselin väliin jäävän alueen pinta-ala on 1.

Ratkaistaan ohjelman avulla vakion a arvo yhtälöstä $\int_{-2}^{2} a(x+3)\mathrm{d}x = 1$.

Yhtälön ratkaisu on $a = \frac{1}{12}$.

Epäyhtälön $\frac{1}{12}(x+3) \geq 0$ ratkaisu on $x \geq -2$, joten tällä vakiolla funktio f on kaikkialla ei-negatiivinen.

Siis f on tiheysfunktio, kun $a = \frac{1}{12}$.

Lasketaan pyydetty todennäköisyys. $\mathrm{P}(X \leq 1) = \int_{-2}^{1} \frac{1}{12}(x+3)\mathrm{d}x = \frac{5}{8}$.

Satunnaismuuttujan X kertymäfunktio F on funktion f integraalifunktio, joten $F(x) = \int \frac{1}{12}(x+3)\mathrm{d}x = \frac{1}{24}x^2 + \frac{1}{4}x + C$.
Kohdassa $x = 2$ on kertymäfunktion F arvo 1, joten saadaan yhtälö vakion C määrittämiseksi:

$$F(2) = \frac{1}{24} \cdot 2^2 + \frac{1}{4} \cdot 2 + C = \frac{2}{3} + C$$

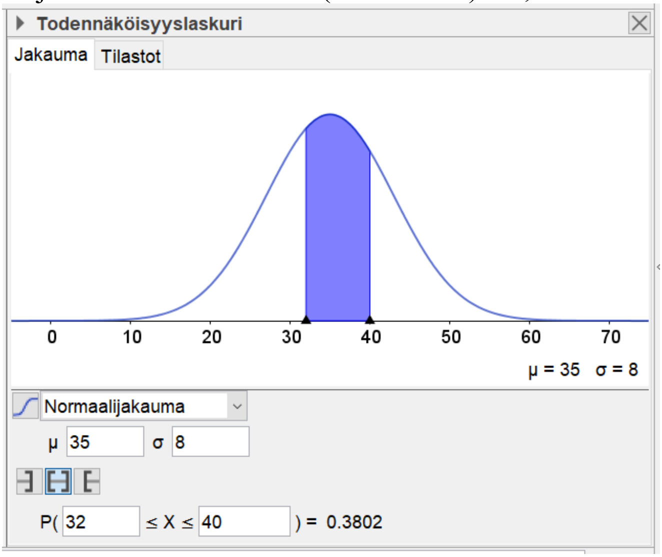
$$\frac{2}{3} + C = 1$$

$$C = \frac{1}{3}$$

Välillä $x < -2$ kertymäfunktion F arvo on 0 ja välillä $x > 2$ kertymäfunktion F arvo on 1.

Kysytty kertymäfunktio on siis $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < -2 \\ \frac{1}{24}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{3}, & \text{kun } -2 \leq x < 2. \\ 1, & \text{kun } x > 2 \end{cases}$

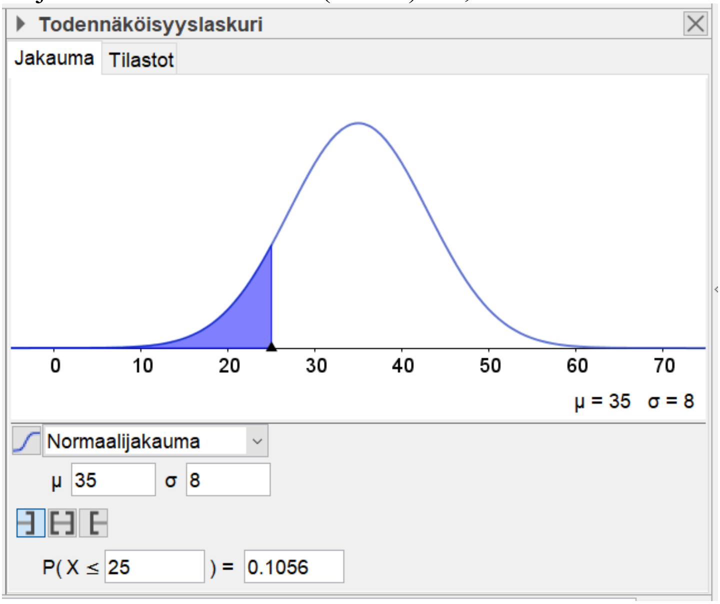
1012. **a)** Ohjelman avulla saadaan $P(32 \leq X \leq 40) \approx 0{,}38$.



Toinen tapa:
Normitetaan arvot ja käytetään normitetun normaalijakauman todennäköisyyksien taulukoituja arvoja.

$$P(32 \leq X \leq 40)$$
$$= P\left(\frac{32-35}{8} \leq Z \leq \frac{40-35}{8}\right)$$
$$= P\left(-\frac{3}{8} \leq Z \leq \frac{5}{8}\right)$$
$$= P(-0{,}375 \leq Z \leq 0{,}625)$$
$$\approx \Phi(0{,}63) - \Phi(-0{,}38)$$
$$= \Phi(0{,}63) - (1 - \Phi(0{,}38))$$
$$= \Phi(0{,}63) - 1 + \Phi(0{,}38)$$
$$= 0{,}7357 - 1 + 0{,}6480$$
$$= 0{,}3837$$
$$\approx 0{,}38$$

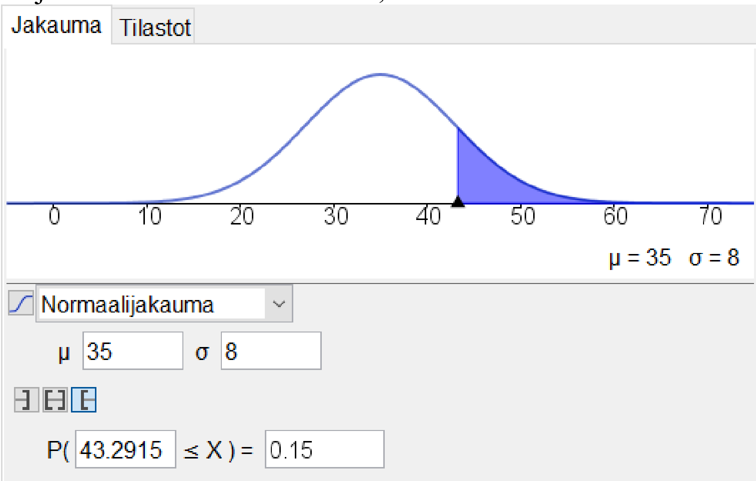
b) Ohjelman avulla saadaan $\mathrm{P}(X \leq 25) \approx 0{,}11$.



Toinen tapa:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{P}(X \leq 25)\\
&= \mathrm{P}\left(Z \leq \frac{25-35}{8}\right)\\
&= \mathrm{P}\left(Z \leq -\frac{10}{8}\right)\\
&= \mathrm{P}(Z \leq -1{,}25)\\
&= \Phi(-1{,}25)\\
&= 1-\Phi(1{,}25)\\
&= 1-0{,}8944\\
&= 0{,}1056\\
&\approx 0{,}11
\end{aligned}
$$

c) Ohjelman avulla saadaan $a \approx 43{,}3$.



Toinen tapa:

$$\mathrm{P}(X \geq a) = 1 - \mathrm{P}(X \leq a) = 0{,}15$$

$$\mathrm{P}(X \leq a) = 0{,}85$$

$$\mathrm{P}\left(Z \leq \frac{a-35}{8}\right) = 0{,}85$$

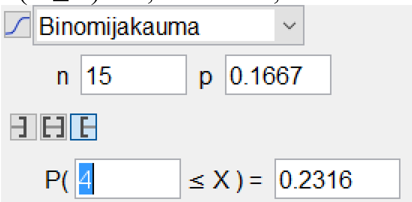
$$\Phi\left(\frac{a-35}{8}\right) = 0{,}85 \quad \| \Phi(1{,}03) \approx 0{,}8485 \text{ ja } \Phi(1{,}04) \approx 0{,}8508$$

$$\frac{a-35}{8} \approx 1{,}04$$

$$a \approx 43{,}32$$

1013. Kyseessä on toistokoe, jossa toistoja on 15 ja jokaisessa heitossa jokaisen silmäluvun, myös silmäluvun kuutonen, todennäköisyys on $\frac{1}{6}$.

Merkitään satunnaismuuttujalla X kuutosten lukumäärä, jolloin $X \sim \mathrm{Bin}(15, \frac{1}{6})$. Todennäköisyyslaskurilla saadaan
$\mathrm{P}(X \geq 4) = 0{,}231\ldots \approx 0{,}23$.



Toinen tapa:
Kyseessä on toistokoe, jossa toistoja on 15 ja jokaisessa heitossa jokaisen silmäluvun, myös silmäluvun kuutonen, todennäköisyys on $\frac{1}{6}$.

Tapahtumaan ”15 heitossa kuutonen tulee neljästi tai useammin” kuuluu kuutosten lukumäärät 4, 5, 6, …, 14 ja 15.

Lasketaan tapahtuman todennäköisyys tapahtuman komplementin avulla. Tapahtuman komplementti on ”15 heitossa kuutonen tulee enintään kolme kertaa”.

Merkitään satunnaismuuttujalla X kuutosten lukumäärä.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}(\text{15 heitossa kuutonen tulee enintään kolme kertaa}) \\
&= \mathrm{P}(X=0) + \mathrm{P}(X=1) + \mathrm{P}(X=2) + \mathrm{P}(X=3) \\
&= \binom{15}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^{15} + \binom{15}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^{14} + \binom{15}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{13} + \binom{15}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^{12} \\
&= 0{,}768\ldots \\
&\approx 0{,}77
\end{aligned}$$

Kysytty todennäköisyys on
$\mathrm{P}(\text{15 heitossa kuutonen tulee neljästi tai useammin}) = 1 - 0{,}768\ldots \approx 0{,}23$.

10.3 Tilastot

LUVUN 10.3 YDINTEHTÄVÄT

1014. Tulokset suuruusjärjestyksessä ovat 1, 2, 3 ja 5. Heittoja on lopulta kaiken kaikkiaan viisi, joten suuruusjärjestyksessä keskimmäisin eli 3. tulos on mediaani.

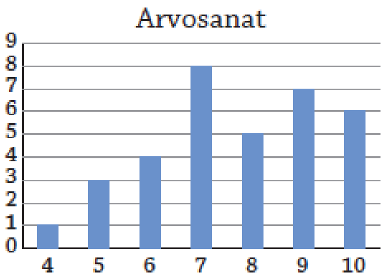
Jos viidennen heiton tulos on 1 tai 2, ovat heittojen tulokset suuruusjärjestyksessä joko 1, 1, 2, 3 ja 5 tai 1, 2, 2, 3 ja 5, ja tällöin kummassakin tapauksessa mediaani on 2.

Jos viidennen heiton tulos on vähintään 3, on keskimmäisin tulos 3 ja mediaani on tällöin 3.

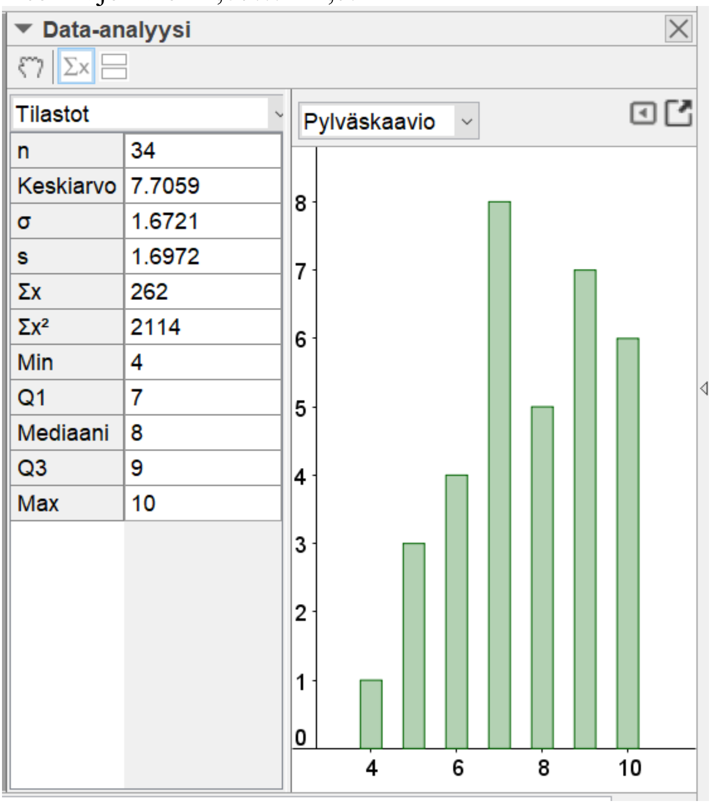
Pienin vaihtoehto viidennelle heitolle on 1. Tällöin tulosten keskiarvo on
$$\frac{1+5+3+2+1}{5}=\frac{12}{5}=2{,}4.$$

Suurin vaihtoehto viidennelle heitolle on 6. Tällöin tulosten keskiarvo on
$$\frac{1+5+3+2+6}{5}=\frac{17}{5}=34.$$

1015. **a)**



b) Koska aineisto on luokiteltu, siirretään luvut matematiikkaohjelmaan ja lasketaan moodia lukuun ottamatta pyydetyt arvot siellä.
Moodi on 7.
Mediaai on 8.
Keskiarvo on 7,7.
Keskihajonta on 1,67… ≈ 1,7.



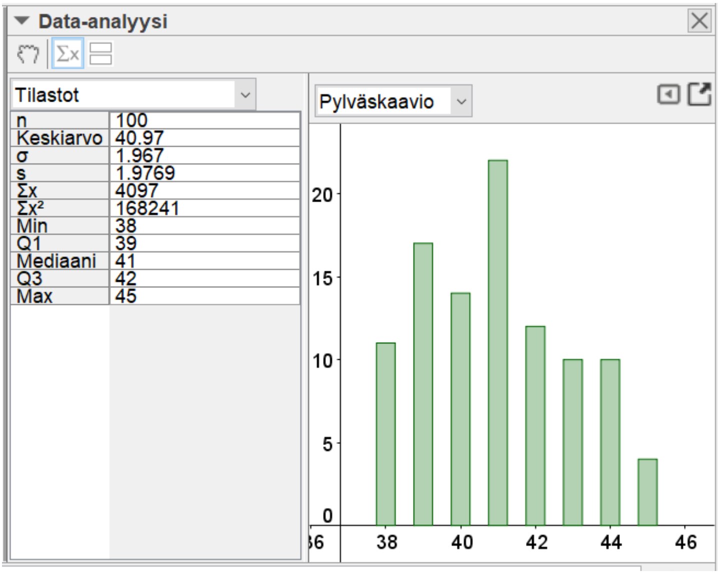
Toinen tapa:
Moodi on 7.
Mediaani on suuruusjärjestyksessä olevista arvosanoista 17. ja 18. arvosanan keskiarvo. Nyt 16 ensimmäistä arvosanaa ovat 4–7 ja 17. ja 18. jäsen ovat arvosanoja 8. Mediaani on siis 8.

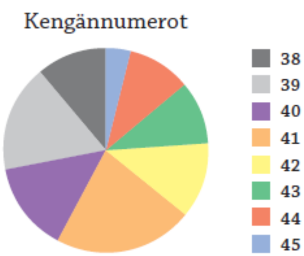
Keskiarvo on
$$\frac{1\cdot 4+3\cdot 5+4\cdot 6+8\cdot 7+5\cdot 8+7\cdot 9+6\cdot 10}{1+3+4+8+5+7+6}=\frac{262}{34}=7,70...\approx 7,7.$$

Keskihajonta on
$$\sqrt{\frac{1\cdot(4-\frac{262}{34})^2+3\cdot(5-\frac{262}{34})^2+4\cdot(6-\frac{262}{34})^2+...+6\cdot(10-\frac{262}{34})^2}{34}}$$
$$=1,67...$$
$$\approx 1,7.$$

1016. a) Koska aineisto on luokiteltu, siirretään luvut matematiikkaohjelmaan ja lasketaan tyyppiarvoa lukuunottamatta pyytetyt arvot siellä. Tyyppiarvo saadaan suoraan katsomalla ainoiston yleisin arvo.

Tyyppiarvo on 41, mediaani 41, keskiarvo 41 ja keskihajonta 1,96… ≈ 2,0.

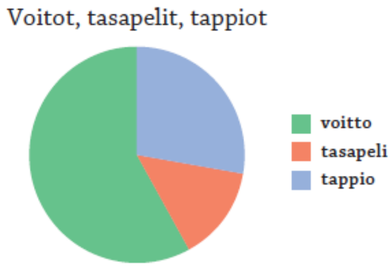




b) Voittoja on 58,0 %, tasapelejä 14,0 % ja häviöitä 28,0 % pelatuista otteluista.

Tyyppiarvo eli moodi on voitto, koska voittoja on eniten. Tulokset voidaan ajatella laitettavan suuruusjärjestykseen voitto, tasapeli ja häviö, jolloin keskimmäiset sijoittuvat voittoluokkaan. Mediaani on siis voitto.

Keskiarvoa aineistosta ei voida laskea.



1017. **a)** Mediaani-ikä eli ikä, jonka on saavuttanut 50 % suomalaisista, on noin 37 vuotta.

b) Enintään 20-vuotiaiden osuus on noin 25 % suomalaisista.

c) Enintään 50-vuotiaita on 70 %, joten vähintään 50-vuotiaiden osuus on 30 % suomalaisista.

d) Enintään 40-vuotiaita on noin 53 % suomalaisista ja enintään 60-vuotiaita on noin 83 % suomalaisista. Suomalaisista 40-60-vuotiaiden osuus on tällöin 30 %.

e) Enintään 44-vuotiaita on noin 60 % suomalaisista, joten vähintään 44-vuotiaita on 40 % suomalaisista.

f) Enintään 30-vuotiaita on noin 40 % suomalaisista.

1018. Muutetaan kaikki ajat sekunneiksi laskennan helpottamiseksi.
Petrin aika sekunteina ensimmäisillä iltarasteilla on $54 \cdot 60 + 10 = 3250$.
Kaikkien osallistuneiden aikojen keskiarvo sekunteina on
$72 \cdot 60 + 43 = 4363$ ja keskihajonta $17 \cdot 60 + 26 = 1046$.

Petrin tulos poikkeaa keskiarvosta $\frac{3250-4363}{1046} = -1,06...$ keskihajonnan mittaa. Poikkeama on alaspäin, joten Petrin tulos on noin 1,1 keskihajontaa parempi kuin keskimääräinen tulos.

Jälkimmäisillä iltarasteilla Petrin aika sekunteina on $61 \cdot 60 + 11 = 3671$.
Kaikkien osallistuneiden keskiarvo sekunteina on $87 \cdot 60 + 55 = 5275$ ja keskihajonta $22 \cdot 60 + 13 = 1333$.

Petrin tulos poikkeaa keskiarvosta $\frac{3671-5275}{1333} = -1,20...$ keskihajonnan mittaa, eli tulos on noin 1,2 keskihajonnan mittaa parempi kuin keskimääräinen tulos.

Petri menestyi paremmin jälkimmäisellä kerralla.

Luvun 10 vahvistavat ja syventävät tehtävät

VAHVISTAVAT TEHTÄVÄT

1019. Puolisoilla on sama veriryhmä, kun molemmat kuuluvat ryhmään A, tai molemmat kuuluvat ryhmään B, tai molemmat ryhmään AB, tai molemmat ryhmään O. Nämä tapahtumat ovat erilliset, joten yhteenlaskusäännön ja riippumattomien tapahtumien kertolaskusäännön avulla saadaan

P(puolisoilla sama veriryhmä)
= P(A ja A) + P(B ja B) + P(AB ja AB) + P(O ja O)
= $0{,}44 \cdot 0{,}44 + 0{,}17 \cdot 0{,}17 + 0{,}08 \cdot 0{,}08 + 0{,}31 \cdot 0{,}31$
= $0{,}325$
≈ $0{,}33$.

1020. Se, että henkilö joutuu pysähtymään valoihin enintään kerran, tarkoittaa, että joko kaikki kolme valoa näyttävät vihreää tai yksi valoista näyttää punaista, muut kaksi vihreää.

Todennäköisyys, että kaikki kolme valoa näyttävät vihreää, on riippumattomien tapahtumien kertolaskusäännön mukaan
P(kaikki vihreää) = $0{,}30 \cdot 0{,}40 \cdot 0{,}20 = 0{,}024$.

Todennäköisyys, että yksi valoista näyttää punaista ja muut vihreää, on yhteenlaskusäännön mukaan
P(yksi pun, muut vihreää)
= P(PVV tai VPV tai VVP)
= $0{,}7 \cdot 0{,}40 \cdot 0{,}20 + 0{,}30 \cdot 0{,}60 \cdot 0{,}20 +0{,}30 \cdot 0{,}40 \cdot 0{,}80$
= $0{,}188$.

Kysytty todennäköisyys on yhteenlaskusäännön mukaan
P(pysähtyy vain kerran)
= P(kaikki vihreää) + P(yksi pun, muut vihreää)
= $0{,}024 + 0{,}188$
= $0{,}212$
≈ $0{,}21$.

1021. Satunnaismuuttujan X mahdolliset arvot ovat 1, 2, 3, 4, 5 ja 6.

Alkeistapauksia ovat kaikki kahta noppaa heitettäessä saatavat silmälukuparit, joita on 36. Esitetään silmälukuparit ruudukossa ja merkitään jokaisen silmälukuparin kohdalle satunnaismuuttujan X arvo eli suurempi saaduista silmäluvuista. Tämän perusteella saadaan laskettua eri arvojen todennäköisyydet.

6	6	6	6	6	6	6
5	5	5	5	5	5	6
4	4	4	4	4	5	6
3	3	3	3	4	5	6
2	2	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
	1	2	3	4	5	6

x	$P(X = x)$
1	1/36
2	3/36 = 1/12
3	5/36
4	7/36
5	9/36 = 1/4
6	11/36

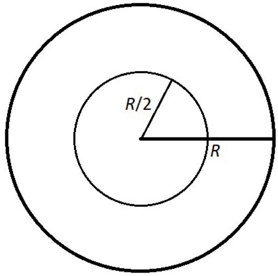
Satunnaismuuttujan X odotusarvo (eli kysytty keskiarvo) on

$$\begin{aligned}\mathrm{E}X &= \frac{1}{36}\cdot 1+\frac{3}{36}\cdot 2+\frac{5}{36}\cdot 3+\frac{7}{36}\cdot 4+\frac{9}{36}\cdot 5+\frac{11}{36}\cdot 6\\ &=\frac{161}{36}\\ &=4{,}4722...\\ &\approx 4{,}5\end{aligned}$$

ja keskihajonta

$$\begin{aligned}\mathrm{D}(X) &= \sqrt{\frac{1}{36}\cdot\left(1-\tfrac{161}{36}\right)^2+\frac{3}{36}\cdot\left(2-\tfrac{161}{36}\right)^2+...+\frac{9}{36}\cdot\left(5-\tfrac{161}{36}\right)^2+\frac{11}{36}\cdot\left(6-\tfrac{161}{36}\right)^2}\\ &=\frac{\sqrt{2555}}{36}\\ &=1{,}4040...\\ &\approx 1{,}4.\end{aligned}$$

1022. Piirretään mallikuva. Olkoon tikkataulun säde R, jolloin koko taulun pinta-ala on πR^2. Tikka osuu lähemmäs keskipistettä kuin reunaa, jos se osuu ympyrään, jonka säde on $\frac{R}{2}$.



Suotuisan alueen pinta-ala on siis

$$\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{\pi R^2}{4}.$$

Kysytty todennäköisyys on $\dfrac{\frac{\pi R^2}{4}}{\pi R^2} = \dfrac{1}{4}$.

1023. Kahdeksan henkilön joukosta voidaan valita kolme $\binom{8}{3} = 56$ eri tavalla.

Kaksi miestä viidestä voidaan valita $\binom{5}{2} = 10$ eri tavalla ja yksi nainen kolmesta $\binom{3}{1} = 3$ eri tavalla. Lisäksi kolme miestä viidestä voidaan valita $\binom{5}{3} = 10$ eri tavalla.

P(ainakin kaksi miestä)
= P(kaksi miestä ja yksi nainen) + P(kolme miestä)

$$= \frac{\binom{5}{2}\cdot\binom{3}{1}}{\binom{8}{3}} + \frac{\binom{5}{3}}{\binom{8}{3}}$$

$$= \frac{5}{7}.$$

1024. **a)** Viiden kilpailijan joukosta voidaan valita kultamitalin, hopeamitalin ja pronssimitalin saaja $(5)_3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ eri tavalla. Näistä vain yksi on oikea tapa, joten kysytty todennäköisyys on $\frac{1}{60}$.

b) Kolme mitalin saajaa voidaan valita viiden kilpailijan joukosta $\binom{5}{3} = 10$ eri tavalla, joten P(kolme parasta saa mitalit) = $\frac{1}{10}$.

Toinen tapa:
a-kohdassa laskettiin, että kolme mitalia voidaan jakaa viidelle kilpailijalle 60 eri tavalla. Näistä sellaisia, joissa mitalikolmikko on oikea, mutta järjestys mahdollisesti väärä, on $3! = 6$. Niinpä kysytty todennäköisyys on $\frac{6}{60} = \frac{1}{10}$.

1025. Luvun 5-kantainen logaritmi on kokonaisluku, jos luku on muotoa 5^n, missä n on kokonaisluku. Koska $5^0 = 1$, $5^1 = 1$, $5^2 = 25$ ja $5^3 = 125 > 100$, luettelon luvuista kokonaislukuja ovat vain luvut $\log_5 1 = 0$, $\log_5 5 = 1$ ja $\log_5 25 = 2$, yhteensä kolme lukua.

Kaikkiaan lukuja on 100, joten kysytty todennäköisyys on $\frac{3}{100} = 0{,}03$.

1026. Piste (a, b) on suoralla $y = 2x$, jos luvut a ja b toteuttavat yhtälön $b = 2a$. Nopanheitossa mahdolliset tulokset ovat silmäluvut 1, 2, 3, 4, 5 ja 6. Silmälukupareista yhtälön $b = 2a$ toteuttavat parit (1, 2), (2, 4) ja (3, 6).

Kaikkiaan silmälukupareja on $6 \cdot 6 = 36$, joten kysytty todennäköisyys on $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

1027. **a)** Yhdellä arvalla voi voittaa yhden lahjakortin, jonka arvo on 30 euroa tai yhden lahjakortin, jonka arvo on 10 euroa. Arpa maksaa 3 euroa voitosta riippumatta, joten satunnaismuuttujan X mahdolliset arvot ovat $30 - 3 = 27$ (euroa), $10 - 3 = 7$ (euroa) ja $0 - 3 = -3$ (euroa).

Lasketaan eri arvojen todennäköisyydet.

$$P(X = 27) = \frac{2}{200} = \frac{1}{100}$$

$$P(X = 7) = \frac{10}{200} = \frac{1}{20}$$

$$P(X = -3) = \frac{200-2-10}{200} = \frac{47}{50}$$

Odotusarvo on

$$E(X) = \frac{1}{100}\cdot 27 + \frac{1}{20}\cdot 7 + \frac{47}{50}\cdot(-3) = -\frac{11}{5} = -2,2 \text{ (euroa).}$$

b) Keskihajonta on

$$\begin{aligned} &D(X) \\ &= \sqrt{\frac{1}{100}\cdot(27-(-2,2))^2 + \frac{1}{20}\cdot(7-(-2,2))^2 + \frac{47}{50}\cdot(-3-(-2,2))^2} \\ &= 3,6551\ldots \\ &\approx 3,66 \text{ (euroa).} \end{aligned}$$

1028. Lasketaan tapahtumien "ainakin yksi ykkönen" ja "ei yhtään ykköstä" todennäköisyydet.

Yhdellä heitolla saadaan ykkönen todennäköisyydellä $\frac{1}{6}$ ja muu kuin ykkönen todennäköisyydellä $1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$. Riippumattomien tapahtumien kertolaskusäännön mukaan

P(ei yhtään ykköstä) $=\left(\frac{5}{6}\right)^{10}=0{,}16150...$

Tämän vastatapahtuman todennäköisyys on

P(ainakin yksi ykkönen) = 1 − P(ei yhtään ykköstä) $1-\left(\frac{5}{6}\right)^{10}=0{,}83849...$

X:n voiton odotusarvo on

−2000 · P(ainakin yksi ykkönen) + 10000 · P(ei yhtään ykköstä)

$= -2000 \cdot 0{,}838\ldots + 10000 \cdot 0{,}161\ldots$

$= -61{,}93\ldots$

≈ -62 (markkaa).

1029. Oppilaan räpäytyksiin käyttämä aika minuutissa on $15 \cdot 0{,}1 = 1{,}5$ sekuntia, joten todennäköisyys, että yksittäinen oppilas räpäyttää silmiään kuvanottohetkellä, on $\frac{1{,}5}{60}=\frac{1}{40}$.

Oppilaat räpäyttelevät silmiään toisistaan riippumatta, joten riippumattomien tapahtumien kertolaskusäännöllä saadaan

P(kukaan ei räpäytä silmiään) = $\left(\frac{39}{40}\right)^{25}=0{,}5310...\approx 0{,}53.$

1030. Merkitään M = "epäonnistuu matematiikan kokeessa" ja F = "epäonnistuu fysiikan kokeessa", jolloin P(M) = 0,25 ja P(F) = 0,17 sekä P(M ja F) = 0,10.

Koska P(*M* ja *F*) =P(*F* ja *M*) = *P*(*F*) · P(*M* | *F*) saadaan

P(M tai F) = P(M) + P(F) − P(M ja F) = 0,25 + 0,17 − 0,10 = 0,32.

1031. **a)** Toistokokeessa, jossa toistoja on neljä ja onnistumisen todennäköisyys jokaisella kerralla 0,9, saadaan yksi epäonnistuminen todennäköisyydellä

$$\binom{4}{1} \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9^3 = 0{,}2916 \approx 0{,}29.$$

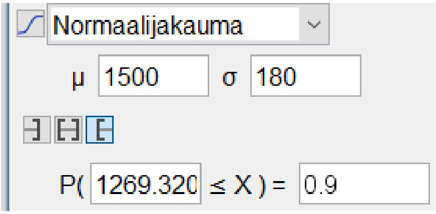
b) Onnistumisten lukumäärä noudattaa binomijakaumaa parametrein $n = 4$ ja p = 0,9, joten odotusarvo on $np = 3{,}6$.

c) Merkitään pelattujen pelien lukumäärää n, jolloin onnistuneiden pelien lukumäärän odotusarvo on $n \cdot 0{,}9$. Etsitään siis luku n, jolle $n \cdot 0{,}9 \geq 10$. Tämän epäyhtälön ratkaisu on $n \geq \frac{10}{0{,}9} = 11{,}11...$

Annin on siis pelattava vähintään 12 kertaa.

1032. Olkoon X satunnaismuuttuja, joka kuvaa yhden lampun kestoikää. Tällöin $X \sim \mathrm{N}(1500,\ 180)$.

Etsitään ensin kestoikä a, jonka ylittää 90 % lampuista eli jolle $P(X \geq a) = 0{,}9$. Ohjelmalla saadaan $a = 1269{,}3\ldots$ (tuntia).



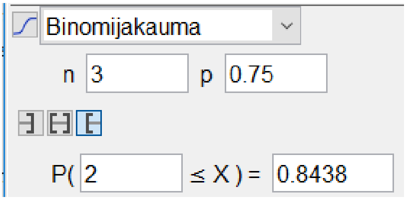
Koska lamput palavat 60 tuntia viikossa, 1269,3… tuntia tarkoittaa

$$\frac{1269{,}3\ldots}{60} = 21{,}155\ldots \approx 21 \text{ viikkoa.}$$

Lamput on siis vaihdettava 21 viikon välein.

1033. Tapahtuma "joukkue B on voittanut ottelun vapaaheittojen jälkeen" on sama kuin "kolmesta vapaaheitosta kaksi tai kolme onnistuu". Koska jokaisen vapaaheiton onnistumisen todennäköisyys on sama, tilannetta voidaan ajatella toistokokeena, jossa toistojen lukumäärä on kolme ja onnistumisen todennäköisyys kullakin kerralla 0,75. Tällöin onnistumisten lukumäärä noudattaa binomijakaumaa parametrein 3 ja 0,75.

Todennäköisyyslaskurilla saadaan
P(kaksi tai kolme onnistuu) = 0,843… ≈ 0,84



Toinen tapa:
Tapahtuma "joukkue B on voittanut ottelun vapaaheittojen jälkeen" on sama kuin "kolmesta vapaaheitosta kaksi tai kolme onnistuu". Koska jokaisen vapaaheiton onnistumisen todennäköisyys on sama, tilannetta voidaan ajatella toistokokeena, jossa toistojen lukumäärä on kolme ja onnistumisen todennäköisyys kullakin kerralla 0,75.

P(kaksi tai kolme onnistuu)
= P(kaksi onnistuu) + P(kolme onnistuu)

$$= \binom{3}{2} \cdot 0,75^2 \cdot 0,25 + 0,75^3$$
$$= 0,84375$$
$$\approx 0,84.$$

1034. Nimetään pysäköintipaikat ja merkitään A ja B.

Nyt $\mathrm{P}(A \text{ varattu}) = \frac{40}{60} = \frac{2}{3}$, $\mathrm{P}(B \text{ varattu}) = \frac{40}{60} = \frac{2}{3}$ ja

$\mathrm{P}(A \text{ varattu ja } B \text{ varattu}) = \frac{32}{60} = \frac{8}{15}$.

Molemmat paikat ovat vapaina, kun kumpikaan ei ole varattuna. Kysytty todennäköisyys on
P(A vapaa ja B vapaa)
= 1 − P(A varattu tai B varattu)
= 1 – ((P(A varattu) + P(B varattu) − P(A varattu ja B varattu))

$$= 1 - (\frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{8}{15})$$
$$= \frac{1}{5}$$
$$= 0,2.$$

Toinen tapa:
Nimetään pysäköintipaikat ja merkitään niittä kirjaimilla A ja B.
Molemmat paikat ovat yhtä aikaa varattuja 32 minuuttia tunnista.
Tämän lisäksi paikka A on yksin varattu 8 minuuttia tunnista ja paikka B on yksin varattuna 8 minuuttia tunnista.

Yhteensä toinen tai molemmat paikat on varattuna 32 + 8 + 8 = 48 minuuttia tunnista.

Molemmat paikat ovat siis yhtä aikaa vapaana 60 – 48 = 12 minuuttia tunnista.

P(molemmat paikat vapaana) = $\frac{12}{60} = \frac{1}{5} = 0,2.$

1035. Todennäköisyys, että nolla välittyy oikein, on $1 - 0{,}005 = 0{,}995$ ja todennäköisyys, että ykkönen välittyy oikein, on $1 - 0{,}010 = 0{,}990$.

Sanassa 0010111 on 3 nollaa ja 4 ykköstä, jotka välittyvät oikein tai vääristyvät toisistaan riippumatta. Todennäköisyys, että sana välittyy täysin oikein, on $0{,}995^3 \cdot 0{,}990^4 = 0{,}946258\ldots$

Todennäköisyys, että yksi kolmesta nollasta on vääristynyt, ja muut merkit oikein, on $\binom{3}{1} \cdot 0{,}005 \cdot 0{,}995^2 \cdot 0{,}990^4 = 0{,}014265\ldots$

Todennäköisyys, että yksi neljästä ykkösestä on vääristynyt, ja muut merkit oikein, on $\binom{4}{1} \cdot 0{,}010 \cdot 0{,}995^3 \cdot 0{,}990^3 = 0{,}038232\ldots$

Nämä tapahtumat ovat erillisiä, joten
P(enintään 1 merkki väärin)
= P(ei yhtään väärin) + P(1 nolla väärin) + P(1 ykkönen väärin)
$= 0{,}946\ldots + 0{,}014\ldots + 0{,}038\ldots$
$= 0{,}99875\ldots$
$\approx 0{,}999.$

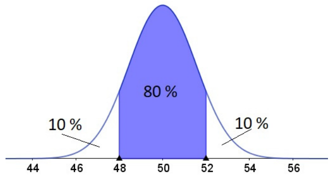
1036. **a)** Koska arvosanan 9 ylittäviä arvosanoja on selvästi enemmän kuin sen alittavia arvosanoja, keskiarvo on yli 9. Toisaalta koska arvosanaa 9 on hiukan enemmän kuin arvosanaa 10, keskiarvo on alle 9,5. Alempia arvosanoja 7 ja 8 on yhteensä niin merkittävä määrä, että keskiarvo pyöristyy neljäsosan tarkkuudella arvosanaan 9+.

Toinen tapa:
Kuviossa pystyakselin asteikkoviivat näyttäisivät olevan noin 5 prosenttiyksikön välein, jolloin arvosanojen 10, 9, 8 ja 7 osuudet olisivat noin 45 %, 46 %, 7 % ja 2 %, mistä tulee yhteensä noin 100 %. Muiden arvosanojen osuudet ovat niin vähäiset, että ne voidaan jättää huomiotta. Arvosanojen painotettu keskiarvo on
$0{,}45 \cdot 10 + 0{,}46 \cdot 9 + 0{,}07 \cdot 8 + 0{,}02 \cdot 7 = 9{,}34$
eli noin 9+.

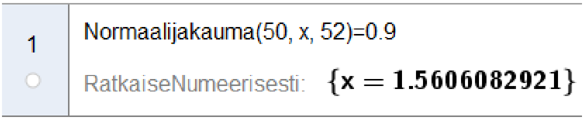
b) Jos esimerkiksi 99 % kuljettajista arvioi arvosanakseen 10 ja loput 1 % arvosanakseen 9, keskiarvo on $0{,}99 \cdot 10 + 0{,}01 \cdot 9 = 9{,}99$. Tällöin 99 % kuljettajista on antanut itselleen keskiarvoa 9,99 paremman arvosanan 10.

1037. **a)** Olkoon X satunnaismuuttuja, joka kuvaa mittaustuloksia. Tällöin $X \sim \mathrm{N}(50, \sigma)$ tuntemattomalla keskihajonnalla σ.

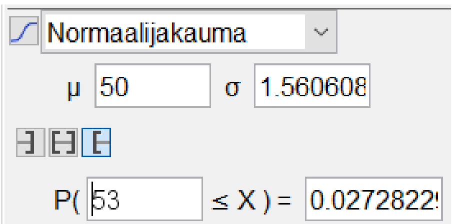
Koska $\mathrm{P}(48 \leq X \leq 52) = 0{,}80$, symmetrian vuoksi $\mathrm{P}(X \leq 52) = 0{,}90$.



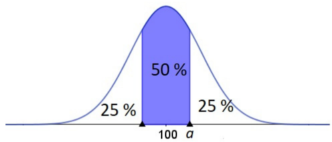
Tämän perusteella ohjelman avulla saadaan keskihajonnaksi $\sigma = 1{,}560\ldots$



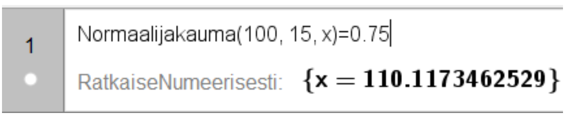
Nyt ohjelman avulla saadaan $\mathrm{P}(X > 53) = 0{,}0272\ldots \approx 0{,}03$.



b) Olkoon $X \sim \mathrm{N}(100, 15)$. Etsitään a, jolle $\mathrm{P}(X \leq a) = 0{,}50 + 0{,}25 = 0{,}75$.



Ohjelman avulla saadaan $a = 110{,}117\ldots$



Tarkistetaan, ovatko rajat 90 ja 110 vai 89 ja 111.
$\mathrm{P}(90 \leq X \leq 110) = 0{,}49\ldots < 0{,}5$
$\mathrm{P}(89 \leq X \leq 111) = 0{,}53\ldots > 0{,}5$

Kysytty kokonaislukuväli on siis [89, 111].

1038. Tapahtuma "$X = 0$" on sama kuin "molemmat nostetut pallot ovat valkoisia". Jos ensimmäinen nostettu pallo on valkoinen, jäljellä on neljä palloa, joista yksi on valkoinen.

Yleisen kertolaskusäännön mukaan $\mathrm{P}(X=0)=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{10}=0{,}1.$

Yksi musta pallo voidaan saada nostamalla ensin valkoinen ja sitten musta, tai ensin musta ja sitten valkoinen. Nämä tapahtumat ovat erilliset, joten

$$\mathrm{P}(X=1)=\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}+\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{3}{5}=0{,}6.$$

Todennäköisyys, että molemmat nostetut pallot ovat mustia, on

$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{3}{10}=0{,}3.$$

Satunnaismuuttujan X odotusarvo on

$$\mathrm{E}X=\frac{1}{10}\cdot 0+\frac{3}{5}\cdot 1+\frac{3}{10}\cdot 2=\frac{6}{5}=1\frac{1}{5}=1{,}2.$$

1039. **a)** Vektorit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan täsmälleen silloin, kun niiden pistetulo on nolla. Vektoreiden $a\overline{i}+b\overline{j}$ ja $2\overline{i}-\overline{j}$ pistetulo on $2a-b$.

$$2a-b=0$$
$$2a=b$$

Nopanheitossa mahdolliset silmäluvut ovat 1, 2, 3, 4, 5 ja 6. Alkeistapauksia eli silmälukupareja (a, b) on $6 \cdot 6 = 36$. Silmälukupareista (a, b) ehdon $2a = b$ toteuttavat parit (1, 2), (2, 4) ja (3, 6). Suotuisia alkeistapauksia on siis kolme, joten kysytty todennäköisyys on $\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$.

b) Vektorit ovat yhdensuuntaiset täsmälleen silloin, kun toinen saadaan kertomalla toinen jollain luvulla $t \neq 0$.

$$a\overline{i}+b\overline{j}=t(3\overline{i}+2\overline{j})$$
$$a\overline{i}+b\overline{j}=3t\overline{i}+2t\overline{j}$$

Koska kantavektorit $\overline{i}$ ja $\overline{j}$ ovat erisuuntaiset, yhtälö toteutuu vain, kun $a = 3t$ ja $b = 2t$. Jälkimmäisestä yhtälöstä saadaan $t=\frac{b}{2}$, joka voidaan sijoittaa ensimmäiseen yhtälöön, jolloin saadaan
$a=3\cdot\frac{b}{2}=\frac{3}{2}b.$
Tämän yhtälön toteuttavat silmälukupareista (a, b) vain parit (3, 2) ja (6, 4). Niinpä kysytty todennäköisyys on $\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$.

1040. Ennen uudistusta 7 numeron lottorivejä oli $\binom{39}{7}$ erilaista.

Sellaisia 7 numeron rivejä, joissa oli 6 seitsemästä varsinaisesta numerosta ja 1 kahdesta lisänumerosta, oli tuloperiaatteen mukaan $\binom{7}{6}\binom{2}{1}=14$ erilaista.

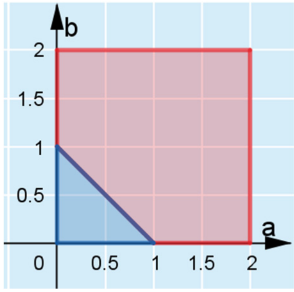
Niinpä todennäköisyys, että pelaajan täyttämässä 7 numeron rivissä oli oikein 6 varsinaista ja yksi lisänumero, oli ennen uudistusta

$$\frac{\binom{7}{6}\binom{2}{1}}{\binom{39}{7}}=\frac{14}{15380937}=0{,}000000910...\approx 9{,}1\cdot 10^{-7}.$$

Uudistuksen jälkeen 7 numeron lottorivejä on $\binom{40}{7}$ erilaista. Sellaisia 7 numeron rivejä, joissa on 6 seitsemästä varsinaisesta numerosta ja lisänumero, on tuloperiaatteen mukaan $\binom{7}{6}\binom{1}{1}=7$ erilaista. Näin ollen todennäköisyys, että pelaajan täyttämässä 7 numeron rivissä on oikein 6 varsinaista ja yksi lisänumero, on uudistuksen jälkeen

$$\frac{\binom{7}{6}\binom{1}{1}}{\binom{40}{7}}=\frac{7}{18643560}=0{,}000000375...\approx 3{,}8\cdot 10^{-7}.$$

1041. Alkeistapauksia ovat lukuparit (a, b), joissa $0 \le a \le 2$ ja $0 \le b \le 2$. Kaikki alkeistapaukset muodostavat neliön, jonka sivun pituus on kaksi ja pinta-ala $2^2 = 4$.



Suotuisa alue on se osa neliötä, jossa $\lg(a + b) > 0$ eli $a + b > 1$ eli $b > -a + 1$.

Suotuisan alueen, joka kuvaan on merkitty punaisella, pinta-ala saadaan vähentämällä koko neliön pinta-alasta sen alueen pinta-ala, jossa $b \le -a + 1$. Tämä alue on kolmio, jonka pinta-ala on $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$.

Kysytty todennäköisyys on siten $\frac{4 - \frac{1}{2}}{4} = \frac{7}{8}$.

1042. **a)** Lukujono on aritmeettinen, jos sen kahden peräkkäisen jäsenen erotus on vakio. Nopanheitossa mahdolliset silmäluvut ovat 1, 2, 3, 4, 5 ja 6.

Lukujonoista (a, b, c) aidosti kasvavia ja aritmeettisia ovat jonot (1, 2, 3), (2, 3, 4), (3, 4, 5) ja (4, 5, 6), joissa peräkkäisten jäsenten erotus on yksi, sekä jonot (1, 3, 5) ja (2, 4, 6), joissa peräkkäisten jäsenten erotus on kaksi, yhteensä kuusi jonoa.

Lukujonoja (a, b, c) on tuloperiaatteen mukaan $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ erilaista, joten kysytty todennäköisyys on $\frac{6}{216} = \frac{1}{36}$.

b) Lukujono on geometrinen, jos sen kahden peräkkäisen jäsenen suhde on vakio. Lukujonoista (a, b, c) geometrisia ovat vakiojonot (1, 1, 1), (2, 2, 2), …, (5, 5, 5) ja (6, 6, 6), joissa peräkkäisten jäsenten suhde on yksi; jono (1, 2, 4), jossa peräkkäisten jäsenten suhde on kaksi; sekä jono (4, 2, 1), jossa peräkkäisten jäsenten suhde on puoli; yhteensä kahdeksan jonoa.

Kysytty todennäköisyys on siksi $\frac{8}{216} = \frac{1}{27}$.

1043. Olkoon X satunnaismuuttuja, joka kuvaa haastattelun kestoa minuutteina. Tällöin $X \sim \mathrm{N}(15, \sigma)$ tuntemattomalla keskihajonnalla σ.

Ehdon $\mathrm{P}(X \leq 18) = 0{,}95$ perusteella löydetään ohjelman avulla keskihajonnaksi $\sigma = 1{,}8238\ldots$

1	Normaalijakauma(15, x, 18)=0.95
	RatkaiseNumeerisesti: $\{x = 1.8238704957\}$

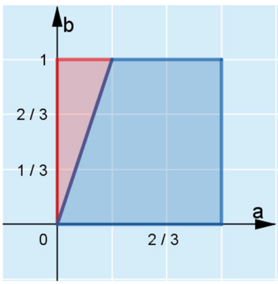
Keskihajonnalla on sama yksikkö (minuutteja) kuin haastattelun kestolla. Muutetaan desimaaliosa sekunneiksi: $0{,}8238\ldots \cdot 60 = 49{,}4\ldots$

Keskihajonnan kasvaessa kasvaa todennäköisyys saada kaukana odotusarvosta olevia arvoja. Keskihajonnan pitäisi siis olla korkeintaan 1 minuutti 50 sekuntia.

1044. Suoran $ax - by = 0$ kulmakerroin nähdään ratkaistusta muodosta $y = \frac{a}{b}x$ ja on siis $\frac{a}{b}$.

Alkeistapauksia ovat lukuparit (a, b), joissa $0 \leq a \leq 1$ ja $0 \leq b \leq 1$. Kaikki alkeistapaukset muodostavat neliön, jonka sivun pituus on yksi ja pinta-ala $1 \cdot 1 = 1$.

Suotuisa alue on se osa neliötä, jossa $\frac{a}{b} \leq \frac{1}{3}$ eli $b \geq 3a$. Tämä alue on kolmio, jonka pinta-ala on $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{6}$.



Kysytty todennäköisyys on $\frac{\frac{1}{6}}{1} = \frac{1}{6}$.

1045. Olkoon X kahvin määrä (grammoina), jolloin $X \sim \mathrm{N}(\mu, 10)$ tuntemattomalle odotusarvolle μ. Odotusarvo tulisi määrätä niin, että $\mathrm{P}(X < 500) \leq 0{,}02$.

Ohjelman avulla saadaan
$\mu = 520{,}537\ldots \approx 521$ (grammaa).

1 Normaalijakauma(x, 10, 500)=0.02
RatkaiseNumeerisesti: $\{x = 520.5374891055\}$

Toinen tapa:
Normeerataan satunnaismuuttuja X ja kirjoitetaan ehto odotusarvolle standardinormaalijakauman kertymäfunktiota Φ käyttäen.

$$
\begin{aligned}
&P(X < 500) \\
&= P\left(\frac{X-\mu}{10} < \frac{500-\mu}{10}\right) \\
&= P\left(Z < 50 - \frac{\mu}{10}\right) \\
&= P\left(Z \leq 50 - \frac{\mu}{10}\right) \\
&= \Phi\left(50 - \frac{\mu}{10}\right)
\end{aligned}
$$

Näin ollen $\mathrm{P}(X < 500) \leq 0{,}02$ täsmälleen silloin, kun $\Phi\left(50 - \frac{\mu}{10}\right) \leq 0{,}02$

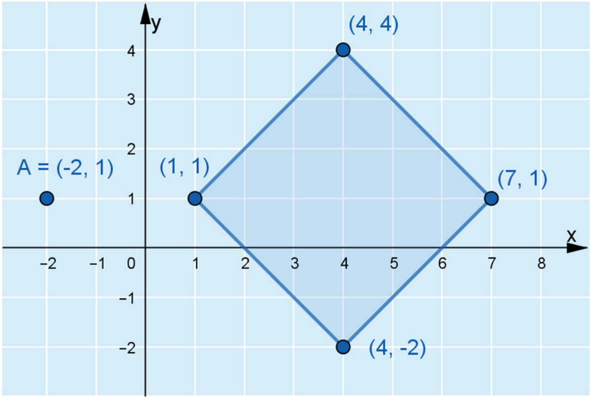
eli kun $\Phi\left(\frac{\mu}{10} - 50\right) \geq 1 - 0{,}02 = 0{,}98.$ Taulukoitujen arvojen perusteella

näin on, kun $\frac{\mu}{10} - 50 \geq 2{,}0538.$ Ratkaistaan μ.

$$
\begin{aligned}
\frac{\mu}{10} - 50 &\geq 2{,}0538 \\
\frac{\mu}{10} &\geq 52{,}0538 \quad \| \cdot 10 \\
\mu &\geq 520{,}538
\end{aligned}
$$

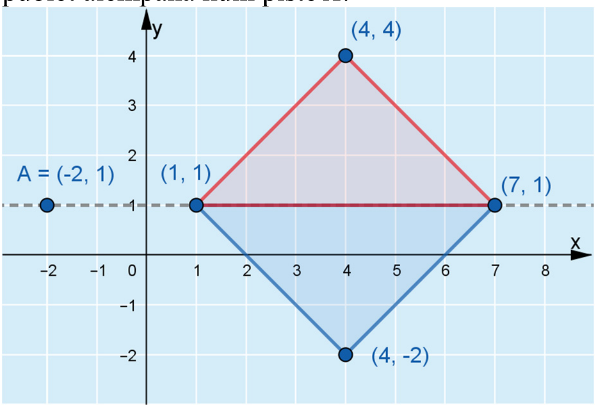
Odotusarvon tulee siis olla vähintään 521 grammaa.

1046. **a)** Piirretään mallikuva.



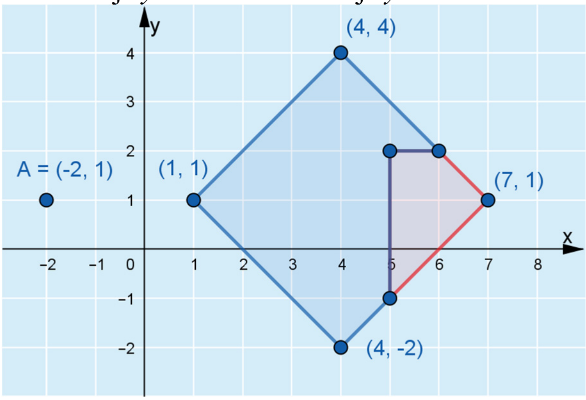
Koska koko neliö on pisteen A oikealla puolella, vektorissa $\overline{AP} = a\overline{i} + b\overline{j}$ kerroin a on välttämättä positiivinen eli $P(a > 0) = 1$.

b) Neliön pinta-alasta täsmälleen puolet on koordinaatistossa ylempänä, puolet alempana kuin piste A.

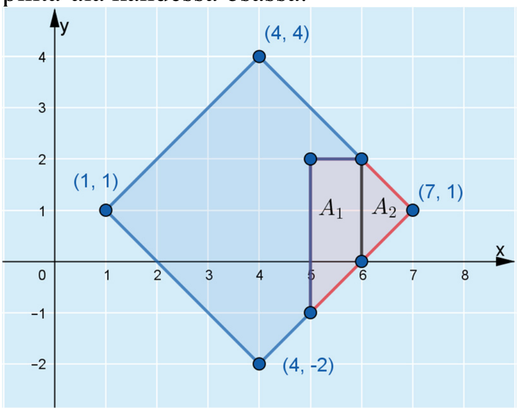


Niinpä $P(b > 0) = \frac{1}{2}$.

c) Merkitään $P = (x, y)$, jolloin $a = x - (-2) = x + 2$ ja $b = y - 1$.
Tapahtumalle "$a > 7$ ja $b < 1$" suotuisa alue on se osa neliötä, jossa $x + 2 > 7$ ja $y - 1 > 1$ eli $x > 5$ ja $y < 2$.



Jaetaan suotuisa alue puolisuunnikkaaksi ja kolmioksi ja lasketaan sen pinta-ala kahdessa osassa.



$$A_1 = \frac{2+3}{2} \cdot 1 = \frac{5}{2}$$

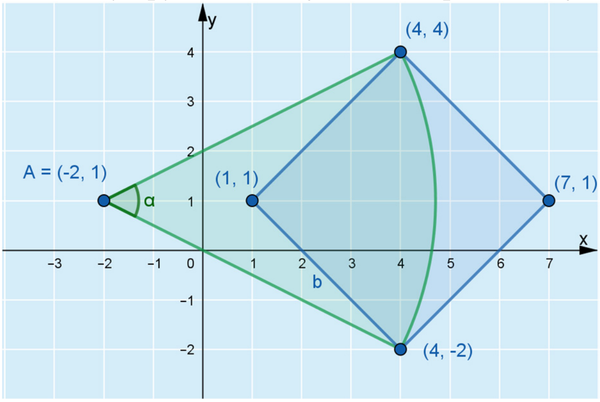
$$A_2 = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1$$

Suotuisan alueen pinta-ala on $A_1 + A_2 = \frac{5}{2} + 1 = \frac{7}{2}$.

Koko neliön pinta-ala on 18.

Siis $\mathrm{P}(a > 7 \text{ ja } b < 1) = \frac{\frac{7}{2}}{18} = \frac{7}{36}$.

d) Tapahtumalle $|\overline{AP}| < \sqrt{45}$ suotuisa alue on se osa neliötä, joka jää sellaisen ympyrän sisään, jonka keskipiste on A ja säde $\sqrt{45}$.



Pisteiden $A = (-2, 1)$ ja $(4, 4)$ välinen etäisyys on
$\sqrt{(4-(-2))^2 + (4-1)^2} = \sqrt{45}$, samoin pisteiden A ja $(4, -2)$ välinen etäisyys.

Niinpä suotuisan alueen pinta-ala saadaan vähentämällä kuvassa näkyvän sektorin pinta-alasta nuolimaisen nelikulmion pinta-ala.

Määritetään sektorin pinta-ala. Sitä varten tarvitaan keskuskulma α. Kulma α on pisteiden $(-2, 1)$ ja $(4, -2)$ sekä pisteiden $(-2, 1)$ ja $(4, 4)$ kautta kulkevien suorien välinen kulma.

$$k_1 = \frac{-2-1}{4-(-2)} = -\frac{1}{2}$$

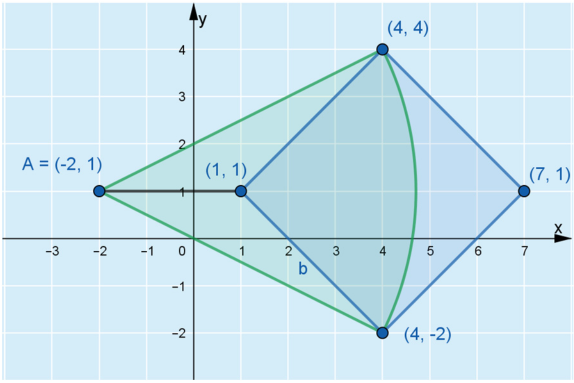
$$k_2 = \frac{4-1}{4-(-2)} = \frac{1}{2}$$

$$\tan\alpha = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 \cdot k_2}\right| = \left|\frac{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{1 + (-\frac{1}{2}) \cdot \frac{1}{2}}\right| = \frac{4}{3}$$

$$\alpha = 53{,}1\ldots°$$

$$A_{\text{sektori}} = \frac{\alpha}{360°} \cdot \pi \cdot (\sqrt{45})^2 = 20{,}8\ldots$$

Jaetaan nuolimainen nelikulmio kahdeksi kolmioksi.



Kolmiot ovat yhtenevät. Jos kannaksi ajatellaan pisteiden (−2, 1) ja (1, 1) välinen 3:n pituinen jana, niin niiden korkeus on 3.

$$A_{\text{kolmiot}} = 2 \cdot \frac{3 \cdot 3}{2} = 9$$

Kysytty todennäköisyys on siis

$$\frac{20{,}8... - 9}{18} = 0{,}659... \approx 0{,}66.$$

1047. Alkeistapauksia ovat lukuparit (p, q), joissa luvut p ja q täyttävät ehdot $|p| \le 1$ ja $|q| \le 1$ eli ehdot $-1 \le p \le 1$ ja $-1 \le q \le 1$. Nämä lukuparit muodostavat neliön, jonka sivun pituus on 2.

Yhtälöllä $x^2 + px + q = 0$ on kaksi ratkaisua eli juurta, jos diskriminantti $D = p^2 - 4q > 0$ eli jos $q < \frac{1}{4}p^2$.

Juuret ovat tällöin $x_1 = \dfrac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}$ ja $x_2 = \dfrac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}$.

Molemmat juuret ovat positiivisia täsmälleen silloin, kun juurista pienempi on positiivinen eli kun $x_1 > 0$.

Jos $p \ge 0$, niin $-p \le 0$. Koska neliöjuuren arvo on aina positiivinen tai nolla, niin tällöin $x_1 = \dfrac{-\overbrace{p}^{\ge 0}-\overbrace{\sqrt{p^2-4q}}^{\ge 0}}{2} \le 0$.

On siis oltava $p < 0$.

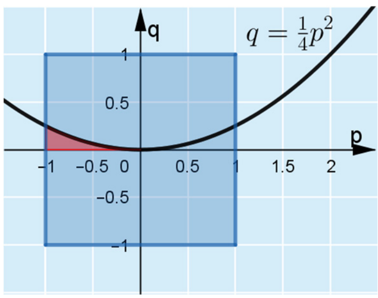
Jos nyt $q \le 0$, niin $-4q \ge 0$, jolloin $p^2 - 4q \ge p^2$. Tällöin

$$x_1 = \dfrac{-p-\overbrace{\sqrt{p^2-4q}}^{\ge |p|}}{2} \le 0.$$

On siis oltava $p < 0$ ja $q > 0$. Tällöin $x_1 = \dfrac{\overbrace{-p}^{=|p|}-\overbrace{\sqrt{p^2-4q}}^{<|p|}}{2} > 0$.

Tapahtuma "molemmat juuret positiivisia" tarkoittaa siis sitä, että $p < 0$, $q > 0$ ja $q < \frac{1}{4}p^2$.

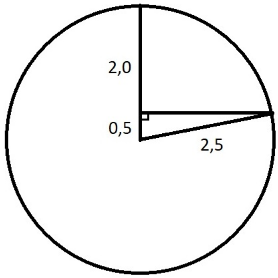
Suotuisa alue neliötä on siis kuvassa käyrän $q = \frac{1}{4}p^2$ ja vaaka-akselin väliin jäävä alue pystyakselin vasemmalla puolella.



Tämän alueen pinta-ala on $\int_{-1}^{0} \frac{1}{4} p^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{12}$. Koko neliön pinta-ala on

$2^2 = 4$, joten kysytty todennäköisyys on $\frac{\frac{1}{12}}{4} = \frac{1}{48}$.

1048. Lasketaan ensin, kuinka suuri on alue, jolle pistetty neula osuu yhteen palloon. Koska pallon säde on 2,5 cm, pallon poikkileikkauskuvassa suorakulmaisen kolmion hypotenuusa on 2,5 cm ja pystykateetti 2,5 cm − 2,0 cm = 0,5 cm.



Pythagoraan lauseen mukaan toinen kateetti on $\sqrt{2,5^2 - 0,5^2} = \sqrt{6} \approx 2,449...$ (cm).

Alue, jolle pistetty neula osuu yhteen palloon, on ympyrä, jonka pinta-ala on $\pi\left(\sqrt{6}\right)^2 = 6\pi$ (cm^2).

Palloja on 25 ja laatikon kannen pinta-ala on 25 · 25 cm^2, joten kysytty todennäköisyys on $\frac{25 \cdot 6\pi}{25 \cdot 25} = \frac{6\pi}{25} = 0,7539... \approx 0,75$.

SYVENTÄVÄT TEHTÄVÄT

1049. Kaksitoista henkilöä voi muodostaa 12! erilaista jonoa.

Kahdentoista paikan jonossa sellaisia paikkapareja, joissa paikat ovat peräkkäin, on 11 erilaista;
XXOOOOOOOOOO
OXXOOOOOOOOO
…
OOOOOOOOOOXX

sellaisia, joissa paikkojen välissä on yksi paikka, on 10
XOXOOOOOOOOO
OXOXOOOOOOOO
…
OOOOOOOOOXOX

ja sellaisia, joissa välissä on kaksi paikkaa, 9
XOOXOOOOOOOO
OXOOXOOOOOOO
…
OOOOOOOOXOOX

Henkilöt A ja B voivat olla näillä kahdella heille valitulla paikalla kahdessa järjestyksessä, ja muut 10 henkilöä muilla paikoilla 10! eri järjestyksessä.

Tuloperiaatteen mukaan suotuisia jonoja on
(11 + 10 + 9) · 2! · 10! = 30 · 2! · 10! erilaista.

Kysytty todennäköisyys on $\dfrac{30\cdot 2!\cdot 10!}{12!}=\dfrac{5}{11}$.

1050. Olkoon X satunnaismuuttuja, joka kuvaa kivien oston ja hionnan vaikutusta kultasepän varallisuuteen. Lasketaan satunnaismuuttujan X odotusarvo kummassakin tilanteessa.

1) Kultaseppä ostaa yhden suuren jalokiven ja maksaa siitä 12 000 mk:
- jos hionta epäonnistuu, kivi on arvoton ja hankintahinnan lisäksi myös hiontakulu 1000 mk jää tappioksi eli $X = 0 - 12\,000 - 1000 = -13\,000$ (mk)
- jos hionta onnistuu, kiven arvo on $1{,}3 \cdot 12\,000$ mk $= 15\,600$ mk ja siten $X = 15\,600 - 12\,000 - 1000 = 2\,600$ (mk)

Hionnan onnistumisen todennäköisyys on 0,9, joten odotusarvo tilanteessa 1 on
$EX = 0{,}1 \cdot (-13000) + 0{,}9 \cdot 2\,600 = 1040$ (mk).

2) Kultaseppä ostaa kaksi pienempää jalokiveä ja maksaa niistä yhteensä 12 000 mk:
- jos molempien kivien hionta epäonnistuu, kivet ovat arvottomia ja hankintahinnan lisäksi myös niiden yhteenlaskettu hiontakulu $2 \cdot 800$ m $= 1600$ mk jää tappioksi, eli $X = 0 - 12\,000 - 1600 = -13\,600$ (mk)
- jos yhden kiven hionta onnistuu ja toisen epäonnistuu, kivien yhteenlaskettu arvo on $0 + 1{,}3 \cdot 6000 = 7800$ (mk) ja siksi $X = 7800 - 12\,000 - 1600 = -5800$ (mk)
- jos molempien kivien hionta onnistuu, kivien yhteenlaskettu arvo on $2 \cdot 1{,}3 \cdot 6000 = 15\,600$ (mk) ja siksi $X = 15\,600 - 12\,000 - 1600 = 2\,000$ (mk)

Lasketaan näiden tapahtumien todennäköisyydet ja X:n odotusarvo tilanteessa 2.

P(kummankin kiven hionta epäonnistuu) $= 0{,}08 \cdot 0{,}08 = 0{,}0064$
P(yhden kiven hionta epäonnistuu ja toisen onnistuu)
$= 0{,}08 \cdot 0{,}92 + 0{,}92 \cdot 0{,}08 = 0{,}1472$
P(kummankin kiven hionta onnistuu) $= 0{,}92 \cdot 0{,}92 = 0{,}8464$

$$EX = 0{,}0064 \cdot (-13600) + 0{,}1472 \cdot (-5800) + 0{,}8464 \cdot 2\,000 = 752 \text{ (mk)}.$$

Tilanteessa 1 odotusarvo on suurempi (1040 > 752), joten kultasepän kannattaa ostaa yksi suuri kivi.

Toinen tapa:
Olkoon X satunnaismuuttuja, joka kuvaa kultasepän ostamien kivien yhteisarvoa kaupan ja hionnan jälkeen, kun myös hiontakulut on huomioitu. Lasketaan satunnaismuuttujan X odotusarvo kummassakin tilanteessa.

1) Kultaseppä ostaa yhden suuren jalokiven:
- jos hionta epäonnistuu, kivi on arvoton ja hiontakulu 1000 mk jää tappioksi eli $X = -1000$ (mk)
- jos hionta onnistuu, kiven arvo on $1{,}3 \cdot 12\,000$ mk $= 15\,600$ mk ja siten $X = 15\,600 - 1000 = 14\,600$ (mk)

Hionnan onnistumisen todennäköisyys on 0,9, joten odotusarvo tilanteessa 1 on
$EX = 0{,}1 \cdot (-1000) + 0{,}9 \cdot 14\,600 = 13\,040$ (mk).

2) Kultaseppä ostaa kaksi pienempää jalokiveä:
- jos molempien kivien hionta epäonnistuu, yhteenlaskettu hiontakulu $2 \cdot 800$ m $= 1600$ mk jää tappioksi eli $X = -1600$ (mk)
- jos yhden kiven hionta onnistuu ja toisen epäonnistuu, kivien yhteenlaskettu arvo on $0 + 1{,}3 \cdot 6000 = 7800$ (mk) ja siksi $X = 7800 - 1600 = 6200$ (mk)
- jos molempien kivien hionta onnistuu, kivien yhteenlaskettu arvo on $2 \cdot 1{,}3 \cdot 6000 = 15\,600$ (mk) ja siksi $X = 15\,600 - 1600 = 14\,000$ (mk)

Lasketaan näiden tapahtumien todennäköisyydet ja X:n odotusarvo tilanteessa 2.

P(kummankin kiven hionta epäonnistuu) $= 0{,}08 \cdot 0{,}08 = 0{,}0064$
P(yhden kiven hionta epäonnistuu ja toisen onnistuu)
$= 0{,}08 \cdot 0{,}92 + 0{,}92 \cdot 0{,}08 = 0{,}1472$
P(kummankin kiven hionta onnistuu) $= 0{,}92 \cdot 0{,}92 = 0{,}8464$

$$EX = 0{,}0064 \cdot (-1600) + 0{,}1472 \cdot 6200 + 0{,}8464 \cdot 14\,000 = 12\,752 \text{ (mk)}.$$

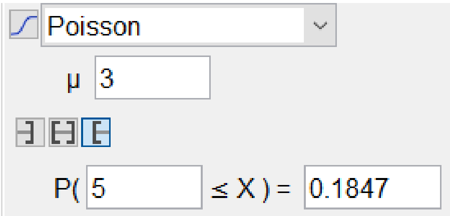
Tilanteessa 1 odotusarvo on suurempi (13040 > 12752), joten kultasepän kannattaa ostaa yksi suuri kivi.

Kolmas tapa:
Jos kultaseppä ostaa yhden suuren jalokiven, sen hionta maksaa 1000 mk.
Hionta onnistuu todennäköisyydellä 0,9 ja onnistuneesti hiotun kiven arvo on $1{,}3 \cdot 12000$ mk $= 15600$ mk.
Varallisuus koostuu kivestä mutta sitä rasittaa hiontakulu 1000 mk, joten varallisuuden odotusarvo on
$0{,}1 \cdot 0 + 0{,}9 \cdot 15600 - 1000 = 13040$ (mk).

Jos kultaseppä ostaa kaksi pienempää jalokiveä, niiden hionta maksaa yhteensä $2 \cdot 800$ mk $= 1600$ mk.
Kumpikin hionta onnistuu todennäköisyydellä 0,92 ja yhden onnistuneesti hiotun kiven arvo on $1{,}3 \cdot 6000$ mk $= 7800$ mk.
Varallisuus koostuu kummastakin kivestä ja sitä rasittaa hiontakulu 1600 mk, joten varallisuuden odotusarvo on
$(0{,}1 \cdot 0 + 0{,}92 \cdot 7800) + (0{,}1 \cdot 0 + 0{,}92 \cdot 7800) - 1600 = 12752$ (mk).

Odotusarvo on ensimmäisessä tilanteessa suurempi, joten kultasepän kannattaa ostaa yksi suuri kivi.

1051. Todennäköisyyslaskurilla saadaan P($X \geq 5$) = 0,184… ≈ 0,18, kun X noudattaa Poissonin jakaumaa parametrilla 3.



Toinen tapa:
Tapahtuman ”keskukseen tulee minuutissa ainakin 5 puhelua” komplementti on ”keskukseen tulee minuutissa korkeintaan neljä puhelua”. Lasketaan komplementin todennäköisyys.

P(nolla tai yksi tai kaksi tai kolme tai neljä puhelua)

$$= p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4$$
$$= \frac{3^0 \cdot e^{-3}}{0!} + \frac{3^1 \cdot e^{-3}}{1!} + \frac{3^2 \cdot e^{-3}}{2!} + \frac{3^3 \cdot e^{-3}}{3!} + \frac{3^4 \cdot e^{-3}}{4!}$$
$$= \frac{131}{8e^3}$$
$$= 0{,}8152...$$

Nyt saadaan
P(vähintään viisi puhelua)
= 1 − P(korkeintaan neljä puhelua)
= 1 − 0,8152…
= 0,1847…
≈ 0,18.

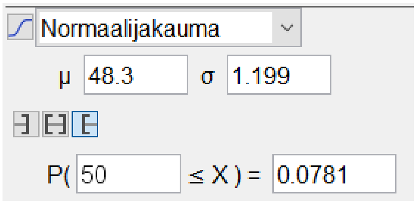
1052. Olkoon X satunnaismuuttuja, joka kuvaa pussissa olevien makeisten yhteispainoa (grammoina). Makeisten lukumäärä on 23, ja yhden makeisen painoa kuvaava satunnaismuuttuja on normaalisti jakautunut odotusarvolla 2,1 (grammaa) ja keskihajonnalla 0,25 (grammaa).

Tehtävänannon alkuosan merkinnöillä siis $n = 23$ ja lisäksi $\mu_i = 2{,}1$ ja $\sigma_i = 0{,}25$ jolloin $\sigma_i^2 = 0{,}25^2$ kaikilla $i = 1, 2, \ldots, 23$.

Tehtävässä annetun tiedon perusteella pussissa olevien 23 makeisen yhteispaino X on normaalisti jakautunut odotusarvona $\mu = 23 \cdot 2{,}1 = 48{,}3$. Keskihajontojen neliöiden summa on nyt $23 \cdot 0{,}25^2$, joten keskihajonta on

$$\sigma = \sqrt{23 \cdot 0{,}25^2} = \frac{\sqrt{23}}{4} \approx 1{,}198\ldots$$

Ohjelman avulla saadaan $P(X \geq 50) = 0{,}0781\ldots \approx 0{,}08$.



(Huom. keskihajonnaksi on syötetty luku $\frac{\sqrt{23}}{4}$, ohjelma ei osaa näyttää tässä muuta kuin desimaaleja, vaikka laskeekin tarkemmilla arvoilla.)

Kokoavia tehtäviä

YLIOPPILASKOKEEN A-OSAN OHJELMAT SALLITTU

1. A-II

Perustelu: käyrä $y = 1 - x^2$ on alaspäin aukeava paraabeli.

B-IV

Käyrä $y = \sin x$ on aaltomainen käyrä, joka kulkee origon kautta, koska $\sin 0 = 0$.

C-V

Luonnollinen logaritmi $\ln x$ on määritelty vain positiivisille luvuille ja on kasvava.

D-I

Eksponenttifunktio e^x on määritelty kaikille luvuille x ja saa vain positiivisia arvoja.

E-VI

Käyrä $y= \cos x$ on aaltomainen käyrä, joka ei kulje origon kautta, koska $\cos 0 = 1$.

E-III

Neliöjuuri on määritelty, kun juurrettava on positiivinen tai nolla. Koska $1 - x \geq 0$ täsmälleen silloin, kun $x \leq 1$, saadaan funktion $\sqrt{1-x}$ määrittelyjoukoksi $x \leq 1$.

2. **a)** $f(1) = 5 \cdot 1 - 1^2 = 5 - 1 = 4$

$f'(x) = 5 - 2x$
$f'(1) = 5 - 2 \cdot 1 = 3$

Arvo $f(1) = 4$ tarkoittaa, että funktion kuvaaja $y = f(x)$ kulkee pisteen (1, 4)
Arvo $f'(1) = 3$ tarkoittaa, että kuvaajan tangentin kulmakerroin kohdassa $x = 1$ on 3.

b) Paraabelin huippu sijaitsee derivaatan nollakohdassa.

$$f'(x) = 5 - 2x$$
$$5 - 2x = 0$$
$$x = \frac{5}{2}$$

Huipun y-koordinaatti on

$$y = f(\frac{5}{2}) = 5 \cdot \frac{5}{2} - (\frac{5}{2})^2 \overset{2)}{=} \frac{25}{2} - \frac{25}{4} = \frac{50}{4} - \frac{25}{4} = \frac{25}{4}.$$

Paraabelin huippu sijaitsee pisteessä $\left(\frac{5}{2}, \frac{25}{4}\right)$.

c) Kuten a-kohdassa laskettiin, funktion kuvaajalle pisteeseen (1, 4) piirretyn tangentin kulmakerroin on 3.
Tangentin yhtälö on siis

$$\begin{aligned}
y - 4 &= 3(x - 1) \\
y - 4 &= 3x - 3 \\
y &= 3x - 3 + 4 \\
y &= 3x + 1.
\end{aligned}$$

Normaali on tangenttia vastaan kohtisuorassa. Suorat ovat kohtisuorassa, kun kulmakerrointen tulo on −1 tai suorat ovat eri koordinaattiakseleiden suuntaiset.

Normaalin kulmakerroin on siis $k = -\frac{1}{3}$ ja yhtälö

$$\begin{aligned}
y - 4 &= -\frac{1}{3}(x - 1) \\
y - 4 &= -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \\
y &= -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} + 4 \\
y &= -\frac{1}{3}x + \frac{13}{3}.
\end{aligned}$$

3. **a)** Lasketaan muutamia ensimmäisiä tulon tekijöitä:

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2},$$
$$\left(1-\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{3}{3}-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3},$$
$$\left(1-\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{4}{4}-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{4}$$

Huomataan, että jokainen tulon tekijä on kahden peräkkäisen kokonaisluvun osamäärä, jossa osoittaja on toisesta tekijästä alkaen sama kuin edellisen tekijän nimittäjä. Nämä luvut supistuvat tulossa pois, joten tulon arvoksi saadaan

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{99}\right)\left(1-\frac{1}{100}\right)$$
$$=\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}}\cdot\ldots\cdot\frac{\cancel{98}}{\cancel{99}}\cdot\frac{\cancel{99}}{100}$$
$$=\frac{1}{100}.$$

b) Kun $a^{-\frac{1}{3}}=2$, niin $a^{\frac{4}{3}}=a^{-\frac{1}{3}\cdot(-4)}=(a^{-\frac{1}{3}})^{-4}=2^{-4}=\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}$.

4. **a)** Lavennetaan murtolausekeet samannimisiksi.

$$
{}^{3+\sqrt{3})}\frac{1}{\sqrt{3}} + {}^{\sqrt{3})}\frac{2}{3+\sqrt{3}}
$$

$$
= \frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}\left(3+\sqrt{3}\right)} + \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}\left(3+\sqrt{3}\right)}
$$

$$
= \frac{3+\sqrt{3}+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}\left(3+\sqrt{3}\right)}
$$

$$
= \frac{3+3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}+3}
$$

$$
= 1
$$

b) Poistetaan sulut ja ratkaistaan epäyhtälö.

$$
\begin{aligned}
(x-3)^2 &> (x-1)(x+1) \\
x^2 - 6x + 9 &> x^2 - 1 \\
-6x &> -1 - 9 \\
-6x &> -10 \qquad \| : (-6) \\
x &< \frac{10}{6} \\
x &< \frac{5}{3}
\end{aligned}
$$

c) Suorien leikkauspiste on yhtälöparin $\begin{cases} \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}=1 \\ 3x-2y+3=0 \end{cases}$ ratkaisu.

$$\begin{cases} \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}=1 \quad \| \cdot 18 \\ 3x-2y+3=0 \quad \| \cdot(-2) \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} + \begin{cases} 6x+9y-18=0 \\ -6x+4y-6=0 \end{cases} \\ \hline 13y-24=0 \\ y=\dfrac{24}{13} \end{array}$$

Sijoitetaan saatu y toiseen yhtälöön ja ratkaistaan x.

$$3x-2\cdot\frac{24}{13}+3=0$$

$$3x-\frac{48}{13}+\frac{39}{13}=0$$

$$3x=\frac{9}{13} \quad \|:3$$

$$x=\frac{3}{13}$$

Suorien leikkauspiste on $\left(\dfrac{3}{13},\dfrac{24}{13}\right)$.

5. **a)** $ax - (8 - 6a) = 2(a + x)$

$$ax - 8 + 6a = 2a + 2x$$
$$ax - 2x = 2a + 8 - 6a$$
$$x(a-2) = -4a + 8 \qquad \| : (a-2), \quad a - 2 \neq 0$$
$$x = \frac{-4a+8}{a-2}$$
$$x = \frac{-4(a-2)}{a-2}$$
$$x = -4$$

Jos $a \neq 2$, niin yhtälön ratkaisu on $x = -4$.

Jos $a = 2$, niin $a - 2 = 0$ ja $-4a + 8 = 0$ eli yhtälö toteutuu kaikilla muuttujan x arvoilla.

b) Neliöjuuren määritelmän mukaan luvun $3-\sqrt{8}$ neliöjuuri eli $\sqrt{3-\sqrt{8}}$ on se ei-negatiivinen luku, jonka neliö on $3-\sqrt{8}$.
Luku $\sqrt{2}-1>0$. Tulee siis olla $(\sqrt{2}-1)^2 = 3-\sqrt{8}$.

$$\left(\sqrt{2}-1\right)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 - 2\sqrt{2} + 1 = 2 - 2\sqrt{2} + 1 = 3 - 2\sqrt{2}.$$
$$3-\sqrt{8} = 3-\sqrt{4\cdot 2} = 3 - 2\sqrt{2}$$

Saadaan siis $\left(\sqrt{2}-1\right)^2 = 3-\sqrt{8}$.

c) Erotetaan ensin yhteinen tekijä x.
$2x^3 + x^2 - 6x = x(2x^2 + x - 6)$

Jaetaan sitten $2x^2 + x - 6$ tekijöihin nollakohtien avulla.

$$2x^2 + x - 6 = 0$$
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot 2\cdot(-6)}}{2\cdot 2} = \frac{-1\pm\sqrt{49}}{4} = \frac{-1\pm 7}{4}$$
$$x = \frac{-1-7}{4} = -2 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-1+7}{4} = \frac{3}{2}$$

Niinpä

$$2x^2 + x - 6 = 2(x-(-2))\left(x - \frac{3}{2}\right) = (x+2)\cdot 2\cdot\left(x-\frac{3}{2}\right) = (x+2)(2x-3)$$

ja siksi $2x^3 + x^2 - 6x = x(x + 2)(2x - 3)$.

6. **a)** $f'(x) = 2x - \frac{1}{3x} \cdot 3 = 2x - \frac{1}{x}$

$f'(\frac{1}{2}) = 2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1 - 2 = -1$

b) $\int_0^{\pi} \cos\frac{x}{2}\,dx = 2\int_0^{\pi} \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\,dx = 2\Big/_{0}^{\pi} \sin\frac{x}{2} = 2\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) = 2(1-0) = 2$

c) $D\sqrt{x^2+3} = D(x^2+3)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(x^2+3)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{1}{\sqrt{x^2+3}} \cdot x = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$

7. **a)** Määritetään ensin funktion *f* kaikki integraalifunktiot.

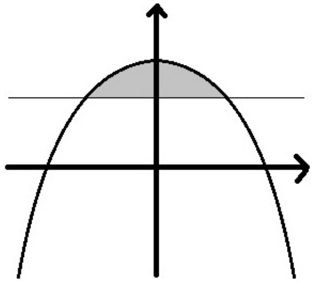
$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx &= \int (\cos 2x - 2\sin x)\,dx \\ &= \int \cos 2x\,dx + 2\int(-\sin x)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int 2\cos 2x\,dx + 2\int(-\sin x)\,dx \\ &= \sin 2x + 2\cos x + C, \quad C \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Etsitään sellainen vakio C, että integraalifunktion arvo kohdassa $x = \frac{\pi}{2}$ on 1.

$$\begin{aligned}\sin(2\cdot\frac{\pi}{2}) + 2\cos\frac{\pi}{2} + C &= 1 \\ \sin\pi + 2\cos\frac{\pi}{2} + C &= 1 \\ 0 + 2\cdot 0 + C &= 1 \\ C &= 1\end{aligned}$$

Kysytty integraalifunktio on $F(x) = \sin 2x + 2\cos x + 1$.

b) Hahmotellaan ensin tilanteesta mallikuva.
Suora $y = 0{,}64$ on vaakasuora suora.
Paraabeli $y = 1 - x^2$ aukeaa alaspäin ja leikkaa y-akselin kohdassa $y = 1$.



Selvitetään paraabelin ja suoran leikkauspisteet ratkaisemalla yhtälöpari.

$$\begin{cases} y = 1 - x^2 \\ y = 0{,}64 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 1 - x^2 &= 0{,}64 \\ 1 - 0{,}64 &= x^2 \\ x^2 &= 0{,}36 \\ x = \sqrt{0{,}36} \quad &\text{tai} \quad x = -\sqrt{0{,}36} \\ x = 0{,}6 \quad &\text{tai} \quad x = -0{,}6 \end{aligned}$$

Leikkauspisteiden välillä paraabeli kulkee suoraa ylempänä, joten paraabelin ja suoran väliin jäävän alueen pinta-ala on

$$\int_{-0{,}6}^{0{,}6} \left((1 - x^2) - 0{,}64\right) \mathrm{d}x$$

$$= \int_{-0{,}6}^{0{,}6} \left(1 - x^2 - 0{,}64\right) \mathrm{d}x$$

$$= \int_{-0{,}6}^{0{,}6} \left(0{,}36 - x^2\right) \mathrm{d}x$$

$$= \Big/_{-0{,}6}^{0{,}6} \left(0{,}36x - \frac{1}{3}x^3\right)$$

$$= (0{,}36 \cdot 0{,}6 - \frac{1}{3} \cdot 0{,}6^3) - (0{,}36 \cdot (-0{,}6) - \frac{1}{3} \cdot (-0{,}6)^3)$$

$$= 0{,}288.$$

8. **a)** Lukujen ln x ja ln 3 keskiarvo on $\frac{\ln x+\ln 3}{2}$. Ratkaistaan yhtälö $\frac{\ln x+\ln 3}{2}=\ln 6$ logaritmin laskusääntöjen avulla.

$$
\begin{aligned}
\frac{\ln x+\ln 3}{2}&=\ln 6 \quad \| \cdot 2\\
\ln x+\ln 3&=2\ln 6\\
\ln x&=2\ln 6-\ln 3\\
\ln x&=\ln 6^2-\ln 3\\
\ln x&=\ln 36-\ln 3\\
\ln x&=\ln\frac{36}{3}\\
\ln x&=\ln 12\\
x&=12
\end{aligned}
$$

b) Käytetään apuna muistikaavaa $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{(1+\sqrt{2})^3(\sqrt{2}-1)}\\
&=\sqrt{(1+\sqrt{2})^2(1+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)}\\
&=\sqrt{(1+\sqrt{2})^2(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}\\
&=\sqrt{(1+\sqrt{2})^2((\sqrt{2})^2-1)}\\
&=\sqrt{(1+\sqrt{2})^2(2-1)}\\
&=\sqrt{(1+\sqrt{2})^2}\\
&=\left|1+\sqrt{2}\right|\\
&=1+\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

9. **a)** Selvitetään ensin käyrän $y = x^2 \ln x$ ja x-akselin leikkauspiste.

$x^2 \ln x = 0$
$x^2 = 0$ tai $\ln x = 0$
$x = 0$ tai $x = 1$

Koska $x > 0$, vain $x = 1$ kelpaa. Leikkauspiste on siis (1, 0).

Käyrä leikkaa x-akselin kulmassa, joka on käyrälle leikkauspisteeseen piirretyn tangentin suuntakulma. Lasketaan käyrän $y = x^2 \ln x$ tangentin kulmakerroin kohdassa $x = 1$ derivaatan avulla.

Derivaatan lauseke on
$\mathrm{D}(x^2 \ln x) = 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \ln x + x$.
Kohdassa $x = 1$ derivaatan arvo on $2 \cdot 1 \cdot \ln 1 + 1 = 0 + 1 = 1$.

Käyrän tangentin suuntakulmalle α on siis voimassa $\tan \alpha = 1$, josta saadaan $\alpha = 45°$.

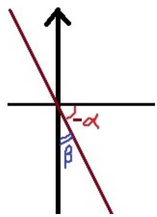
Käyrä $y = x^2 \ln x$ leikkaa x-akselin pisteessä (1, 0) 45 asteen kulmassa.

b) Koska y-akselilla $x = 0$, käyrän $y = x^6 - 3x^5 - 2x + 3$ ja y-akselin leikkauspisteessä $y = 3$. Siis leikkauspiste on (0, 3).

Lasketaan käyrän $y = x^6 - 3x^5 - 2x + 3$ tangentin kulmakerroin kohdassa $x = 0$ derivaatan avulla.

Derivaatan lauseke on $\mathrm{D}(x^6 - 3x^5 - 2x + 3) = 6x^5 - 15x^4 - 2$ ja kohdassa $x = 0$ sen arvo on -2.

Käyrän tangentin suuntakulmalle α on siis voimassa $\tan \alpha = -2$, josta saadaan $\alpha = -63{,}43\ldots°$. Näin ollen käyrän tangentin ja y-akselin välinen kulma on $90° - (-\alpha) = 26{,}56\ldots° \approx 26{,}6°$.



Käyrä $y = x^6 - 3x^5 - 2x + 3$ leikkaa y-akselin pisteessä (0, 3) 26,6 asteen kulmassa.

10. Mitkä tahansa kolme peräkkäistä kokonaislukua voidaan kirjoittaa keskimmäisen avulla: $n - 1$, n ja $n + 1$. Näiden lukujen kuutioiden keskiarvo on

$$\frac{(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3}{3}$$
$$= \frac{n^3 - 3n^3 + 3n - 1 + n^3 + n^3 + 3n^3 + 3n + 1}{3}$$
$$= \frac{3n^3 + 6n}{3}$$
$$= n^3 + 2n.$$

Toisaalta lukujen $n - 1$, n ja $n + 1$ summa on
$(n - 1) + n + (n + 1) = 3n$
ja tulo
$(n - 1) \cdot n \cdot (n + 1) = n\,(n - 1)(n + 1) = n(n^2 - 1) = n^3 - n.$

Kun summaan lisätään tulo, saadaan $3n + n^3 - n = n^3 + 2n$, joka on edellä lasketun mukaan lukujen $n - 1$, n ja $n + 1$ kuutioiden keskiarvo.

11. **a)** Lukujono on geometrinen, jos sen peräkkäisten jäsenten suhde on vakio. Lasketaan lukujonon peräkkäisten jäsenten suhde rekursiokaavan avulla.

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{-2a_{n-1}}{a_{n-1}} = -2$$

Koska suhde $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ ei riipu luvusta n vaan on vakio, lukujono on geometrinen.

Geometrisen lukujonon ensimmäinen jäsen on 3 ja suhdeluku −2, joten lukujonon n:s jäsen on $a_n = 3 \cdot (-2)^{n-1}$.

b) Summan termit ovat geometrisen jonon jäseniä, joten summa on geometrinen summa. Geometrisen jonon suhdeluku laskettiin a-kohdassa ja se on −2. Ensimmäinen yhteenlaskettava on $a_3 = 3 \cdot (-2)^2 = 12$ ja yhteenlaskettavia on yhteensä 8, joten summa on

$$\frac{12 \cdot \left(1 - (-2)^8\right)}{1 - (-2)} = -1020.$$

12. **a)** $(x^2 + 4x + 1)^8 = 1$

$x^2 + 4x + 1 = 1$ tai $x^2 + 4x + 1 = -1$

Ratkaistaan nämä yhtälöt.

$$x^2 + 4x + 1 = 1$$
$$x^2 + 4x = 0$$
$$x(x + 4) = 0$$
$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x + 4 = 0$$
$$x = -4$$

$$x^2 + 4x + 1 = -1$$
$$x^2 + 4x + 2 = 0$$
$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -2 \pm \sqrt{2}$$
$$x = -2 + \sqrt{2} \quad \text{tai} \quad x = -2 - \sqrt{2}$$

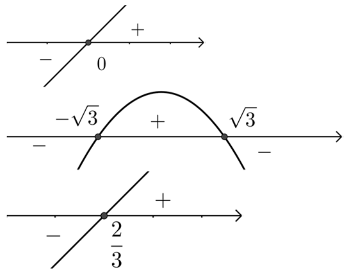
Yhtälön $(x^2 + 4x + 1)^8 = 1$ ratkaisu on
$x = -4$, $x = -2 - \sqrt{2}$, $x = -2 + \sqrt{2}$ tai $x = 0$.

b) Merkitään $f(x) = -3x^4 + 2x^3 + 9x^2 - 6x$, jolloin ratkaistavana on epäyhtälö $f(x) < 0$. Koska f on polynomifunktio, se on jatkuva kaikkialla ja voi vaihtaa merkkiään vain nollakohdissaan. Etsitään nollakohdat.

$$-3x^4 + 2x^3 + 9x^2 - 6x = 0$$
$$-x^3(3x - 2) + 3x(3x - 2) = 0$$
$$(-x^3 + 3x)(3x - 2) = 0$$
$$x(-x^2 + 3)(3x - 2) = 0$$
$$x = 0 \quad \text{tai} \quad -x^2 + 3 = 0 \text{ tai } 3x - 2 = 0$$
$$x^2 = 3 \qquad 3x = 2$$
$$x = \pm\sqrt{3} \qquad x = \frac{2}{3}$$

Laaditaan merkkikaavio

		$-\sqrt{3}$	0	$\frac{2}{3}$	$\sqrt{3}$
x	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$-x^2+3$	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$
$3x-2$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$



Funktion arvot ovat negatiivisia, kun $x < -\sqrt{3}$, kun $0 < x < \frac{2}{3}$ ja kun $x > \sqrt{3}$. Epäyhtälön ratkaisu on siis $x < -\sqrt{3}$, $0 < x < \frac{2}{3}$ tai $x > \sqrt{3}$.

13. Koska $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, niin

$$
\begin{aligned}
\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2 + (\cos x)^2 &= 1 \\
\frac{1}{10} + (\cos x)^2 &= 1 \\
(\cos x)^2 &= 1 - \frac{1}{10} \\
(\cos x)^2 &= \frac{9}{10} \\
\cos x &= \pm\sqrt{\frac{9}{10}} \\
\cos x &= \pm\frac{3}{\sqrt{10}}
\end{aligned}
$$

Kaikilla $180° < x < 270°$ $\cos x$ on negatiivinen, joten $\cos x = -\frac{3}{\sqrt{10}}$.

Lasketaan vielä $\tan x$.

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{10}}}{-\frac{3}{\sqrt{10}}} = \frac{1}{3}$$

14. **a)** Funktion $P(x) = x^2 + 3x + a$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. Funktio P ei saa negatiivisia arvoja, jos kuvaaja on kokonaan x-akselin yläpuolella tai vain sivuaa x-akselia, eli jos diskriminantti $D = 3^2 - 4a \leq 0$.

$$\begin{aligned} 9 - 4a &\leq 0 \\ -4a &\leq -9 \quad \| : (-4) \\ a &\geq \frac{9}{4} \end{aligned}$$

b) Tarkastellaan erikseen tilanteet $a > 0$ ja $a < 0$. Tapaus $a = 0$ ei tule kysymykseen, koska tällöin käyrä ei ole paraabeli.

Jos $a > 0$, paraabeli aukeaa ylöspäin, joten huippu on x-akselin alapuolella täsmälleen silloin, kun yhtälöllä $ax^2 - 2x + a = 0$ on kaksi ratkaisua eli diskriminantti $D = (-2)^2 - 4a^2 > 0$.

$$\begin{aligned} (-2)^2 - 4a^2 &> 0 \\ 4 - 4a^2 &> 0 \\ -4a^2 &> -4 \quad \| : (-4) \\ a^2 &< 1 \\ -1 < a &< 1 \end{aligned}$$

Ehto $a > 0$ huomioiden saadaan siis $0 < a < 1$.

Jos $a < 0$, paraabeli aukeaa alaspäin, joten huippu on x-akselin alapuolella täsmälleen silloin, kun yhtälöllä $ax^2 - 2x + a = 0$ ei ole yhtään ratkaisua eli diskriminantti $D = (-2)^2 - 4a^2 < 0$.

$$\begin{aligned} (-2)^2 - 4a^2 &< 0 \\ 4 - 4a^2 &< 0 \\ -4a^2 &< -4 \quad \| : (-4) \\ a^2 &> 1 \\ a < -1 \text{ tai } a &> 1 \end{aligned}$$

Ehto $a < 0$ huomioiden saadaan siis $a < -1$.

Paraabelin huippu on x-akselin alapuolella, kun $a < -1$ tai $0 < a < 1$.

15. **a)** Ratkaistaan yhtälö. Huomataan, että on oltava $x \neq 0$, jotta yhtälö on määritelty.

$$x + \frac{2}{x} = 3$$

$$^{x)}x + \frac{2}{x} - {}^{x)}3 = 0$$

$$\frac{x^2 + 2 - 3x}{x} = 0, \text{ kun}$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

$$x = 2 \quad \text{tai} \quad x = 1$$

Kun $x = 2$, lausekkeen $x^{-2} + 2^{-x}$ arvo on

$$2^{-2} + 2^{-2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Kun $x = 1$, lausekkeen $x^{-2} + 2^{-x}$ arvo on

$$1^{-2} + 2^{-1} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^1} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

b) Ratkaistaan jälkimmäisestä yhtälöstä y ja sijoitetaan ensimmäiseen.

$$\begin{cases} ax + y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x + y &= 2 \\ y &= 2 - x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ax + y &= 1 \qquad \| \; y = 2 - x \\ ax + 2 - x &= 1 \\ ax - x &= 1 - 2 \\ x(a - 1) &= -1 \qquad \| : (a - 1), \qquad a - 1 \neq 0 \text{ eli } a \neq 1 \\ x &= \frac{-1}{a-1} = \frac{1}{1-a} \end{aligned}$$

$$y = {}^{1-a)}2 - \frac{1}{1-a} = \frac{2(1-a)-1}{1-a} = \frac{1-2a}{1-a}$$

Kun $a \neq 1$, yhtälöparin ratkaisu on $x = \dfrac{1}{1-a}$, $y = \dfrac{1-2a}{1-a}$.

Kun $a = 1$, yhtälöpari on $\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 1 \end{cases}$. Tällä yhtälöparilla ei ole ratkaisuja, sillä ei ole olemassa lukuja x ja y, joille molemmat yhtälöt toteutuisivat eli $x + y$ olisi sekä 1 että 2.

16. Funktio g on kaikkialla derivoituva. Tutkitaan, onko $g'(x) = f(x)$ kaikilla x.

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{(\cos x)\cdot e^x - (\sin x)\cdot e^x}{(e^x)^2} \\ &= \frac{e^x(\cos x - \sin x)}{(e^x)^2} \\ &= \frac{\cos x - \sin x}{e^x} \\ &= e^{-x}(\cos x - \sin x) \end{aligned}$$

Tämä on funktion f lauseke, joten g on funktion f eräs integraalifunktio.

17. Väittämään A sopivat kuvat I ja II.
Perustelu: funktio f on kasvava välillä [1, 4], mikäli sen derivaatta f' on tällä välillä positiivinen tai mahdollisesti yksittäisissä kohdissa nolla. Kuvissa I ja II on $f'(x) > 0$ välillä]1, 4[ja $f'(1), f'(4) \geq 0$, mutta kuvassa III on $f'(x) < 0$ välillä]1, 4[.

B-III:
Kuvassa III on $f'(x) > 0$ välillä]−2, 1[ja $f'(-2) = f'(1) = 0$, mutta kuvissa I ja II on $f'(x) < 0$ välillä]−2, 1[.

C-I ja II:
Kuvissa I ja II on $f'(x) < 0$ välillä [−1, 1[ja $f'(1) = 0$, joten f on vähenevä välillä [−1, 1]. Koska $f'(1) = 0$ ja f on vähenevä välillä [−1, 1], on $f(-1) > 0$. Sen sijaan kuvassa III on $f'(x) > 0$ välillä [−1, 1[ja $f'(1) = 0$, joten f on kasvava välillä [−1, 1] ja siksi $f(-1) < f(1) = 0$.

D-II:
Derivoituvalla funktiolla ääriarvoja löytyy niistä derivaatan nollakohdista, joissa derivaatan merkki vaihtuu. Kuvassa I derivaatalla f' on vain yksi nollakohta, joten se ei käy. Kuvassa II derivaatan merkki vaihtuu kahdessa kohdassa ja kuvassa III derivaatan merkki vaihtuu kolmessa kohdassa.

E-II:
Funktion muutosnopeuden kertoo derivaatta. Funktion arvot kasvavat nopeimmin siellä, missä derivaatta on suurimmillaan. Kuva II on ainoa, jossa derivaatalla f' on suurin arvo kohdassa 2,5.

F-III:
Funktiolla on paikallinen maksimi kohdassa, jossa se muuttuu kasvavasta väheneväksi eli derivaatan merkki muuttuu positiivisesta negatiiviseksi. Näin käy vain kuvassa III.

G-I ja II:
Suora on laskeva, jos sen kulmakerroin on negatiivinen. Funktion f kuvaajalle kohtaan $x = 0$ asetetun tangentin kulmakerroin on derivaatan arvo tässä kohdassa eli $f'(0)$. Kuvissa I ja II on $f'(0) < 0$, kuvassa III ei.

18. Funktion $f(x) = Ae^x + Be^{-2x}$ derivaatta on
$f'(x) = Ae^x + Be^{-2x} \cdot (-2) = Ae^x - 2Be^{-2x}$, joten
$f'(0) = Ae^0 - 2Be^0 = A - 2B.$
Ehdosta $f'(0) = 13$ saadaan siis yhtälö $A - 2B = 13$.

Toisaalta
$f(\ln 2) = Ae^{\ln 2} + Be^{-2\ln 2} = A \cdot 2 + B(e^{\ln 2})^{-2} = 2A + B \cdot 2^{-2} = 2A + \frac{1}{4}B,$ joten
ehdosta $f(\ln 2) = -8$ saadaan yhtälö $2A + \frac{1}{4}B = -8$.

Ratkaistaan saatu yhtälöpari.

$$\begin{cases} A - 2B = 13 \\ 2A + \dfrac{1}{4}B = -8 \end{cases}$$

Ratkaistaan ensimmäisestä yhtälöstä A, jolloin saadaan $A = 13 + 2B$ ja sijoitetaan tämä toiseen yhtälöön.

$$\begin{aligned} 2(13 + 2B) + \frac{1}{4}B &= -8 \\ 26 + {}^{4)}4B + \frac{1}{4}B &= -8 \\ \frac{16}{4}B + \frac{1}{4}B &= -8 - 26 \\ \frac{17}{4}B &= -34 \quad \Big\| : \frac{17}{4} \\ B &= -8 \end{aligned}$$

Nyt $A = 13 + 2B = 13 + 2 \cdot (-4) = 13 - 16 = -3$.
Vakiot ovat $A = -3$ ja $B = -8$.

19. **a)** Väleillä $]-1, 1[$ ja $]4, 6[$ on kuvan perusteella $f'(x) > 0$, joten f on kasvava väleillä $]-1, 1]$ ja $[4, 6[$. Välillä $[1, 4]$ f on vähenevä, koska $f'(x) > 0$ välillä $]1, 4[$.

Koska f on koko välillä $]-1, 6[$ derivoituva, se on tällä välillä jatkuva ja siksi kasvavuus/vähenevyys on voimassa osavälien päätepisteisiin saakka niissä pisteissä, jotka kuuluvat funktion määrittelyjoukkoon.

b) Funktio f on kasvava välillä $[0,2; 0,7]$, koska sen derivaatta f' on tällä välillä positiivinen; niinpä $f(0,2) < f(0,7)$.

c) Funktion kuvaajalle kohtaan $x = 3$ piirretyn tangentin kulmakerroin on $f'(3)$, joka kuvan perusteella on -1.

d) Kuvan perusteella $f'(x) = 2$, kun $x = 0$ ja kun $x = 5$.

e) Derivoituvan funktion ääriarvot löytyvät kohdista, joissa derivaatta vaihtaa merkkiään. Kohdassa $x = 1$ derivaatta f' muuttuu positiivisesta negatiiviseksi, joten funktio f muuttuu kasvavastaväheneväksi ja siksi kohdassa $x = 1$ funktiolla f on paikallinen maksimi.

Kohdassa $x = 4$ derivaatta f' muuttuu negatiivisesta positiiviseksi, joten funktio f muuttuu vähenevästä kasvavaksi eli $x = 4$ on funktion f paikallinen minimikohta.

20. **a)** Kun a ja b ovat positiivisia, niin myös tulo ab on positiivinen ja siksi kaikki kolme neliöjuurta $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ ja $\sqrt{ab}$ on määritelty ja arvoltaan positiivisia. Neliöjuuren määritelmän mukaan luvun ab neliöjuuri $\sqrt{ab}$ on se ei-negatiivinen luku, jonka neliö on ab. Nyt $\sqrt{a}\sqrt{b} > 0$, koska $\sqrt{a} > 0$ ja $\sqrt{b} > 0$. Riittää siis osoittaa, että $\left(\sqrt{a}\sqrt{b}\right)^2 = ab$.

Potenssin laskusääntöjen mukaan $\left(\sqrt{a}\sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2\left(\sqrt{b}\right)^2$

ja neliöjuuren määritelmän mukaan $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ ja $\left(\sqrt{b}\right)^2 = b$,

joten $\left(\sqrt{a}\sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2\left(\sqrt{b}\right)^2 = ab$.

b) Kun a ja b ovat positiivisia, niin myös summa $a + b$ on positiivinen ja siksi kaikki kolme neliöjuurta $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ ja $\sqrt{a+b}$ määritelty. Riittää osoittaa, että lukujen $\sqrt{a+b}$ ja $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ neliöt eivät ole samat.

$$\left(\sqrt{a+b}\right)^2 = a+b$$
$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 = a+2\sqrt{a}\sqrt{b}+b$$

Koska $a > 0$ ja $b > 0$, myös $\sqrt{a} > 0$ ja $\sqrt{b} > 0$ ja siksi
$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 = a+b+\underbrace{2\sqrt{a}\sqrt{b}}_{>0} > a+b.$$

21. **a)** Olkoon myyntihinta 100*a*, jolloin tuottaja saa aluksi 23*a*, kauppa ja teollisuus 65*a* ja veroa on 100*a* − 23*a* − 65*a* = 12*a*.

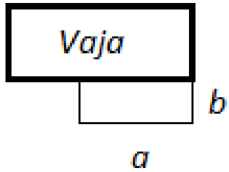
Noston jälkeen tuottaja saa 1,05 · 23*a* = 24,15*a*. Kun myyntihinta pysyy samana, myös vero pysyy samana eli kaupan ja teollisuuden saama osa olisi 100*a* − 24,15*a* − 12*a* = 63,85*a*. Tämä on $\frac{63,85a}{65a} = 0,9823... \approx 98,2\%$ alkuperäisestä, joten kaupan ja teollisuuden tulo pienenisi 100 % − 98,2 % = 1,8 %.

b) Olkoon veden määrä *a* ja 5-prosenttisen liuoksen määrä *b*, jolloin valmiin liuoksen kokonaismäärä on *a* + *b*. Suolan määrä valmiissa liuoksessa on 0,05*b*. Halutaan, että valmis liuos on 3-prosenttista, joten on oltava $\frac{0,05b}{a+b} = 0,03.$ Ratkaistaan tästä *b*.

$$\begin{aligned}
\frac{0,05b}{a+b} &= 0,03 \quad \| \cdot (a+b) \\
0,05b &= 0,03(a+b) \\
0,05b &= 0,03a + 0,03b \\
0,02b &= 0,03a \quad \| : 0,02 \\
b &= \frac{3}{2}a
\end{aligned}$$

Veden ja liuoksen sekoitussuhde on siis $\frac{a}{b} = \frac{a}{\frac{3}{2}a} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$ eli 2:3.

22. Olkoon vajan seinustalla olevan sivun pituus a ja sitä vastaan kohtisuoran sivun pituus b. Aidan pituus on tällöin $a + 2b$. Koska aidan kokonaispituus on 10 metriä, saadaan



$a + 2b = 10$

$a = 10 - 2b$

ja lisäksi $0 \le a \le 10$ ja $0 \le b \le 5$, koska pituus ei voi olla negatiivinen.

Alueen pinta-ala on $A = ab = (10 - 2b)b = 10b - 2b^2$.

Etsitään funktion $f(x) = 10x - 2x^2$ suurin arvo, kun $0 \le x \le 5$. Koska f on jatkuva koko välillä $0 \le x \le 5$ ja väli on suljettu, suurin arvo varmasti löytyy. Koska f on derivoituva, suurin arvo löytyy joko välin päätepisteestä tai derivaatan nollakohdasta.

Lasketaan funktion f derivaatta.

$f'(x) = 10 - 2 \cdot 2x = 10 - 4x$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat.

$10 - 4x = 0$

$-4x = -10 \quad \| : (-4)$

$x = 2{,}5$

Lasketaan vielä funktion arvot välin päätepisteissä ja derivaatan nollakohdissa.

$f(0) = 10 \cdot 0 - 2 \cdot 0^2 = 0$

$f(5) = 10 \cdot 5 - 2 \cdot 5^2 = 0$

$f(2{,}5) = 10 \cdot 2{,}5 - 2 \cdot 2{,}5^2 = 12{,}5$

Suurin arvo 12,5 saavutetaan, kun $x = 2{,}5$. Alueen mitat ovat siis $b = 2{,}5$ (metriä) ja $a = 10 - 2b = 5$ (metriä).

23. Tarkistetaan ensin, että piste A todella on funktion $f(x)=\sqrt{2}\sin(\frac{x}{2})$ kuvaajalla.

$f(\frac{\pi}{2})=\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=1$ (ok, piste A on kuvaajalla)

Lasketaan halutun tangentin kulmakerroin eli $f'(\frac{\pi}{2})$.

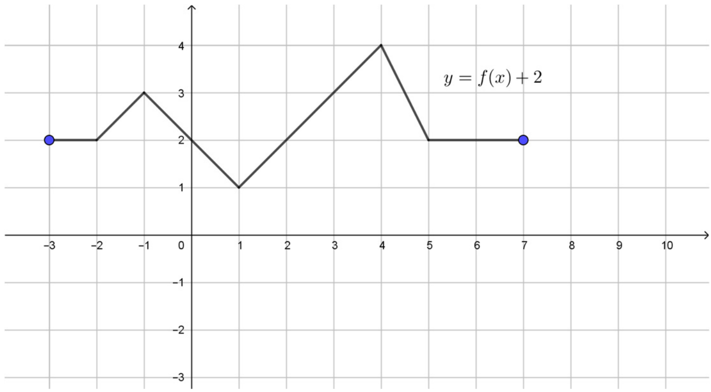
$$f'(x)=\sqrt{2}\cos(\frac{x}{2})\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\frac{x}{2})$$
$$f'(\frac{\pi}{2})=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$$

Koska tangentin kulmakerroin on $\frac{1}{2}$, sen suuntaisen vektorin $a\overline{i}+b\overline{j}$ kertoimet toteuttavat yhtälön $\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$ eli $a = 2b$. Jotta vektorin pituus olisi yksi, on oltava $\sqrt{a^2+b^2}=1$. Sijoittamalla tähän $a = 2b$ saadaan yhtälö $\sqrt{(2b)^2+b^2}=1$. Ratkaistaan tämä yhtälö.

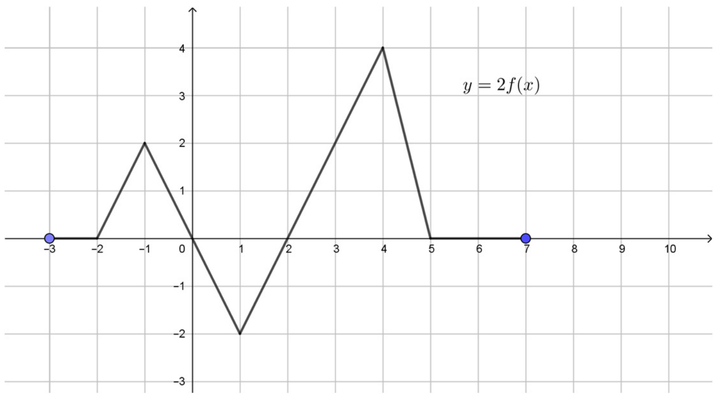
$$\begin{aligned}\sqrt{(2b)^2+b^2}&=1\\ \sqrt{4b^2+b^2}&=1\\ \sqrt{5b^2}&=1\\ 5b^2&=1\\ b^2&=\frac{1}{5}\\ b=\frac{1}{\sqrt{5}}\quad&\text{tai}\quad b=-\frac{1}{\sqrt{5}}\end{aligned}$$

Kun $b=\frac{1}{\sqrt{5}}$, on $a=\frac{2}{\sqrt{5}}$ ja kun $b=-\frac{1}{\sqrt{5}}$, on $a=-\frac{2}{\sqrt{5}}$. Kysytty vektori on $\frac{2}{\sqrt{5}}\overline{i}+\frac{1}{\sqrt{5}}\overline{j}=\frac{1}{\sqrt{5}}(2\overline{i}+\overline{j})$ tai $-\frac{2}{\sqrt{5}}\overline{i}-\frac{1}{\sqrt{5}}\overline{j}=-\frac{1}{\sqrt{5}}(2\overline{i}+\overline{j})$.

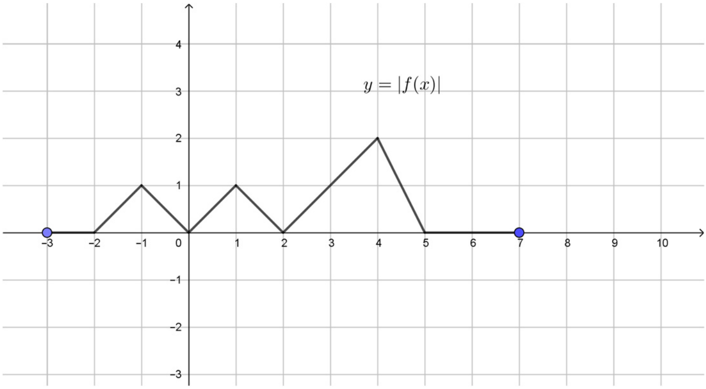
24. **a)** Funktio g saa joka kohdassa kahta suuremman arvon kuin funktio f, joten funktion g kuvaaja kulkee joka kohdassa kaksi yksikköä korkeammalla kuin funktion f kuvaaja.



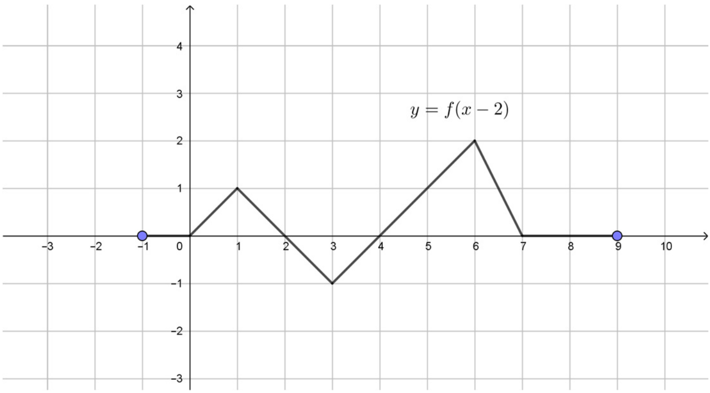
b) Funktion g arvot ovat kaksinkertaisia funktion f arvoihin nähden eli kuvaajaa on venytetty pystysuunnassa kaksinkertaiseksi. Nollakohdat säilyvät.



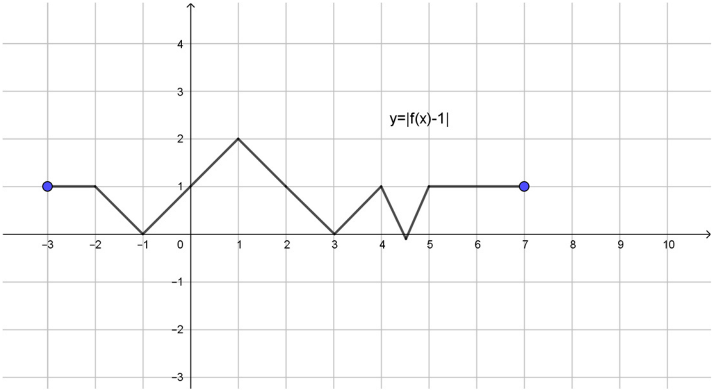
c) Funktion f kuvaajan x-akselin alapuoliset osat on peilattu x-akselin yläpuolelle.



d) Funktio g saa samat arvot kuin f, mutta vasta kaksi yksikköä "myöhemmin" eli kuvaajaa on siirretty kaksi yksikköä oikealle. Funktio g on määritelty, kun $x - 2$ kuuluu funktion f määrittelyjoukkoon $[-3, 7]$ eli kun x on välillä $[-1, 9]$.



e) Funktion g kuvaaja saadaan, kun funtion f kuvaajaa ensin pudotetaan yhdellä yksiköllä alaspäin ja sen jälkeen x-akselin alapuolelle päätyneet osat peilataan x-akselin yläpuolelle.



25. **a)** Kulman sini on kulmaa vastaavan kehäpisteen y-koordinaatti. Välillä $[0, 2\pi]$ on $\sin x = 1$ täsmälleen silloin, kun $x = \frac{\pi}{2}$.

b) Funktion $f(t) = \cos t$ derivaattafunktio on $f'(t) = -\sin(t)$.
Ratkaistaan yhtälö $f'(t) = 0$, kun t on välillä $[0, 2\pi]$.

$$\begin{aligned} -\sin(t) &= 0 \\ \sin(t) &= 0 \\ t = 0 \quad \text{tai} \quad t &= \pi \quad \text{tai} \quad t = 2\pi \end{aligned}$$

c) Kirjoitetaan yhtälön oikea puoli muistikaavan
$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ avulla.

$\sin z = (1 + \cos z)(1 - \cos z)$
$\sin z = 1 - \cos^2 z$

Trigonometrian peruskaavan mukaan $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$, joten
$1 - \cos^2 z = \sin^2 z$.

$$\begin{aligned} \sin z &= 1 - \cos^2 z \\ \sin z &= \sin^2 z \\ \sin z - \sin^2 z &= 0 \\ \sin z\,(1 - \sin z) &= 0 \\ \sin z &= 0 \quad \text{tai} \quad 1 - \sin z = 0 \\ &\phantom{= 0 \quad \text{tai} \quad 1 -{}} \sin z = 1 \end{aligned}$$

Välillä $[0, 2\pi]$ on
$\sin z = 0$ täsmälleen silloin, kun $z = 0$ tai $z = \pi$ tai $z = 2\pi$, ja
$\sin z = 1$ täsmälleen silloin, kun $z = \frac{\pi}{2}$.
Yhtälön $\sin z = (1 + \cos z)(1 - \cos z)$ ratkaisu on siis
$z = 0$, $z = \frac{\pi}{2}$, $z = \pi$ tai $z = 2\pi$.

26. Huomataan ensin, että on oltava $x \neq 2$, koska epäyhtälössä esiintyvä rationaalilauseke $\frac{x^2-4}{x-2}$ ei ole määritelty, kun nimittäjä $x - 2$ on nolla eli kun $x = 2$.

Sievennetään itseisarvojen sisällä olevaa lauseketta.

$$\frac{x^2-4}{x-2}-4=\frac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}}-4=x+2-4=x-2,\ \text{kun } x\neq 2.$$

Ratkaistaan epäyhtälö $|x - 2| < 0{,}01$.

$$\begin{aligned} |x-2| &< 0{,}01 \\ -0{,}01 < x-2 &< 0{,}01 \\ 2-0{,}01 < x &< 2+0{,}01 \\ 1{,}99 < x &< 2{,}01 \end{aligned}$$

Koska täytyy olla $x \neq 2$, epäyhtälön $\left|\frac{x^2-4}{x-2}-4\right|<0{,}01$ ratkaisuksi saadaan $1{,}99 < x < 2$ tai $2 < x < 2{,}01$.

27. **a)** $\int_{-1}^{1}\frac{1}{3+x}\,\mathrm{d}x=\Big/_{-1}^{1}\ln(3+x)=\ln 4-\ln 2=\ln\frac{4}{2}=\ln 2$

b) Jaetaan integroimisväli $[-1, 1]$ paloihin $[-1, 0]$ ja $[0, 1]$, joissa itseisarvot osataan poistaa.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}e^{2|x|}\,\mathrm{d}x &=\int_{-1}^{0}e^{-2x}\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}e^{2x}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}(-2)\cdot e^{-2x}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{0}^{1}2e^{2x}\,\mathrm{d}x\\ &=-\frac{1}{2}\Big/_{-1}^{0}e^{-2x}+\frac{1}{2}\Big/_{0}^{1}e^{2x}\\ &=-\frac{1}{2}(e^0-e^2)+\frac{1}{2}(e^2-e^0)\\ &=-\frac{1}{2}(1-e^2)+\frac{1}{2}(e^2-1)\\ &=e^2-1\end{aligned}$$

28. Vasemman puolen lausekkeessa osoittaja on peräkkäisten parittomien kokonaislukujen 1, 3, 5, …, $2n - 1$ summa. Tässä lukujonossa peräkkäisten jäsenten erotus on aina 2, joten jono on aritmeettinen. Yhteenlaskettavia on n kappaletta, joten aritmeettisen summan kaavalla saadaan

$$1+3+5+...+2n-1=\frac{n(1+2n-1)}{2}=\frac{n\cdot 2n}{2}=n^2.$$

Niinpä $\frac{1+3+5+...+2n-1}{n^2}=\frac{n^2}{n^2}=1.$

29. **a)** Jotta yhtälö on määritelty, on oltava $x + 1 > 0$ ja $x - 1 > 0$ eli $x > 1$.

$$\ln(x+1)-\ln(x-1)=\ln 4+\ln 2 \,\|\, \ln a-\ln b=\ln\frac{a}{b},\ \ln a+\ln b=\ln(ab)$$

$$\begin{aligned}\ln\frac{x+1}{x-1}&=\ln 8\\ \frac{x+1}{x-1}&=8 \,\|\cdot(x-1)\neq 0\\ x+1&=8(x-1)\\ x+1&=8x-8\\ 7x&=9\\ x&=\frac{9}{7}\end{aligned}$$

Löydetty ratkaisuehdokas $x=\frac{9}{7}$ toteuttaa määrittelyehdon $x > 1$, joten se on yhtälön ratkaisu.

b) Etsitään polynomia g, joka saa arvot [0, 25]. Valitaan polynomiksi $g(x) = 25 - x^2$. Perustellaan vielä, että näin valittu g sopii pyydetyksi esimerkiksi.

Yhdistetty funktio $f(x)=\sqrt{g(x)}$ on määritelty, kun $g(x) \geq 0$ eli kun $x^2 \leq 25$ eli välillä $-5 \leq x \leq 5$. Funktio f on jatkuva, koska sisäfunktio g on jatkuva ja ulkofunktio neliöjuuri on myös jatkuva.

Funktion f pienin arvo on 0, koska neliöjuuren arvo ei ole koskaan negatiivinen ja arvo nolla saavutetaan: esimerkiksi
$f(5)=\sqrt{g(5)}=\sqrt{25-5^2}=\sqrt{0}=0.$

Funktion f suurin arvo on $f(0)=\sqrt{g(0)}=\sqrt{25}=5,$ koska sisäfunktion g suurin arvo on $g(0) = 25$; tämä nähdään siitä, että $x^2 \geq 0$ kaikilla x.

Koska f on jatkuva, se saavuttaa kaikki arvot pienimmän ja suurimman arvonsa väliltä, ja siksi sen arvojoukko on [0, 5].

30. **a)** Tutkitaan, mitä arvoja funktio $f(x) = (1 - \cos^3 x)^3$ saa.
Tiedetään, että $-1 \leq \cos x \leq 1$, joten $-1 \leq \cos^3 x \leq 1$ ja siksi $-1 \leq -\cos^3 x \leq 1$ ja edelleen $0 \leq 1 - \cos^3 x \leq 2$, josta saadaan lopulta $0 \leq (1 - \cos^3 x)^3 \leq 8$. Varmistetaan vielä, että arvot 0 ja 8 saavutetaan:

$f(0) = (1 - (\cos 0)^3)^3 = (1 - 1^3)^3 = 0$
$f(\pi) = (1 - (\cos \pi)^3)^3 = (1 - (-1)^3)^3 = 2^3 = 8$

Siis funktion f suurin arvo on 8 ja pienin arvo 0.

b)

$$(\sin x + \sqrt{3})^2 = \frac{27}{4}$$

$$\sin x + \sqrt{3} = \sqrt{\frac{27}{4}} \quad \text{tai} \quad \sin x + \sqrt{3} = -\sqrt{\frac{27}{4}}$$

$$\sin x + \sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \qquad \sin x + \sqrt{3} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin x = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} \qquad \sin x = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}$$

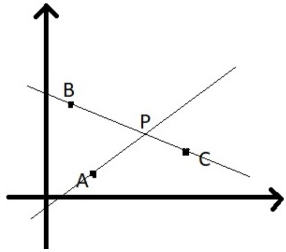
$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sin x = -2\sqrt{3} \quad (\text{ei ratkaisua, } -2\sqrt{3} < -1)$$

$$x = \frac{\pi}{3} + n2\pi$$

$$\text{tai} \quad x = \pi - \frac{\pi}{3} + n2\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Yhtälön ratkaisu on $x = \frac{\pi}{3} + n2\pi, n \in \mathbb{Z}$ tai $x = \frac{2\pi}{3} + n2\pi, n \in \mathbb{Z}$.

31. Piirretään mallikuva tilanteen hahmottamiseksi.



Pisteen A kautta kulkevan, vektorin $\overline{i}+\overline{j}$ suuntaisen suoran kulmakerroin on 1 ja yhtälö $y-1=1\cdot(x-2)$ eli $y=x-1$.

Pisteiden B ja C kautta kulkevan suoran kulmakerroin on $\frac{2-4}{6-1}=-\frac{2}{5}$ ja yhtälö

$y-4=-\frac{2}{5}(x-1)$.

Merkitään suorien leikkauspistettä kirjaimella P ja ratkaistaan sen koordinaatit yhtälöparista. Aloitetaan sijoittamalla jälkimmäiseen yhtälöön $y=x-1$.

$$
\begin{aligned}
(x-1)-4&=-\frac{2}{5}(x-1)\\
x-5&=-\frac{2}{5}(x-1) \quad \| \cdot 5\\
5(x-5)&=-2(x-1)\\
5x-25&=-2x+2\\
7x&=27\\
x&=\frac{27}{7}
\end{aligned}
$$

Ensimmäisestä yhtälöstä saadaan nyt $y=\frac{27}{7}-1=\frac{20}{7}$, joten

$P=\left(\frac{27}{7},\frac{20}{7}\right)$.

Lasketaan sitten vektorit BP ja BC.

$BP=(\frac{27}{7}-1)\overline{i}+(\frac{20}{7}-4)\overline{j}=\frac{20}{7}\overline{i}-\frac{8}{7}\overline{j}$

$BC=(6-1)\overline{i}+(2-4)\overline{j}=5\overline{i}-2\overline{j}$

Huomataan, että $BP=\frac{4}{7}BC$ eli että piste P jakaa janan BC suhteessa

4 : 3.

32. Funktio f on derivoituva välillä $x > 0$, joten tutkitaan kasvavuutta derivaatan merkin avulla. Kirjoitetaan derivointia varten juuri potenssimuotoon.

$$f(x) = x^{-\frac{1}{2}} + \ln x$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1} + \frac{1}{x} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^{1+\frac{1}{2}}} + \frac{1}{x} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} + \frac{1}{x}$$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat.

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2x\sqrt{x}} + {}^{2\sqrt{x})}\frac{1}{x} &= 0\\
-\frac{1}{2x\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}} &= 0\\
\frac{2\sqrt{x}-1}{2x\sqrt{x}} &= 0\\
2\sqrt{x}-1 &= 0\\
2\sqrt{x} &= 1\\
\sqrt{x} &= \frac{1}{2}\\
x &= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Koska esim. $f'(\frac{1}{9}) = -\frac{1}{2\cdot\frac{1}{9}\sqrt{\frac{1}{9}}} + \frac{1}{\frac{1}{9}} = -\frac{1}{2\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3}} + 9 = -\frac{1}{\frac{2}{27}} + 9 = -\frac{27}{2} + 9 < 0$

ja $f'(1) = -\frac{1}{2\cdot 1\cdot\sqrt{1}} + \frac{1}{1} = -\frac{1}{2} + 1 > 0$ ja derivaatta f' on jatkuva välillä

$x > 0$, on $f'(x) < 0$ välillä $0 < x < \frac{1}{4}$ ja $f'(x) > 0$ välillä $x \geq \frac{1}{4}$.

Niinpä f on kasvava välillä $x \geq \frac{1}{4}$ eli välillä $[\frac{1}{4}, \infty[$ ja vähenevä välillä

$0 < x \leq \frac{1}{4}$ eli välillä $]0, \frac{1}{4}]$.

Koska funktio vähenee välillä $0 < x \leq \frac{1}{4}$ ja kasvaa välillä $x \geq \frac{1}{4}$, sillä on pienin arvo $f(\frac{1}{4}) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}}} + \ln\frac{1}{4} = 2 + \ln\frac{1}{4} = 2 + \ln 1 - \ln 4 = 2 - \ln 4$, joka voidaan kirjoittaa myös muodossa 2 − 2ln 2.

Suurinta arvoa funktiolla ei ole, sillä olipa *a* mikä luku tahansa, löytyy funktion *f* arvo, joka on lukua *a* suurempi:

$$f(e^a) = \frac{1}{\underbrace{\sqrt{e^a}}_{>0}} + \ln e^a > \ln e^a = a.$$

33. **a)** Yhtälön $x^3 + x = 9$ ratkaisut ovat samat kuin yhtälön $x^3 + x - 9 = 0$ ratkaisut eli samat kuin funktion $f(x) = x^3 + x - 9$ nollakohdat.

Funktio f on polynomifunktio, joten se on jatkuva kaikkialla. Koska $f(0) = -9 < 0$ ja $f(2) = 2^3 + 2 - 9 = 1 > 0$, funktiolla on Bolzanon lauseen mukaan ainakin yksi nollakohta välillä [0, 2].

Funktion f derivaatta on $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ kaikilla x, joten f on kasvava koko reaalilukujen joukossa. Niinpä sillä ei voi olla enempää kuin yksi nollakohta.

Näin on osoitettu, että funktiolla $f(x) = x^3 + x - 9$ on täsmälleen yksi nollakohta eli että yhtälöllä $x^3 + x = 9$ on täsmälleen yksi ratkaisu.

b) Epäyhtälö on määritelty, kun $x > 0$.

$$x^2 > \ln x + \frac{1}{e}$$

$$x^2 - \ln x - \frac{1}{e} > 0$$

Tutkitaan funktion $f(x) = x^2 - \ln x - \frac{1}{e}$ kulkua. Funktio on

derivoituva, kun $x > 0$, ja sen derivaatta on $f'(x) = 2x - \frac{1}{x}$.

Etsitään derivaatan nollakohdat.

$$^{x)}\,2x - \frac{1}{x} = 0$$

$$\frac{2x^2}{x} - \frac{1}{x} = 0$$

$$\frac{2x^2 - 1}{x} = 0, \text{ kun}$$

$$2x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 = \frac{1}{2}$$

$$x = \sqrt{\frac{1}{2}} = 0{,}707... \quad \text{tai} \quad x = -\sqrt{\frac{1}{2}} \quad \text{(ei käy)}$$

Koska $f'(x)=2x-\frac{1}{x}$ on jatkuva ja esim.

$f'(0{,}1)=2\cdot 0{,}1-\frac{1}{0{,}1}=0{,}2-10<0$ ja $f'(1)=2\cdot 1-\frac{1}{1}=1>0$,

niin $f'(x)<0$ välillä $0<x<\sqrt{\frac{1}{2}}$ ja $f'(x)>0$ välillä $x>\sqrt{\frac{1}{2}}$.

Funktio f on siis vähenevä välillä $]0,\sqrt{\frac{1}{2}}]$ ja kasvava välillä $[\sqrt{\frac{1}{2}},\infty[$.

Niinpä sillä on pienin arvo kohdassa $x=\sqrt{\frac{1}{2}}$. Tämä pienin arvo on

$$\begin{aligned}
f\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)&=\sqrt{\frac{1}{2}}^{\,2}-\ln\sqrt{\frac{1}{2}}-\frac{1}{e}\\
&=\frac{1}{2}-\ln\left(2^{-\frac{1}{2}}\right)-\frac{1}{e}\\
&=\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\ln 2\right)-\frac{1}{e}\\
&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\underbrace{\ln 2}_{>0}-\underbrace{\frac{1}{e}}_{<\frac{1}{2}}>0,
\end{aligned}$$

joten $f(x)>0$ kaikilla $x>0$.

Näin on osoitettu, että $x^2-\ln x-\frac{1}{e}>0$ kaikilla $x>0$ eli että epäyhtälö

$x^2>\ln x+\frac{1}{e}$ on tosi kaikilla $x>0$.

34. Sievennetään yhtälön vasen puoli.

$$\cosh(a+b)+\cosh(a-b)$$
$$=\frac{1}{2}(e^{a+b}+e^{-(a+b)})+\frac{1}{2}(e^{a-b}+e^{-(a-b)})$$
$$=\frac{1}{2}(e^{a+b}+e^{-(a+b)}+e^{a-b}+e^{-(a-b)})$$
$$=\frac{1}{2}(e^{a}e^{b}+e^{-a}e^{-b}+e^{a}e^{-b}+e^{-a}e^{b})$$

Sievennetään yhtälön oikea puoli.

$$2\cosh a\cosh b$$
$$=2\cdot\frac{1}{2}(e^{a}+e^{-a})\frac{1}{2}(e^{b}+e^{-b})$$
$$=\frac{1}{2}(e^{a}+e^{-a})(e^{b}+e^{-b})$$
$$=\frac{1}{2}(e^{a}e^{b}+e^{a}e^{-b}+e^{-a}e^{b}+e^{-a}e^{-b})$$
$$=\frac{1}{2}(e^{a}e^{b}+e^{-a}e^{-b}+e^{a}e^{-b}+e^{-a}e^{b})$$

Tämä on sama kuin yhtälön vasen puoli. Yhtälö siis toteutuu kaikilla reaaliluvuilla a ja b.

35. **a)** $f'(t) = \cos(at) \cdot a = a \cos(at)$

$|f'(t)| = |a \cos(at) \cdot a| = |a||\cos(at)|$

Kaikilla a ja t on $0 \le |\cos(at)| \le 1$ ja arvo 1 saavutetaan esim. nollassa:
$|\cos(a \cdot 0)| = |\cos(0)| = |1| = 1$.
Tällöin lausekkeen $|a||\cos(at)|$ suurin arvo on $|a|$.

$|a| = 2$
$a = 2 \quad \text{tai } a = -2$

Koska haluttiin $a > 0$, valitaan vain $a = 2$.

b) Yhdistetyn funktion derivointisäännön mukaan $D(e^{g(x)}) = e^{g(x)} \cdot g'(x)$.
Etsitään siis funktio g, jolle $g'(x) = 6x + 1$ ja $g(0) = 3$.

$$g(x) = \int (6x+1)\mathrm{d}x = 3x^2 + x + C$$

$$g(0) = 3 \cdot 0^2 + 0 + C = C$$

Ehdosta $g(0) = 3$ saadaan $C = 3$ eli $g(x) = 3x^2 + x + 3$.

36. Sijoituksella $t = \cos x$ yhtälö muuttuu toisen asteen polynomiyhtälöksi.

$$2\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0 \quad \| \text{ (merk. } \cos x = t)$$

$$2t^2 - 3t - 2 = 0$$

$$t = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4}$$

$$t = 2 \quad \text{tai} \quad t = -\frac{1}{2}$$

Siis $\cos x = 2$ tai $\cos x = -\frac{1}{2}$. Yhtälöllä $\cos x = 2$ ei ole ratkaisuja, sillä kaikilla x on $\cos x \le 1$. Ratkaistaan yhtälö $\cos x = -\frac{1}{2}$.

$$\cos x = -\frac{1}{2}$$

$$x = \frac{2\pi}{3} + n2\pi \quad \text{tai} \quad x = -\frac{2\pi}{3} + n2\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

37. **a)** Koska sekä osoittaja että nimittäjä lähestyvät nollaa, osamäärän raja-arvoa ei voida päätellä suoraan vaan lauseketta on muokattava. Lavennetaan lausekkeella $\sqrt{2x-1}+1$.

$$\begin{aligned}
{}^{\sqrt{2x-1}+1)}\frac{\sqrt{2x-1}-1}{x-1} &= \frac{\left(\sqrt{2x-1}-1\right)\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}\\
&= \frac{\left(\sqrt{2x-1}^2-1^2\right)}{(x-1)\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}\\
&= \frac{2x-1-1}{(x-1)\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}\\
&= \frac{2x-2}{(x-1)\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}\\
&= \frac{2\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}\\
&= \frac{2}{\sqrt{2x-1}+1}
\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x-1}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{2}{\sqrt{2x-1}+1} = \frac{2}{\sqrt{2\cdot 1-1}+1} = 1$$

b) Sekä osoittaja että nimittäjä lähestyvät nollaa, joten osamäärän raja-arvoa ei voida tästä suoraan päätellä. Huomataan, että ln 1 = 0 ja että lauseke $\frac{\ln x}{x-1} = \frac{\ln x - \ln 1}{x-1}$ on funktion $f(x) = \ln x$ erotusosamäärä $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

Funktio f on derivoituva, kun $x > 0$, joten erotusosamäärän raja-arvo, kun x lähestyy lukua 1, on funktion derivaatta kohdassa $x = 1$.

Funktion f derivaatan lauseke on $f'(x) = \frac{1}{x}$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\ln x - \ln 1}{x-1} = f'(1) = \frac{1}{1} = 1.$$

YLIOPPILASKOKEEN B-OSAN OHJELMAT SALLITTU

38. Merkitään Helsingin ja Lappeenrannan välimatkaa kirjaimella s ja matka-aikaa vuonna 1960 kirjaimella t. Matka-aika on lyhentynyt 37 prosenttia, joten matka-aika on 63 prosenttia alkuperäisestä, eli $0{,}63t$.

Keskinopeus vuonna 1960 on $\frac{s}{t}$.

Kasvanut keskinopeus on $\frac{s}{0{,}63t} = 1{,}587... \cdot \frac{s}{t}$.

Keskinopeus on noussut 59 prosenttia.

39. **a)** Olkoon neliön sivun pituus a. Neliön sisään piirretyn ympyrän halkaisija on a, joten sen säde on $\frac{a}{2}$.

1) Neliön piiri on $4a$. Ympyrän piiri on πa.

Ympyrän piiri on $\frac{4a - \pi a}{4a} = 0{,}214... \approx 21\,\%$ pienempi kuin neliön.

2) Neliön pinta-ala on a^2.

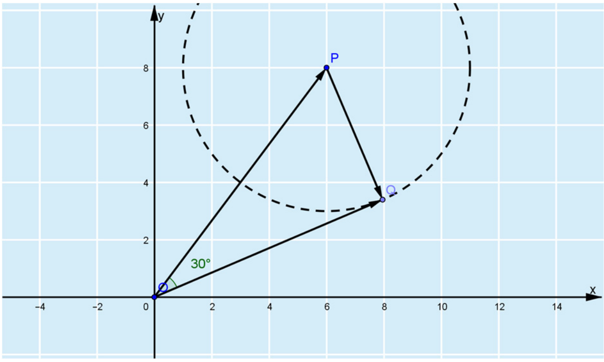
Ympyrän pinta-ala on $\pi \cdot (\frac{a}{2})^2 = \frac{\pi a^2}{4}$.

Ympyrän pinta-ala on $\frac{a^2 - \frac{\pi a^2}{4}}{a^2} = 0{,}214... \approx 21\,\%$ pienempi kuin neliön.

b) Yhdenmuotoisten kappaleiden pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö. Kutistuneen ja alkuperäisen liinan mittakaava on 140:150 = 14:15. Pinta-alojen suhde on $14^2:15^2$ = 196:225 = 0,8711…

Kukan pinta-ala on 87% alkuperäisestä, eli se pieneni 13 %.

40. Hahmotellaan tilannetta kuvan avulla.



Piste *Q* on sen ympyrän kehällä, jonka keskipiste on *P* ja säde 5. Kulma *QOP* on suurin, kun piste *Q* on ympyrälle pisteestä *O* piirretyn tangentin sivuamispiste. Tällöin kulma *PQO* on suora.

$$\left|\overline{OP}\right| = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$$

$$\left|\overline{PQ}\right| = 5$$

Kulma saadaan suorakulmaisesta kolmiosta.

$$\sin\alpha = \frac{5}{10}$$

$$\alpha = 30°$$

Lasketaan vektorin $\overline{OQ}$ pituus Pythagoraan lauseella.

$$10^2 = 5^2 + \left|\overline{OQ}\right|^2$$

$$\left|\overline{OQ}\right| = 5\sqrt{3}$$

41. Tiedetään, että kaikki paraabelit kulkevat saman pisteen kautta.
Kun $a = 0$, $y_0(x) = x^2$ ja kun $a = 1$, $y_1(x) = x^2 - x + 2$.
Määritetään paraabelien y_0 ja y_1 leikkauspiste.

$$x^2 = x^2 - x + 2$$
$$x = 2$$

$$y_0(2) = 2^2 = 4$$

Piste on (2, 4).

Osoitetaan, että kaikki paraabelit $y_a(x) = x^2 - ax + 2a$, $a \in \mathbb{R}$ kulkevat tämän pisteen kautta.
$$y_a(2) = 2^2 - a \cdot 2 + 2a = 4$$

Piste (2, 4) on paraabelin kuvaajalla a:n arvosta riippumatta.

Tangentin kulmakerroin on derivaatan arvo $y_a'(2)$.
$$y_a'(x) = 2x - a$$
$$y_a'(2) = 2 \cdot 2 - a = 4 - a.$$

42. Kun sovitetaan pisteisiin toisen asteen polynomifunktio $g(x) = ax^2 + bx + c$, saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} c = 3 \\ 4a + 2b + c = 0 \\ 4a - 2b + c = 0 \end{cases}$$

jonka ratkaisu on $a = -\dfrac{3}{4}$, $b = 0$ ja $c = 3$ ja

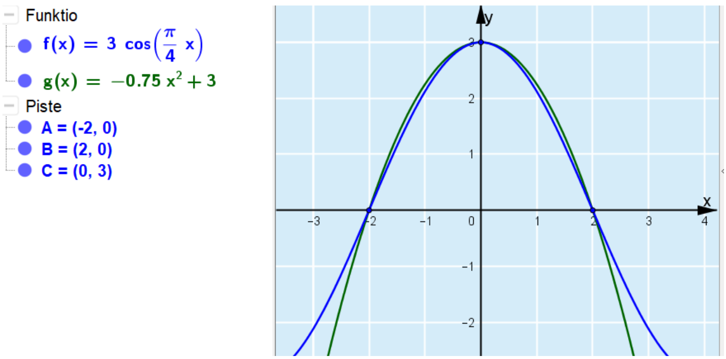
funktio $g(x) = -\dfrac{3}{4}x^2 + 3$.

Kun sovitetaan funktio $f(x) = A\cos Cx$, saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} A\cos 0 = 3 \\ A\cos 2C = 0 \\ A\cos(-2C) = 0 \end{cases}$$

jonka ratkaisu on $A = 3$ ja $C = \dfrac{\pi}{4} + n\pi$. Valitaan C:n arvoksi $\dfrac{\pi}{4}$.

$$f(x) = 3\cos(\frac{\pi}{4}x)$$



Poikkileikkauksen pinta-ala saadaan määrättynä integraalina.

$$\int_{-2}^{2} (-\frac{3}{4}x^2 + 3)\mathrm{d}x = 8$$

$$\int_{-2}^{2} (3\cos(\frac{\pi}{4}x)\mathrm{d}x = \frac{24}{\pi} = 7{,}63...$$

Pinta-alat ovat 8 m^2 ja 7,6 m^2.

43. **a)** $M_W = 6{,}9$: $E = 10^{1{,}5\cdot 6{,}9+3{,}2} = 10^{13{,}55}$

$M_W = 8{,}8$: $E = 10^{1{,}5\cdot 8{,}8+3{,}2} = 10^{16{,}4}$

Voimakkuudeltaan suuremman järistyksen energia on $10^{16{,}4-13{,}55} = 10^{2{,}85} = 707{,}9\ldots$ eli noin 700-kertainen pienempään verrattuna.

b) Merkitään ensimmäisen maanjäristysten energiaa E_1 ja toisen E_2 sekä ensimmäisen voimakkuutta M_{W1} ja toisen M_{W2}.

$$\frac{E_2}{E_1} = 5000$$

Kaavan mukaan $E_1 = 10^{1{,}5M_{W1}+3{,}2}$, joten

$$E_2 = 5000E_1 = 5000\cdot 10^{1{,}5M_{W1}+3{,}2} = 5\cdot 10^3\cdot 10^{1{,}5M_{W1}+3{,}2} = 5\cdot 10^{1{,}5M_{W1}+6{,}2}.$$

Tästä saadaan voimakkuuksille M_{W1} ja M_{W2} yhtälö, josta ratkaistaan voimakkuuksien erotus $M_{W2} - M_{W1}$.

$$\begin{aligned}
E_2 = 10^{1{,}5M_{W2}+3{,}2} &= 5\cdot 10^{1{,}5M_{W1}+6{,}2}\\
10^{1{,}5M_{W2}+3{,}2} &= 10^{\lg 5}\cdot 10^{1{,}5M_{W1}+6{,}2}\\
10^{1{,}5M_{W2}+3{,}2} &= 10^{\lg 5+1{,}5M_{W1}+6{,}2}\\
1{,}5M_{W2}+3{,}2 &= \lg 5 + 1{,}5M_{W1} + 6{,}2\\
1{,}5M_{W2} - 1{,}5M_{W1} &= 6{,}2 - 3{,}2 + \lg 5\\
1{,}5(M_{W2} - M_{W1}) &= 3 + \lg 5\\
M_{W2} - M_{W1} &= 2{,}46...
\end{aligned}$$

Erotus on noin 2,5.

Toinen tapa:
Merkitään ensimmäisen maanjäristysten energiaa E_1 ja toisen E_2 sekä ensimmäisen voimakkuutta M_{W1} ja toisen M_{W2}. Ratkaistaan voimakkuudet energioiden suhteen.

$$\begin{aligned} E_1 &= 10^{1,5M_{W1}+3,2} \\ \lg E_1 &= 1,5M_{W1}+3,2 \\ 1,5M_{W1} &= \lg E_1 - 3,2 \\ M_{W1} &= \frac{\lg E_1 - 3,2}{1,5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_2 &= 10^{1,5M_{W2}+3,2} \\ \lg E_2 &= 1,5M_{W2}+3,2 \\ 1,5M_{W2} &= \lg E_2 - 3,2 \\ M_{W2} &= \frac{\lg E_2 - 3,2}{1,5} \end{aligned}$$

Lasketaan voimakkuuksien erotus käyttäen tietoa $\frac{E_2}{E_1} = 5000$.

$$\begin{aligned} M_{W2} - M_{W1} &= \frac{\lg E_2 - 3,2}{1,5} - \frac{\lg E_1 - 3,2}{1,5} \\ &= \frac{\lg E_2 - \lg E_1}{1,5} \\ &= \frac{\lg \frac{E_2}{E_1}}{1,5} \\ &= \frac{\lg 5000}{1,5} \\ &= 2,465... \end{aligned}$$

Erotus on noin 2,5.

c) $E_1 = 10^{1,5M_{W1}+3,2}$

$$E_2 = 10^{1,5(M_{W1}+1)+3,2} = 10^{1,5M_{W1}+1,5+3,2} = 10^{1,5M_{W1}+3,2} \cdot 10^{1,5} = 10^{1,5} \cdot E_1$$

$10^{1,5} = 31,6\ldots$
Energia kasvaa noin 32-kertaiseksi.

44. Lentorataa kuvaa paraabeli, eli lentokorkeutta kuvaava funktio on muotoa $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Asetetaan lähtöpiste origoon. Tällöin $f(0) = 0$, eli $c = 0$ ja paraabelin yhtälö on $f(x) = ax^2 + bx$.
Lisäksi tiedetään, että $f(30) = 0$, eli $900a + 30b = 0$.
Lentoradan tangentin suuntakulma lähtöpisteessä on 30°, joten tangentin kulmakerroin on $\tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Pitää siis olla $f'(0) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$f'(x) = 2ax + b$, joten $b = \frac{\sqrt{3}}{3}$.
Ratkaistaan yhtälöstä $900a + 30b = 0$ kerroin a.

$a = -\frac{\sqrt{3}}{90}$

Paraabeli on $f(x) = -\frac{\sqrt{3}}{90}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{3}x$.

Lentoradan lakipiste on funktion derivaatan nollakohdassa.

$$f'(x) = -\frac{2\sqrt{3}}{90}x + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

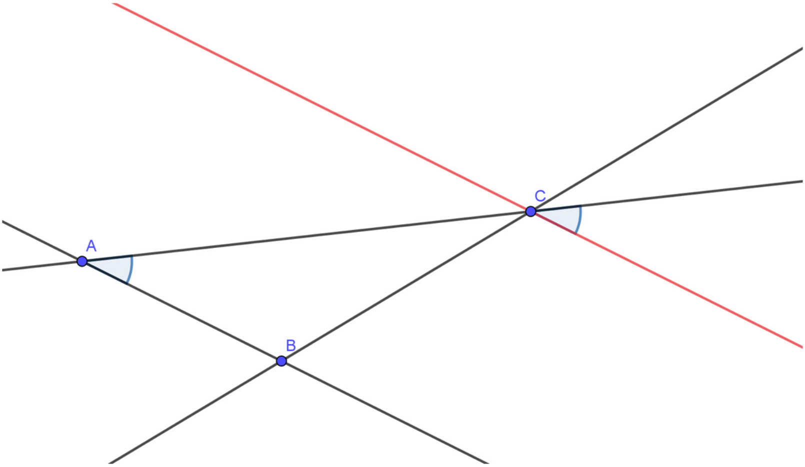
$$-\frac{2\sqrt{3}}{90}x + \frac{\sqrt{3}}{3} = 0$$

$$x = 15$$

$$f(15) = \frac{5\sqrt{3}}{2} = 4,33...$$

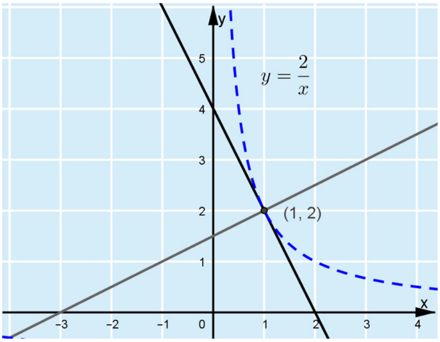
Kivi käy 4,3 metrin korkeudessa.

45. Nimetään kolmion kärjet ja samalla kulmat *A*, *B* ja *C*. Jatketaan kolmion sivuja suoriksi *AB*, *AC* ja *BC*.



Lisätään vielä neljäs suora, joka kulkee pisteen *C* kautta ja on yhdensuuntainen suoran *AB* kanssa. Nyt kolmion kulmien *A* ja *B* kanssa samankohtaiset kulmat kärjessä *C* sekä kolmion kulman *C* ristikulma muodostavat yhdessä oikokulman 180°.

46. Piirretään kuva.



Käyrälle $y = \frac{2}{x}$ pisteeseen (1, 2) asetetun tangentin kulmakerroin saadaan derivaatan avulla.

$$D\frac{2}{x} = -\frac{2}{x^2}$$

Kun $x = 1$, tangentin kulmakerroin on $-\frac{2}{1^2} = -2$.

Tangentin yhtälö on $y - 2 = -2(x - 1)$, eli $y = -2x + 4$.

Normaalin kulmakerroin on $\frac{1}{2}$, koska normaalin ja tangentin kulmakertoimien tulo on -1.

Normaalin yhtälö on $y - 2 = \frac{1}{2}(x - 1)$, eli $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

Tangentin ja x-akselin leikkauspiste:

$$-2x + 4 = 0$$
$$x = 2.$$

Normaalin ja x-akselin leikkauspiste:

$$\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = 0$$
$$x = -3.$$

Kolmion kannan pituus on $2 - (-3) = 5$ ja korkeus pisteen (1, 2) y-koordinaatti 2.

Kolmion pinta-ala on $\frac{5 \cdot 2}{2} = 5$.

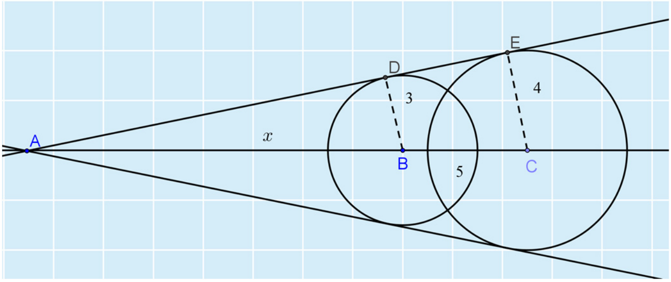
47. Vektori $\overline{AB}$ on kohtisuorassa vektoria $\overline{OA}$ vastaan, joten se on muotoa $t(9\overline{i}-7\overline{j})$.

Koska vektorin $\overline{AB}$ pituus on puolet vektorin $\overline{OA}$ pituudesta, $\overline{AB}=\frac{1}{2}(9\overline{i}-7\overline{j})$ tai $\overline{AB}=-\frac{1}{2}(9\overline{i}-7\overline{j})$.

$\overline{OB}=\overline{OA}+\overline{AB}=7\overline{i}+9\overline{j}+\frac{1}{2}(9\overline{i}-7\overline{j})=\frac{23}{2}\overline{i}+\frac{11}{2}\overline{j}$ tai

$\overline{OB}=7\overline{i}+9\overline{j}-\frac{1}{2}(9\overline{i}-7\overline{j})=\frac{5}{2}\overline{i}+\frac{25}{2}\overline{j}$.

48. Piirretään kuva.



Tangentin sivuammispisteeseen piirretty ympyrän säde on kohtisuorassa tangenttia vastaan.
Kolmiot *ABD* ja *ACE* ovat yhdenmuotoiset, koska niissä on yhteinen kulma *A* ja suora kulma.

Yhdenmuotoisuudesta saadaan

$$\frac{3}{x} = \frac{4}{x+5}$$
$$x = 15$$

Suorakulmaisesta kolmiosta voidaan ratkaista kulma *A*, merkitään sitä α.

$$\sin\alpha = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}.$$

Tangenttien välinen kulma on 2α.
$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

Lasketaan kolmiosta *ABD* sivun *AD* pituus.
$15^2 = 3^2 + AD^2$
$AD = 6\sqrt{6}$

$$\cos\alpha = \frac{6\sqrt{6}}{15} = \frac{2\sqrt{6}}{5},\ \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{2\sqrt{6}}{5} = \frac{4\sqrt{6}}{25}$$

49. Kosini- ja sinifunktio ovat molemmat jaksollisia funktioita, jaksona 2π. Funktio f saa suurimman ja pienimmän arvonsa millä tahansa 2π pituisella välillä. Tarkastellaan väliä $[0, 2\pi]$.

Suljetulla välillä jatkuva ja derivoituva funktio saa suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteissä tai välillä olevissa derivaatan nollakohdissa.

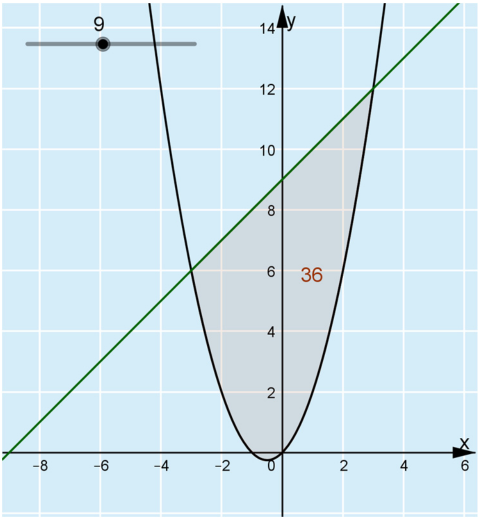
$f(0) = f(2\pi) = 0 - 1 = -1$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sqrt{3}\cos x + \sin x \\ \sqrt{3}\cos x + \sin x &= 0,\ 0 \le x \le 2\pi \\ x &= \frac{2\pi}{3} \text{ tai } x = \frac{5\pi}{3} \end{aligned}$$

$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2$$
$$f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -2$$

Funktio f suurin arvo on 2 ja pienin arvo on -2.

50. Piirretään kuva.



Määritetään suoran $y = x + b$ ja paraabelin $y = x^2 + x$ leikkauspisteet.

$$x^2 + x = x + b$$
$$x = \sqrt{b} \text{ tai } x = -\sqrt{b}$$

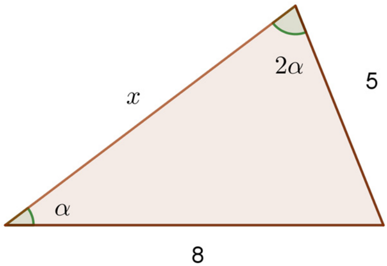
Äärellinen alue muodostuu välille, jolla suora on paraabelin yläpuolella.

Alueen pinta-ala saadaan määrättynä integraalina.

$$\int_{-\sqrt{b}}^{\sqrt{b}} ((x+b)-(x^2+x))\mathrm{d}x = \frac{4b\sqrt{b}}{3}$$

$$\frac{4b\sqrt{b}}{3} = 36$$
$$b = 9$$

51. Piirretään kuva. Merkitään kolmatta sivua kirjaimella x.



$$\frac{5}{\sin\alpha} = \frac{8}{\sin 2\alpha}$$

$$\frac{5}{\sin\alpha} = \frac{8}{2\sin\alpha\cos\alpha} \quad \| \cdot \sin\alpha \neq 0$$

$$5 = \frac{4}{\cos\alpha}$$

$$\cos\alpha = \frac{4}{5}$$

$$\alpha = 36{,}86...° \approx 36{,}9°$$

Ratkaistaan sivun x pituus kosinilauseella.

$$5^2 = x^2 + 8^2 - 2 \cdot x \cdot 8 \cdot \cos\alpha$$

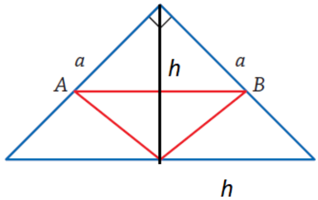
$$25 = x^2 + 64 - 16x \cdot \frac{4}{5}$$

$$x = 5 \text{ tai } x = \frac{39}{5}$$

Ratkaisu $x = 5$ ei kelpaa, koska tällöin kolmio olisi tasakylkinen ja olisi $4\alpha = 180°$, eli $\alpha = 45° \neq 36{,}86\ldots°$.

Kolmannen sivun pituus on $\frac{39}{5} = 7\frac{4}{5}$ ja kulma $\alpha = 36{,}9°$.

52. Merkitään kolmion korkeutta kirjaimella h.



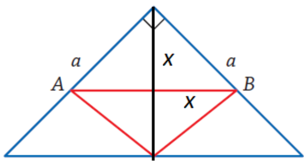
Kolmion korkeusjana on kohtisuorassa kantaa vastaan. Korkeusjana jakaa tasakylkisen kolmion edelleen kahdeksi tasakylkiseksi kolmioksi.

Ratkaistaan korkeus h.

$a^2 = h^2 + h^2$

$h = \frac{a}{\sqrt{2}}$

Olkoon kärkeen jäävän kolmion korkeus x. Tällöin kanta on $2x$. Punaisen kolmion kanta on siis myös $2x$ ja korkeus $h - x$.



Punaisen kolmion pinta-ala on

$$A(x) = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot (h - x) = \frac{1}{2} \cdot 2x(\frac{a}{\sqrt{2}} - x) = -x^2 + \frac{a}{\sqrt{2}} x .$$

Pinta-alafunktion kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, jonka suurin arvo saavutetaan paraabelin huipussa, eli derivaatan nollakohdassa.

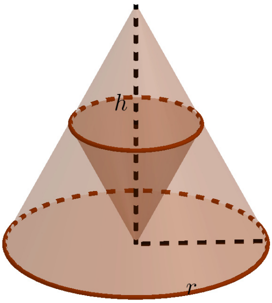
$$A'(x) = -2x + \frac{a}{\sqrt{2}}$$

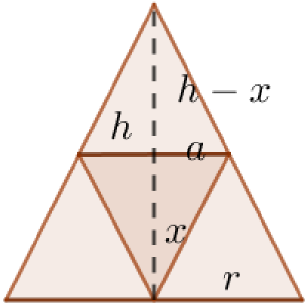
$$-2x + \frac{a}{\sqrt{2}} = 0$$

$$x = \frac{a}{2\sqrt{2}}$$

Suurin pinta-ala on $-(\frac{a}{2\sqrt{2}})^2 + \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{a}{2\sqrt{2}} = \frac{a^2}{8}$.

53. Piirretään kuva.





Pienemmän kartion pohja erottaa isommasta kartiosta osan, joka on yhdenmuotoinen ison kartion kanssa. Olkoon isomman kartion sisällä olevan pienemmän kartion korkeus x ja pohjan säde a. Poikkileikkauskuvan yhdenmuotoisista suorakulmioista saadaan

$$\frac{h-x}{a}=\frac{h}{r}$$

$$a=\frac{r(h-x)}{h}$$

Ison kartion tilavuus on $\frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Pienen kartion tilavuus on

$$\frac{1}{3}\pi a^2 x=\frac{1}{3}\pi(\frac{r}{h}(h-x))^2 x=\frac{1}{3}\pi(\frac{r}{h})^2(h-x)^2$$

Tilavuuksien suhde on

$$\frac{\frac{1}{\cancel{3}}\pi(\frac{r}{h})^2(h-x)^2 x}{\frac{1}{\cancel{3}}\pi r^2 h}=\frac{(h-x)^2 x}{h^3}$$

Lasketaan suhteen ilmoittavan funktion $f(x)=\frac{(h-x)^2 x}{h^3}$ suurin arvo, kun

$0 \leq x \leq h$.

Suljetulla välillä jatkuva ja derivoituva funktio saa suurimman arvonsa välin päätepisteissä tai välillä olevissa derivaatan nollakohdissa.

$f(0) = f(h) = 0$

$$f'(x) = \frac{(h-x)^2 x}{h^3} = (x-h)\frac{3x-h}{h^3}$$

$$f'(x) = 0$$

$$x = h \text{ tai } x = \frac{h}{3}$$

$$f(\frac{h}{3}) = \frac{4}{27} \text{ (suurin)}$$

Tilavuuksien suhde on enintään 4 : 27.

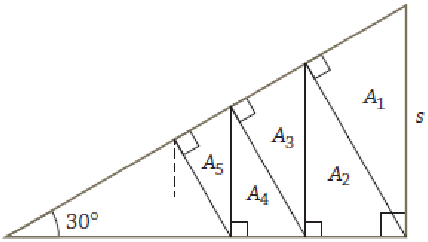
54. Jos korissa olevien omenoiden määrä on neljällä jaollinen, jokaiselle tulee yhtä monta omenaa. Oletetaan, että todennäköisyys, että omenoita on neljällä jaollinen määrä, on $\frac{1}{4}$.

Laaditaan satunnaismuuttujan ”A:n saama rahamäärä euroina” jakauma.

rahamäärä	todennäköisyys
−150 (€)	$\frac{1}{4}$
75 (€)	$\frac{3}{4}$

*A:*n saaman rahamäärän odotusarvo on $-150 \cdot \frac{1}{3} + 75 \cdot \frac{2}{3} =$ 18,75 (€).

55.



Kaikki kuvan kolmiot ovat yhdenmuotoisia keskenään.
Olkoon kolmion A_1 pidemmän kateetin pituus a. Tämä on samalla kolmion A_2 hypotenuusan pituus.

Peräkkäisten kolmioiden mittakaava on $\frac{a}{s}$.

$$\cos 30° = \frac{a}{s}$$
$$\frac{a}{s} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Peräkkäisten kolmioiden pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö, eli $\frac{3}{4}$.

Kolmion A_2 pidempi kateetti on $\frac{\sqrt{3}}{2}$ kolmion A_1 pidemmän kateetin

pituudesta a, eli $\frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}s = (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 s$.

Kolmion A_n pidemmän kateetin pituus on $(\frac{\sqrt{3}}{2})^n s$. Tämä on samalla jäljelle jäävän kolmion lyhyempi kateetti, kun on poistettu n kolmiota.
Jäljelle jäävä kolmio on yhdenmuotoinen alkuperäisen kanssa

mittakaavassa $\frac{(\frac{\sqrt{3}}{2})^n s}{s} = (\frac{\sqrt{3}}{2})^n$.

Pinta-alojen suhde on $((\frac{\sqrt{3}}{2})^n)^2 = (\frac{\sqrt{3}}{2})^{2n} = (\frac{3}{4})^n$.

Jäljelle jäävän kolmion pinta-alan tulee olla vähemmän kuin 3 % alkuperäisen kolmion pinta-alasta, jotta poistettujen palojen pinta-ala olisi vähintään 97% alkuperäisestä.

Saadaan epäyhtälö $(\frac{3}{4})^n < 0{,}03$, jonka ratkaisu on $n > 12{,}18\ldots$

Kolmioita tulee olla vähintään 13 kappaletta.

56. **a)** Esimerkiksi jos $f'(x) = x - 3$, niin $f'(3) = 0$.

$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + b$

Tulee olla $f(1) = 2$, eli $\frac{1}{2} - 3 + b = 2$, josta $b = 4\frac{1}{2}$.

Esimerkiksi sopii siis vaikkapa $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{9}{2}$ tai $f(x) = 2$ (vakion derivaatta on nolla kaikkialla).

b) Rationaalifunktio, joka ei ole määritelty, kun $x = 1$, on esimerkiksi $\frac{1}{x-1}$. Funktion arvon tulee kuitenkin olla aina positiivinen.

Esimerkiksi funktio $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$, $x \neq 1$ on tällainen.

c) Esimerkiksi funktio, jonka lauseke on muotoa $a(x - 1)(x - 3)$, täyttää ehdot nollakohdista.

$$\int_1^3 a(x-3)(x-1)\,\mathrm{d}x = -\frac{4}{3}a$$

$$-\frac{4}{3}a = 10$$

$$a = -\frac{15}{2}$$

Esimerkiksi sopii funktio $f(x) = -\frac{15}{2}(x-3)(x-1)$.

57. Noppia on yhteensä viisi kappaletta.
P(samanväriset)
= P(molemmat mustia TAI molemmat valkoisia)

$$= \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}+\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$$

P(silmälukujen summa on vähintään 10) $= \frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

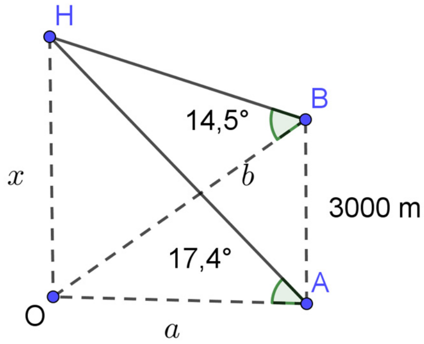
6	7	8	9	10	11	12
5	6	7	8	9	10	11
4	5	6	7	8	9	10
3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7
	1	2	3	4	5	6

Nopat ovat väriä lukuun ottamatta samanlaiset, joten väri ei vaikuta silmälukujen tai niiden summan todennäköisyyteen. Riippumattomien tapahtumien kertolaskusäännöllä saadaan

P(nopat ovat samanväriset ja niiden silmälukujen summa on vähintään 10)

$$= \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{15}.$$

58. Piirretään kolmiulotteista tilannetta havainnollistava kuva.



Olkoon piste O kohtisuorasti vuorenhuipun alapuolella samassa tasossa kuin A ja B.
Tällöin kulma AOH ja kulma BOH on suora.
Koska huippu H näkyy pisteestä A suoraan lännessä ja piste B on pisteestä A suoraan pohjoiseen, myös kulma BAO on suora.

Merkitään kirjaimella x huipun korkeutta havaintopisteiden A ja B tasolta eli pisteiden H ja O etäisyyttä. Suorakulmaisista kolmioista saadaan yhtälöt

$$\tan 17{,}4^\circ = \frac{x}{a}$$
$$\tan 14{,}5^\circ = \frac{x}{b}$$
$$a^2 + 3000^2 = b^2$$

Ratkaisemalla yhtälöryhmä saadaan $x = 1373{,}6$ (m).

Vuoren korkeus on 1373,6 m + 200 m = 1572,6 m ≈ 1570 m.

59. Funktio g on derivoituva kohdassa $x = 0$, jos erotusosamäärällä $\frac{g(x)-g(0)}{x-0}$ on raja-arvo kohdassa $x = 0$.

Tiedetään, että $f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=3$ ja $f(0) = 2$.

Koska funktio f on derivoituva kohdassa $x = 0$, se on myös jatkuva kohdassa $x = 0$ ja $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$.

$$
\begin{aligned}
&g'(0)\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)^2-f(0)^2}{x}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{(f(x)-f(0))(f(x)+f(0))}{x}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}\cdot(f(x)+f(0))\\
&=f'(0)(f(0)+f(0))\\
&=3(2+2)\\
&=12
\end{aligned}
$$

60. Tarkastellaan funktiota $f(x)=(1+x)\ln x+2(1-x)$, $0<x\leq 1$.

$$f'(x)=\ln x+\frac{1+x}{x}-2=\frac{1}{x}+\ln x-1$$

$$\frac{1}{x}+\ln x-1=0$$

ei ratkaisua

Derivaatalla ei ole nollakohtaa, joten derivaatta ei vaihda merkkiään.

Varmistetaan tämä vielä tutkimalla derivaatan kulkua toiseen derivaatan f'' avulla.

$$f''(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x^2}<0,\ \text{kun } 0<x\leq 1$$

Toinen derivaatta on negatiivinen välillä $0 < x \leq 1$, joten derivaattafunktio f' on vähenevä ja saa pienimmän arvonsa välillä $0 < x \leq 1$ kohdassa $x = 1$.

$f'(1)=0$

Koska derivaattafunktion pienin arvo on 0, on derivaatta ei-negatiivinen välillä $0 < x \leq 1$, joten funktio f on kasvava.
Välillä $0 < x \leq 1$ kasvava funktio f saa suurimman arvonsa kohdassa $x = 1$.
$f(1) = 0$.

Koska funktion f suurin arvo on 0, on väite $f(x) \leq 0$ tosi, kun $0 < x \leq 1$.

61. Olkoon kaaren piste $(x, y) = (x, 3x - 5x^2)$.
Pisteen etäisyys origosta on
$\sqrt{(x-0)^2 + (3x - 5x^2)^2} = \sqrt{10x^2 - 30x^3 + 25x^4}$.

Etäisyys on suurin, kun juurrettava $10x^2 - 30x^3 + 25x^4$ on suurin.

Merkitään $f(x) = 10x^2 - 30x^3 + 25x^4,\ 0 \le x \le \frac{1}{2}$.

Suljetulla välillä jatkuva ja derivoituva funktio saa suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteissä tai välillä olevissa derivaatan nollakohdissa.

$f(0) = 0$

$f(\frac{1}{2}) = \frac{5}{16}$

$f'(x) = 20x - 90x^2 + 100x^3$

$20x - 90x^2 + 100x^3 = 0$

$10x(2 - 9x + 10x^2) = 0$

$x = 0, x = \frac{2}{5}$ tai $x = \frac{1}{2}$

$f(\frac{2}{5}) = \frac{8}{25}$

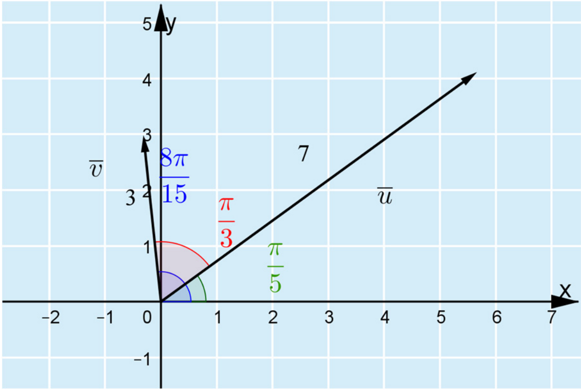
Etäisyys on pienin, kun $x = \frac{2}{5}$ ja $y = \frac{2}{5}$.

Piste on $(\frac{2}{5}, \frac{2}{5})$.

62. **a)** Annukka: $\overline{a}\cdot\overline{b} = a_x b_x + a_y b_y$

Fareed: $\overline{a}\cdot\overline{b} = |\overline{a}||\overline{b}|\cos(\overline{a},\overline{b})$

b)



c)

$$\overline{u}\cdot\overline{v} = 7\left(\cos\tfrac{\pi}{5}\overline{i} + \sin\tfrac{\pi}{5}\overline{j}\right)\cdot 3\left(\cos\tfrac{8\pi}{15}\overline{i} + \sin\tfrac{8\pi}{15}\overline{j}\right)$$

Vektoreiden komponenteista on otettu yhteinen tekijä 7 ja 3.

$$= 21\left(\cos\tfrac{\pi}{5}\cos\tfrac{8\pi}{15} + \sin\tfrac{\pi}{5}\sin\tfrac{8\pi}{15}\right)$$

Vakiokertoimet on kerrottu keskenään ja vektoreiden pistetulo on laskettu kaavalla $\overline{a}\cdot\overline{b} = a_x b_x + a_y b_y$.

$$= 21\cos\left(\tfrac{8\pi}{15} - \tfrac{\pi}{5}\right)$$

Lausekkeen sieventämisessä on käytetty kaavaa
$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$.

$$= 21\cos\tfrac{\pi}{3} = \tfrac{21}{2}$$

Lauseke on sievennetty ja käytetty tietoa $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

63. **a)** Olkoon $f(x) = \sin x$.
$f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x)$ kaikilla x, joten
$\sin x$ on pariton funktio.

Olkoon $g(x) = \cos x$.
$g(-x) = \cos(-x) = \cos x = g(x) \neq -g(x)$ esimerkiksi kohdassa $x = 0$,
joten $\cos x$ ei ole pariton funktio.

b) Oletetaan, että f on kaikilla reaaliluvuilla määritelty pariton ja jatkuva funktio. Tällöin f on jatkuva kohdassa $x = 0$ ja siksi $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$.

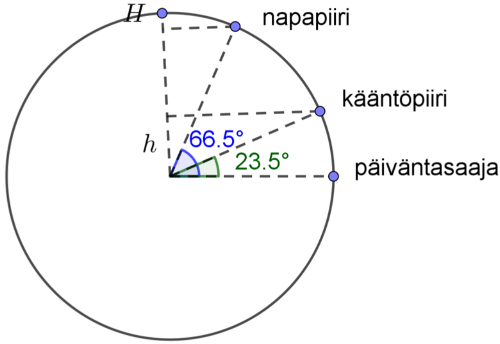
Tämä tarkoittaa, että $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = f(0)$ ja $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = f(0)$.

Kun $x \to 0-$, niin $-x \to 0+$, joten
$\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = \lim\limits_{-x\to 0+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+} (f(-x))$.

Koska f on pariton, niin
$\lim\limits_{x\to 0+} (f(-x)) = \lim\limits_{x\to 0+} (-f(x)) = -\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$. Siis
$\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = -\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$, josta saadaan $f(0) = -f(0)$.

Ainut reaaliluku a, jolle $a = -a$ eli luku on itsensä vastaluku, on 0.

64. Piirretään poikkileikkauskuva.



Merkitään napapiiriä vastaavan kalotin korkeutta kirjaimella H ja kääntöpiiriä vastaavan vyöhykkeen korkeutta kirjaimella h. Olkoon maapallon säde R.

Kalotin korkeus H voidaan ratkaista suorakulmaisesta kolmiosta.

$$\cos(90° - 66{,}5°) = \frac{R - H}{R}$$
$$H = R(1 - \cos 23{,}5°)$$

Napa-alueiden yhteenlaskettu pinta-ala on .

$$2 \cdot 2\pi \cdot R \cdot H = 4\pi \cdot R \cdot R(1 - \cos 23{,}5°) = 4\pi R^2(1 - \cos 23{,}5°)$$

Napa-alueet ovat koko maapallon alasta

$$\frac{4\pi R^2(1 - \cos 23{,}5°)}{4\pi R^2} = 1 - \cos 23{,}5° = 0{,}0829... \approx 8{,}3\ \%.$$

Kääntöpiiriä vastaavan vyöhykkeen korkeus saadaan yhtälöstä

$$\cos(90° - 23{,}5°) = \frac{h}{R}$$
$$h = R\cos 66{,}5°.$$

Trooppisen alueen pinta-ala on

$$2 \cdot 2\pi Rh = 4\pi R \cdot R\cos 66{,}5° = 4\pi R^2 \cos 66{,}5°.$$

Trooppiset alueet ovat koko maapallon alasta

$$\frac{4\pi R^2 \cos 66{,}5°}{4\pi R^2} = \cos 66{,}5° = 0{,}3987... \approx 39{,}9\ \%.$$

65. $\sum_{k=1}^{n}(x-a_k)^2 = \sum_{k=1}^{n}(x^2-2xa_k+a_k{}^2) = nx^2-(2\sum_{k=1}^{n}a_k)\cdot x+\sum_{k=1}^{n}a_k{}^2$

Lausekkeen kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli (n on positiivinen kokonaisluku), joka saa pienimmän arvonsa huipun kohdalla, eli derivaatan nollakohdassa.

$$\mathrm{D}(nx^2-(2\sum_{k=1}^{n}a_k)\cdot x+\sum_{k=1}^{n}a_k{}^2) = 2nx-2\sum_{k=1}^{n}a_k$$

$$2nx-2\sum_{k=1}^{n}a_k = 0$$

$$2nx = 2\sum_{k=1}^{n}a_k \quad \|:2n$$

$$x = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k$$

Väite on osoitettu.

Pienin arvo saadaan, kun sijoitetaan $x=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k$ lausekkeeseen.

$$n(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k)^2-(2\sum_{k=1}^{n}a_k)\cdot(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k)+\sum_{k=1}^{n}a_k{}^2$$

$$=\frac{1}{n}(\sum_{k=1}^{n}a_k)^2-\frac{2}{n}(\sum_{k=1}^{n}a_k)^2+\sum_{k=1}^{n}a_k{}^2$$

$$=\sum_{k=1}^{n}a_k{}^2-\frac{1}{n}(\sum_{k=1}^{n}a_k)^2$$

66. Olkoon tangentin sivuamispiste $(a, f(a)) = (a, (1-\sqrt{a})^2)$, $a > 0$.
Tangentin kulmakerroin on $f'(a)$.

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$$

$$f'(a) = \frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}}$$

Tangentin yhtälö on

$$y-(1-\sqrt{a})^2 = (\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}})(x-a)$$

$$y = \frac{-\sqrt{a}+a}{a}x - \sqrt{a} + 1$$

x-akselin leikkauspiste:

$$\frac{-\sqrt{a}+a}{a}x - \sqrt{a} + 1 = 0$$

$$x = \sqrt{a}$$

y-akselin leikkauspiste on $y = 1-\sqrt{a}$.

Piste $P = (\sqrt{a}, 0)$ ja piste $Q = (0, 1-\sqrt{a})$.

Pisteen P x-koordinaatin ja pisteen Q y-koordinaatin summa on
$\sqrt{a} + 1 - \sqrt{a} = 1$.

Summa on kaikilla a:n arvoilla vakio.

67. Koska f on derivoituva, derivaatta nollassa on olemassa.

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x}$$

Tämä tarkoittaa, että $\lim\limits_{x\to 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = f'(0)$ ja

$\lim\limits_{x\to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = f'(0)$.

Kun $x \to 0-$, niin $-x \to 0+$, joten

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x\to 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x} \\ &= \lim_{-x\to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x} \\ &= \lim_{x\to 0+} \frac{f(-x)-f(0)}{-x} \\ &= -\lim_{x\to 0+} \frac{f(-x)-f(0)}{x} \end{aligned}.$$

Koska f on parillinen, niin

$$-\lim_{x\to 0+} \frac{f(-x)-f(0)}{x} = -\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = -f'(0).$$

Siis $f'(0) = -f'(0)$.

Ainut reaaliluku a, jolle $a = -a$ eli luku on itsensä vastaluku, on 0.

68. Funktio on kasvava, kun sen derivaatta on positiivinen.

$$f'(x) = \int f''(x)\mathrm{d}x = e^x - e^{-x} + C$$

$$f'(0) = \frac{3}{2}$$

$$e^0 - e^{-0} + C = \frac{3}{2}$$

$$C = \frac{3}{2}$$

Derivaattafunktio on $f'(x) = e^x - e^{-x} + \frac{3}{2}$.

Ratkaistaan epäyhtälö $f'(x) \geq 0$.

$$e^x - e^{-x} + \frac{3}{2} \geq 0$$

$$x \geq -\ln 2$$

Funktio f on kasvava, kun $x \geq -\ln 2$.

69. Ehdosta $f(a + b) = f(a) + f(b)$ saadaan $f(2) = f(1 + 1) = f(1) + f(1) = 2\,f(1)$, eli $f(1) = \frac{1}{2} f(2)$.

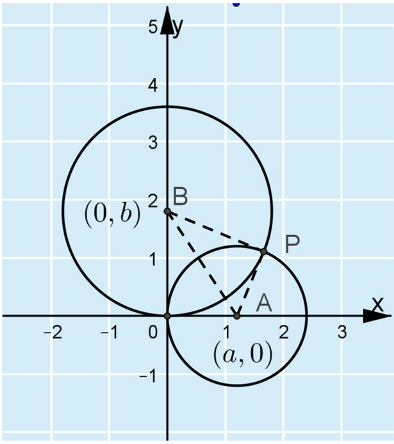
Ehdon $f(2) = 3$ avulla edelleen $f(1) = \frac{1}{2} f(2) = \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2}$.

Samoista ehdoista saadaan näin ollen myös
$f(3) = f(2 + 1) = f(2) + f(1) = 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$.

Toisaalta $f(3) = f(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}) = f(\frac{3}{2}) + f(\frac{3}{2}) = 2f(\frac{3}{2})$, josta lopulta
$f(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2} f(3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{2} = \frac{9}{4}$.

70. Ympyröiden yhtälöt voidaan kirjoittaa muodossa
$(x-a)^2 + y^2 = a^2$ ja $x^2 + (y-b)^2 = b^2$.

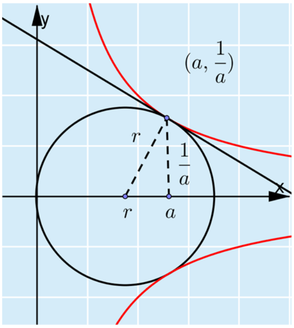
Toisen ympyrän keskipiste on $(a, 0)$ ja säde $|a|$ ja toisen keskipiste on $(0, b)$ ja säde $|b|$.



Ympyrät leikkaavat origossa O = (0,0), koska tämä piste toteuttaa molemmat ympyröiden yhtälöt. Toisen ympyrän keskipiste on x-akselilla ja toisen y-akselilla, joten niiden säteet ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan origossa. Tällöin myös tangentit ovat kohtisuorassa, joten ympyrät leikkaavat toisensa kohtisuorasti.

Kolmio OAB on suorakulmainen ja $a^2 + b^2 = AB^2$.
Kolmiossa APB sivu $AP = |a|$ ja sivu $PB = |b|$.
Kolmioissa *OAB ja APB* on yhtä pitkät sivut, joten kolmiot ovat yhtenevät. Tällöin myös kulma P on suora ja ympyrät leikkaavat pisteessä P kohtisuorasti.

71.



Ympyrä sivuaa käyrää $y = \frac{1}{x}$ pisteessä $(a, \frac{1}{a})$. Olkoon ympyrän säde r.

Määritetään käyrän $y = \frac{1}{x}$ pisteeseen $(a, \frac{1}{a})$ asetetun tangentin kulmakerroin derivaatan avulla.

$$\mathrm{D}\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}$$

Tangentin kulmakerroin on $-\frac{1}{a^2}$.

Samaan pisteeseen asetetun normaalin kulmakerroin on a^2. Normaali on säteen suuntainen ja kulkee siten ympyrän keskipisteen $(r, 0)$ kautta.

Normaalin kulmakerroin voidaan esittää myös muodossa

$$\frac{\frac{1}{a} - 0}{a - r} = \frac{1}{a^2 - ar}.$$

Saadaan yhtälö $a^2 = \dfrac{1}{a^2 - ar}$.

Toisaalta suorakulmaisesta kolmiosta saadaan yhtälö

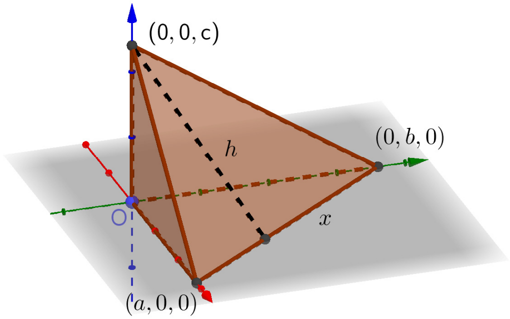
$$(\frac{1}{a})^2 + (a - r)^2 = r^2.$$

Ratkaistaan yhtälöpari, jolloin saadaan

$$a = \pm\sqrt[4]{3} \text{ ja } r = \frac{2}{\sqrt[4]{27}} = 0{,}8773... \approx 0{,}88.$$

Ympyrän säde on $\dfrac{2}{\sqrt[4]{27}} \approx 0{,}88.$

72. Piirretään kuva.



Tetraedrin pohjakolmion eli origon vastaisen tahkon sivut ovat $\sqrt{a^2+b^2}$, $\sqrt{b^2+c^2}$ ja $\sqrt{a^2+c^2}$.

Merkitään pohjakolmion korkeutta kirjaimella h ja korkeuden kannasta erottamaa osaa kirjaimella x.

Tällöin saadaan suorakulmaisista kolmioista:

$$\begin{cases} x^2+h^2=b^2+c^2 \\ (\sqrt{a^2+b^2}-x)^2+h^2=a^2+c^2 \end{cases}$$

Saadaan $x=\dfrac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ja edelleen $h=\sqrt{\dfrac{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}{a^2+b^2}}$.

Nyt pohjakolmion ala on

$$D=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}\cdot h=\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}.$$

Muiden kolmioiden alat ovat $A=\frac{1}{2}bc$, $B=\frac{1}{2}ac$ ja $C=\frac{1}{2}ab$, joten

$$A^2+B^2+C^2=\frac{1}{4}(b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2)=D^2.$$

73. Paraabelin yhtälö on $x = \frac{1}{2p}y^2$, $p > 0$. Olkoon paraabelin ja normaalin leikkauspisteessä $y = b$. Selvitetään x:n muutosnopeus tässä kohdassa laskemalla lausekkeen $\frac{1}{2p}y^2$ derivaatta muuttujan y suhteen.

$$D_y\left(\frac{1}{2p}y^2\right) = \frac{y}{p}$$

Sivuamispisteeseen piirretylle paraabelin tangentille pätee siis $\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{b}{p}$, joten kulmakerroin $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ on $\frac{p}{b}$. Normaalin kulmakerroin on $-\frac{b}{p}$.

Normaali kulkee pisteiden $(a, 0)$ ja $\left(\frac{b^2}{2p}, b\right)$ kautta, joten normaalin kulmakerroin on $\frac{b-0}{\frac{b^2}{2p}-a} = \frac{2bp}{b^2-2ap}$.

Saadaan yhtälö

$$-\frac{b}{p} = \frac{2bp}{b^2-2ap}$$

$$-b^3 + 2apb = 2bp^2$$

$$-b^3 + (2ap - 2p^2)b = 0$$

$$b(-b^2 + (2ap - 2p^2)) = 0$$

$$b = 0 \text{ tai } b^2 + (2ap - 2p^2) = 0$$

$$b^2 = 2p^2 - 2ap$$

$$b^2 = 2p(p-a)$$

Jotta yhtälöllä $-\frac{b}{p} = \frac{2bp}{b^2-2ap}$ olisi kolme ratkaisua, tulee olla $2p(p - a) > 0$. Koska $p > 0$, tulee olla $p - a > 0$, eli $a < p$.

Jos $2p(p - a) \leq 0$, eli $a \geq p$, yhtälöllä on vain yksi ratkaisu $b = 0$.

74. Esimerkiksi $f(x) = x$ on injektio, koska jos $x \neq y$, niin $f(x) \neq f(y)$.
Kuvaus $f(x) = x^2$ ei ole injektio, koska esimerkiksi $f(2) = f(-2) = 4$.

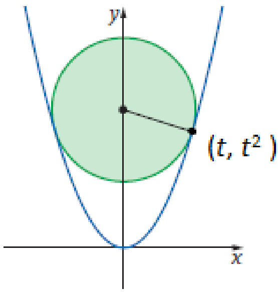
Kuvaus $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 1$ on määritelty kaikilla muuttujan x arvoilla.
$f'(x) = 3x^2 - 12x + 12 = 3(x - 2)^2$

Derivaatan merkki on kaikkialla muualla paitsi yksittäisessä kohdassa $x = 2$ positiivinen.

Funktio f on kasvava funktio, joka saa jokaisen arvonsa kerran.
Kuvaus $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 1$ on siis injektio.

Esimerkiksi kuvaus $f(x) = 2^x$ on kaikilla reaaliluvuilla määritelty injektio, mutta ei surjektio, koska esimerkiksi y:n arvoa -1 ei saada funktion arvona $f(x)$ millään luvulla x.

75. **a)** Ympyrän keskipiste on y-akselin ja sivuamispisteeseen piirretyn säteen suuntaisen suoran leikkauspiste. Sivuamispisteeseen (t, t^2) piirretyn paraabelin tangentin kulmakerroin voidaan määrittää derivaatan avulla.



$Dx^2 = 2x$, joten tangentin kulmakerroin on on $2t$.

Normaalin, eli säteen suuntaisen suoran, kulmakerroin on silloin $-\frac{1}{2t}$.

Normaalin yhtälö on $y - t^2 = -\frac{1}{2t}(x - t)$ eli $y = -\frac{1}{2t}x + \frac{1}{2} + t^2$.

Normaalin ja y-akselin leikkauspiste, eli ympyrän keskipiste on $(0, \frac{1}{2} + t^2)$.

Ympyrän säde on keskipisteen etäisyys sivuamispisteestä, eli $r = \sqrt{(t-0)^2 + (t^2 - (\frac{1}{2} + t^2))^2} = \sqrt{t^2 + \frac{1}{4}}$. Ratkaisemalla tästä t^2 saadaan ympyrän keskipisteelle $y = t^2 + \frac{1}{2} = r^2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = r^2 + \frac{1}{4}$.

b) a-kohdan mukaan ympyrän C_1 keskipisteen y-koordinaatti on $y_1 = 1^2 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$.

Ympyrän C_2 keskipisteen y-koordinaatti on $y_2 = r_2^{\,2} + \frac{1}{4}$.

Keskipisteiden etäisyys on $y_2 - y_1 = r_2^{\,2} - 1$.
Keskipisteiden etäisyys on myös säteiden summa $r_1 + r_2 = 1 + r_2$.

Tällöin

$$r_2^{\,2} - 1 = 1 + r_2$$
$$r_2^{\,2} - r_2 - 2 = 0$$
$$r_2 = 2 \text{ tai } r_2 = -1$$

Säde on positiivinen, joten $r_2 = 2$.

c) a-kohdan mukaan ympyrän C_n keskipisteen y-koordinaatti on

$y_n = r_n^2 + \frac{1}{4}$ ja ympyrän C_{n+1} keskipisteen $y_{n+1} = r_{n+1}^2 + \frac{1}{4}$.

Keskipisteiden välimatka on $r_{n+1}^2 + \frac{1}{4} - (r_n^2 + \frac{1}{4}) = r_{n+1}^2 - r_n^2$.

Välimatka on myös $r_n + r_{n+1}$.

Tällöin

$$r_{n+1}^2 - r_n^2 = r_n + r_{n+1}$$
$$r_{n+1}^2 - r_{n+1} = r_n^2 + r_n$$

d)

$$r_{n+1}^2 - r_{n+1} = r_n^2 + r_n$$
$$r_{n+1}^2 - r_{n+1} - r_n^2 - r_n = 0$$
$$r_{n+1} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-r_n^2 - r_n)}}{2}$$
$$r_{n+1} = \frac{1 \pm \sqrt{(2r_n + 1)^2}}{2}$$
$$r_{n+1} = \frac{1 \pm (2r_n + 1)}{2}$$
$$r_{n+1} = \frac{1 + 2r_n + 1}{2} = r_n + 1 \text{ tai } r_{n+1} = \frac{1 - (2r_n + 1)}{2} = -r_n$$

Säteen tulee olla positiivinen, joten $r_{n+1} = r_n + 1$.