KERTAUS

Lukujono

KERTAUSTEHTÄVIÄ

K1. Ratkaisussa annetaan esimerkit mahdollisista säännöistä.

a) Jatketaan lukujonoa: –2, –4, –6, –8, –10, –12, –14, –16, …

Rekursiivinen sääntö on, että lukujonon ensimmäinen jäsen on –2 ja tämän jälkeen seuraava jäsen saadaan vähentämällä edellisestä jäsenestä luku 2.

Analyyttinen sääntö on, että jäsenen järjestysluku kerrotaan luvulla –2. Toisin sanoen n. jäsen on $-2n$.

b) Jatketaan lukujonoa: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, …

Analyyttinen sääntö on, että lukujonon jäsen saadaan korottamalla järjestysluku toiseen. Toisin sanoen n. jäsen on n^2.

c) Jatketaan lukujonoa: $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, 1\frac{1}{4}, 1\frac{1}{2}, 1\frac{3}{2}, 2, 2\frac{1}{4}, 2\frac{1}{2}, 2\frac{3}{2}, \ldots$

Rekursiivinen sääntö on, että lukujonon ensimmäinen jäsen on $\frac{1}{2}$ ja tämän jälkeen seuraava jäsen saadaan lisäämällä edelliseen jäseneen luku $\frac{1}{4}$.

Analyyttinen sääntö on, että lukuun $\frac{1}{4}$ lisätään jäsenen järjestysluku jaettuna luvulla 4. Toisin sanoen n. jäsen on $\frac{1}{4}+\frac{n}{4}$.

K2. **a)** $a_{10} = 3 \cdot 10^2 + 1 = 300 + 1 = 301.$

b) Ratkaistaan milloin $a_n = 100$.

$$\begin{aligned} 7n - 5 &= 100 \\ 7n &= 105 \\ n &= \frac{105}{7} \\ n &= 15 \end{aligned}$$

Luku 100 on lukujonon 15. jäsen.

Vastaus: **a)** $a_{10} = 301$ **b)** 15. jäsen.

K3.

kuvio 1

kuvio 2

kuvio 3

a) Kuvioiden laattojen määrä muodostaa lukujonon 5, 5 + 15= 20, 5 + 15 + 25 =45, 5 + 15 + 25 + 35 = 80,…, joten neljännessä kuviossa on 80 laattaa

b) Lukujono 5, 20, 45, 80,… voidaan ilmaista muodossa 5, 5·4, 5·9, 5·16,…$5 \cdot n^2$, missä n on kuvion järjestysnumero, joten $a_n = 5 \cdot n^2$.

Vastaus: **a)** 80 **b)** $a_n = 5 \cdot n^2$.

K4. **a)** Lukujonon seuraava jäsen saadaan lisäämällä edelliseen jäseneen luku 7. Ensimmäinen jäsen on 3 ja yleinen jäsen a_n saadaan lisäämällä ensimmäiseen jäseneen $n - 1$ kertaa luku 7, joten
$a_n = 3 + (n - 1)\cdot 7 = 3 + 7n - 7 = 7n - 4$.

b) Rekursiivinen sääntö on a-kohdan perusteella $a_1 = 3$ ja $a_n = a_{n-1} + 7$, $n = 2, 3, 4,\ldots$

Vastaus: **a)** $a_n = 7n - 4$ **b)** $a_1 = 3$ ja $a_n = a_{n-1} + 7$, $n = 2, 3, 4,\ldots$

K5. Jonojen ensimmäiset jäsenet ovat $a_1 = 6 - 2 \cdot 1 = 4$ ja $b_1 = 15$. Lukujonossa (b_n) jäsen saadaan kertomalla edellinen luvulla 1,05. Kerrottaessa luvulla 1,05 luku suurenee. Siten lukujonon jäsen on aina edellistä suurempi. Toisin sanoen jonon pienin jäsen on 15.

Lukujonossa (a_n) puolestaan n. jäsen saadaan vähentämällä luvusta 6 luku $2n$. Mitä suurempi luku n on, sitä suurempi luku vähennetään. Näin ollen lukujonon (a_n) jäsenet pienenevät järjestysluvun kasvaessa. Toisin sanoen jonon suurin jäsen on 4.

Siis lukujonon (a_n) kaikki jäsenet ovat pienempiä kuin lukujonon (b_n) pienin jäsen. Näin ollen lukujonoissa (a_n) ja (b_n) ei ole yhtään samaa lukua.

Aritmeettinen ja geometrinen jono sekä summa

KERTAUSTEHTÄVIÄ

K6. Tutkitaan onko peräkkäisten jäsenten erotus tai suhde vakio.

a) $-10 - 5 = -15$
$20 - (-10) = 30$

Jono ei ole aritmeettinen, sillä peräkkäisten jäsenten erotus ei ole vakio.

$$\frac{-10}{5} = -2$$
$$\frac{20}{-10} = -2$$
$$\frac{-40}{20} = -2$$

Jono voi olla geometrinen, sillä annetussa lukujonon alussa peräkkäisten jäsenten suhde on vakio.

b) $8 - 15 = -7$
$1 - 8 = -7$
$-6 - 1 = -7$

Jono voi olla aritmeettinen, sillä annetussa lukujonon alussa peräkkäisten jäsenten erotus on vakio.

$$\frac{8}{15}$$
$$\frac{1}{8}$$

Jono ei ole geometrinen, sillä peräkkäisten jäsenten suhde ei ole vakio.

c) $4 - 2 = 2$
$8 - 4 = 4$

Jono ei ole aritmeettinen, sillä peräkkäisten jäsenten erotus ei ole vakio.

$\frac{4}{2} = 2$

$\frac{8}{4} = 2$

$\frac{10}{8} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$

Jono ei ole myöskään geometrinen, sillä peräkkäisten jäsenten suhde ei ole vakio.

Vastaus: **a)** Jono voi olla geometrinen. **b)** Jono voi olla aritmeettinen.
c) Jono ei voi olla aritmeettinen eikä geometrinen.

K7. **a)** Lasketaan aritmeettisen lukujonon erotusluku $d = 18 - 6 = 12$. Tällöin

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)d \\ &= 6 + (n-1)\cdot 12 \\ &= 12n - 6 \end{aligned}$$

b) Lasketaan geometrisen lukujonon suhdeluku $q = \frac{18}{6} = 3$.

Tällöin $a_n = a_1 q^{n-1} = 6 \cdot 3^{n-1}$.

c) Päätellään aritmeettisen lukujonon erotusluku d.
Koska $a_5 - a_1 = 7 - 19 = -12$ ja koska 5. jäsen saadaan lisäämällä 1. jäseneen erotusluku d neljä kertaa, on $d = \frac{-12}{4} = -3$.

Joten $a_n = a_1 + (n-1)d = 19 + (n-1)(-3) = -3n + 22$.

Vastaus: **a)** $a_n = 12n - 6$ **b)** $a_n = 6 \cdot 3^{n-1}$ **c)** $a_n = -3n + 22$

K8. **a)** Jokainen jonon jäsen on $\frac{1}{3}$. Siis kuuden ensimmäisen jäsenen summa on $6 \cdot \frac{1}{3} = \frac{6}{3} = 2.$

b) Kyseessä on aritmeettinen lukujono, jossa $a_1 = 3 + 5 \cdot 1 = 8$ ja $a_6 = 3 + 5 \cdot 6 = 33$. Siis 6 ensimmäisen jäsenen summa on

$$S = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} = 6 \cdot \frac{8+33}{2} = 6 \cdot \frac{41}{2} = 123.$$

c) Kyseessä on geometrinen lukujono, jossa $a_1 = 3 \cdot 2^1 = 6$ ja $q = 2$. Siis 6 ensimmäisen jäsenen summa on

$$S = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{6(1-2^6)}{1-2} = \frac{6(1-64)}{-1} = 378.$$

Vastaus: **a)** 2 **b)** 183 **c)** 378

K9. **a)** Aritmeettisen lukujonon säännöllä summa 1 + 2 + 3 + … + 50 on

$$S_{50} = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} = 50 \cdot \frac{1+50}{2} = 50 \cdot \frac{51}{2} = 1275.$$

b) Geometrisen lukujonon suhdeluku on $q = \frac{2}{1} = 2$. Viidenkymmenen ensimmäisen jäsenen summa on

$$\begin{aligned} S_{50} &= \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \\ &= \frac{1(1-2^{50})}{1-2} \\ &= \frac{1-2^{50}}{-1} \\ &= 2^{50} - 1 \\ &= 1125899906842623 \\ &\approx 1{,}1 \cdot 10^{15} \end{aligned}$$

Vastaus: **a)** 1275 **b)** $1125899906842623 \approx 1{,}1 \cdot 10^{15}$

K10.

$$\sum_{k=5}^{20}(-3k+4)$$
$$=-3\cdot 5+4+(-3)\cdot 6+4+...+(-3)\cdot 20+4$$
$$=-11-14-...-56$$

Tehtävänannon mukaan kyseessä on aritmeettinen summa, jossa $a_1 = -11$ ja $a_{20} = -56$. Koska numerointi alkaa k:n arvosta 5, on yhteenlaskettavia on 20 – 4 = 16, joten n = 16 ja summa on

$$S_{16}=16\cdot\frac{-11-56}{2}=-536$$

Vastaus: –536

Prosenttilaskenta

KERTAUSTEHTÄVIÄ

K11. **a)** Alennettu hinta oli 100 % – 30 % = 70 % = 0,7-kertainen alkuperäiseen verrattuna, joten alennettu hinta oli $0{,}7 \cdot 120\ € = 84\ €$.

b) Alennettu hinta oli 100 % – 40 % = 60 % = 0,6-kertainen alkuperäiseen hintaan x verrattuna, joten saadaan yhtälö

$$\begin{aligned} 0{,}6 \cdot x &= 17{,}94 \quad \| : 0{,}6 \\ x &= 29{,}90\ € \end{aligned}$$

Vastaus: **a)** 84 € **b)** 29,90 €

K12. **a)** Ryhmän koko pienenee 11 – 8 = 3 hengellä. Lasketaan, kuinka monta prosenttia vähennys on alkuperäisestä ryhmäkoosta 11.

$$\frac{3}{11} = 0{,}2727... \approx 27\,\%$$

b) Prosenttikertoimet
Palkannousu 100 % + 5 % = 105 % = 1,05
Palkanlasku 100 % – 2 % = 98 % = 0,98

Lopullinen palkka saadaan kertomalla alkuperäinen palkka prosenttikertoimilla
$1{,}05 \cdot 0{,}98 \cdot 2800\ € = 2881{,}20\ €$

c) Prosenttikertoimet
Vuokrannousu 100 % + 20 % = 120 % = 1,2
Vuokranlasku 100 % – 15 % = 85 % = 0,85

Lopullinen vuokra saadaan kertomalla alkuperäinen vuokra prosenttikertoimilla. Kerrotaan prosenttikertoimet keskenään ja päätellään vuokran prosentuaalinen muutos.
$1{,}2 \cdot 0{,}85 = 1{,}02$ eli vuokra nousi 2 %.

Vastaus: **a)** 27 % **b)** 2881,20 € **c)** nousi 2 %

K13. **a)** Lasketaan vähenemiskerroin 100 % – 5 % = 95 % = 0,95.

Kymmenennen vuoden lopussa voitto oli vähentynyt 9 kertaa, joten voitto oli 10. vuotena $0{,}95^9 \cdot 100\,000$ € ≈ 63 025 €

b) Kyseessä on geometrinen summa, jossa $a_1 = 100\,000$ ja $q = 0{,}95$.

$$S_{10} = \frac{100\,000(1-0{,}95^{10})}{1-0{,}95} \approx 802\,526\,(€)$$

Vastaus: **a)** n. 63 025 € **b)** n. 802 526 €

K14. Laaditaan taulukko, jonka 1. sarakkeessa on prosenttikerroin, joka kasvaa aina tuhannesosalla. Toiseen sarakkeeseen kirjoitetaan kaava, jossa viereisen sarakkeen prosenttikerroin korotetaan potenssiin 50 ja se kerrotaan luvulla 1000. Etsitään taulukosta kohta, jossa kasvanut talletus ylittää 2000 €. Ohessa taulukon osa.

5	1.012	1815.623
6	1.013	1907.534
7	1.014	2004
8	1.015	2105.242

Koska $1000 \cdot 1{,}014^{50} = 2004{,}00\ldots$, on kysytty korko noin 1,40 %.

Vastaus: n. 1,40 %

Eksponenttiyhtälö ja logaritmi

KERTAUSTEHTÄVIÄ

K15. **a)** $6^x = 36$

$6^x = 6^2$

$x = 2$

b) $4^{x-3} = 16$

$4^{x-3} = 4^2$

$x - 3 = 2$

$x = 5$

c) $3 \cdot 2^x = 24 \quad \| : 3$

$2^x = 8$

$2^x = 2^3$

$x = 3$

Vastaus: **a)** $x = 2$ **b)** $x = 5$ **c)** $x = 3$

K16. **a)** $7^x = 70$

$x = \log_7 70$

b) $2^3 \cdot 1{,}5^x = 160 \quad \| : 2^3$

$1{,}5^x = \dfrac{160}{2^3}$

$1{,}5^x = 20$

$x = \log_{1,5} 20$

c)

$\dfrac{5^x}{2} = 5^2 \quad \| \cdot 2$

$5^x = 50$

$x = \log_5 50$

Vastaus: **a)** $x = \log_7 70$ **b)** $x = \log_{1,5} 20$ **c)** $x = \log_5 50$

K17. **a)** $\log_3 9 = 2$, koska $3^2 = 9$

b) $\log_2 8 = 3$, koska $2^3 = 8$

c) $\log_{10} 1000 = 3$, koska $10^3 = 1000$

Vastaus: **a)** 2 **b)** 3 **c)** 3

K18. **a)** Yhtälöä $x = \log_2 32$ vastaa eksponenttiyhtälö $2^x = 32$. Näin ollen $x = 5$, koska $2^5 = 32$.

b) Yhtälöä $x = \log_4 16$ vastaa eksponenttiyhtälö $4^x = 16$, joten $x = 2$, koska $4^2 = 16$.

c) Yhtälöä $x = \log_9 9$ vastaa eksponenttiyhtälö $9^x = 9$, joten $x = 1$, koska $9^1 = 9$.

Vastaus: **a)** $2^x = 32$, $\log_2 32 = 5$ **b)** $4^x = 16$, $\log_4 16 = 2$
c) $9^x = 9$, $\log_9 9 = 1$

K19. **a)**

$$\begin{aligned} a_n &= 2^n - 2^3 \\ 120 &= 2^n - 2^3 \\ 128 &= 2^n \\ 2^7 &= 2^n \\ n &= 7 \end{aligned}$$

Koska saatiin kokonaislukuvastaus, on luku 120 lukujonon 7. jäsen.

b)

$$\begin{aligned} a_n &= 4 \cdot 3^{n-1} \\ 120 &= 4 \cdot 3^{n-1} \qquad \| : 4 \\ 30 &= 3^{n-1} \end{aligned}$$

Luku 30 ei ole luvun 3 kokonaislukupotenssi, joten yhtälöllä ei ole kokonaislukuratkaisua eikä siis lukujonossa ole lukua 120.

Vastaus: **a)** on 7. jäsen **b)** ei ole jonon jäsen

K20. Kävijöiden lukumäärä on
1. viikon jälkeen 1000
2. viikon jälkeen 3000
jne.

Lukumäärät muodostavat geometrisen lukujonon, jossa $a_1 = 1000$ ja $q = 3$. Ratkaistaan yhtälöstä, milloin lukujonon jäsenen arvo on yli 1 000 000.

$$1000 \cdot 3^{x-1} = 1\,000\,000 \quad \| : 1000$$
$$3^{x-1} = 1\,000$$
$$x - 1 = \log_3 1000$$
$$x = \log_3 1000 + 1$$
$$x = 7{,}287\ldots$$

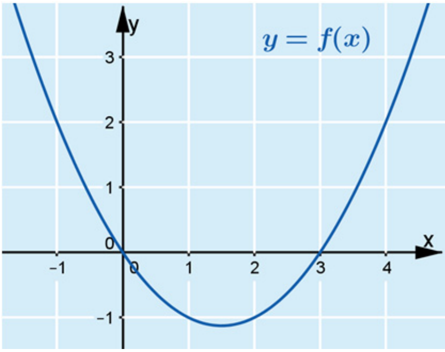
Seitsemän viikkoa ei riitä, joten 8 viikon kuluttua vierailijoita on käynyt yli 1000 000 ihmistä.

Vastaus: 8 viikon kuluttua

Funktio

KERTAUSTEHTÄVIÄ

K21.



Kuvaajan perusteella

a) $f(2) \approx -1$

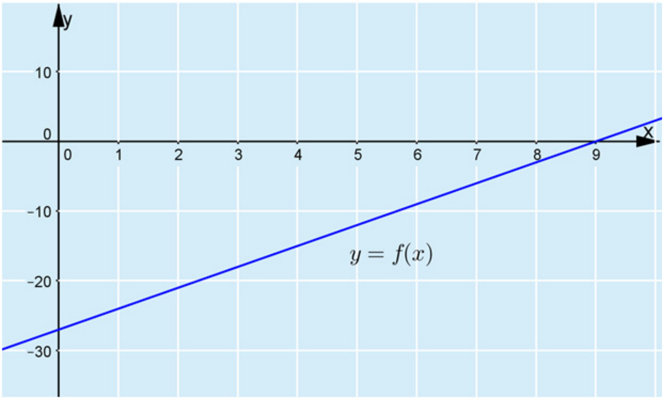
b) Funktio f saa arvon 2, kohdissa $x \approx -1$ ja $x \approx 4$

c) Funktion f nollakohdat ovat $x \approx 0$ ja $x \approx 3$

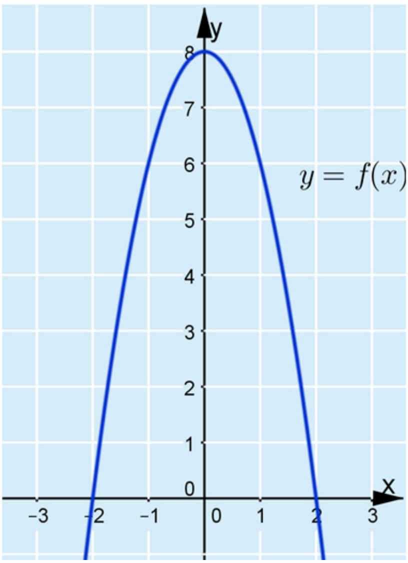
Vastaus: **a)** -1 **b)** $x \approx -1$ ja $x \approx 4$ **c)** $x \approx 0$ ja $x \approx 3$

K22. Funktion *f* kuvaajan perusteella

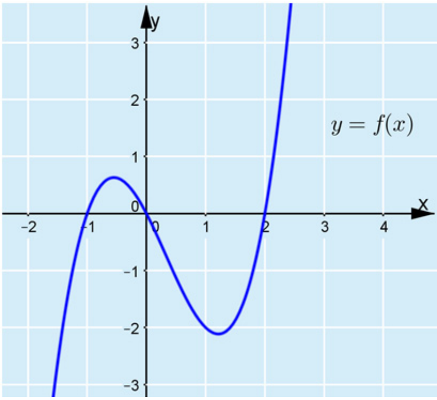
a) $f(x) = 3x - 27 < 0$ eli funktio saa negatiivisia arvoja, kun y-koordinaatit ovat pienempiä kuin nolla eli, kun $x < 9$.



b) $f(x) = -2x^2 + 8 < 0$, eli funktio saa negatiivisia arvoja, kun y-koordinaatit ovat pienempiä kuin nolla eli, kun $x < -2$ tai $x > 2$.



c) $f(x) = x^3 - x^2 - 2x < 0$ eli funktio saa negatiivisia arvoja, kun y-koordinaatit ovat pienempiä kuin nolla eli, kun $x < -1$ tai $0 < x < 2$.



Vastaus: **a)** $x < 9$ **b)** $x < -2$ tai $x > 2$ **c)** $x < -1$ tai $0 < x < 2$

K23. **A** $f(3) = 2$, kuvaaja III, koska kuvaaja kulkee pisteen (3, 2) kautta.

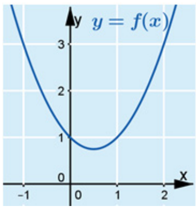
B $f(x) = x + 1$, taulukko I, koska taulukon funktion f arvot saadaan lausekkeesta $x + 1$.

C $f(x) = x^2 - x + 1$, kuvaaja II, koska esim. kuvaajan pisteet (–1, 3) ja (0, 1) sekä (2, 3) vastaavat funktion arvoja ja toisen asteen polynomifunktion kuvaaja on paraabeli.

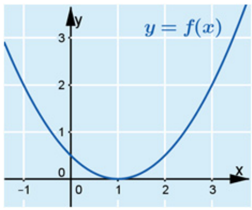
I

x	$f(x)$
–3	–2
–2	–1
–1	0
1	2
2	3
3	4

II

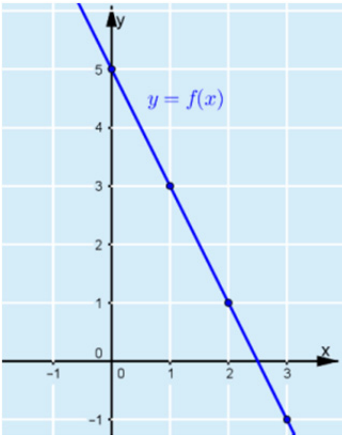


III

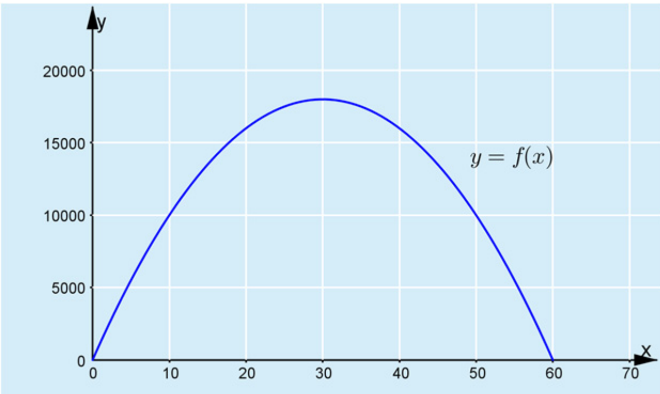


Vastaus: A ja III, B ja I, C ja II

K24. Lasketaan funktion $f(x) = -2x + 5$ arvoja eri muuttujan arvoilla ja sijoitetaan saadut pisteet koordinaatistoon. Huomataan, että pisteet ovat samalla suoralla. Funktion $f(x) = -2x + 5$ kuvaaja.



K25. Tuotto = myyntimäärä · kilohinta, joten funktio on $f(x) = x\,(1200 - 20x)$ ja kuvaajasta nähdään, että myyntihinnalla 30 €/kg tuotto on suurimmillaan.



Vastaus: $f(x) = x\,(1200 - 20x)$, myyntihinnalla 30 €/kg.

KOKOAVIA TEHTÄVIÄ

ILMAN TEKNISIÄ APUVÄLINEITÄ

1. **A** Luku x kasvaa 3 %, jolloin se on 100 % + 3 % = 103 % alkuperäisestä luvusta x. Tätä vastaa lauseke $1{,}03x$. Siis A–II.

B Luku x pienenee 3 %, jolloin se on 100 % – 3 % = 97 % alkuperäisestä luvusta x. Tätä vastaa lauseke $0{,}97x$. Siis B–III.

C Koska 3 % on desimaalilukuna 0,03, niin 3 % luvusta x merkitään lausekkeena $0{,}03x$. Siis C–IV.

D Luku x kasvaa 97 %, jolloin se on 100 % + 97 % = 197 % alkuperäisestä luvusta x. Tätä vastaa lauseke $1{,}97x$. Siis D–I.

Vastaus: A–II, B–III, C–IV ja D–I

2. **a)** Sijoitetaan yleisen jäsenen lausekkeeseen n:n paikalle luku 3:

$$a_3 = \frac{6^3}{6} = \frac{\overset{1}{\cancel{6}} \cdot 6 \cdot 6}{\underset{1}{\cancel{6}}} = 6 \cdot 6 = 36.$$

b) Jäsenen 6^{17} järjestysluku n toteuttaa yhtälön $\frac{6^n}{6} = 6^{17}$:

$$\begin{aligned} \frac{6^n}{6} &= 6^{17} \quad \| \cdot 6 \\ 6^n &= 6 \cdot 6^{17} \\ 6^n &= 6^{18} \\ n &= 18 \end{aligned}$$

Lukujonon 18. jäsen on luku 6^{17}.

Vastaus: **a)** $a_3 = 36$ **b)** 18. jäsen

3. Ensimmäisten viikkojen valmistusmäärät ovat 15, 15 + 3 = 18, 18 + 3 = 21, 21 + 3 = 24, …

Valmistusmäärät muodostavat aritmeettisen lukujonon 15, 18, 21, 24, …, jossa erotusluku $d = 18 - 15 = 3$.

Muodostetaan aritmeettisen lukujonon yleisen jäsenen a_n lauseke kaavan $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$ sekä tietojen $a_1 = 15$ ja $d = 3$ avulla:
$a_n = 15 + (n - 1) \cdot 3 = 3n + 12$.

Tuotteita valmistettiin 31. viikolla $3 \cdot 31 + 12 = 93 + 12 = 105$ (kpl), joten 31 ensimmäisen viikon aikana valmistettujen tuotteiden lukumäärä saadaan aritmeettisena summana 15 + 18 + 21 + … + 105.

Summan ensimmäinen yhteenlaskettava on 15, viimeinen yhteenlaskettava 105 ja yhteenlaskettavien lukumäärä 31:

$$S_{31} = 31 \cdot \frac{15+105}{2} = 31 \cdot \frac{120}{2} = 31 \cdot 60 = 1860.$$

Vastaus: 1860 tuotetta

4. **a)** Funktion f arvot ovat suurempia kuin funktion g arvot, kun funktion f kuvaaja on ylempänä kuin funktion g kuvaaja. Kuvaajien perusteella funktion f arvot ovat suurempia kuin funktion g arvot, kun $-1 < x < 3$.

b) Lukujono $a_n = -n^2 + 3n + 5$ on määritelty positiivisilla kokonaislukuarvoilla n. Funktion f kuvaajalla on lukujonoa (a_n) vastaavat pisteet (1, 7), (2, 7), (3, 5) ja (4, 1).

Lukujono $b_n = n + 2$ on määritelty myös positiivisilla kokonaislukuarvoilla n. Funktion g kuvaajalla on lukujonoa (b_n) vastaavat pisteet (1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6) ja (5, 7).

Kuvaajilla on yhteinen piste (3, 5), joten kummankin lukujonon 3. jäsen on 5. Lukujonoissa (a_n) ja (b_n) on siis 3. jäsen sama.

Vastaus: **a)** $-1 < x < 3$ **b)** 3. jäsen

5. **a)**

$$4^x = 9$$
$$x = \log_4 9$$

b)

$$27 - 5^x = 0$$
$$27 = 5^x$$
$$5^x = 27$$
$$x = \log_5 27$$

c)

$$3^x = 2^3$$
$$3^x = 8$$
$$x = \log_3 8$$

Vastaus: **a)** $x = \log_4 9$ **b)** $x = \log_5 27$ **c)** $x = \log_3 8$

6. Merkitään annettua lukua kirjaimella x.

a) Kun luku x kerrotaan kolmella, saadaan lauseke $3x$. Kun tuloon $3x$ lisätään luku 5, saadaan kysytty lauseke $3x + 5$.

Funktio f on siis $f(x) = 3x + 5$ ja $f(-1) = 3 \cdot (-1) + 5 = -3 + 5 = 2$.

b) Kun luvusta x vähennetään 4, saadaan lauseke $x - 4$. Kun erotus $x - 4$ kerrotaan luvulla 6, saadaan kysytty lauseke $6(x - 4) = 6x - 24$.

Funktio f on siis $f(x) = 6x - 24$ ja $f(-1) = 6 \cdot (-1) - 24 = -6 - 24 = -30$.

Vastaus: **a)** $f(x) = 3x + 5$, $f(-1) = 2$ **b)** $f(x) = 6x - 24$, $f(-1) = -30$

7. Asukasluku on kasvanut vuoden aikana 5050 – 5000 = 50. Kasvu on prosentteina $\frac{50}{5000} = 0{,}01 = 1\ \%$. Asukasluku on vuoden lopussa 1 % enemmän kuin vuoden alussa eli 101 % vuoden alun asukasluvusta. Vuoden lopussa oleva asukasluku saadaan kertomalla vuoden alun asukasluku kertoimella 1,01.

Ensimmäisen vuoden lopussa asukaslukua kuvaa lauseke $1{,}01 \cdot 5000$. Toisen vuoden aikana ensimmäisen vuoden lopun asukasluku $1{,}01 \cdot 5000$ kasvaa taas 1,01-kertaiseksi eli asukasluku toisen vuoden lopussa on $1{,}01^2 \cdot 5000$.

Kolmannen vuoden aikana toisen vuoden lopun asukasluku $1{,}01^2 \cdot 5000$ kasvaa taas 1,01-kertaiseksi eli asukasluku kolmannen vuoden lopussa on $1{,}01^3 \cdot 5000$.

Samalla tavalla asukasluku n vuoden kuluttua on $1{,}01^n \cdot 5000$.

Vastaus: $1{,}01^n \cdot 5000$

8. Taulukoidaan lukujonon jäseniä ja päätellään lukujonon yleinen jäsen.

1. jäsen	$1 \cdot 3 = 3$
2. jäsen	$2 \cdot 4 = 8$
3. jäsen	$3 \cdot 5 = 15$
4. jäsen	$4 \cdot 6 = 24$

Lukujonon jäsen saadaan tulosta, jossa ensimmäinen tekijä on lukujonon jäsenen järjestysluku n. Toinen tulon tekijä on ensimmäistä tekijää n kaksi suurempi $n + 2$, joten lukujonon yleinen jäsen a_n saadaan lausekkeesta $n(n + 2) = n^2 + 2n$.

Vastaus: $a_n = n(n + 2) = n^2 + 2n$

9. **a)** Suorakulmion A_1 pinta-ala saadaan kannan ja korkeuden tulona, joten $A_1 = f(x) = (x + 5)x = x^2 + 5x$.

b) Suorakulmion A_2 pinta-ala saadaan kannan ja korkeuden tulona, joten $A_2 = g(x) = (x + 3)x = x^2 + 3x$.

c) Lasketaan suorakulmioiden A_1 ja A_2 pinta-aloja pituuden x eri arvoilla:

x	$A_1 = f(x) = x^2 + 5x$	$A_2 = g(x) = x^2 + 3x$
1	$1^2 + 5 \cdot 1 = 6$	$1^2 + 3 \cdot 1 = 4$
2	$2^2 + 5 \cdot 2 = 14$	$2^2 + 3 \cdot 2 = 10$
3	$3^2 + 5 \cdot 3 = 24$	$3^2 + 3 \cdot 3 = 18$
4	$4^2 + 5 \cdot 4 = 36$	$4^2 + 3 \cdot 4 = 28$
5	$5^2 + 5 \cdot 5 = 50$	$5^2 + 3 \cdot 5 = 40$

Sivun pituuden x arvolla 5 pinta-alojen A_1 ja A_2 erotus on 10.

Koska pinta-ala A_1 on suurempi, niin muodostetaan ehdosta yhtälö $A_1 - A_2 = 10$ ja tarkistetaan laskemalla saatu tulos:

$$\begin{aligned} A_1 - A_2 &= 10 \\ x^2 + 5x - (x^2 + 3x) &= 10 \\ x^2 + 5x - x^2 - 3x &= 10 \\ 2x &= 10 \qquad \| :2 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Vastaus: **a)** $f(x) = x^2 + 5x$ **b)** $g(x) = x^2 + 4x + 3$ **c)** $x = 5$

10. Koska n on pariton kokonaisluku, on $n - 1$ parillinen luku. Kirjoitetaan summa $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 \dots + (n - 2) - (n - 1) + n$ kahden peräkkäisen luvun summien avulla viimeistä yhteenlaskettavaa n lukuun ottamatta:
$$\underbrace{1-2}_{=-1}+\underbrace{3-4}_{=-1}+\underbrace{5-6}_{=-1}+\dots+\underbrace{(n-2)-(n-1)}_{=-1}+n.$$

Kahden peräkkäisen luvun summia -1 on yhteensä $\frac{n-1}{2}$ kappaletta, joten niiden summa saadaan tulosta $\frac{n-1}{2}\cdot(-1)=\frac{-n+1}{2}$. Kun saatuun tulokseen $\frac{-n+1}{2}$ lisätään viimeinen yhteenlaskettava n, saadaan lauseke kysytylle summalle $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 \dots + (n - 2) - (n - 1) + n$:
$$\frac{-n+1}{2}+n=\frac{-n+1}{2}+{}^{2)}\frac{n}{1}=\frac{-n+1+2n}{2}=\frac{n+1}{2}.$$

Vastaus: $\frac{n+1}{2}$

APUVÄLINEET SALLITTU

11. **a)** Paidasta annettiin 20 % alennusta, jolloin paidan alkuperäisestä hinnasta jäi maksettavaksi 100 % – 20 % = 80 %, joka on prosenttikertoimena 0,80.

Paidan hinta 20 %:n alennuksessa saadaan kertomalla paidan alkuperäinen hinta 42 € kertoimella 0,80:
$0{,}80 \cdot 42\text{ €} = 33{,}60\text{ €}$.

b) Merkitään laukun alentamatonta hintaa kirjaimella x. Koska alennusprosentti oli 30, maksettiin laukusta alennusmyynnissä 100 % – 30 % = 70 % sen alentamattomasta hinnasta. Prosenttilukua 70 % vastaa prosenttikerroin 0,70, joten tehtävän tiedoista saadaan yhtälö $0{,}70 \cdot x = 35$.

Yhtälön ratkaisuna saadaan laukun alentamaton hinta:

$$0{,}70x = 35 \quad || : 0{,}70$$
$$x = \frac{35}{0{,}70}$$
$$x = 50$$

Laukun alentamaton hinta oli 50 €.

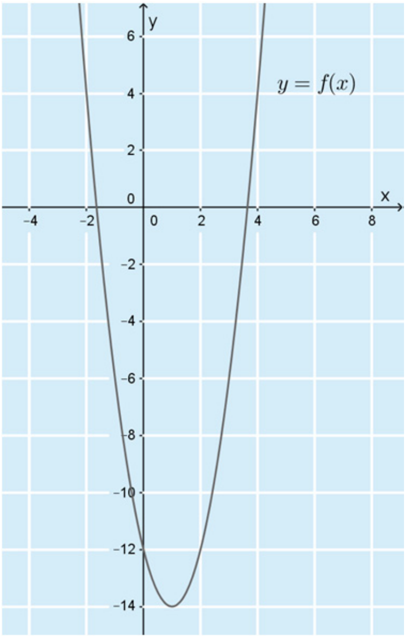
c) Merkitään osakkeiden arvoa ensimmäisen vuoden alun tilanteessa kirjaimella x. Osakkeiden arvo nousi 1. vuoden aikana 7 %, joten arvo 1. vuoden lopussa oli 107 % vuoden alun arvosta. Vuoden lopun arvoa kuvaa lauseke $1{,}07 \cdot x$.

Koska osakkeiden arvo nousi toisen vuoden aikana 10 %, oli osakkeiden arvo 2. vuoden lopussa 110 % ensimmäisen vuoden lopun osakkeiden arvosta $1{,}07x$. Toisen vuoden lopun osakkeiden arvoa kuvaa lauseke $1{,}10 \cdot 1{,}07x = 1{,}177x$.

Toisen vuoden lopussa osakkeiden arvo oli $1{,}177x$, joten kahden vuoden jälkeen osakkeiden arvo oli $\dfrac{1{,}177\,\cancel{x}^{1}}{\cancel{x}_{1}} = 1{,}177 = 117{,}7\ \%$ ensimmäisen vuoden alun osakkeiden arvosta. Osakkeiden arvo nousi kahden ensimmäisen vuoden aikana 117,7 % – 100 % = 17,7 %.

Vastaus: **a)** 33,60 € **b)** 50 € **c)** 17,7 %

12.



Funktion arvo on kuvaajalla olevan pisteen y-koordinaatti.

a) Funktion f arvot ovat suurempia kuin 4, kun käyrän pisteiden y-koordinaatit ovat suurempia kuin 4. Kuvaajan perusteella funktion f arvot ovat suurempia kuin 4, kun $x < -2$ tai $x > 4$.

b) Funktion f arvot ovat pienempiä kuin –6, kun $-1 < x < 3$.

Vastaus: **a)** $x < -2$ tai $x > 4$ **b)** $-1 < x < 3$

13. **a)** Sijoitetaan lukujonon jäsenen lausekkeeseen $n^3 - 7n$ muuttujan n paikalle luku 25, jolloin $a_{25} = 25^3 - 7 \cdot 25 = 15\,450$.

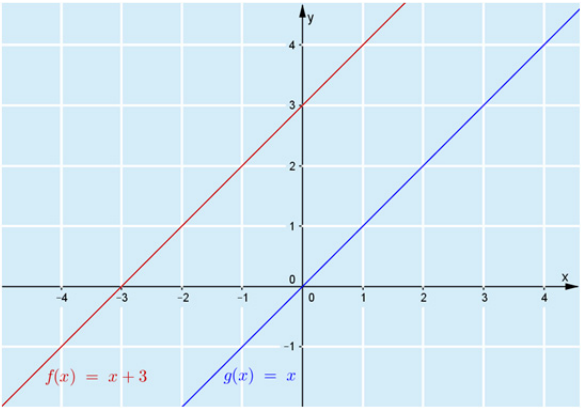
b) Lukujono on rekursiivinen, joten lukujonon 25. jäsentä ei voi laskea ennen kuin edeltävät jäsenet on laskettu. Lasketaan lukujonon jäsenet taulukkolaskentaohjelman avulla:

	A	B
1	1	3
2	2	5
3	3	9
4	4	17
5	5	33
6	6	65
7	7	129
8	8	257
9	9	513
10	10	1025
11	11	2049
12	12	4097
13	13	8193
14	14	16385
15	15	32769
16	16	65537
17	17	131073
18	18	262145
19	19	524289
20	20	1048577
21	21	2097153
22	22	4194305
23	23	8388609
24	24	16777217
25	25	33554433

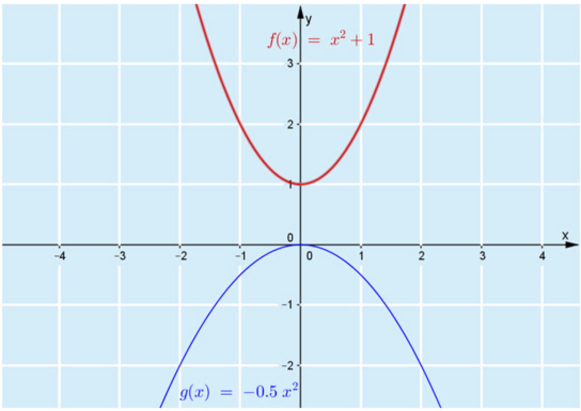
Lukujonon 25. jäsen on 33 554 433.

Vastaus: **a)** $a_{25} = 15\,450$ **b)** $a_{25} = 33\,554\,433$

14. **a)** esim.



b) esim.



15. Jos lukujono olisi aritmeettinen, niin lukujono muodostuisi seuraavasti:

$$\overset{+d}{\frown}\ \overset{+d}{\frown}\ \overset{+d}{\frown}\ \overset{+d}{\frown}\ \overset{+d}{\frown}\ \overset{+d}{\frown}\ \overset{+d}{\frown}\ \overset{+d}{\frown}\ \overset{+d}{\frown}\ \overset{+d}{\frown}\ \overset{+d}{\frown}$$

$$a_1 \quad \mathbf{5} \quad a_3 \quad \mathbf{8} \quad a_5 \quad a_6 \quad a_7 \quad a_8 \quad a_9 \quad a_{10} \quad a_{11} \quad \mathbf{21} \quad \ldots$$

Tällöin lukujonon 2. ja 4. jäsenen perusteella saadaan ratkaistua erotusluku d:

$2d = 8 - 5 = 3$, josta $d = \dfrac{3}{2}$.

Vastaavasti lukujonon 2. ja 12. jäsenen osalta $10d = 21 - 5 = 16$, josta $d = \dfrac{8}{5}$.

Koska lukujonon jäsenten $a_2 = 5$, $a_4 = 8$ ja $a_{12} = 21$ välillä erotusluku d ei ole sama vakio, jäsenet $a_2 = 5$, $a_4 = 8$ ja $a_{12} = 21$ sisältävä lukujono ei voi olla aritmeettinen.

Vastaus: Ei voi olla.

16. Geometrisen lukujonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 80$ ja suhdeluku $q = 0{,}5$, joten 20 ensimmäisen jäsenen summa on

$$\begin{aligned} S_{20} &= \frac{80(1-0{,}5^{20})}{1-0{,}5} \\ &= 159{,}9... \\ &\approx 160. \end{aligned}$$

Vastaus: $S_{20} \approx 160$

17. Yrityksen myynnit kasvavat 3 % jokaisen kuukauden aikana, joten myynnit muodostavat geometrisen lukujonon
23000, 1,03 · 23000, $1{,}03^2$ · 23000, …,
jossa $a_1 = 23000$ ja $q = 1{,}03$.

Vuoden myynti saadaan geometrisen summan kaavan avulla.
Nyt ensimmäinen yhteenlaskettava on $a_1 = 23000$, suhdeluku $q = 1{,}03$ ja yhteenlaskettavien lukumäärä $n = 12$:

$$\begin{aligned} S_{12} &= \frac{23000(1-1{,}03^{12})}{1-1{,}03} \\ &= 326416{,}7\ldots \\ &\approx 330000. \end{aligned}$$

Vastaus: n. 330 000 €

18. **a)**

$$\begin{aligned} 1{,}7 \cdot 8^x &= 362 \quad \| : 1{,}7 \\ 8^x &= \frac{362}{1{,}7} \\ x &= \log_8 \frac{362}{1{,}7} \\ x &= 2{,}578\ldots \\ x &\approx 2{,}58 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 5^4 \cdot 5^x &= 1700 \quad \| : 5^4 \\ 5^x &= \frac{1700}{5^4} \\ 5^x &= 2{,}72 \\ x &= \log_5 2{,}72 \\ x &= 0{,}621\ldots \\ x &\approx 0{,}62 \end{aligned}$$

c)

$$7^x = 75 \cdot 2^x \quad || : 2^x$$

$$\frac{7^x}{2^x} = 75$$

$$(\frac{7}{2})^x = 75$$

$$3{,}5^x = 75$$

$$x = \log_{3{,}5} 75$$

$$x = 3{,}446...$$

$$x \approx 3{,}45$$

Vastaus: **a)** $x \approx 2{,}58$ **b)** $x \approx 0{,}62$ **c)** $x \approx 3{,}45$

19. **a)** Esimerkiksi soluun B2 kirjoitetaan kaava ”=1,012*500”. Soluun B3 kirjoitetaan kaava ”=1,012*B2”. Sarakkeen B jokaisen solun kaava saadaan saman mallin mukaan. Sarakkeen C solusta C3 alkaen kaavat ovat samat kuin sarakkeessa B. Sama toistuu kaikkien sarakkeiden C–K osalta.

Sarakkeeseen L kirjoitetaan summa kaavalla, joka on esimerkiksi solussa L2 ”=SUMMA(B2:K2)”. Viimeisen rivin solussa L11 on kaikkien talletusten arvo 10. vuoden lopussa. Summa saadaan kaavalla ”=SUMMA(B11:K11)”.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1		1. talletus	2. talletus	3. talletus	4. talletus	5. talletus	6. talletus	7. talletus	8. talletus	9. talletus	10. talletus	**Yhteensä**
2	1. vuoden lopussa	506,00 €										506,00 €
3	2. vuoden lopussa	512,07 €	506,00 €									1 018,07 €
4	3. vuoden lopussa	518,22 €	512,07 €	506,00 €								1 536,29 €
5	4. vuoden lopussa	524,44 €	518,22 €	512,07 €	506,00 €							2 060,72 €
6	5. vuoden lopussa	530,73 €	524,44 €	518,22 €	512,07 €	506,00 €						2 591,45 €
7	6. vuoden lopussa	537,10 €	530,73 €	524,44 €	518,22 €	512,07 €	506,00 €					3 128,55 €
8	7. vuoden lopussa	543,54 €	537,10 €	530,73 €	524,44 €	518,22 €	512,07 €	506,00 €				3 672,09 €
9	8. vuoden lopussa	550,07 €	543,54 €	537,10 €	530,73 €	524,44 €	518,22 €	512,07 €	506,00 €			4 222,16 €
10	9. vuoden lopussa	556,67 €	550,07 €	543,54 €	537,10 €	530,73 €	524,44 €	518,22 €	512,07 €	506,00 €		4 778,82 €
11	10. vuoden lopussa	563,35 €	556,67 €	550,07 €	543,54 €	537,10 €	530,73 €	524,44 €	518,22 €	512,07 €	506,00 €	5 342,17 €

b) $$S_n = \frac{506 \cdot (1-1{,}012^n)}{1-1{,}012} = -\frac{506 \cdot (1-1{,}012^n)}{0{,}012}.$$

Vastaus: **a)** Talletusten arvot 10. vuoden lopussa ovat 563,35 €; 556,67 €; 550,07 €; 543,54 €; 537,10 €; 530,73 €; 524,44 €; 518,22 €; 512,07 € ja 506,00 €. Talletusten arvot yhteensä kunkin vuoden lopussa ovat 506,00 €, 1018,07 €, 1536,29 €, 2060,72 €, 2591,45 €, 3128,55 €, 3672,09 €, 4222,16 €, 4778,82 € ja 5342,17 €.

b) $S_n = -\dfrac{506 \cdot (1-1{,}012^n)}{0{,}012}$

20. **a)** Aritmeettisessa lukujonossa

$a_4 = a_3 + d$
$a_5 = a_4 + d = a_3 + d + d = a_3 + 2d$
$a_6 = a_3 + 2d + d = a_3 + 3d$
$a_7 = a_3 + 3d + d = a_3 + 4d.$

Koska $a_3 = 8$, $a_7 = 20$ ja $a_7 = a_3 + 4d$, niin tiedoista saadaan yhtälö erotusluvun d ratkaisemiseksi:

$$\begin{aligned} 8 + 4d &= 20 \\ 4d &= 20 - 8 \\ 4d &= 12 \quad \| :4 \\ d &= 3. \end{aligned}$$

Koska $a_3 = a_1 + 2d$, $a_3 = 8$ ja $d = 3$, niin

$$\begin{aligned} 8 &= a_1 + 2 \cdot 3 \\ a_1 &= 8 - 6 \\ a_1 &= 2. \end{aligned}$$

Lukujonon yleinen jäsen saadaan kaavan $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ sekä tietojen $a_1 = 2$ ja $d = 3$ avulla muotoon:
$a_n = 2 + (n-1) \cdot 3 = 3n - 1.$

Kokeilemalla huomataan, että $a_{33} = 3 \cdot 33 - 1 = 99 - 1 = 98$ ja $a_{34} = 3 \cdot 34 - 1 = 102 - 1 = 101$. Pienin kolminumeroinen jäsen on tällä perusteella 101.

b) Lukujonon suurin kolminumeroinen jäsen saadaan kokeilemalla:
$a_{333} = 3 \cdot 333 - 1 = 999 - 1 = 998$
$a_{334} = 3 \cdot 334 - 1 = 1002 - 1 = 1001.$

Lukujonon 333. jäsen on suurin kolminumeroinen jäsen. Tarkasteltavat luvut ovat aritmeettisen lukujonon jäseniä
101, 104, …, 998, …

Koska jäsen 101 on lukujonon 34. jäsen ja 998 on lukujonon 333. jäsen, on yhteenlaskettavia kaiken kaikkiaan 333 – 33 = 300.
Summassa 101 + 104 + … + 998 ensimmäinen yhteenlaskettava on 101, viimeinen 998 ja yhteenlaskettavien lukumäärä 300, joten summa on

$$300 \cdot \frac{101 + 998}{2} = 164\ 850.$$

Vastaus: **a)** 101 **b)** 164 850