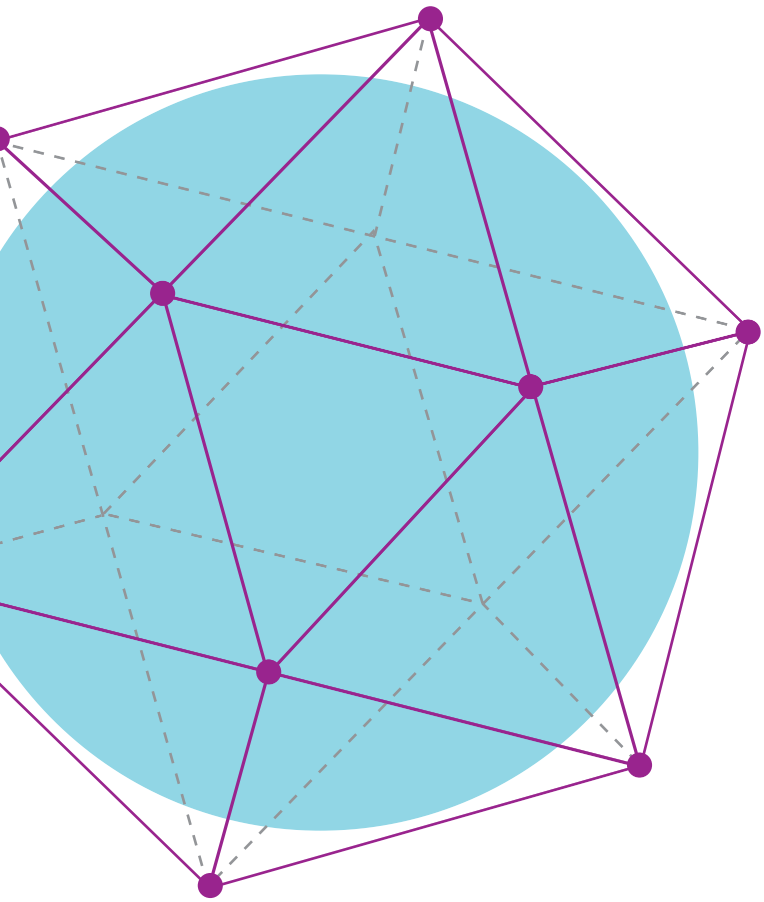
ВИДАВНИЦТВО
РАНОК

Євген Нелін
Оксана Долгова

11

ГЕОМЕТРІЯ

ПРОФІЛЬНИЙ РІВЕНЬ



Інтернет-підтримка

Євген Нелін
Оксана Долгова

ГЕОМЕТРІЯ

ПРОФІЛЬНИЙ РІВЕНЬ

ПІДРУЧНИК ДЛЯ 11 КЛАСУ
ЗАКЛАДІВ ЗАГАЛЬНОЇ СЕРЕДНЬОЇ ОСВІТИ

РЕКОМЕНДОВАНО
МІНІСТЕРСТВОМ ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВ
ВИДАВНИЦТВО «РАНОК»
2019

УДК 37.016:514(075.3)
Н49

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ Міністерства освіти і науки України від 12.04.2019 № 472)

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено

Нелін Є. П.
Н49 Геометрія (профільний рівень) : підруч. для 11 кл. закл. загал. серед. освіти / Є. П. Нелін, О. Є. Долгова. — Харків : Вид-во «Ранок», 2019. — 208 с.

ISBN 978-617-09-5233-2

УДК 37.016:514(075.3)

Інтернет-підтримка
Електронні матеріали
до підручника розміщено на сайті
interactive.ranok.com.ua

ISBN 978-617-09-5233-2

ШАНОВНІ ОДИНАДЦЯТИКЛАСНИКИ Й ОДИНАДЦЯТИКЛАСНИЦІ!

У 10 класі ви ознайомилися зі взаємним розташуванням основних фігур у просторі, навчилися застосовувати властивості паралельності та перпендикулярності прямих і площин до розв'язування задач, навчилися будувати зображення просторових фігур на площині за допомогою паралельного проектування, розв'язували задачі на обчислення відстаней і кутів у просторі. Ознайомившись із темою «Координати, вектори та геометричні перетворення у просторі», ви отримали новий метод вивчення властивостей просторових фігур.

У цьому навчальному році ви продовжуватимете вивчати стереометрію — один із розділів геометрії. Мета цього підручника — допомогти вам у цьому. Засвоюючи стереометрію, ви ознайомитеся з новими геометричними поняттями й закономірностями, багато з яких люди здавна застосовують у виробничій діяльності, використовують в архітектурі, живопису тощо.

У процесі вивчення стереометрії ви вдосконалите навички логічного мислення, розвинете просторову уяву, уміння подумки моделювати нові геометричні фігури й будувати їх зображення, а головне — оволодієте системою математичних знань, навичок і умінь, що необхідні для вивчення інших шкільних дисциплін, продовження навчання, а також стануть у пригоді в повсякденному житті, майбутній діяльності.

Ви побачите зв'язок геометрії з мистецтвом і, напевно, погодитеся з думкою геніального французького архітектора XX ст. Шарля Едуара Ле Корбюзьє, що навколишній світ є світом геометрії і своїми художніми враженнями людина зобов'язана саме геометрії. Ви зрозумієте слова видатного французького математика і філософа Блеза Паскаля: «Того, хто володіє геометрією, ця наука просуває настільки далеко, що він виявляється озброєним абсолютно новою силою».

ЯК КОРИСТУВАТИСЯ ПІДРУЧНИКОМ

Підручник має три розділи, кожний із яких складається з параграфів. Параграфи, як правило, містять такі структурні блоки.

Довідкові таблиці наведені на початку більшості параграфів і вміщують основні означення, ознаки та властивості розглядуваних понять теми, систематизацію теоретичного матеріалу та *способів діяльності* з цим матеріалом у формі спеціальних *орієнтирів із розв'язування завдань.* Радимо опрацювати цей матеріал у першу чергу, а вже після цього переходити до наступного блоку.

Пояснення й обґрунтування містять докладне викладення теоретичного матеріалу, наведеного в таблицях. Таке подання навчального матеріалу (спочатку структурованого у вигляді таблиць, а потім описаного детально) дозволить кожному з вас вибирати свій власний рівень ознайомлення з обґрунтуванням, будуючи власну освітню траєкторію.

Приклади розв'язування задач ознайомлять вас із основними ідеями щодо розв'язування задач, допоможуть усвідомити й засвоїти способи дій з основними геометричними поняттями, набути необхідних предметних компетентностей. Для того щоб виділити орієнтовні основи діяльності з розв'язування завдань (загальні орієнтири), у прикладах власне розв'язання супроводжується коментарями, що допоможуть вам скласти план розв'язування аналогічних завдань.

Розв'язання	Коментар
Як можна записати розв'язання задачі.	Як можна міркувати під час розв'язування такої задачі.

За такого подання коментар не заважає сприйняттю основної ідеї розв'язання завдань певного типу й дає змогу за потреби отримати детальну консультацію щодо розв'язування, яка міститься в коментарі.

З метою закріплення, контролю й самоконтролю засвоєння навчального матеріалу наприкінці кожного параграфа запропоновано систему запитань і вправ.

Запитання для контролю допоможуть вам пригадати й осмислити вивчене, звернути увагу на головне в параграфі, оцінити рівень засвоєння теоретичного матеріалу параграфа.

Вправи подано за трьома рівнями складності:

- *задачі середнього рівня* мають позначку «○»;
- *задачі достатнього рівня* (дещо складніші) подано без позначки;
- *задачі високого рівня* мають позначку «*».

До більшості вправ наприкінці підручника наведено *відповіді*.

У рубриці «**Виявіть свою компетентність**» наведено задачі практичного змісту та завдання, що для отримання розв'язку вимагають аналізу, узагальнення, систематизації набутих знань.

Зверніть також увагу на запропоновані в тексті параграфів супроводжувальні запитання, що спонукають до більш глибокого самостійного осмислення навчального матеріалу, та завдання, виконання яких, на нашу думку, сприятиме формуванню певних предметних та ключових компетентностей. Ці запитання та завдання мають відповідні позначення.

Матеріали рубрик «**Відомості з історії**», «**Видатні математики**» допоможуть вам дослідити розвиток геометричної науки та дізнатися про досягнення видатних учених України.

Для того щоб підручник допоміг вам якнайповніше, радимо ознайомитися із системою умовних позначень:

● початок обґрунтування твердження;

○ закінчення обґрунтування твердження;

▶ початок розв'язання задачі;

◁ закінчення розв'язання задачі;

? запитання до учнів;

! цікава інформація або така, яку варто обміркувати;

i матеріали, пов'язані з ІКТ;

завдання, що вимагають самостійного опрацювання, сприяють активізації розумової діяльності;

діяльність, розрахована на роботу в команді.

Розділ 1

МНОГОГРАННИКИ

У ЦЬОМУ РОЗДІЛІ ВИ:

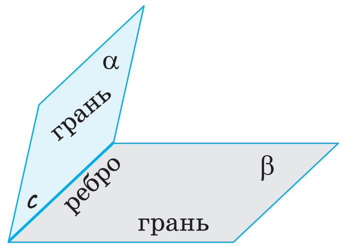
- ознайомитеся з поняттям многогранного кута і його властивостями;
- детальніше ознайомитесь з поняттям многогранника, з призмою, зокрема паралелепіпедом, пірамідою, правильними многогранниками; розглянете їхні основні властивості;
- навчитеся розв'язувати задачі, пов'язані з многогранниками;
- зможете уточнити поняття геометричного тіла і його поверхні

§ 1 ДВОГРАННІ Й МНОГОГРАННІ КУТИ

Таблиця 1

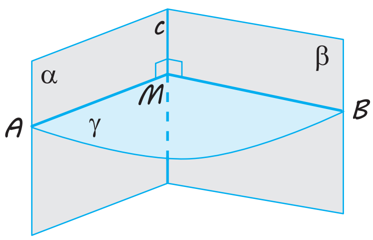
Двогранні й тригранні кути

Двогранний кут



Двогранний кут — фігура, утворена двома півплощинами α і β зі спільною прямою *c*, що їх обмежує.
Півплощини α і β — грані двогранного кута, а пряма *c* — ребро двогранного кута.

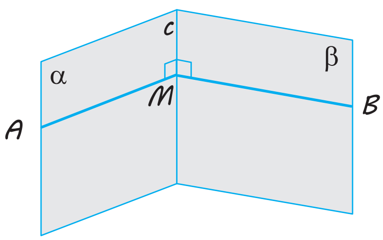
Лінійний кут двогранного кута



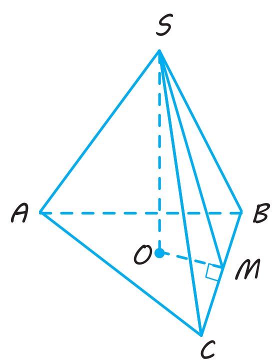
$\angle AMB$ — лінійний кут
($\gamma \perp c$, γ перетинає α по променю MA,
γ перетинає β по променю MB).

Якщо φ — лінійний кут, то $0° \leqslant \varphi \leqslant 180°$

Практичні способи побудови лінійного кута



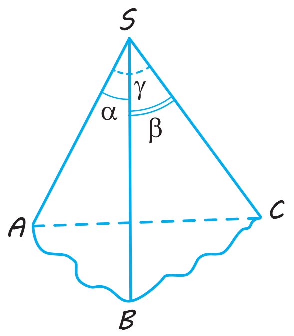
$M \in c$,
$MA \perp c$ (у грані α)
$MB \perp c$ (у грані β).
$\angle AMB$ — лінійний.



$SO \perp$ пл. ABC, $OM \perp BC$.
Тоді $SM \perp BC$ (за теоремою про три перпендикуляри), $\angle SMO$ — лінійний кут двогранного кута при ребрі BC.

Закінчення табл. 1

Тригранний кут



Тригранним кутом ***SABC*** **називається фігура, що складається з трьох плоских кутів** ***ASB*, *BSC*** **і** ***ASC*** (які не лежать в одній площині).

Властивості

1. $\boxed{\gamma < \alpha + \beta}$ Величина кожного плоского кута тригранного кута менша від суми величин двох інших його плоских кутів.
2. $\boxed{\alpha + \beta + \gamma < 360°}$ Сума величин усіх плоских кутів тригранного кута менша від 360°.

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1 Двогранний кут

Із курсу геометрії 10 класу вам відомо, що *двогранним кутом* називається фігура, утворена двома півплощинами та спільною прямою, що їх обмежує (див. рисунок у табл. 1). Півплощини називаються *гранями двогранного кута*, а пряма, що їх обмежує, — *ребром двогранного кута*. Іноді двогранним кутом називають також і частину простору, обмежену гранями двогранного кута. Площина, перпендикулярна до ребра двогранного кута, перетинає його грані по двох променях (рис. 1.1). Кут, утворений цими променями, називається *лінійним кутом двогранного кута*. За міру двогранного кута приймають міру відповідного йому лінійного кута. Двогранний кут називається *прямим*, якщо його лінійний кут є прямим.

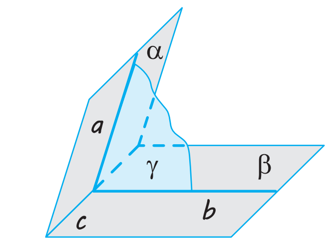


Рис. 1.1

Оскільки різні площини, перпендикулярні до ребра лінійного кута, паралельні (рис. 1.2), то всі лінійні кути двогранного кута можна сумістити паралельним перенесенням. Отже, вони дорівнюють один одному, тому міра двогранного кута не залежить від вибору лінійного кута.

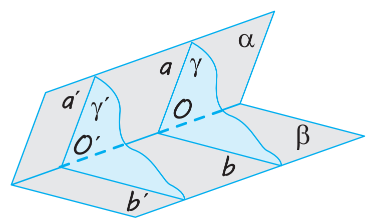


Рис. 1.2

Якщо позначити величину лінійного кута двогранного кута літерою φ, то з означення випливає, що $0° \leqslant \varphi \leqslant 180°$.

Кутом між двома сусідніми гранями многогранника називатимемо двогранний кут між відповідними півплощинами.

Наприклад, у прямокутному паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 1.3) кут між гранями $ABCD$ і BB_1C_1C прямий, оскільки відповідний лінійний кут ABB_1 дорівнює 90° (площина ABB_1A_1 перпендикулярна до ребра BC і перетинає відповідні півплощини по променях BA і BB_1, отже, кут ABB_1 — лінійний кут двогранного кута з ребром BC).

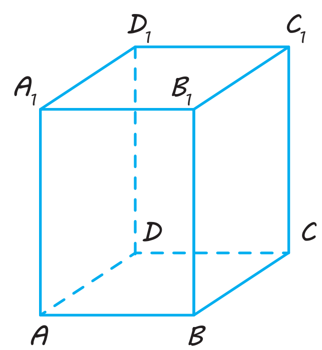


Рис. 1.3

Як уже було зазначено в підручнику для 10 класу, для розв'язування задач із застосуванням лінійного кута не завжди зручно користуватися його означенням. Тому корисно знати деякі практичні способи побудови лінійних кутів. Нагадаємо ці способи та їх обґрунтування.

Спосіб 1. Якщо з точки M, узятої на ребрі двогранного кута, провести в його гранях перпендикуляри MA і MB до ребра, то кут між перпендикулярами є лінійним кутом двогранного кута (рис. 1.4).

● За побудовою $MA \perp c$ і $MB \perp c$, тоді за ознакою перпендикулярності прямої й площини площина MAB перпендикулярна до ребра c і перетинає грані двогранного кута по променях MA і MB. Отже, за означенням кут AMB — лінійний кут двогранного кута. ○

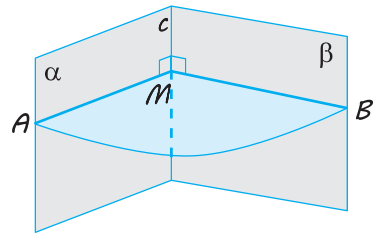


Рис. 1.4

Наприклад, щоб у прямокутному паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 1.3) отримати лінійний кут двогранного кута з ребром BC, достатньо помітити, що в грані $ABCD$ ребро $AB \perp BC$, а в грані BB_1C_1C ребро $BB_1 \perp BC$, отже, $\angle ABB_1$ — лінійний кут двогранного кута між площинами $ABCD$ і BB_1C_1C (і $\angle ABB_1 = 90°$ як кут прямокутника ABB_1A_1).

Спосіб 2. Якщо з точки S, що лежить на одній із граней двогранного кута, проведено перпендикуляр SO до його другої грані, то для побудови відповідного лінійного кута достатньо з основи цього перпендикуляра (точки O) провести перпендикуляр до ребра двогранного кута і сполучити відрізком одержану на ребрі точку з точкою S.

● Нехай задано двогранний кут із ребром AB і гранями α і β (рис. 1.5). Із точки $S \in \beta$ проведено перпендикуляр $(SO \perp \alpha)$. Із точки O проведемо в грані α перпендикуляр $OM \perp AB$ і сполучимо точки S і M відрізком. За теоремою про три перпендикуляри $SM \perp AB$. Тоді з точки M на ребрі двогранного кута проведено в його гранях два перпендикуляри до ребра. Отже, як обґрунтовано в способі 1, кут SMO є лінійним кутом заданого двогранного кута. ○

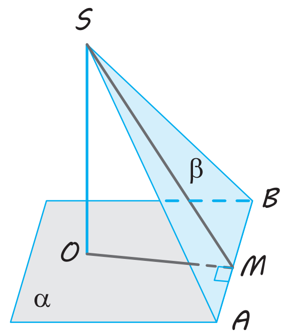


Рис. 1.5

Зауваження. Під час запису розв'язань задач, пов'язаних із двогранними кутами, результат, обґрунтований у практичному способі 1, можна використовувати як відомий опорний факт. Але обґрунтування, наведені в способі 2, доводиться повторювати в розв'язанні кожної задачі, у якому використовують цей спосіб побудови лінійного кута. (Можливий варіант запису такого обґрунтування наведено в табл. 1.)

2 Тригранний і многогранний кути

Розглянемо три промені SA, SB, SC, що виходять з однієї точки S і не лежать в одній площині.

Означення. Тригранним кутом $SABC$ називається фігура, утворена трьома плоскими кутами ASB, BSC і ASC (рис. 1.6).

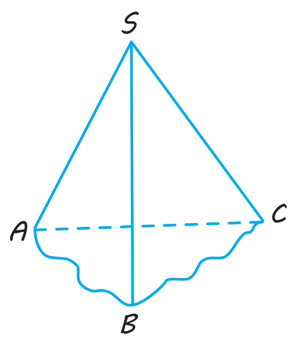


Рис. 1.6

Ці кути називаються *гранями тригранного кута*, а їхні сторони — *ребрами*. Спільна вершина S плоских кутів називається *вершиною тригранного кута*. Двогранні кути, утворені гранями тригранного кута, називаються *двогранними кутами тригранного кута*.

Іноді *тригранним кутом* називають також і частину простору, обмежену гранями тригранного кута. Тоді тригранний кут можна задати в такий спосіб.

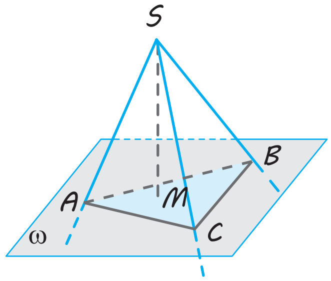


Рис. 1.7

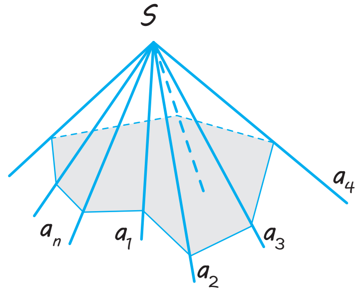


Рис. 1.8

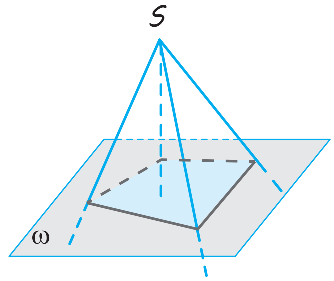


Рис. 1.9

Нехай задано трикутник ABC у площині ω і точка S поза цією площиною (рис. 1.7). Фігура в просторі, утворена з усіх точок, що належать променям SM, де точка M «пробігає» плоский трикутник ABC, називається *тригранним* кутом.

Аналогічно формулюють означення многогранного кута (рис. 1.8). Залежно від числа граней многогранні кути називаються *тригранними* (рис. 1.6), *чотиригранними* (рис. 1.9) тощо.

Для плоских кутів тригранного кута виконується нерівність, аналогічна нерівності трикутника.

Теорема 1.1. Величина кожного плоского кута тригранного кута менша від суми величин двох інших його плоских кутів.

Величини плоских кутів тригранного кута $SABC$ позначимо буквами α, β і γ (рис. 1.10). Нехай $\angle ASC = \gamma$ — найбільший із цих кутів. Тоді достатньо довести, що $\gamma < \alpha + \beta$.

Відкладемо в грані ASC кут ASD, який дорівнює куту $ASB = \alpha$, і виберемо точки B і D такі, що $SB = SD$. Тоді $\triangle ASB = \triangle ASD$ (за двома сторонами і кутом між ними). Отже, $AB = AD$. Подовжимо відрізок AD до перетину з променем SC у точці C і сполучимо точки B і C. Запишемо нерівність трикутника для трикутника ABC: $AC < AB + BC$. Звідси $AC - AB < BC$. Ураховуючи, що $AB = AD$, одержуємо: $DC < BC$.

У трикутниках SDC і SBC одна сторона спільна (SC), $SD = SB$ і $DC < BC$. У цьому випадку проти більшої сторони лежить більший кут і тому $\angle DSC < \angle BSC$, тобто $\gamma - \alpha < \beta$, отже, $\gamma < \alpha + \beta$. ○

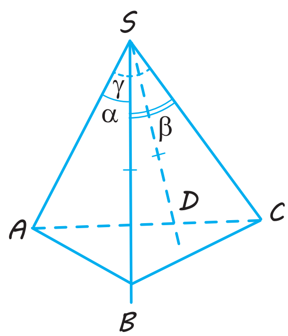


Рис. 1.10

Многогранні кути ви можете спостерігати, аналізуючи форми різноманітних споруд.

Теорема 1.2. Сума величин усіх плоских кутів тригранного кута менша від 360°.

● Величини плоских кутів тригранного кута $SABC$ позначимо буквами α, β і γ (рис. 1.11). Проведемо промінь SA_1, що доповнює промінь SA до прямої, і розглянемо тригранний кут SA_1BC. Його плоскі кути дорівнюють α, $180°-\beta$, $180°-\gamma$. За теоремою 1.1 маємо: $\alpha<(180°-\beta)+(180°-\gamma)$. Тоді $\alpha+\beta+\gamma<360°$. ○

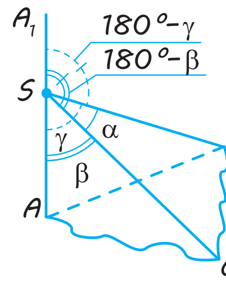


Рис. 1.11

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 1

Два плоскі кути тригранного кута дорівнюють 120° і 130°. У яких межах лежить величина третього плоского кута?

Розв'язання

▶ Позначимо величину третього плоского кута через x. Запишемо властивості, які задовольняють плоскі кути тригранного кута:

$$\begin{cases} x<120°+130°, \\ 120°<130°+x, \\ 130°<120°+x, \\ x+120°+130°<360°. \end{cases}$$

Тоді $\begin{cases} x<250°, \\ x>-10°, \\ x>10°, \\ x<110°. \end{cases}$

Отже, $10°<x<110°$. ◁

Коментар

Для оцінювання меж, у яких може перебувати величина третього плоского кута тригранного кута, використовуємо відповідні властивості:

1) *величина кожного плоского кута тригранного кута менша від суми величин двох інших його плоских кутів*;
2) *сума величин усіх плоских кутів тригранного кута менша від 360°*.

Зручно величину третього плоского кута позначити через x і записати систему обмежень, користуючись властивостями 1 і 2.

Задача 2

Плоскі кути тригранного кута дорівнюють 45°, 45° і 60°. На спільному ребрі граней із рівними плоскими кутами від вершини A відкладено відрізок AS завдовжки 10. Знайдіть відстань від точки S до площини плоского кута, що дорівнює 60°.

Розв'язання

▶ Нехай у тригранного кута $ASKM$ $\angle SAK=\angle SAM=45°, \angle KAM=60°$ (рис. 1.12). Проведемо перпендикуляр $SO\perp$ пл. AKM, із точки O проведемо перпендикуляри до сторін плоского кута:

$$OK\perp AK \text{ і } OM\perp AM.$$

За теоремою про три перпендикуляри

$$SK\perp AK \text{ і } SM\perp AM.$$

Одержуємо: $\triangle ASM=\triangle ASK$, тоді $AM=AK$ і $\triangle AMO=\triangle AKO$, отже, $\angle OAM=\angle OAK$, тобто відрізок AO є бісектрисою кута KAM і $\angle OAM=30°$.

Коментар

Як відомо, відстань від точки до площини — це довжина перпендикуляра, проведеного з цієї точки до площини. Тому спочатку треба провести перпендикуляр SO з точки S до протилежної грані тригранного кута.

Щоб знайти довжину відрізка SO, потрібно визначити розташування точки O відносно сторін відповідного плоского кута.

Для складання плану обчислення довжини SO достатньо вибудувати ланцюжок відповідних прямокутних трикутників, міркуючи, наприклад, у такий спосіб.

Із прямокутного трикутника SAM маємо: $AM = SA \cdot \cos 45° = 5\sqrt{2}$.

Із прямокутного трикутника AOM одержуємо:

$$AO = \frac{AM}{\cos 30°} = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Із прямокутного трикутника SAO маємо:

$$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} =$$
$$= \sqrt{10^2 - \left(\frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{100 - \frac{200}{3}} = \frac{10}{\sqrt{3}}.$$

Відповідь. $\frac{10}{\sqrt{3}}$. ◁

Ураховуючи, що відрізок SA задано, відрізок SO можна знайти з прямокутного трикутника SAO, якщо знатимемо відрізок AO.

Цей відрізок AO можна знайти з прямокутного трикутника AOM за відрізком AM (і кутом OAM), а відрізок AM можна знайти з прямокутного трикутника SAM (за відомими гіпотенузою і гострим кутом).

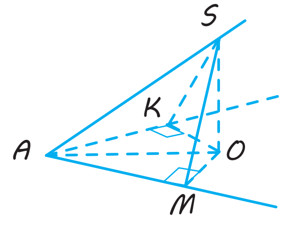


Рис. 1.12

Зауваження. Узагальнюючи міркування, наведені в розв'язанні задачі 2, одержуємо корисний висновок: ***якщо в тригранного кута два плоскі кути дорівнюють один одному, то їх спільне ребро проектується (ортогонально) на пряму, що містить бісектрису третього плоского кута.***

Задача 3* (теорема косинусів)

Величини плоских кутів тригранного кута $SABC$ дорівнюють α, β і γ (рис. 1.13). Знайдіть величину φ двогранного кута з ребром SA.

Розв'язання

▶ Відкладемо від вершини S на ребрі SA відрізок $SA = 1$. У гранях, що проходять через ребро SA, проведемо $AB \perp SA$ і $AC \perp SA$ (точки B і C належать ребрам тригранного кута — рис. 1.13). Тоді $\angle BAC$ — лінійний кут двогранного кута з ребром SA, тобто $\angle BAC = \varphi$. За умовою $\angle BSC = \alpha$, $\angle ASC = \beta$ і $\angle ASB = \gamma$.

Застосуємо теорему косинусів до трикутників ABC і BSC.

Із трикутника ABC одержуємо:

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos\varphi.$$

Із трикутника BSC одержуємо:

$$BC^2 = SC^2 + SB^2 - 2SC \cdot SB \cdot \cos\alpha.$$

Прирівняємо праві частини отриманих рівностей:

$$AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos\varphi =$$
$$= SC^2 + SB^2 - 2SC \cdot SB \cdot \cos\alpha.$$

Коментар

Оскільки в умові цієї задачі на обчислення не задано жодного з відрізків, то для її розв'язування зручно ввести невідомий відрізок.

Ураховуючи, що під час розв'язування задачі доводиться виконувати дещо громіздкі обчислення, доцільно цей невідомий відрізок прийняти за одиницю довжини.

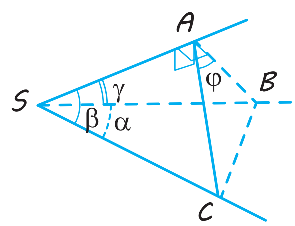


Рис. 1.13

Розв'язання

Тоді

$$\cos\alpha = \frac{1}{2SC\cdot SB}\left(SC^2 - AC^2 + SB^2 - AB^2 + 2AC\cdot AB\cdot\cos\varphi\right).$$

Трикутники ASC і ASB прямокутні, тому

$$SC^2 - AC^2 = SA^2 \text{ і } SB^2 - AB^2 = SA^2.$$

Одержуємо:

$$\cos\alpha = \frac{1}{2SC\cdot SB}\left(2SA^2 + 2AC\cdot AB\cdot\cos\varphi\right) = \frac{SA}{SC}\cdot\frac{SA}{SB} + \frac{AC}{SC}\cdot\frac{AB}{SB}\cdot\cos\varphi.$$

Ураховуючи, що $\frac{SA}{SC} = \cos\beta$, $\frac{SA}{SB} = \cos\gamma$, $\frac{AC}{SC} = \sin\beta$, $\frac{AB}{SB} = \sin\gamma$,

маємо: $\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos\varphi$.

Звідси $\cos\varphi = \frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}$. ◁

Зауваження. Отриманий результат часто називають *теоремою косинусів для тригранного кута* й записують у вигляді, зручному для запам'ятовування:

$$\boxed{\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos\varphi},$$

де α — плоский кут, протилежний двогранному куту φ.

Остання формула обґрунтована для випадку, коли плоскі кути α, β і γ гострі. Можна показати, що формула залишається правильною і для випадку, коли ці кути будуть прямими або тупими.

Переконайтеся в цьому самостійно.

Також зазначимо, що коли $\varphi = 90°$, то формула набуває вигляду $\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma$. Інакше кажучи, *якщо один із двогранних кутів тригранного кута прямий, то косинус протилежного плоского кута дорівнює добутку косинусів двох інших його плоских кутів*.

Запитання

1. Поясніть зміст понять:
   1) двогранний кут; 2) тригранний кут; 3) многогранний кут.
   Назвіть елементи цих кутів.
2. Поясніть, як визначають лінійний кут двогранного кута. Доведіть, що міра двогранного кута не залежить від вибору лінійного кута.
3. Поясніть, користуючись моделлю двогранного кута, як можна практично побудувати лінійний кут двогранного кута.
4. Сформулюйте властивості плоских кутів тригранного кута.
5.* Доведіть властивості плоских кутів тригранного кута.

Вправи

1.1.° Чи існує тригранний кут із плоскими кутами:
1) $100°$, $130°$, $20°$; 2) $70°$, $50°$, $20°$;
3) $100°$, $140°$, $120°$; 4) $70°$, $75°$, $150°$?

1.2.° Два плоскі кути тригранного кута дорівнюють $60°$ і $80°$. У яких межах лежить величина третього плоского кута?

1.3. Доведіть, що величина будь-якого плоского кута тригранного кута більша за різницю величин двох інших його плоских кутів.

1.4.° Наведіть приклади відомих вам многогранників, грані яких, перетинаючись у вершині, утворюють:
1) тригранний кут; 2) чотиригранний кут; 3) п'ятигранний кут.

1.5.° Усі плоскі кути тригранного кута прямі. Знайдіть величини двогранних кутів цього тригранного кута.

1.6. Доведіть, що коли два плоскі кути тригранного кута прямі, то і протилежні їм двогранні кути прямі.

1.7.* Доведіть, що коли два плоскі кути тригранного кута дорівнюють один одному, то і протилежні їм двогранні кути дорівнюють один одному. Сформулюйте і доведіть обернене твердження.

1.8. Плоскі кути тригранного кута дорівнюють $45°$, $45°$ і $60°$. Знайдіть величину кута між площинами плоских кутів, що дорівнюють $45°$.

1.9. Два плоскі кути тригранного кута дорівнюють по $45°$; двогранний кут між ними прямий. Знайдіть третій плоский кут.

1.10. Два плоскі кути тригранного кута дорівнюють по $60°$, а третій — $90°$. Знайдіть кут нахилу ребра, протилежного прямому плоскому куту, до площини цього кута.

1.11. Плоскі кути тригранного кута дорівнюють $60°$, $60°$ і $90°$. На його ребрах від вершини O відкладено рівні відрізки OA, OB, OC. Знайдіть двогранний кут між площиною, що містить плоский кут $90°$, і площиною ABC.

1.12. Кожний плоский кут тригранного кута дорівнює $60°$. На одному з його ребер позначено точку на відстані 4 см від вершини кута. Знайдіть відстань від цієї точки до протилежної грані.

1.13.* Знайдіть геометричне місце внутрішніх точок тригранного кута, рівновіддалених від його граней.

1.14.* Знайдіть геометричне місце внутрішніх точок тригранного кута, рівновіддалених від його ребер.

1.15.* Доведіть, що три площини, які проходять через бісектриси граней тригранного кута й перпендикулярні до цих граней, перетинаються по одній прямій.

1.16.* Доведіть, що три площини, які проходять через ребра тригранного кута й через бісектриси його протилежних граней, перетинаються по одній прямій.

1.17.* Доведіть, що будь-який тригранний кут можна перетнути площиною так, що в перерізі утвориться правильний трикутник.

1.18.* Доведіть, що бісектриси двох плоских кутів тригранного кута й бісектриса кута, суміжного з третім плоским кутом, лежать в одній площині.

1.19.* Використовуючи теорему косинусів для тригранного кута, доведіть *теорему синусів для тригранного кута*: **для заданого тригранного кута відношення синуса двогранного кута до синуса протилежного йому плоского кута є величиною сталою.**

Виявіть свою компетентність

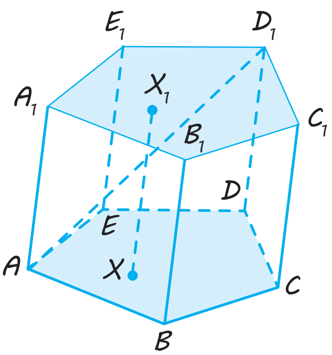
1.20. Назвіть, моделями яких фрагментів оточуючих об'єктів є: 1) двогранний кут; 2) тригранний кут; 3) чотиригранний кут; 4) п'ятигранний кут. Обґрунтуйте свою відповідь.

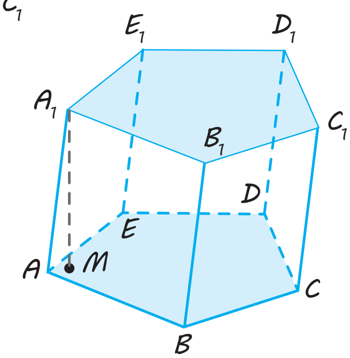
§ 2 МНОГОГРАННИК І ЙОГО ЕЛЕМЕНТИ. ПРИЗМА

Таблиця 2

Призма

Означення й основні поняття





Призмою називається многогранник, утворений двома плоскими многокутниками, що лежать у різних площинах і суміщаються паралельним перенесенням, і всіма відрізками, які сполучають відповідні точки цих многокутників.

$ABCDE$ і $A_1B_1C_1D_1E_1$ — *основи призми*.

AA_1; BB_1; ... — *бічні ребра*.

ABB_1A_1; BCC_1B_1; ... — *бічні грані*.

AD_1 — *діагональ призми* (відрізок, що сполучає дві вершини призми, які не належать одній грані).

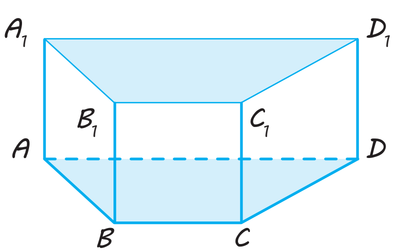
Висота призми — відстань між площинами її основ і сам перпендикуляр.

$A_1M \perp$ пл. $ABCDE$; $A_1M = H$ — висота.

Властивості

1. Основи призми рівні.	$ABCDE = A_1B_1C_1D_1E_1$
2. Основи призми лежать у паралельних площинах.	пл. $ABCDE \parallel$ пл. $A_1B_1C_1D_1E_1$
3. Бічні ребра призми паралельні й рівні.	$AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$ ...; $AA_1 = BB_1 = CC_1 = \ldots$
4. Бічні грані призми є паралелограмами.	ABB_1A_1 — паралелограм, BCC_1B_1 — паралелограм, ...
5. Площа бічної поверхні похилої призми дорівнює добутку периметра перпендикулярного перерізу призми на довжину бічного ребра.	$S_{\text{бічн}} = P_{\perp\text{перер}} \cdot AA_1$ $\left(S_{\text{бічн}} = S_{ABB_1A_1} + S_{BCC_1B_1} + \ldots + S_{AEE_1A_1}\right)$ $S_{\text{повн}} = S_{\text{бічн}} + 2S_{\text{осн}}$

Пряма призма



Призма називається прямою, якщо її бічні ребра перпендикулярні до основ.

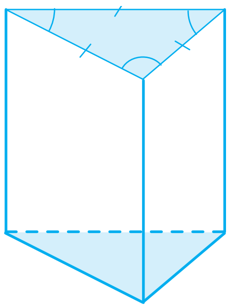
$AA_1 \perp$ пл. $ABCD$, $BB_1 \perp$ пл. $ABCD$, ...

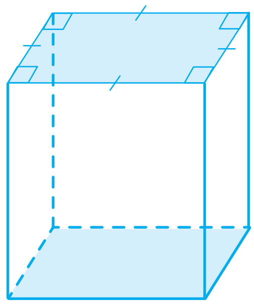
Закінчення табл. 2

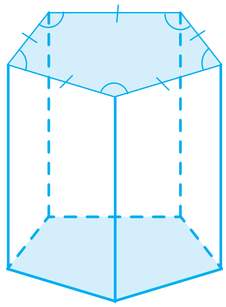
Властивості	
1. Висота прямої призми дорівнює бічному ребру.	$H = AA_1 = BB_1 = \ \ldots$
2. Бічні грані прямої призми є прямокутниками.	ABB_1A_1 — прямокутник, BCC_1B_1 — прямокутник, …
3. Площа бічної поверхні прямої призми дорівнює добутку периметра основи на висоту призми, тобто на довжину бічного ребра.	$S_{\text{бічн}} = P_{\text{осн}} \cdot AA_1$ $S_{\text{повн}} = S_{\text{бічн}} + 2S_{\text{осн}}$

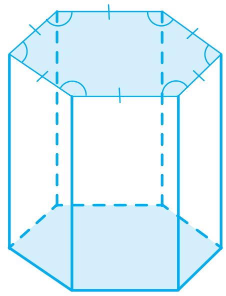
Правильна призма

Пряма призма називається правильною, якщо її основи є правильними многокутниками.


трикутна


чотирикутна


п'ятикутна


шестикутна

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1 Многогранник і його елементи. Опуклі многогранники

Як було зазначено в підручнику для 10 класу, деякі фігури, розглянуті в курсі стереометрії, називаються *тілами**. Наочно геометричне тіло можна уявити собі як частину простору, зайняту фізичним тілом і обмежену поверхнею. Наприклад, поверхня кулі — *сфера* — складається з усіх точок простору, віддалених від однієї точки — *центра* — на відстань, яка дорівнює радіусу. Ця поверхня обмежує *кулю*, що складається з усіх точок простору, які віддалені від однієї точки — *центра* — на відстань, не більшу за радіус.

Відомі вам куб, паралелепіпед, призма й піраміда є многогранниками. *Многогранник* — це таке тіло, поверхня якого складається зі скінченного числа плоских многокутників (рис. 2.1, 2.2, 2.3).

Многогранник називається *опуклим*, якщо він розташований по один бік від площини кожного плоского многокутника на його поверхні. Наприклад, куб — опуклий многогранник. Неопуклий многогранник зображено на рис. 2.2.

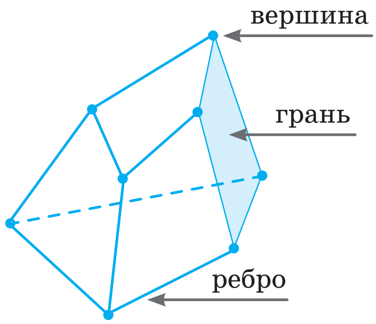


Рис. 2.1

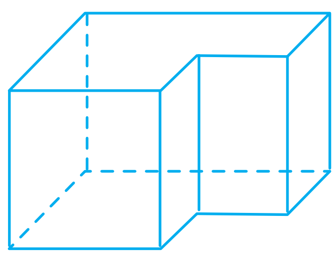


Рис. 2.2

* Докладніше поняття геометричного тіла і його поверхні розглянуто в § 9.

Кожний плоский многокутник, із яких складається поверхня многогранника, називається *гранню многогранника*. Грані опуклого многогранника є плоскими опуклими многокутниками. Сторони граней називаються *ребрами многогранника*, а вершини — *вершинами многогранника*.

Пояснимо сказане на прикладі куба (рис. 2.3). Куб — це опуклий многогранник. Його поверхня складається з шести квадратів: $ABCD$, ABB_1A_1, ... , які є гранями куба. Ребра куба — сторони цих квадратів: AB, BC, BB_1, ... Вершинами куба є вершини квадратів: A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1. У куба шість граней, дванадцять ребер і вісім вершин.

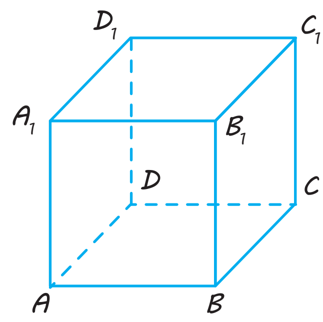


Рис. 2.3

Якщо поверхню куба (або іншого многогранника) розрізати по декількох його ребрах і розкласти на площині, то одержимо розгортку цього куба (многогранника). Інакше кажучи, *розгорткою многогранника* називається об'єднання скінченного числа многокутників, що відповідно дорівнюють граням цього многогранника. При цьому вказують, які сторони й вершини многокутників зображують ті самі ребра й вершини заданого многогранника й тому повинні склеюватися одне з одним. (Склеювання двох відрізків — рівних сторін многокутників розгортки означає встановлення між їхніми точками такої відповідності, за якої зберігається відстань між двома довільними точками, а відповідні точки відрізків ототожнюють, тобто вважають їх однією точкою розгортки, отже, однією точкою заданого многогранника.)

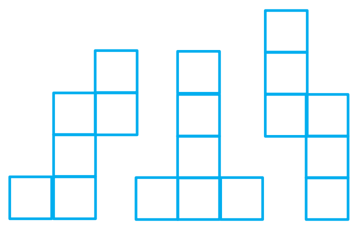


Рис. 2.4

Поверхню одного многогранника можна розгорнути порізному. Наприклад, на рис. 2.4 показано деякі розгортки куба.

Нагадаємо, що *площа поверхні многогранника* — це сума площ усіх його граней. Вона дорівнює площі розгортки заданого многогранника.

Простим многогранникам — призмам і пірамідам, які будуть основними об'єктами нашого вивчення в цьому розділі, — ми дамо означення, що, по суті, не використовують поняття тіла. Розглядатимемо геометричні фігури, визначаючи всі точки простору, що їм належать. Поняття геометричного тіла і його поверхні в загальному випадку розглянемо пізніше.

2 Теорема Ейлера

Цікаву теорему про співвідношення між числом граней, ребер і вершин многогранника довів у 1752 р. Леонард Ейлер.

Теорема 2.1 (теорема Ейлера). Для будь-якого опуклого многогранника має місце рівність

$$\mathbf{В + Г - Р = 2}, \qquad (1)$$

де Г — число граней, Р — число ребер, В — число вершин заданого многогранника.

● Нехай задано довільний многогранник $ABCD$... (рис. 2.5), який має Г граней, Р ребер і В вершин.

Уявимо, що поверхня цього многогранника зроблена з еластичного матеріалу. Вилучимо (виріжемо) одну з його граней, наприклад, $ABCD$, а поверхню, що залишилася, розтягнемо на площині. Одержимо сітку (рис. 2.6), що містить $Г_1 = Г - 1$ многокутник (далі називатимемо ці многокутники гранями), В вершин і Р ребер.

Доведемо, що для цієї сітки виконується співвідношення

$$В + Г_1 - Р = 1. \qquad (2)$$

(Це й означатиме, що для вихідного многогранника буде справедливим необхідне співвідношення (1).)

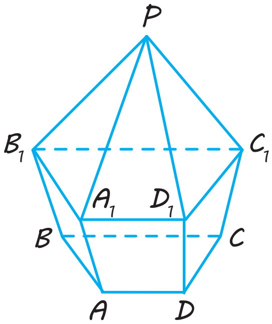


Рис. 2.5

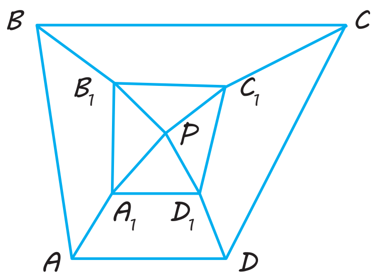


Рис. 2.6

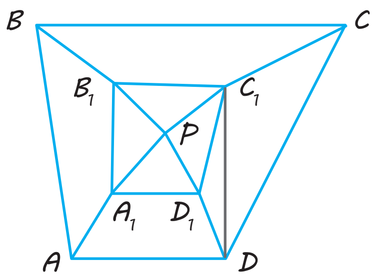


Рис. 2.7

Покажемо, що співвідношення (2) не зміниться, якщо в якому-небудь многокутнику сітки провести діагональ. Справді, після проведення такої діагоналі в сітці (рис. 2.7) буде В вершин, $\text{Р}+1$ ребер і Γ_1+1 грань, отже, одержуємо: $\text{В}+(\Gamma_1+1)-(\text{Р}+1)=\text{В}+\Gamma_1-\text{Р}$. Використовуючи цю властивість, проведемо в сітці діагоналі, що розбивають многокутники, які містяться в ній, на трикутники (рис. 2.8), і для отриманої сітки покажемо, що співвідношення (2) виконується. Для цього послідовно вилучатимемо зовнішні ребра сітки, зменшуючи в ній кількість трикутників. При цьому можливі два випадки: 1) для вилучення, наприклад, трикутника BCC_1 на рис. 2.8 потрібно прибрати одне зовнішнє ребро BC (див. результат на рис. 2.9); 2) щоб вилучити потім трикутник DCC_1 (рис. 2.9), необхідно прибрати вже два зовнішніх ребра — DC і CC_1.

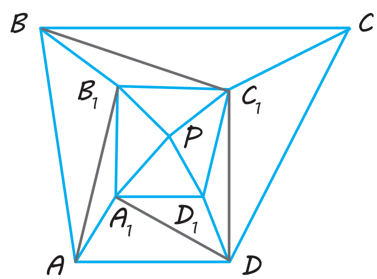


Рис. 2.8

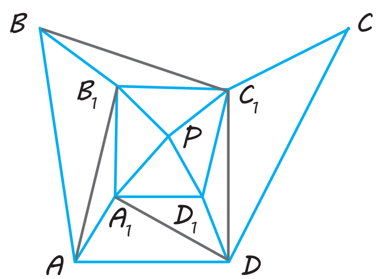


Рис. 2.9

В обох випадках співвідношення (2) не змінюється. Наприклад, у першому випадку після вилучення трикутника число вершин не змінилося, хоча й прибрали одне ребро й одну грань. У результаті різниця $\Gamma_1-\text{Р}$ не змінилася, отже, не змінився і вираз $\text{В}+\Gamma_1-\text{Р}$. У другому випадку внаслідок вилучення трикутника число вершин зменшилося на одну (залишилася $\text{В}-1$ вершина), число граней зменшилося також на одну (залишилася Γ_1-1 грань), а число ребер зменшилося на 2 (залишилося $\text{Р}-2$ ребра). Але тоді $(\text{В}-1)+(\Gamma_1-1)-(\text{Р}-2)=\text{В}+\Gamma_1-\text{Р}$.

Отже, після вилучення одного трикутника вираз $\text{В}+\Gamma_1-\text{Р}$ не змінюється.

Продовжуючи процес вилучення трикутників, зрештою одержимо сітку, що складається з одного трикутника. Для такої сітки $\text{В}=3$, $\text{Р}=3$, $\Gamma_1=1$, отже, $\text{В}+\Gamma_1-\text{Р}=1$. Отже, співвідношення (2) виконується і для вихідної сітки, звідки остаточно одержуємо, що для заданого многогранника справджується співвідношення (1). ○

Теорему Ейлера історики математики називають першою теоремою *топології*. Це розділ геометрії, який вивчає властивості фігур, що не змінюються при неперервних деформаціях, що припускають будь-які розтягнення і стискання, але без розривів або додаткових склеювань. Такі властивості називаються *топологічними*. Співвідношення Ейлера $\text{В}+\Gamma-\text{Р}=2$ для опуклих многогранників є саме такою топологічною властивістю. Многогранник можна як завгодно деформувати, при цьому ребра і грані можуть викривлятися, однак їх число, отже, і співвідношення Ейлера, не змінюється.

3 Призма

Означення. **Призмою називається многогранник, утворений двома плоскими многокутниками, що лежать у різних площинах і суміщаються паралельним перенесенням, та всіма відрізками, що сполучають відповідні точки цих многокутників (рис. 2.10).**

Многокутники називаються *основами призми*, а відрізки, що сполучають відповідні вершини, — *бічними ребрами призми*. Призма називається *n-кутною*, якщо її основами є n-кутники.

Надалі розглядатимемо тільки призми, основами яких є опуклі многокутники. Такі призми є опуклими многогранниками. На рис. 2.10 зображено п'ятикутну призму $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$.

Її основами є п'ятикутники $ABCDE$ і $A_1B_1C_1D_1E_1$, а відрізок XX_1 сполучає відповідні точки основ.

Бічні ребра призми — відрізки AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, EE_1.

Бічні грані призми — паралелограми ABB_1A_1, BCC_1B_1, ...

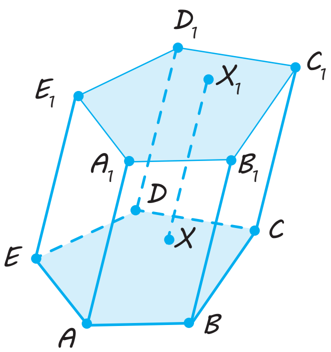


Рис. 2.10

Ураховуючи властивості паралельного перенесення, з означення призми одержуємо такі її *властивості*.

1. **Основи призми рівні** (оскільки паралельне перенесення — це рух, а многокутники, що суміщаються рухом, є рівними).

2. **Основи призми лежать у паралельних площинах** (оскільки в результаті паралельного перенесення площина переходить у паралельну площину (або в себе)).

3. **Бічні ребра призми паралельні й рівні** (оскільки в результаті паралельного перенесення точки переміщуються по паралельних (або таких, що збігаються) прямих на ту саму відстань).

Поверхня призми складається з двох основ і бічної поверхні. *Бічна поверхня* складається з паралелограмів. У кожного з цих паралелограмів дві сторони є відповідними сторонами основ, а дві інші — сусідніми бічними ребрами.

Як бачимо, визначена в такий спосіб призма має всі такі самі властивості, що були розглянуті в підручнику для 10 класу на основі наочного поняття призми.

Нагадаємо деякі поняття, пов'язані з призмами.

Відрізок, що сполучає дві вершини призми, які не належать одній грані, називається *діагоналлю призми*.

Висотою призми називається перпендикуляр, проведений із точки однієї основи призми до площини другої її основи. Довжину цього перпендикуляра також називають *висотою призми*.

Оскільки площини основ призми паралельні, то *висотою призми є відстань між площинами її основ*.

Також нагадаємо (див. підручник для 10 класу), що, згідно з правилами паралельного проектування, зображення призми будують у такий спосіб. Спочатку будують одну з основ F (рис. 2.11) — деякий плоский многокутник. Потім із вершин многокутника F проводять бічні ребра призми у вигляді паралельних відрізків рівної довжини. Кінці цих відрізків сполучають і одержують другу основу призми. Невидимі ребра зображують штриховими лініями.

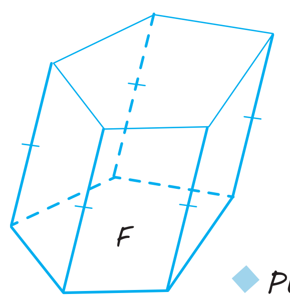


Рис. 2.11

Із властивостей паралельних площин випливає, що перерізи призми площинами, паралельними бічним ребрам, є паралелограмами.

Обґрунтуйте це самостійно.

Зокрема, паралелограмами є так звані діагональні перерізи призми — перерізи призми площинами, що проходять через бічне ребро й діагональ основи призми (рис. 2.12).

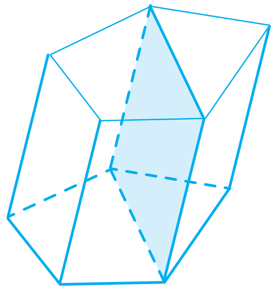


Рис. 2.12

Зазначимо, що призматичну форму мають деякі кристали, наприклад, ісландський шпат чи смарагд.

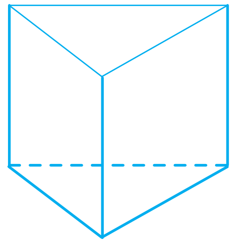


Рис. 2.13

4 Пряма призма

Означення. **Призма називається прямою, якщо її бічні ребра перпендикулярні до основ. Якщо бічні ребра призми не перпендикулярні до основ, то призма називається похилою.**

У прямої призми всі бічні грані є прямокутниками.

Зображуючи пряму призму, зазвичай бічні ребра проводять вертикально (рис. 2.13).

Висота прямої призми дорівнює її бічному ребру (оскільки кожне бічне ребро перпендикулярне до основ і дорівнює відстані між паралельними площинами основ).

Кожна бічна грань прямої призми перпендикулярна до основ призми (оскільки кожна бічна грань проходить через бічне ребро, перпендикулярне до основи).

Діагональні перерізи прямої призми є прямокутниками (оскільки кожний діагональний переріз проходить через бічне ребро, перпендикулярне до основи, то всі кути діагонального перерізу є прямими).

Означення. **Пряма призма називається правильною, якщо її основи є правильними многокутниками.**

Площею бічної поверхні призми (або бічною поверхнею) називають суму площ бічних граней. *Площа повної поверхні призми* дорівнює сумі площ бічної поверхні та площ основ.

Форма правильної призми часто використовується в архітектурі, наприклад, будівля Пентагона має форму правильної п'ятикутної призми.

Теорема 2.2. Площа бічної поверхні прямої призми дорівнює добутку периметра основи на висоту призми, тобто на довжину бічного ребра.

Бічні грані прямої призми є прямокутниками. Основи цих прямокутників є сторонами многокутника, який лежить в основі призми, а висоти дорівнюють довжині бічних ребер (рис. 2.14). Тоді площа бічної поверхні призми дорівнює:

$$S = a_1 l + a_2 l + \ldots + a_n l = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \cdot l = Pl,$$

де a_1, a_2, ..., a_n — довжини ребер основи; P — периметр основи призми; l — довжина бічних ребер.

Приклад. У похилій призмі проведено переріз, який перетинає всі бічні ребра і перпендикулярний до них. Знайдіть площу бічної поверхні призми, якщо периметр перерізу дорівнює P, а довжина бічного ребра — l.

Розв'язання. Площина проведеного перерізу розбиває призму на дві частини (рис. 2.15). Застосуємо до однієї з них паралельне перенесення, у результаті якого основи призми сумістяться. При цьому одержимо пряму призму, основою якої є переріз заданої призми, а бічні ребра дорівнюють l. Ця призма має таку саму бічну поверхню, що й задана. Отже, площа бічної поверхні заданої призми дорівнює Pl.

Зазначимо, що переріз призми, який перетинає всі бічні ребра й перпендикулярний до бічних ребер, називається *перпендикулярним перерізом*. Тому одержаний результат можна сформулювати так: *площа бічної поверхні (або бічна поверхня) похилої призми дорівнює добутку периметра перпендикулярного перерізу призми на довжину бічного ребра.*

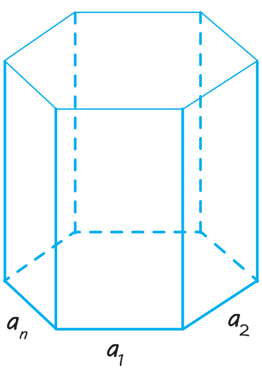


Рис. 2.14

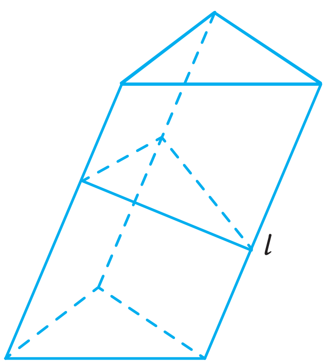


Рис. 2.15

5 Особливості розв'язування стереометричних задач на обчислення, пов'язаних із многогранниками

Під час розв'язування таких задач найчастіше доводиться спочатку обґрунтовувати якусь властивість заданої просторової фігури або тіла і тільки після того, як ця властивість встановлена, виконувати обчислення. Звичайно, у запису розв'язання потрібно обґрунтовувати тільки ті твердження, які будуть використані в ході подальшого розв'язування.

Пропонуємо *схему розв'язування задач на обчислення*, пов'язаних із многогранниками (і тілами обертання).

1. ***Обґрунтувати розташування висоти многогранника.***

2. ***Обґрунтувати, що просторові кути і просторові відстані позначені правильно.***

3. ***Якщо розглядається переріз многогранника, то обґрунтувати його форму (якщо ця форма використовується для розв'язування).***

4. ***Якщо розглядається комбінація многогранника й тіла обертання, то описати взаємне розташування їхніх елементів.***

5. ***На кожному кроці обчислень указати, елементи якого трикутника визначаються, і якщо він прямокутний, пояснити чому.***

Звичайно, ця схема є орієнтовною, але її використання допомагає впорядкувати міркування в процесі складання плану розв'язування задачі. Це дозволяє не пропустити істотні моменти під час запису її розв'язання. Надалі оформлятимемо розв'язання задач на обчислення, наведених у підручнику, із використанням запропонованої схеми.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 1 Площа найбільшого діагонального перерізу правильної шестикутної призми дорівнює 48 см². Знайдіть площу бічної поверхні цієї призми.

Розв'язання	Коментар

▶ 1. Нехай $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ (рис. 2.16) — задана правильна шестикутна призма. В основі правильної призми лежить правильний шестикутник $ABCDEF$. Кожне бічне ребро правильної призми є її висотою, тому $BB_1 \perp$ пл. ABC.

2. Усі діагональні перерізи правильної призми — прямокутники. Їх висоти дорівнюють одна одній і бічному ребру. Основи прямокутників дорівнюють діагоналям основи призми. Тому найбільшим є діагональний переріз, що проходить через найбільшу діагональ BE основи. Тоді $S_{BEE_1B_1} = 48$ см².

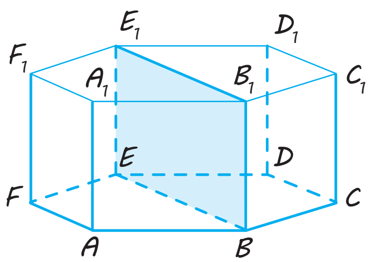


Рис. 2.16

3. Нехай $AB = x$, $BB_1 = y$ ($x > 0$, $y > 0$).

4. За властивостями правильного шестикутника $BE = 2AB = 2x$. Тому

$$S_{BEE_1B_1} = BE \cdot BB_1 = 2xy = 48 \text{ см}^2.$$

Звідси $xy = 24$ см².

5. Тоді $S_{\text{бічн}} = 6AB \cdot BB_1 = 6xy = 144$ см².

Відповідь: 144 см². ◁

Використаємо наведену вище схему.

Для обґрунтування розташування висоти достатньо пригадати, що *правильна призма є прямою, тому кожне бічне ребро призми є її висотою*.

За умовою задачі з усіх діагональних перерізів потрібно вибрати найбільший. Оскільки всі діагональні перерізи є прямокутниками з рівними висотами, то найбільшим із них буде той, у якого буде найбільша основа, тобто такий, який проходить через найбільшу діагональ правильного шестикутника.

Для обчислення площі бічної поверхні правильної призми знову слід урахувати, що правильна призма є прямою, тому *площа бічної поверхні правильної призми дорівнює добутку периметра основи на бічне ребро*. Також потрібно звернути увагу на те, що всі бічні грані призми — рівні прямокутники, тому *для знаходження площі бічної поверхні правильної призми можна знайти площу однієї бічної грані та помножити результат на кількість бічних граней* (на 6).

Розпочинаючи обчислення, слід урахувати **орієнтир**, наведений у підручнику для 10 класу: *якщо в умові геометричної задачі на обчислення взагалі не задано відрізки (або задані відрізки й кути неможливо об'єднати в зручний для розв'язування задачі трикутник), то зазвичай уводять невідомий відрізок (або невідомий кут, або кілька невідомих)*. Виходячи з цього, треба ввести невідомі відрізки.

Крім того, вимогу задачі зручно виразити через змінні. Це дозволить за заданим співвідношенням між змінними одержати відповідь.

Задача 2

Основою прямої призми $ABCA_1B_1C_1$ є рівнобедрений трикутник ABC, сторони якого $AB = AC = 5$, $BC = 8$. Висота призми дорівнює 3. Знайдіть кут між прямою A_1B і площиною BCC_1.

Розв'язання	Коментар

▶ 1. Призма $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 2.17) пряма, отже, кожне її бічне ребро є висотою призми, тому $BB_1 \perp \text{пл.}\, A_1B_1C_1$.

2. За властивістю прямої призми площина основи $A_1B_1C_1$ перпендикулярна до бічної грані BCC_1B_1. Проведемо в площині $A_1B_1C_1$ перпендикуляр $A_1M \perp B_1C_1$, тоді $A_1M \perp \text{пл.}\, BCC_1B_1$. Отже, відрізок BM — проекція прямої BA_1 на площину BCC_1B_1 і кут A_1BM — кут між прямою A_1B і площиною BCC_1.

3. У рівнобедреному трикутнику $A_1B_1C_1$ відрізок A_1M — висота, медіана й бісектриса, тоді $MB_1 = \frac{1}{2}B_1C_1 = \frac{1}{2}BC = 4$.

4. Із прямокутного трикутника A_1MB_1 одержуємо:

$$A_1M = \sqrt{A_1B_1^2 - B_1M^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3.$$

5. Із прямокутного трикутника BB_1M (BB_1C_1C — прямокутник) одержуємо:

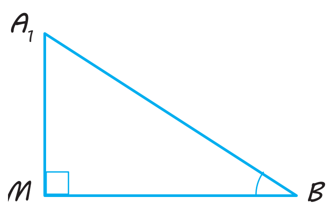
$$BM = \sqrt{BB_1^2 + B_1M^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

6. Із прямокутного трикутника A_1MB $\left(A_1M \perp \text{пл.}\, BCC_1B_1\right)$ одержуємо:

$$\operatorname{tg} \angle A_1BM = \frac{A_1M}{BM} = \frac{3}{5} = 0{,}6.$$

Отже, $\angle A_1BM = \operatorname{arctg} 0{,}6$.

Відповідь: $\operatorname{arctg} 0{,}6$. ◁



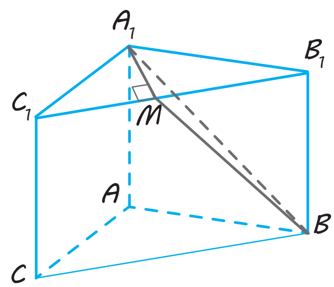


Рис. 2.17

Використаємо наведену вище схему. Для обґрунтування розташування висоти достатньо пригадати означення прямої призми.

За умовою задачі потрібно вказати кут між прямою A_1B і площиною BCC_1, тобто за означенням — це кут між прямою та її проекцією на цю площину. Щоб одержати проекцію прямої A_1B на площину BCC_1, достатньо з точки A_1 провести перпендикуляр на площину BCC_1. Для цього використаємо такий прийом (див. підручник для 10 класу): *щоб провести перпендикуляр із точки до площини, можна через задану точку провести площину, перпендикулярну до заданої площини, а потім у побудованій площині провести перпендикуляр із заданої точки до прямої перетину розглянутих площин*.

У цьому випадку навіть не потрібно будувати перпендикулярну площину — бічні грані прямої призми перпендикулярні до основ (і є прямокутниками).

Для полегшення аналізу просторових конфігурацій на кожному кроці обчислень можна супроводжувати розв'язування виносними плоскими рисунками (рівнобедреного трикутника $A_1B_1C_1$, прямокутника BB_1C_1C, прямокутного трикутника A_1MB — останній зображено в наведеному розв'язанні).

Запитання

1. Який многогранник називають опуклим?
2. Що таке грань опуклого многогранника? ребро? вершина?
3. Яке співвідношення між кількістю вершин, граней і ребер опуклого многогранника (теорема Ейлера)?
4.* Доведіть теорему Ейлера для опуклих многогранників.
5. Що таке призма? основи призми? бічні грані? ребра?
6. Доведіть, що основи призми лежать у паралельних площинах і рівні, бічні ребра паралельні й рівні, бічні грані — паралелограми.
7. Що таке висота призми? діагональ призми?
8. Якою фігурою є переріз призми площиною, паралельною бічним ребрам, зокрема діагональний переріз?
9. Яка призма називається прямою? похилою? Назвіть і обґрунтуйте властивості прямої призми.
10. Яка призма називається правильною?
11. Що таке площа бічної поверхні призми? повної поверхні призми?
12. Доведіть, що площа бічної поверхні прямої призми дорівнює добутку периметра основи на висоту призми.

Вправи

2.1.° Зобразіть многогранник, який має:
1) шість ребер;
2) вісім ребер;
3) дев'ять ребер.

2.2.° Назвіть многогранник, що має найменшу кількість граней. Скільки в нього вершин, ребер?

2.3.° Одна з граней многогранника — п'ятикутник.
1) Яку найменшу кількість ребер може мати цей многогранник?
2) Яку найменшу кількість граней може мати цей многогранник?

2.4.° Скільки діагоналей має n-кутна призма?

2.5.° Одне бічне ребро призми перпендикулярне до площини основи. Доведіть, що інші бічні ребра теж перпендикулярні до площини основи.

2.6. Бічне ребро похилої призми завдовжки 15 см нахилене до площини основи під кутом 30°. Знайдіть висоту призми.

2.7. Усі ребра правильної трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$ рівні. Знайдіть кут між прямими CB_1 і AA_1.

2.8. Основою прямої призми є ромб; діагоналі призми дорівнюють 8 см і 5 см, а висота дорівнює 2 см. Знайдіть сторону основи.

2.9. Основою призми є правильний шестикутник зі стороною a, а бічні грані є квадратами. Знайдіть діагоналі призми і площі її діагональних перерізів.

2.10.* Відстані між бічними ребрами похилої трикутної призми дорівнюють 37 см, 13 см і 40 см. Знайдіть відстань між більшою бічною гранню і протилежним бічним ребром призми.

2.11. Площа основи правильної чотирикутної призми дорівнює 144 см^2, а висота — 14 см. Знайдіть діагональ призми.

2.12. Площа бічної поверхні правильної чотирикутної призми дорівнює 32 м^2, а площа повної поверхні — 40 м^2. Знайдіть висоту призми.

2.13. Площа бічної грані правильної чотирикутної призми дорівнює Q. Знайдіть площу діагонального перерізу.

2.14. Знайдіть площу бічної поверхні правильної чотирикутної призми, діагональ якої завдовжки a утворює:
1) із площиною основи кут 60°;
2) із площиною бічної грані кут 30°.

2.15. Усі ребра прямої трикутної призми рівні. Площа бічної поверхні призми дорівнює 12 м^2. Знайдіть висоту цієї призми.

2.16. Площа бічної поверхні правильної чотирикутної призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ з основою $ABCD$ дорівнює 48 м^2, а площа перерізу ABC_1D_1 — 15 м^2. Знайдіть висоту призми.

2.17. Висота прямої призми дорівнює 15, її основою є рівнобічна трапеція з висотою 10 і основами 25 і 45. Знайдіть:
1) площу бічної поверхні призми;
2) площу діагонального перерізу призми;
3) двогранні кути при бічних ребрах призми.

2.18. Відстані між паралельними прямими, що містять бічні ребра похилої трикутної призми, дорівнюють 2 см, 3 см і 4 см, а бічні ребра — 5 см. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

2.19. Перерізом похилої трикутної призми площиною, перпендикулярною до бічного ребра, є рівнобедрений прямокутний трикутник, площа якого дорівнює Q. Бічне ребро призми дорівнює a. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

2.20. За стороною основи a і бічним ребром b знайдіть площу повної поверхні правильної призми:
1) трикутної;
2) чотирикутної;
3) шестикутної.

2.21.* Сторона AB основи правильної трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$ дорівнює a, висота AA_1 — h. Знайдіть кут між прямими AB_1 і BC_1.

2.22. Діагональ BD_1 правильної чотирикутної призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ завдовжки a утворює з площиною бічної грані BCC_1B_1 кут $30°$. Знайдіть:
1) кут між цією діагоналлю і площиною основи;
2) площу діагонального перерізу BC_1D_1A;
3) площу діагонального перерізу BB_1D_1D.

2.23.* Основою похилої призми $ABCA_1B_1C_1$ є рівнобедрений трикутник ABC, у якому $AC = AB = 13$ см, $BC = 10$ см; бічне ребро призми утворює з площиною основи кут $45°$. Ортогональною проекцією вершини A_1 на площину ABC є точка перетину медіан трикутника ABC. Знайдіть площу грані CC_1B_1B.

2.24.* Основою прямої призми є рівнобедрений трикутник, бічна сторона якого відноситься до основи як 5:6. Висота призми дорівнює висоті основи, проведеної до його бічної сторони; площа повної поверхні дорівнює 2520 м^2. Знайдіть ребра призми.

2.25. Основою прямої призми є трикутник зі сторонами 3 см і 5 см, що утворюють кут $120°$. Площа найбільшої бічної грані дорівнює 35 см^2. Знайдіть площі бічної й повної поверхонь призми.

2.26. Дві бічні грані похилої трикутної призми взаємно перпендикулярні, а їхнє спільне ребро завдовжки 24 см віддалене на 12 см і 35 см від двох інших бічних ребер. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

2.27.* Усі ребра правильної шестикутної призми $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ (рис. 2.18) дорівнюють 1. Знайдіть кут між прямими AB_1 і BE_1.

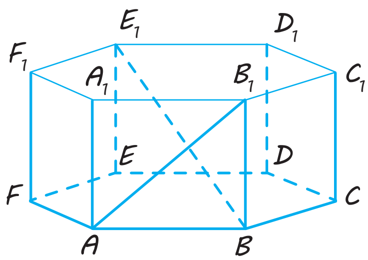


Рис. 2.18

2.28.* Основою прямої чотирикутної призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є прямокутник $ABCD$, у якого $AB = 12$, $AD = 5$. Знайдіть кут між площиною основи призми і площиною, яка проходить через середину ребра AD перпендикулярно до прямої BD_1, якщо відстань між прямими AC і B_1D_1 дорівнює 13.

Указівка. Доцільно врахувати, що *кут між площинами дорівнює куту між прямими, перпендикулярними до цих площин*.

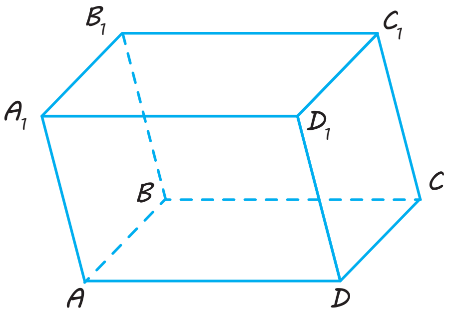
Виявіть свою компетентність

2.29. Підготуйте презентацію з фотографіями будівель або їх фрагментів у формі різноманітних призм.

§ 3 ПАРАЛЕЛЕПІПЕД. ПРЯМОКУТНИЙ ПАРАЛЕЛЕПІПЕД

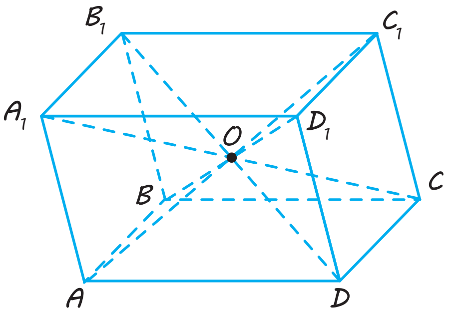
Таблиця 3

Паралелепіпед



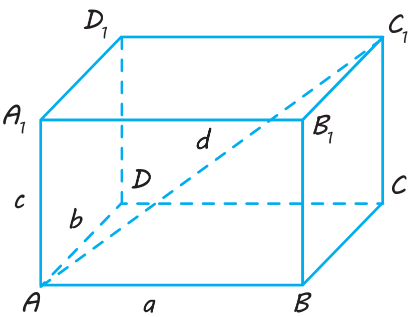
Паралелепіпедом називається призма, в основі якої лежить паралелограм.

Властивості



1. У паралелепіпеда всі грані — паралелограми.
2. Протилежні грані паралелепіпеда паралельні й рівні.
3. Діагоналі паралелепіпеда перетинаються в одній точці й точкою перетину діляться навпіл.
   O — середина A_1C, BD_1, AC_1, B_1D.

Прямокутний паралелепіпед

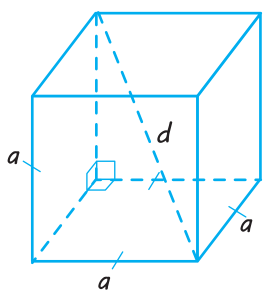


Прямий паралелепіпед, основою якого є прямокутник, називається прямокутним паралелепіпедом.

Властивості

1. Усі грані прямокутного паралелепіпеда — прямокутники.
2. $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$ $\left(AC_1^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2\right)$
   Квадрат будь-якої діагоналі прямокутного паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів трьох його вимірів.
3. $S_{\text{бічн}} = P_{\text{осн}} \cdot AA_1 = 2(AB + AD) \cdot AA_1 = 2(a+b)c$
   $S_{\text{повн}} = S_{\text{бічн}} + 2S_{\text{осн}}$

Куб



Кубом називається прямокутний паралелепіпед, усі ребра якого рівні.

Властивості

1. Усі грані куба — квадрати.
2. $d = a\sqrt{3}$ $(d^2 = a^2 + a^2 + a^2$, де a — ребро куба, d — діагональ куба$)$
3. $S_{\text{бічн. куба}} = 4a^2$, $S_{\text{повн. куба}} = 6a^2$

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1 Паралелепіпед

Означення. **Паралелепіпедом називається призма, основою якої є паралелограм.**

Із означення випливає, що в паралелепіпеді всі грані — паралелограми (рис. 3.1).

Грані паралелепіпеда, що не мають спільних вершин, називаються *протилежними*.

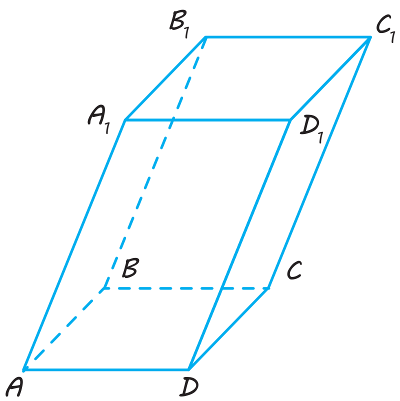


Рис. 3.1

Теорема 3.1. Протилежні грані паралелепіпеда паралельні й рівні.

Розглянемо довільні дві протилежні грані паралелепіпеда, наприклад, AA_1B_1B і DD_1C_1C (рис. 3.1). Оскільки всі грані паралелепіпеда — паралелограми (у яких протилежні сторони паралельні), то пряма AA_1 паралельна прямій DD_1, а пряма AB паралельна прямій DC. За ознакою паралельності площин одержуємо, що площини розглянутих граней паралельні.

Із того, що грані паралелепіпеда — паралелограми, випливає, що відрізки AD, BC, A_1D_1, B_1C_1 паралельні й рівні. Тоді в результаті паралельного перенесення на вектор $\overrightarrow{AD}$ грань AA_1B_1B суміститься з гранню DD_1C_1C. Отже, ці грані рівні.

Аналогічно обґрунтовують паралельність і рівність будь-яких інших протилежних граней паралелепіпеда. ○

Теорема 3.2. Діагоналі паралелепіпеда перетинаються в одній точці і точкою перетину діляться навпіл.

Розглянемо які-небудь дві діагоналі паралелепіпеда, наприклад AC_1 і BD_1 (рис. 3.2). Оскільки грані A_1B_1BA й $A_1B_1C_1D_1$ — паралелограми зі спільною стороною A_1B_1, то їх сторони AB і D_1C_1 паралельні ($AB \parallel A_1B_1$ і $D_1C_1 \parallel A_1B_1$, тоді $AB \parallel D_1C_1$), а отже, лежать в одній площині. Ця площина перетинає площини протилежних граней паралелепіпеда по паралельних прямих AD_1 і BC_1. Тоді чотирикутник ABC_1D_1 — паралелограм. Діагоналі паралелепіпеда AC_1 і BD_1 є діагоналями цього паралелограма, тому вони перетинаються й точкою перетину O діляться навпіл.

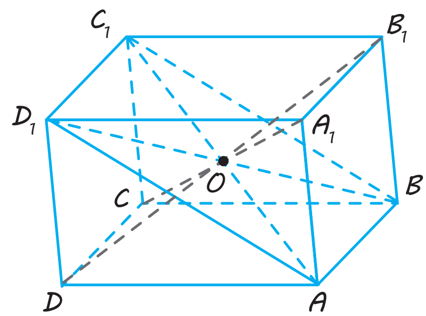


Рис. 3.2

Аналогічно доводять, що діагоналі AC_1 і DB_1, а також діагоналі AC_1 і CA_1 перетинаються й точкою перетину діляться навпіл. Звідси одержуємо, що всі чотири діагоналі паралелепіпеда перетинаються в одній точці й точкою перетину діляться навпіл. ○

Із теореми 3.2 випливає, що **точка перетину діагоналей паралелепіпеда є його центром симетрії.**

Виберемо довільну пряму, що проходить через точку O — точку перетину діагоналей паралелепіпеда. Нехай вона перетинає поверхню паралелепіпеда в точках X і X_1 (рис. 3.3). Тоді $OX = OX_1$ (це випливає, наприклад, із рівності трикутників AOX і C_1OX_1). Але це й означає, що точка O — центр симетрії паралелепіпеда. ○

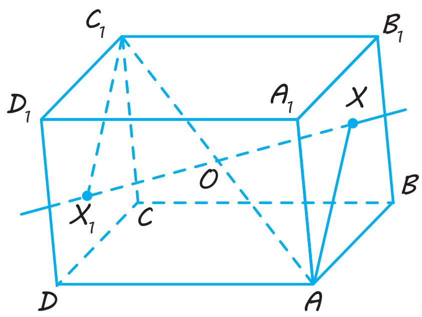


Рис. 3.3

Як і будь-яка призма, паралелепіпед може бути прямим і похилим. У прямому паралелепіпеді бічні ребра перпендикулярні до основ.

2 Прямокутний паралелепіпед

Означення. Прямий паралелепіпед, основою якого є прямокутник, називається прямокутним паралелепіпедом.

Із наведеного означення випливає, що всі грані прямокутного паралелепіпеда — прямокутники, висота дорівнює бічному ребру й кожне ребро перпендикулярне до грані, із якою воно має тільки одну спільну точку. Справді, наприклад, $AD \perp$ пл. ABB_1A_1 (рис. 3.4) за ознакою перпендикулярності прямої і площини, оскільки $AD \perp AB$ й $AD \perp AA_1$.

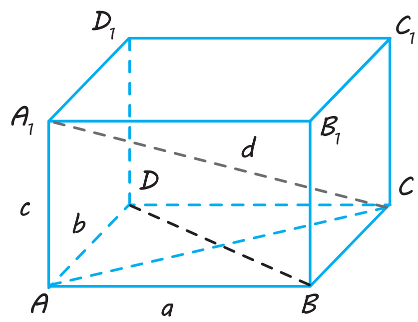


Рис. 3.4

Означення. Прямокутний паралелепіпед, усі ребра якого рівні, називається кубом.

Нагадаємо, що всі грані куба — квадрати.

Довжини непаралельних ребер прямокутного паралелепіпеда називаються його *лінійними розмірами* (*вимірами*). У прямокутного паралелепіпеда три виміри.

Теорема 3.3. У прямокутному паралелепіпеді квадрат будь-якої діагоналі дорівнює сумі квадратів трьох його вимірів.

Зазначимо, що кристали кухонної солі мають форму куба, а незвичне розміщення кубічних форм у будівлях дозволяє створити оригінальну архітектуру.

Розглянемо прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 3.4) із діагоналлю $A_1C = d$ і трьома вимірами: $AB = a$, $AD = b$, $AA_1 = c$.

Із прямокутного трикутника ACA_1 за теоремою Піфагора одержуємо:

$$A_1C^2 = AC^2 + AA_1^2.$$

Оскільки $AC = BD$ (як діагоналі прямокутника $ABCD$), то з прямокутного трикутника ABD за теоремою Піфагора одержуємо:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 = a^2 + b^2.$$

Тоді

$$A_1C^2 = AC^2 + AA_1^2 =$$
$$= BD^2 + AA_1^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Отже, $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

Зазначимо, що куб є прямокутним паралелепіпедом, усі виміри якого рівні. Тому якщо ребро куба дорівнює a, а його діагональ — d, то за теоремою 3.3 маємо: $d^2 = a^2 + a^2 + a^2$, тобто $d^2 = 3a^2$, отже, $d = a\sqrt{3}$.

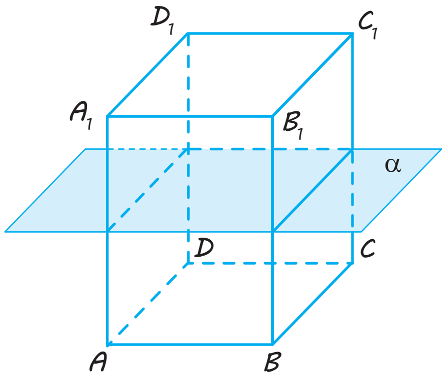


Рис. 3.5

Симетрія прямокутного паралелепіпеда. У прямокутного паралелепіпеда, як і в будь-якого паралелепіпеда, є центр симетрії — точка перетину його діагоналей. У нього є також три площини симетрії, що проходять через центр симетрії паралельно граням. На рис. 3.5 зображено одну з таких площин. Вона проходить через середини чотирьох паралельних ребер паралелепіпеда. Кінці ребер є симетричними точками.

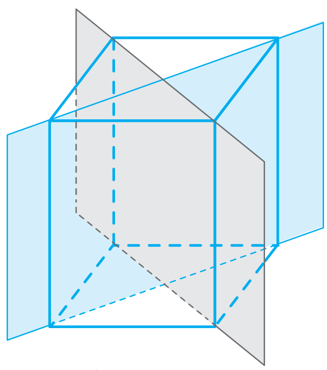


Рис. 3.6

Якщо всі лінійні розміри паралелепіпеда різні, то в нього немає інших площин симетрії, крім перелічених.

Якщо два лінійні розміри паралелепіпеда рівні, то в нього є ще дві площини симетрії. Ці площини діагональних перерізів зображено на рис. 3.6.

Якщо всі лінійні розміри паралелепіпеда рівні, тобто він є кубом, то площина будь-якого його діагонального перерізу є площиною симетрії. Отже, у куба дев'ять площин симетрії.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 1 Знайдіть площу повної поверхні прямого паралелепіпеда, усі ребра якого рівні, гострий кут в основі дорівнює $60°$, а менша діагональ основи — a.

Розв'язання	Коментар
▶ Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — заданий прямий паралелепіпед, у якого $\angle BAD = 60°$, $AA_1 = AB = AD$ (рис. 3.7).	Для обчислення площі бічної поверхні прямого паралелепіпеда слід урахувати, що прямий паралелепіпед є прямою призмою.

Якщо всі сторони паралелограма $ABCD$ рівні, то він є ромбом і його менша діагональ лежить проти гострого кута, тобто $BD = a$.

Оскільки трикутник ABD — рівнобедрений із кутом 60°, то він рівносторонній. Отже, $AB = AD = BD = a$.

Тоді

$$S_{\text{повн}} = S_{\text{бічн}} + 2S_{\text{осн}} =$$

$$= P_{ABCD} \cdot AA_1 + 2AB \cdot AD \cdot \sin 60^\circ =$$

$$= 4a \cdot a + a^2\sqrt{3} = \left(4 + \sqrt{3}\right)a^2.$$

Відповідь: $\left(4 + \sqrt{3}\right)a^2$. ◁

Отже площа бічної поверхні прямого паралелепіпеда дорівнює добутку периметра основи на бічне ребро.

Щоб знайти сторону основи, достатньо пригадати відповідний опорний факт із курсу планіметрії: якщо в рівнобедреному трикутнику один із кутів дорівнює 60°, то цей трикутник рівносторонній.

Також слід пам'ятати, що в ромбі менша діагональ лежить проти гострого кута.

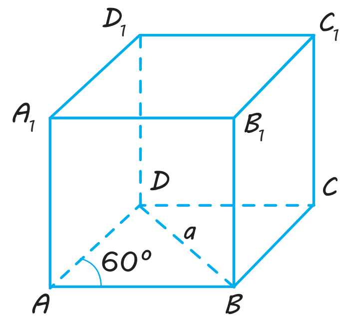


Рис. 3.7

Задача 2

Діагональ прямокутного паралелепіпеда дорівнює d і утворює з площиною основи кут 45°, а з площиною однієї з бічних граней — кут 30°. Знайдіть площу повної поверхні паралелепіпеда.

Розв'язання

▶ 1. Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — заданий паралелепіпед із діагоналлю $BD_1 = d$ (рис. 3.8). За властивістю прямокутного паралелепіпеда

$$D_1D \perp \text{пл. } ABCD \text{ і } D_1C_1 \perp \text{пл. } BCC_1B_1.$$

2. Тоді DB — проекція D_1B на площину $ABCD$, а C_1B — проекція D_1B на площину BCC_1B_1. Отже, кут D_1BD — кут між прямою D_1B і площиною $ABCD$ $\left(\angle D_1BD = 45^\circ\right)$, а кут D_1BC_1 — кут між прямою D_1B і площиною BCC_1B_1 $\left(\angle D_1BC_1 = 30^\circ\right)$.

3. Із прямокутного трикутника D_1BD одержуємо:

$$DB = D_1B \cdot \cos 45^\circ = d\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$DD_1 = D_1B \cdot \sin 45^\circ = d\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Коментар

Використовуємо основні елементи схеми розв'язування задач на обчислення.

1. Обґрунтувати розташування висоти многогранника.

2. Обґрунтувати, що просторові кути й просторові відстані позначені правильно.

3. На кожному кроці обчислень указати, елементи якого трикутника визначаєте, і якщо він прямокутний, пояснити чому.

Для обґрунтування розташування висоти врахуємо, що в прямокутному паралелепіпеді будь-яке бічне ребро є його висотою, а для обґрунтування просторових кутів пригадуємо, що кут між похилою й площиною — це кут між заданою похилою і її проекцією на розглянуту площину.

4. Із прямокутного трикутника D_1BC_1 одержуємо: $D_1C_1 = D_1B \cdot \sin 30° = \frac{d}{2}$.

5. Із прямокутного трикутника BCD ($ABCD$ — прямокутник, $DC = D_1C_1 = \frac{d}{2}$) одержуємо:

$$BC = \sqrt{DB^2 - DC^2} = \sqrt{\frac{2d^2}{4} - \frac{d^2}{4}} = \frac{d}{2}.$$

Тоді

$$S_{\text{повн}} = S_{\text{бічн}} + 2S_{\text{осн}} = P_{ABCD} \cdot D_1D + 2DC \cdot BC =$$

$$= 2(DC + BC) \cdot D_1D + 2DC \cdot BC =$$

$$= 2\left(\frac{d}{2} + \frac{d}{2}\right) \cdot \frac{d\sqrt{2}}{2} + 2 \cdot \frac{d}{2} \cdot \frac{d}{2} = \left(\sqrt{2} + \frac{1}{2}\right)d^2.$$

Відповідь: $\left(\sqrt{2} + \frac{1}{2}\right)d^2$. ◁

Для обчислення площі бічної поверхні прямокутного паралелепіпеда слід урахувати, що прямокутний паралелепіпед є прямою призмою, тому площа бічної поверхні прямокутного паралелепіпеда дорівнює добутку периметра основи на бічне ребро.

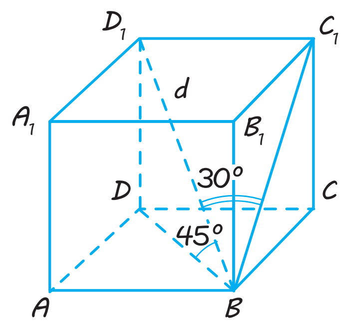


Рис. 3.8

Запитання

1. Що таке паралелепіпед?
2. Доведіть, що протилежні грані паралелепіпеда паралельні й рівні.
3. Доведіть, що діагоналі паралелепіпеда перетинаються в одній точці й точкою перетину діляться навпіл.
4. Доведіть, що точка перетину діагоналей паралелепіпеда є його центром симетрії.
5. Який паралелепіпед називається прямокутним? Що таке лінійні розміри прямокутного паралелепіпеда?
6. Що таке куб?
7. Доведіть, що в прямокутному паралелепіпеді квадрат діагоналі дорівнює сумі квадратів трьох його вимірів.
8. Скільки площин симетрії має прямокутний паралелепіпед?

Вправи

3.1.° Зобразіть кілька різних розгорток прямокутного паралелепіпеда.

3.2.° Сторони основи прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 7 дм і 24 дм, а висота паралелепіпеда — 8 дм. Знайдіть площу діагонального перерізу.

3.3.° Знайдіть діагоналі прямокутного паралелепіпеда за трьома його вимірами:
1) 1, 2, 2;
2) 2, 5, 14;
3) 6, 6, 7.

3.4.° Знайдіть площу повної поверхні прямокутного паралелепіпеда за трьома його вимірами:
1) 2 см, 5 см, 10 см;
2) 4 см, 6 см, 8 см;
3) 10 см, 12 см, 5 см.

3.5.° Три грані паралелепіпеда мають площі 1 м^2, 2 м^2 і 3 м^2. Чому дорівнює площа повної поверхні паралелепіпеда?

3.6.° Знайдіть довжину діагоналі куба, якщо площа його повної поверхні дорівнює 150 см^2.

3.7. Сторони основи прямого паралелепіпеда дорівнюють 6 м і 8 м, кут між цими сторонами дорівнює 30°. Бічне ребро паралелепіпеда дорівнює 5 м. Знайдіть площу повної поверхні цього паралелепіпеда.

3.8. Знайдіть площу бічної поверхні прямокутного паралелепіпеда, якщо його висота дорівнює h, площа основи — Q, площа діагонального перерізу — M.

3.9. Знайдіть площу повної поверхні прямокутного паралелепіпеда, діагональ якого дорівнює 3 см, а діагоналі бічних граней — $\sqrt{5}$ см і $2\sqrt{2}$ см.

3.10. Діагональ прямокутного паралелепіпеда утворює з його ребрами кути α, β, γ. Доведіть, що $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

3.11. Основою прямого паралелепіпеда є ромб із діагоналями 6 см і 8 см; діагональ бічної грані дорівнює 13 см. Знайдіть площу повної поверхні паралелепіпеда.

3.12. Основою паралелепіпеда є ромб зі стороною b і гострим кутом α, а бічні грані — паралелограми з гострим кутом β. Бічне ребро паралелепіпеда дорівнює a. Знайдіть:
1) площу бічної поверхні паралелепіпеда;
2) площу меншого діагонального перерізу;
3) висоту паралелепіпеда.

3.13. Бічне ребро прямого паралелепіпеда дорівнює 5 м, сторони основи — 6 м і 8 м, а одна з діагоналей основи — 12 м. Знайдіть діагоналі паралелепіпеда.

3.14. У прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ відомі ребра $AB=2$, $AD=1$ і діагональ $AC_1=3$. Знайдіть відстань між прямими AB і B_1C_1.

3.15. Сторони основи прямого паралелепіпеда дорівнюють 3 см і 5 см, одна з діагоналей основи — 4 см. Менша діагональ паралелепіпеда утворює з площиною основи кут 60°. Знайдіть діагоналі паралелепіпеда.

3.16. Доведіть, що сума квадратів площ бічних граней прямого паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів площ його діагональних перерізів.

3.17. Висота прямого паралелепіпеда дорівнює $\sqrt{3}$, його діагоналі утворюють з основою кути $45°$ і $60°$, а основою є ромб. Знайдіть:
1) площу бічної поверхні паралелепіпеда;
2) площу повної поверхні паралелепіпеда.

3.18. Сторони основи прямого паралелепіпеда дорівнюють 13 см і 14 см, менша його діагональ дорівнює 17 см, а площа основи — 168 см^2. Знайдіть площу бічної поверхні.

3.19. Знайдіть діагоналі прямого паралелепіпеда, кожне ребро якого дорівнює a, а гострий кут в основі — $60°$.

3.20. Сторони основи прямого паралелепіпеда дорівнюють 2 см і 5 см; відстань між меншими з них дорівнює 4 см, а бічне ребро — $2\sqrt{2}$ см. Знайдіть діагоналі паралелепіпеда.

3.21. Основою прямого паралелепіпеда є паралелограм, менша сторона якого дорівнює 9 см, а гострий кут — $60°$. Більша з діагоналей паралелепіпеда дорівнює 29 см, а діагональ його більшої бічної грані — 25 см. Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда.

3.22. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ знайдіть кут між прямою AB_1 і площиною ABC_1.

3.23. У прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ відомі ребра $AB = 35$, $AD = 12$, $CC_1 = 21$. Знайдіть кут між площинами ABC і A_1DB.

3.24.* Основою паралелепіпеда є квадрат зі стороною a, а його бічне ребро дорівнює l. Одна з вершин основи паралелепіпеда рівновіддалена від усіх вершин іншої основи. Знайдіть площі діагональних перерізів паралелепіпеда.

3.25.* Сторони основи прямого паралелепіпеда дорівнюють 7 і 17, а його діагоналі утворюють із площиною основи кути $45°$ і $30°$. Знайдіть висоту паралелепіпеда.

3.26.* Чотири грані похилого паралелепіпеда — квадрати зі стороною 2. Бічне ребро нахилене до площини основи під кутом $30°$. Знайдіть площу повної поверхні паралелепіпеда.

3.27.* Основою похилого паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є ромб $ABCD$, у якому $\angle BAD = 60°$. Бічні ребра нахилені до площини основи під кутом $60°$, а площина AA_1C_1C перпендикулярна до площини основи. Доведіть, що площі перерізів AA_1C_1C і BB_1D_1D відносяться як 3:2.

3.28.* Діагональ AC_1 прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнює 1 і утворює з площинами ABB_1 й ADD_1 кути α й β відповідно. Знайдіть кут, який вона утворює з площиною ABC.

3.29.* Діагоналі трьох граней прямокутного паралелепіпеда, що виходять із однієї вершини, дорівнюють a, b, c. Знайдіть лінійні виміри паралелепіпеда (рис. 3.9).

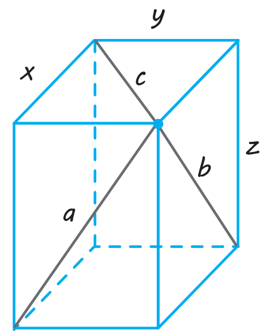


Рис. 3.9

3.30.* Розгляньте трикутник, вершинами якого є кінці трьох ребер паралелепіпеда, що виходять з однієї його вершини. Доведіть, що центроїд цього трикутника (точка перетину його медіан) належить діагоналі паралелепіпеда, яка виходить із тієї самої вершини, і ділить цю діагональ у відношенні 1:2, починаючи від спільної вершини.

Виявіть свою компетентність

3.31. Знайдіть площу поверхні деталі, яка має форму многогранника (усі двогранні кути прямі):
1) на рис. 3.10;
2) на рис. 3.11.

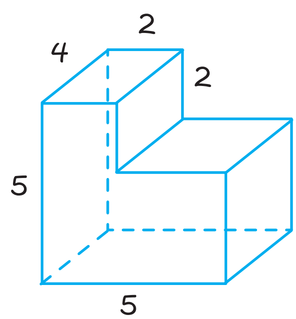


Рис. 3.10

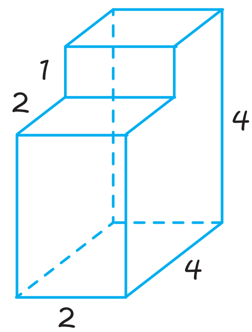


Рис. 3.11

§ 4 ПОБУДОВА ПЕРЕРІЗІВ ПРИЗМИ Й ЗАДАЧІ, ПОВ'ЯЗАНІ З ПЕРЕРІЗАМИ

Побудова перерізів многогранників була розглянута в курсі геометрії 10 класу. Для цього можна використовувати властивості паралельності прямих і площин або, наприклад, метод слідів.

Нагадаємо ці методи.

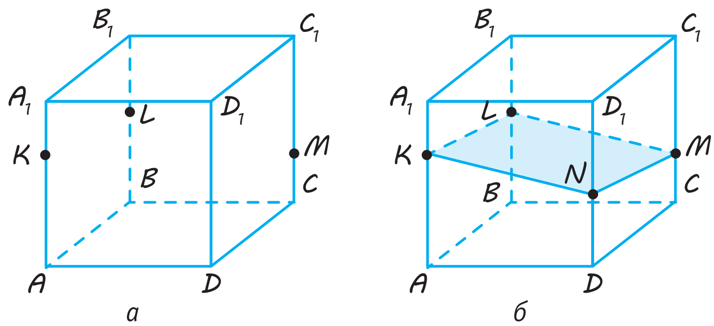


Рис. 4.1

1 Використання властивостей паралельних прямих і площин

Якщо заданий многогранник містить паралельні грані, які перетинає січна площина, то за властивістю паралельних площин прямі перетину січної площини із цими гранями паралельні.

Побудуємо переріз прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 4.1, а) площиною, що проходить через точки K, L, M на його ребрах ($K \in AA_1$, $L \in BB_1$, $M \in CC_1$). Сполучаємо відрізками пари точок, що лежать в одній грані, — одержуємо відрізки KL і LM (рис. 4.1, б), за якими січна площина перетинає грані ABB_1A_1 і BCC_1B_1 відповідно. Протилежні грані паралелепіпеда попарно паралельні, наприклад пл. $AA_1D_1D \parallel$ пл. BCC_1B_1.

Отже, січна площина перетинає грань AA_1D_1D по прямій KN, паралельній прямій LM (проводимо $KN \parallel LM$, $N \in D_1D$ і сполучаємо відрізками точки N і M).

Чотирикутник $KLMN$ — шуканий переріз.

Іноді використання властивостей паралельних прямих і площин поєднують з іншими методами побудови перерізів многогранників.

2 Метод слідів

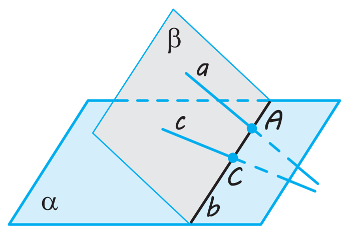


Рис. 4.2

Для побудови більш складних перерізів многогранників зручно застосовувати метод слідів. Під час його використання спочатку будують пряму перетину січної площини з площиною якої-небудь грані (слід січної площини на цій грані), а потім уже знаходять точки перетину січної площини з відповідними ребрами многогранника (або з їхніми продовженнями). Іноді необхідно розглянути допоміжні площини, для яких також будується слід січної площини (або слід цієї допоміжної площини на площині якої-небудь грані).

Нагадуємо, що для одержання сліду (прямої b) площини β на площині α (рис. 4.2) достатньо знайти точки перетину двох прямих площини α з площиною β (оскільки дві точки, наприклад A і C, однозначно визначають пряму b). Точка перетину будь-якої прямої a площини β з площиною α завжди лежить на слідові площини β на площині α (на прямій b).

Після розгляду паралельного й центрального проектування можна уточнити зміст методу слідів, пов'язаного з використанням відповідних проекцій. Якщо розглядати слід січної площини на площині проекції, то разом із кожною точкою можна розглядати й її проекцію на цю площину. Тоді для побудови відповідного сліду січної площини доводиться двічі

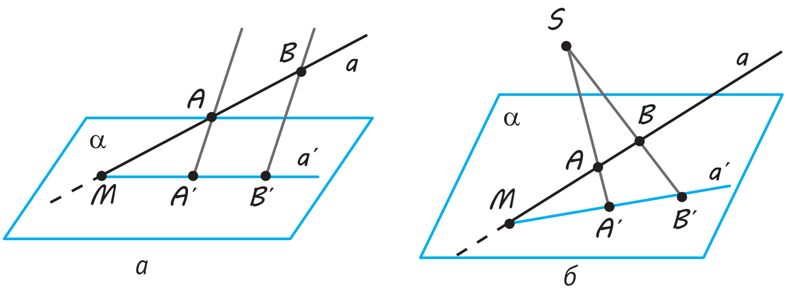


Рис. 4.3

знаходити точки перетину прямої й площини за двома заданими точками цієї прямої та їхніми проекціями на площину.

Нехай, наприклад, пряма a проходить через точки A і B, причому відомі паралельні (рис. 4.3, *а*) або центральні (рис. 4.3, *б*) проекції A', B' цих точок на площину α. Тоді точка M перетину прямої a з її проекцією — прямою a' (що проходить через точки A' і B') і буде шуканим перетином прямої a з площиною α.

Отже, щоб знайти точку перетину прямої з площиною проекцій, достатньо знайти точку перетину прямої з її проекцією на цю площину.

Таким чином, для побудови перерізів многогранників методом слідів ми можемо використовувати паралельне проектування (у задачах, пов'язаних із призмами) або центральне (у задачах, пов'язаних із пірамідою).

Часто за площину проекції вибирають площину основи многогранника (як центр проектування — вершину піраміди, протилежну основі).

За допомогою методу слідів побудуємо переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, що проходить через три точки K, L, M, які лежать на попарно мимобіжних ребрах куба (рис. 4.4).

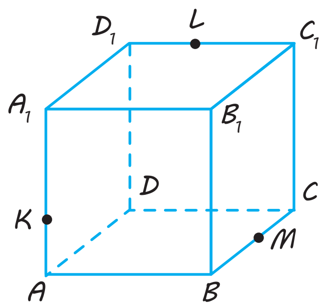


Рис. 4.4

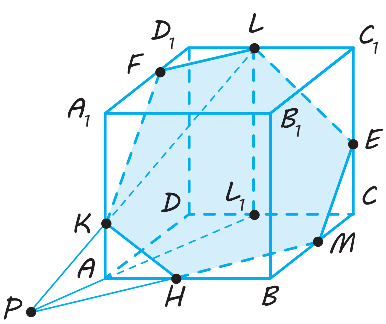


Рис. 4.5

Розглянемо паралельне проектування заданих точок на площину основи $ABCD$ у напрямку бічного ребра куба. Тоді проекціями точок K, M, L будуть відповідно точки A, M, L_1, де $LL_1 \parallel D_1D$ (рис. 4.5).

Знайдемо точку перетину прямої LK, що лежить у січній площині, із площиною основи куба. Перетином прямої LK з її проекцією L_1A і є шукана точка P, що належить січній площині й площині основи куба. Отже, січна площина перетинає основу куба по прямій MP (оскільки точки M і P належать як січній площині, так і площині основи $ABCD$). Це і є слід січної площини на площині основи куба. Точка H перетину цієї прямої з ребром AB дає ще одну точку перерізу куба. Сполучимо точки K і H, H і M відрізками.

Далі використовуємо паралельність протилежних граней куба, які січна площина перетинає по паралельних прямих. Через точку L проведемо пряму, паралельну KH, і точку її перетину з ребром CC_1 куба позначимо буквою E. Сполучимо точки E і M відрізком. Через точку L також проведемо пряму, паралельну HM, і точку її перетину з ребром A_1D_1 куба позначимо буквою F. Сполучимо точки L і F, K і F відрізками.

Шестикутник $KHMELF$ і буде шуканим перерізом куба заданою площиною.

Зазначимо, що починати розв'язування задач на обчислення, пов'язаних із перерізами многогранників, можна двома шляхами. Наприклад, якщо в задачі потрібно знайти площу перерізу, то спочатку можна побудувати цей переріз, визначити його форму, а потім знайти його площу. Але оскільки в задачі не вимагають побудувати переріз многогранника, то можна почати розв'язування іншим шляхом: уважати, що переріз уже побудований і, спираючись на властивості паралельності або перпендикулярності прямих і площин, обґрунтувати форму перерізу, а потім знайти його площу (див. розв'язання задач 2 і 3, наведені нижче).

Також зазначимо, що іноді слід січної площини зручно розглядати не тільки в задачах на побудову перерізів, але й у задачах на обчислення кута між січною площиною й площиною однієї з граней призми або піраміди.

У таких випадках нас часто не цікавить вид перерізу, тому його можна не будувати й не обґрунтовувати (див. розв'язання задачі 4, наведене нижче).

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 1

У прямокутному паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторони основи AB і AD дорівнюють 5 см і 6 см відповідно, а висота паралелепіпеда — 8 см. Знайдіть площу перерізу паралелепіпеда площиною, що проходить через сторону основи AB і вершину C_1.

Розв'язання	Коментар
► 1. Оскільки паралелепіпед прямокутний, то його висотою є бічне ребро, отже, за умовою $DD_1 = 8$ см (рис. 4.6).	Використовуємо основні елементи схеми розв'язання задач на обчислення (див. § 2).
2. Площини основ $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$ паралельні, тому січна площина перетинає їх по паралельних прямих. Січна площина ABC_1 перетинає нижню основу по прямій AB, а верхню — по прямій, яка паралельна прямій AB і проходить через точку C_1. Але через точку C_1 проходить тільки одна пряма, паралельна прямій AB, — це пряма C_1D_1. Отже, перерізом є чотирикутник ABC_1D_1, сторони AB і C_1D_1 якого паралельні й рівні, тобто ABC_1D_1 — паралелограм. Ураховуючи, що $AD \perp AB$ й те, що пряма AD — проекція прямої AD_1 на площину $ABCD$, одержуємо, що $AD_1 \perp AB$ (за теоремою про три перпендикуляри). Отже, ABC_1D_1 — прямокутник.	1. Обґрунтувати розташування висоти многогранника (у цьому випадку достатньо пригадати означення й властивості прямокутного паралелепіпеда). 2. Обґрунтувати, що просторові кути й просторові відстані позначені правильно (у цій задачі таких елементів немає). 3. Якщо розглядаєте переріз многогранника, то обґрунтувати його форму, якщо цю форму використовуєте для розв'язання (для обчислення площі отриманого перерізу потрібно обґрунтувати, що перерізом є прямокутник). 4. На кожному етапі обчислень указати, елементи якого трикутника визначаєте, і якщо він прямокутний, пояснити чому.

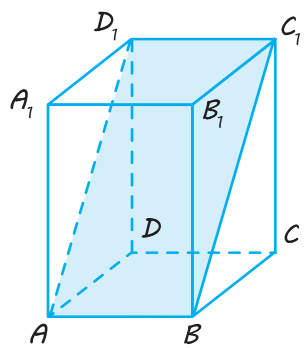


Рис. 4.6

3. Із прямокутного трикутника ADD_1 (DD_1 — висота паралелепіпеда) маємо:

$$AD_1 = \sqrt{AD^2 + DD_1^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ (см)}.$$

4. Тоді площа перерізу дорівнює:

$$S_{\text{перерізу}} = AB \cdot AD_1 = 5 \cdot 10 = 50 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Відповідь: 50 см². ◁

Зокрема, щоб обґрунтувати, що трикутник ADD_1 прямокутний, достатньо указати, що DD_1 — висота паралелепіпеда (тоді пряма DD_1 перпендикулярна до площини основи, а це й означає, що вона перпендикулярна до прямої AD, що лежить у цій площині).

Задача 2

Основою прямої призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є рівнобічна трапеція $ABCD$, площа якої дорівнює 84 см². Основа AD трапеції дорівнює висоті трапеції й у шість разів більша за основу BC. Через бічне ребро CC_1 призми проведено площину, паралельну ребру AB. Знайдіть площу утвореного перерізу, якщо висота призми дорівнює 9 см.

Коментар

Нагадаємо, що в задачах на знаходження площі перерізу можна спочатку побудувати потрібний переріз, визначити його форму, а потім знайти його площу. Але можна почати розв'язування іншим шляхом: вважати, що переріз уже побудований. Потім, спираючись на властивості паралельності або перпендикулярності прямих і площин, обґрунтувати форму перерізу, а тоді знайти його площу. Отже, записувати початок розв'язання можна одним із двох способів (див. нижче).

Починаючи обчислення, слід урахувати, що задані в умові елементи призми (висота й площа її основи) не дозволяють розглянути жодний трикутник, у якому відомі хоча б два елементи.

Тому для виконання обчислень доведеться ввести невідомий відрізок (наприклад, позначити: $BC = x$) і скласти рівняння, із якого можна визначити невідомий відрізок (для цього достатньо виразити задану площу через x).

Розв'язання

I спосіб початку обґрунтування форми перерізу

▶ 1. За умовою пряма AB паралельна площині перерізу α і через пряму AB проходить площина $ABCD$, отже, пряма CM перетину цих площин паралельна прямій AB (рис. 4.7).

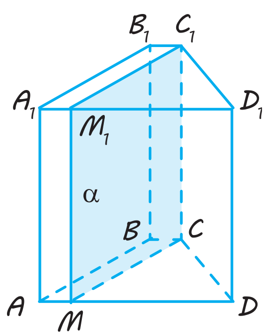


Рис. 4.7

II спосіб початку обґрунтування форми перерізу

▶ 1. Проведемо в площині $ABCD$ пряму $CM \parallel AB$ (рис. 4.8). Через CM і CC_1 проведемо площину α. За ознакою паралельності прямої й площини $\alpha \parallel AB$.

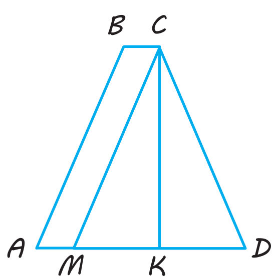


Рис. 4.8

2. Ураховуючи, що площини основ призми паралельні, маємо, що відповідні прямі їхнього перетину з площиною α також будуть паралельними: $C_1M_1 \parallel CM$. Крім того, паралельними є бічні грані AA_1D_1D і BB_1C_1C ($AD \parallel BC$ і $DD_1 \parallel CC_1$), тому відповідні прямі їхнього перетину з площиною α також паралельні: $MM_1 \parallel CC_1$. Отже, CMM_1C_1 — паралелограм. Але $CC_1 \perp$ пл. $ABCD$ (призма пряма), тому $CC_1 \perp CM$, тобто CMM_1C_1 — прямокутник.

3. У трапеції $ABCD$ (рис. 4.8) позначимо $BC = x$ $(x > 0)$. Якщо $CK \perp AD$, то за умовою $h_{тр} = CK = AD = 6x$. Ураховуючи, що $S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot h = 84$, одержуємо рівняння $\frac{6x + x}{2} \cdot 6x = 84$, тобто $21x^2 = 84$, $x^2 = 4$, $x = 2$. Звідси $BC = x = 2$ см, $AD = CK = 6x = 12$ см.

4. Ураховуючи властивості рівнобічної трапеції ($AM = BC = 2$ см, $MD = AD - AM = 10$ см, точка K — середина MD, тоді $MK = 5$ см), із прямокутного трикутника MCK маємо:

$$CM = \sqrt{CK^2 + MK^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13 \text{ (см)}.$$

5. За умовою призма пряма, отже, бічне ребро дорівнює висоті призми, тобто $CC_1 = 9$ см. Тоді площа перерізу дорівнює $S_{CMM_1C_1} = CM \cdot CC_1 = 13 \cdot 9 = 117$ (см²).

Відповідь: 117 см². ◁

Задача 3

Основою прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є квадрат $ABCD$ зі стороною 3 см. Бічне ребро AA_1 дорівнює 4 см. Знайдіть площу перерізу паралелепіпеда площиною, що проходить через вершину A перпендикулярно до прямої BA_1.

Розв'язання

I спосіб ***початку обґрунтування форми перерізу***	***II спосіб*** ***початку обґрунтування форми перерізу***
▶ 1. Оскільки за умовою площина перерізу $\alpha \perp BA_1$, то пряма AM перетину площин α і AA_1B_1B (рис. 4.9) перпендикулярна до прямої BA_1 $(AM \perp BA_1)$. Ураховуючи, що $AD \perp$ пл. AA_1B_1B, маємо: $AD \perp BA_1$. Але $\alpha \perp BA_1$, отже, пряма AD лежить у площині α (тобто площина α проходить через пряму AD і $AM \perp BA_1$).	▶ 1. Проведемо в площині AA_1B_1B пряму $AM \perp BA_1$ (рис. 4.9). Через прямі AM і AD проведемо площину α. Доведемо, що $\alpha \perp BA_1$. Оскільки $AD \perp$ пл. AA_1B_1B, то маємо: $AD \perp BA_1$. Ураховуючи, що за побудовою $AM \perp BA_1$, одержуємо: $\alpha \perp BA_1$.

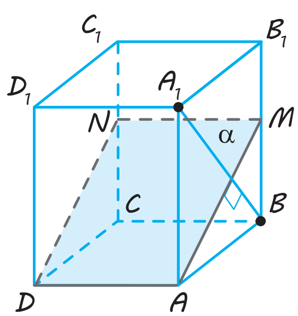


Рис. 4.9

2. Оскільки площини протилежних бічних граней прямокутного паралелепіпеда попарно паралельні, то відповідні прямі їхнього перетину з площиною α також попарно паралельні: $MN \parallel AD$, $AM \parallel DN$. Тоді $AMND$ — паралелограм. Але

$$AD \perp \text{пл.}\, AA_1B_1B, \text{ отже, } AD \perp AM,$$

тобто $AMND$ — прямокутник.

3. Із прямокутного трикутника AA_1B $(AA_1 \perp \text{пл.}\, ABCD)$ маємо:

$$A_1B = \sqrt{AB^2 + A_1A^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ (см)}.$$

4. Із подібності трикутників AMB і A_1BA (їх гострі кути рівні як кути з відповідно перпендикулярними сторонами) маємо: $\frac{AM}{A_1B}=\frac{AB}{AA_1}$. Тоді $\frac{AM}{5}=\frac{3}{4}$. Отже, $AM=\frac{15}{4}$ (см).

5. Знаходимо площу перерізу:

$$S_{AMND}=AD\cdot AM=$$
$$=3\cdot\frac{15}{4}=\frac{45}{4}=11\frac{1}{4}=11{,}25\,(\text{см}^2).$$

Відповідь: 11,25 см². ◁

Зауваження. Для обчислення площі перерізу $S_{\text{перерізу}}$ можна також використовувати ортогональну проекцію перерізу на площину нижньої основи заданого прямокутного паралелепіпеда (переріз проектується в квадрат основи $ABCD$) і обчислити площу перерізу за формулою, обґрунтованою в § 15 підручника для 10 класу:

$$S_{\text{перерізу}}=\frac{S_{\text{проекції}}}{\cos\varphi}=\frac{S_{ABCD}}{\cos\varphi},$$

де φ — кут між площиною перерізу й площиною проекції; $S_{\text{проекції}}$ — площа ортогональної проекції перерізу на площину нижньої основи заданого прямокутного паралелепіпеда.

У цьому випадку не потрібно обґрунтовувати форму перерізу (хоча доводиться обґрунтовувати або використовувати перпендикулярність площини перерізу до прямої BA_1; *див. п. 1 розв'язання*). Однак потрібно обґрунтувати, який саме кут є лінійним кутом двогранного кута, утвореного січною площиною й площиною ортогональної проекції перерізу. Це можна зробити, наприклад, у такий спосіб: оскільки $AB\perp AD$ (як сторони квадрата $ABCD$) і $MA\perp AD$ (оскільки $AD\perp$ пл. AA_1B_1B), то $\angle MAB$ — лінійний кут двогранного кута з ребром AD (тобто це і є кут φ між січною площиною й площиною ортогональної проекції перерізу). Для знаходження $\cos\varphi$ можна знову скористатися подібністю трикутників AMB і A_1BA.

Тоді $\cos\varphi=\frac{AB}{AM}=\frac{AA_1}{A_1B}=\frac{4}{5}$ і $S_{\text{перерізу}}=\frac{S_{ABCD}}{\cos\varphi}=\frac{9}{\frac{4}{5}}=\frac{45}{4}=11\frac{1}{4}$ (см²).

Задача 4*

Сторони основи правильної чотирикутної призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнюють 2, а бічні ребра — 5. На ребрі AA_1 позначили точку E таку, що $AE=3$. Знайдіть кут між площинами ABC і BED_1.

Розв'язання	Коментар
▶ 1. Оскільки задана призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 4.10) правильна, то її висотою є бічне ребро $AA_1\perp$ пл. $ABCD$. 2. Нехай пряма D_1E перетинає пряму DA в точці K, тоді BK — пряма перетину площин ABC і BED_1.	Використовуємо основні елементи схеми розв'язання задач на обчислення (*див. § 2*). 1. Обґрунтувати розташування висоти многогранника. 2. Обґрунтувати, що просторові кути й просторові відстані позначені правильно.

У площині $ABCD$ проведемо $AH \perp BK$, тоді $EH \perp BK$ (за теоремою про три перпендикуляри), отже, $\angle EHA$ — лінійний кут двогранного кута з ребром BK (який і дорівнює куту між площинами ABC і BED_1).

3. Із подібності трикутників AEK і A_1ED_1 (вони прямокутні з рівними гострими кутами) маємо: $\frac{AK}{A_1D_1} = \frac{AE}{A_1E}$. Ураховуючи, що за умовою $A_1D_1 = AB = 2$, $AA_1 = 5$, $AE = 3$, а отже, $A_1E = 2$, маємо: $\frac{AK}{2} = \frac{3}{2}$, тоді $AK = 3$.

4. Із прямокутного трикутника AKB ($ABCD$ — квадрат, тому $\angle KAB = 90°$) маємо:

$$BK = \sqrt{AK^2 + AB^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}.$$

Тоді $S_{\triangle AKB} = \frac{1}{2}AB \cdot AK = \frac{1}{2}BK \cdot AH$.

Звідси $AH = \frac{AB \cdot AK}{BK} = \frac{3 \cdot 2}{\sqrt{13}} = \frac{6}{\sqrt{13}}$.

5. Із прямокутного трикутника EHA маємо: $\operatorname{tg} \angle EHA = \frac{AE}{AH} = \frac{3}{\frac{6}{\sqrt{13}}} = \frac{\sqrt{13}}{2}$.

Отже, $\angle EHA = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{13}}{2}$.

Відповідь: $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{13}}{2}$. ◁

3. На кожному кроці обчислень указати, елементи якого трикутника визначаєте, і якщо він прямокутний, пояснити чому.

Для обґрунтування того, який саме кут є кутом між площинами, побудуємо спочатку слід січної площини на площині основи (для цього достатньо знайти точку K перетину прямої D_1E та її проекції DA на площину основи). Потім побудуємо лінійний кут відповідного двогранного кута з ребром KB. Для цього використовуємо орієнтир, наведений у підручнику для 10 класу (с. 123): *якщо з точки E, яка лежить на одній із граней двогранного кута, опущений перпендикуляр на його другу грань ($EA \perp$ пл. ABC), то для того, щоб побудувати відповідний лінійний кут, потрібно з основи заданого перпендикуляра (точки A) провести перпендикуляр на ребро двогранного кута й сполучити відрізком одержану на ребрі точку з точкою A.*

Нагадаємо, що для обчислення висоти AH прямокутного трикутника AKB достатньо записати його площу двома способами й прирівняти одержані вирази.

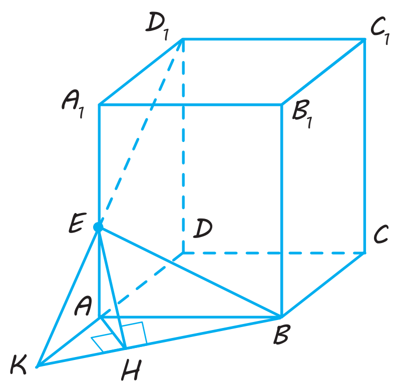


Рис. 4.10

Запитання

1. Наведіть приклад використання властивостей паралельних площин і прямих для побудови перерізу многогранника.

Вправи

4.1.° Побудуйте переріз чотирикутної призми площиною, що проходить через сторону основи й одну з вершин другої основи.

4.2.° Побудуйте переріз чотирикутної призми площиною, що проходить через три точки на бічних ребрах призми.

4.3.° Бічне ребро правильної трикутної призми дорівнює 6 см, а сторона основи — 8 см. Знайдіть площу перерізу призми площиною, що проходить через сторону нижньої основи й протилежну вершину верхньої основи.

4.4.° Сторони основи прямої трикутної призми дорівнюють 10, 17 і 21, а висота дорівнює 18. Знайдіть площу перерізу, що проходить через бічне ребро й меншу висоту основи.

4.5.° У прямій трикутній призмі через сторону основи під кутом 45° до неї проведено площину, що перетинає протилежне бічне ребро. Знайдіть площу перерізу, якщо площа основи дорівнює Q.

4.6. Сторони основи прямої трикутної призми дорівнюють 13 см, 37 см і 40 см, а бічне ребро дорівнює 20 см. Знайдіть:
1) площу перерізу призми площиною, що проходить через бічне ребро й меншу висоту основи призми;
2) площу перерізу призми площиною, що проходить через сторону основи під кутом 30° до площини основи.

4.7. Основою прямої трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$ є рівнобедрений трикутник ABC, де $AB = BC = 25$ см, $AC = 30$ см. Через бічне ребро AA_1 призми проведено площину, перпендикулярну до ребра BC. Визначте висоту призми, якщо площа утвореного перерізу дорівнює 72 см^2.

4.8. Діагональ основи правильної чотирикутної призми дорівнює $10\sqrt{2}$ см, а висота — 20 см. Знайдіть:
1) площу діагонального перерізу призми;
2) площу перерізу, що проходить через протилежні сторони основ призми;
3) площу перерізу призми, що проходить через сторону основи під кутом 45° до неї.

4.9. Діагональ основи правильної чотирикутної призми дорівнює $4\sqrt{2}$ см, а діагональ призми нахилена до площини основи під кутом 60°. Знайдіть площу перерізу призми, що проходить через сторону нижньої основи й протилежну сторону верхньої основи.

4.10. Основою прямої призми є прямокутний трикутник із катетами 20 см і 21 см. Через середину гіпотенузи перпендикулярно до неї проведено площину. Знайдіть площу перерізу, якщо бічне ребро призми дорівнює 42 см.

4.11.* Знайдіть площу бічної поверхні правильної трикутної призми, площа основи якої дорівнює S, а площа перерізу, проведеного через сторону однієї основи й протилежну вершину іншої основи, дорівнює Q.

4.12. Кожне ребро правильної шестикутної призми $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дорівнює a. Побудуйте переріз призми площиною, що проходить:
1) через вершини A, C і D_1;
2) через вершини A, B і E_1. Обчисліть площі цих перерізів.

4.13. Через діагональ основи правильної чотирикутної призми проведено переріз, паралельний діагоналі призми. Знайдіть площу перерізу, якщо висота призми дорівнює 4 см, а сторона її основи — 2 см.

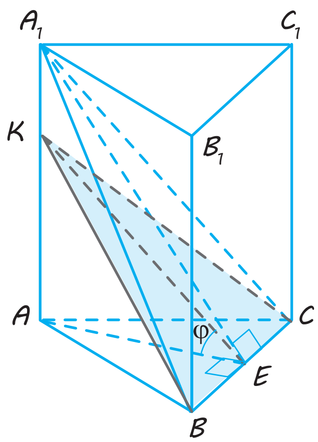
4.14. У правильній трикутній призмі, кожне ребро якої дорівнює a, побудуйте переріз, що проходить через сторону основи й середину відрізка, який сполучає центри основ. Знайдіть площу перерізу й кут між площиною перерізу й площиною основи.

4.15. Бічне ребро правильної чотирикутної призми дорівнює 7 см, а сторона основи — 8 см. Знайдіть площу перерізу, проведеного через середини двох суміжних сторін однієї основи, і найбільш віддалену від них вершину іншої основи.

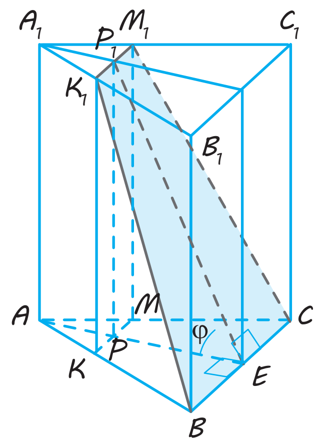
4.16. Площина проходить через сторону основи правильної трикутної призми й середину протилежного ребра та утворює з основою кут 45°. Сторона основи дорівнює a. Знайдіть:
1) площу бічної поверхні призми;
2) площу перерізу.

4.17.* У правильній трикутній призмі зі стороною основи a і висотою H через сторону нижньої основи під кутом φ до неї проведено площину. Знайдіть площу перерізу.

Указівка. Слід урахувати, що залежно від величини кута φ в перерізі можна одержати або трикутник (рис. 4.11, *а*), або рівнобічну трапецію (рис. 4.11, *б*).



а



б

Рис. 4.11

4.18.* Кожне ребро трикутної призми дорівнює a. Відомо, що плоскі кути одного з тригранних кутів призми рівні. Знайдіть площу перерізу, який ділить призму на симетричні частини.

4.19.* Побудуйте переріз правильної чотирикутної призми площиною, що проходить через середини двох суміжних сторін основи й середину відрізка, який сполучає центри основ. Знайдіть площу цього перерізу, якщо сторона основи призми дорівнює 2 дм, а висота призми — 4 дм.

4.20.* У правильній трикутній призмі $ABCA_1B_1C_1$ сторона основи дорівнює 2, бічні ребра — 3. Через вершини A, B_1 і точку D — середину ребра CC_1 проведено переріз призми. Знайдіть відстань від вершини C до площини перерізу.

4.21. У правильній чотирикутній призмі бічне ребро дорівнює 7 см, а сторона основи 8 см. Знайдіть площу перерізу, проведеного через середини двох суміжних сторін однієї основи та найбільш віддалену від них вершину другої основи.

Виявіть свою компетентність

4.22. Дерев'яний куб із ребром 28 см потрібно розпиляти так, щоб пилка пройшла через точки K, P і T на ребрах куба такі, щоб точки K і P знаходилися на відстані 7 см від найближчої вершини куба, а T — була серединою відповідного ребра куба (рис. 4.12, a). Як побудувати на кубі лінії розпилу?

Указівка. Побудуйте відповідний переріз на зображенні куба і знайдіть відстань DX, де X — точка перетину січної площини з ребром DD_1 (рис. 4.12, б).

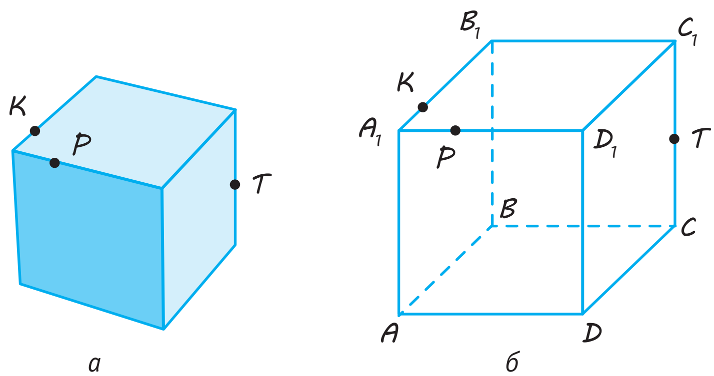
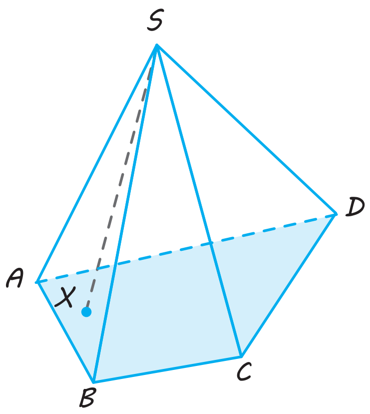


Рис. 4.12

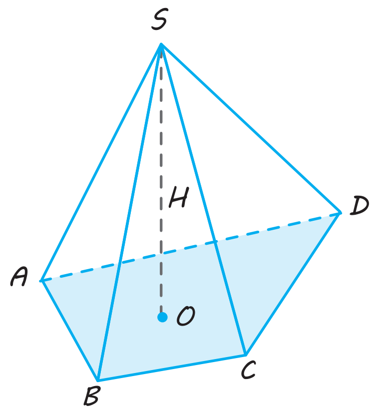
§ 5 ПІРАМІДА

Таблиця 4

Піраміда



Пірамідою називається многогранник, що складається із плоского многокутника (основи піраміди), точки, яка не лежить у площині основи (вершини піраміди), і всіх відрізків, що сполучають вершину піраміди з точками основи.



$ABCD$ — основа піраміди,
S — вершина піраміди,
SA, SB, BC, SD — бічні ребра,
$\triangle ASB$, $\triangle BSC$, $\triangle CSD$, $\triangle ASD$ — бічні грані

Висота піраміди — перпендикуляр, проведений із вершини піраміди на площину основи.
SO — висота піраміди, $SO = H$ $(SO \perp \text{пл.}\, ABCD)$.

$$S_{\text{бічн. пір}} = S_{\triangle ASB} + S_{\triangle BSC} + S_{\triangle CSD} + S_{\triangle ASD}$$

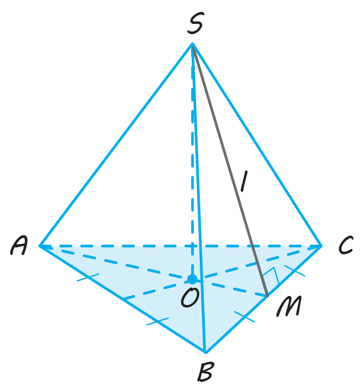
$$S_{\text{повн. пір}} = S_{\text{бічн}} + S_{\text{осн}}$$

Правильна піраміда

Піраміда називається правильною, якщо її основою є правильний многокутник, а основа висоти збігається з центром цього многокутника.

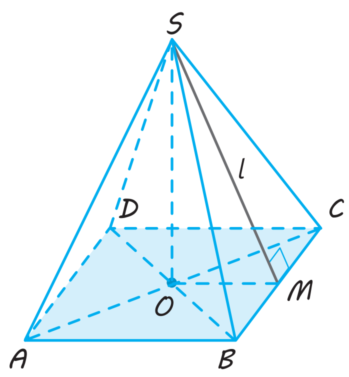
Деякі види правильних пірамід

Трикутна



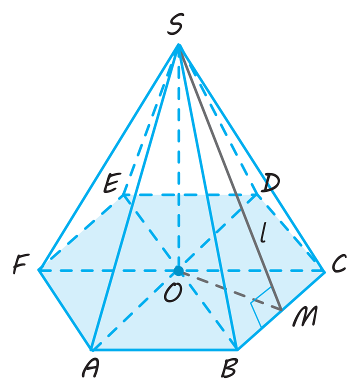
$\triangle ABC$ — правильний,
O — точка перетину медіан (висот і бісектрис),
центр вписаного й описаного кіл

Чотирикутна



$ABCD$ — квадрат,
O — точка перетину діагоналей

Шестикутна



$ABCDEF$ — правильний шестикутник,
O — точка перетину діагоналей AD, BE і FC

SO — висота правильної піраміди ($SO \perp \text{пл.}\, ABC$; O — центр основи),
SM — апофема правильної піраміди $(SM \perp BC)$ (висота бічної грані)

Закінчення табл. 4

Властивості
1. У правильній піраміді бічні ребра рівні й однаково нахилені до площини основи. $SA = SB = SC = \ldots,\ \angle SAO = \angle SBO = \angle SCO = \ldots$
2. Бічні грані правильної піраміди — рівні рівнобедрені трикутники, однаково нахилені до основи. $\triangle ASB = \triangle BSC = \ldots$
3. $S_{\text{бічн}} = \frac{1}{2}P_{\text{осн}} \cdot SM = \frac{1}{2}P_{\text{осн}} \cdot l$, де l — апофема.
4. $S_{\text{бічн}} = \frac{S_{\text{осн}}}{\cos\varphi}$, де $\varphi = \angle SMO$ — кут нахилу всіх бічних граней до основи, $S_{\text{бічн}} = S_{\text{бічн. гр}} \cdot n$, де n — число граней.
5. $S_{\text{повн}} = S_{\text{бічн}} + S_{\text{осн}}$

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1 Поняття піраміди і її елементів

Сформулюємо означення піраміди, аналогічне до означення призми.

Означення. **Пірамідою називається многогранник, що складається з плоского многокутника — основи піраміди, точки, яка не лежить у площині основи, — вершини піраміди — і всіх відрізків, що сполучають вершину піраміди з точками основи (рис. 5.1).**

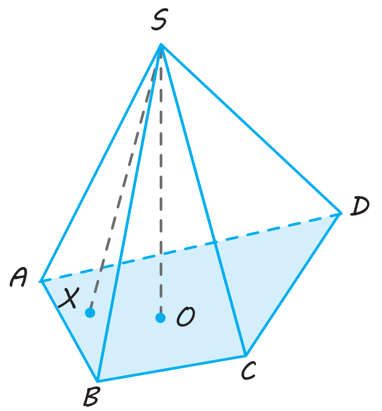


Рис. 5.1

Нагадаємо, що відрізки, які сполучають вершину піраміди з вершинами основи, називаються бічними ребрами. Наприклад, на рисунку 5.1 основою піраміди $SABCD$ є многокутник (чотирикутник) $ABCD$, а бічними ребрами — відрізки SA, SB, SC, SD.

Поверхня піраміди складається з *основи й бічних граней*. Кожна бічна грань є трикутником. Однією з вершин цього трикутника є вершина піраміди, а протилежною стороною — сторона основи піраміди. Зокрема, у розглянутій піраміді бічними гранями є трикутники SAB, SBC, SCD, SAD. Для знаходження площі бічної поверхні піраміди достатньо знайти суму площ усіх її бічних граней, а для знаходження площі повної поверхні піраміди — суму площ усіх її граней:

$$S_{\text{бічн}} = S_{\triangle SAB} + S_{\triangle SBC} + S_{\triangle SCD} + S_{\triangle SAD},$$

$$S_{\text{повн}} = S_{\triangle SAB} + S_{\triangle SBC} + S_{\triangle SCD} + S_{\triangle SAD} + S_{ABCD} = S_{\text{бічн}} + S_{\text{осн}}.$$

Висотою піраміди називається перпендикуляр, проведений із вершини піраміди на площину основи (якщо $SO \perp$ пл. $ABCD$, то SO — висота піраміди $SABCD$). Довжину цього перпендикуляра також називають висотою піраміди.

Піраміда називається *n-кутною*, якщо її основою є n-кутник. Трикутну піраміду іноді називають *тетраедром*, що в перекладі з грецької означає «чотиригранник». Тетраедр, усі грані якого — правильні трикутники, називається *правильним тетраедром*.

У n-кутній піраміді маємо $(n+1)$ вершину, $2n$ ребер і $(n+1)$ грань.

Надалі розглядатимемо тільки піраміди, у яких основи — опуклі многокутники. Такі піраміди є опуклими многогранниками.

Відповідно до правил паралельного проектування, зображення піраміди будують так. Починають із зображення її основи — деякого плоского многокутника. Потім зображують вершину піраміди, яку сполучають бічними ребрами з вершинами основи (див., наприклад, рис. 5.1). Якщо потрібно зобразити висоту піраміди, то для наочності її зазвичай зображують вертикальним відрізком.

Зазначимо, що за властивостями паралельного проектування зображення висоти у вигляді вертикального відрізка не є обов'язковим — головне, щоб зображуваний відрізок сполучав вершину піраміди з точкою основи, яка є зображенням основи висоти піраміди (див. також табл. 5 в § 6).

Форма піраміди широко використовується в архітектурі, наприклад, новий вхід до Лувру було збудовано в формі піраміди.

2 Правильна піраміда

Означення. **Піраміда називається правильною, якщо її основою є правильний многокутник, а основа висоти збігається з центром цього многокутника.**

Для побудови зображення правильної піраміди будують зображення відповідного правильного многокутника (основи піраміди) і його центра. Потім з отриманого центра проводять висоту (як зазначалося вище, для наочності висоту зображують вертикальним відрізком) і позначають на ній вершину піраміди. Після цього сполучають вершину піраміди з вершинами основи (як завжди, невидимі ребра зображують штриховими лініями).

У таблиці наведені зображення правильної трикутної, чотирикутної й шестикутної пірамід.

Нагадаємо, що зображенням правильного трикутника може бути довільний трикутник, а центр правильного трикутника (рис. 5.2) зображують точкою перетину медіан трикутника зображення (див. § 12 підручника для 10 класу).

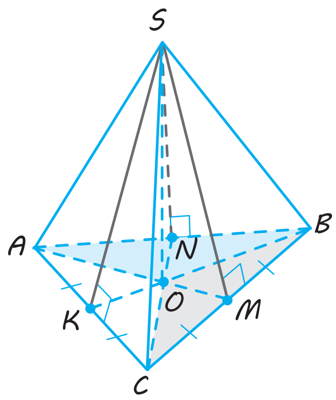


Рис. 5.2

Віссю правильної піраміди називається пряма, що містить її висоту.

Оскільки всі бічні ребра правильної піраміди рівні (вони мають рівні проекції), то її бічні грані — **рівні рівнобедрені трикутники.**

Висота бічної грані правильної піраміди, проведена з її вершини, називається *апофемою*.

Ураховуючи, що всі бічні грані піраміди — рівнобедрені трикутники, маємо, що апофема (висота) є одночасно бісектрисою й медіаною відповідного рівнобедреного трикутника. Отже, якщо SM — апофема, проведена в грані SBC, то точка M — середина сторони основи BC (рис. 5.2).

Оскільки всі бічні грані правильної піраміди рівні, то рівними будуть і відповідні висоти, тобто апофеми. Отже, усі **апофеми правильної піраміди рівні**.

Зазначимо, що коли $BC \perp SM$, то $OM \perp BC$ (за теоремою про три перпендикуляри), тоді кут SMO — лінійний кут двогранного кута при ребрі BC, тобто це кут нахилу бічної грані до основи піраміди.

Аналогічно кутами нахилу бічних граней до основи піраміди є кути SNO і SKO. Ураховуючи, що прямокутні трикутники SMO, SNO і SKO рівні (за гіпотенузою і катетом), одержуємо:

$$\angle SMO = \angle SNO = \angle SKO.$$

Отже, **усі бічні грані правильної піраміди нахилені під рівними кутами до її основи.**

Аналогічно з рівності прямокутних трикутників SAO, SBO і SCO (за гіпотенузою і катетом) одержуємо:

$$\angle SAO = \angle SBO = \angle SCO.$$

Але це кути нахилу бічних ребер піраміди до площини основи, отже, **усі бічні ребра правильної піраміди нахилені під рівними кутами до площини її основи.**

Зазначимо, що всі наведені результати виконуються не тільки для трикутної, але й для будь-якої правильної піраміди, оскільки всі обґрунтування можна повторити для будь-якої правильної піраміди.

Наведемо ще одну корисну властивість правильної піраміди.

Теорема 5.1. Площа бічної поверхні правильної піраміди дорівнює добутку півпериметра основи на апофему.

Нехай сторона основи правильної піраміди дорівнює a, число сторін основи — n. Тоді площа бічної поверхні піраміди дорівнює сумі площ n її рівних бічних граней, тобто дорівнює площі бічної грані, помноженої на n:

$$S_{\text{бічн}} = \frac{1}{2} al \cdot n = \frac{an}{2} \cdot l = pl,$$

де l — апофема, а p — півпериметр основи піраміди. ○

Площу бічної поверхні правильної піраміди можна також обчислити за формулою

$$S_{\text{бічн}} = \frac{S_{\text{осн}}}{\cos\varphi},$$

де φ — кут нахилу бічних граней до основи піраміди.

Обґрунтуємо цю формулу, наприклад, для правильної трикутної піраміди $SABC$ (рис. 5.2). Нехай усі бічні грані правильної піраміди нахилені до основи під кутом φ. Розглянемо ортогональні проекції бічних граней на площину основи. Грань SBC проектується в трикутник BOC, грань SAB — у трикутник AOB, грань SAC — у трикутник AOC.

Із урахуванням формули $S_{\text{фігури}} = \dfrac{S_{\text{проекції}}}{\cos\varphi}$,

де $S_{\text{фігури}}$ — площа фігури, $S_{\text{проекції}}$ — площа проекції (див. § 15 підручника для 10 класу), одержуємо:

$$S_{\triangle SBC} = \frac{S_{\triangle BOC}}{\cos\varphi};\; S_{\triangle SAB} = \frac{S_{\triangle AOB}}{\cos\varphi};\; S_{\triangle SAC} = \frac{S_{\triangle AOC}}{\cos\varphi}.$$

Додаючи почленно отримані рівності (і враховуючи, що

$$S_{\triangle SBC} + S_{\triangle SAB} + S_{\triangle SAC} = S_{\text{бічн}}),$$

маємо:

$$S_{\text{бічн}} = \frac{S_{\triangle BOC} + S_{\triangle AOB} + S_{\triangle AOC}}{\cos\varphi} = \frac{S_{\triangle ABC}}{\cos\varphi} = \frac{S_{\text{осн}}}{\cos\varphi}.$$

Аналогічно можна обґрунтувати, що отримана формула має місце для довільної правильної піраміди.

3 Перерізи піраміди

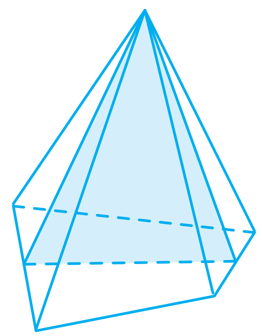


Рис. 5.3

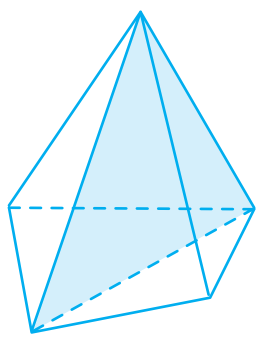


Рис. 5.4

Переріз піраміди площиною, що проходить через її вершину і перетинає її основу, — це завжди трикутник (рис. 5.3).

Зокрема, трикутниками є *діагональні перерізи* — перерізи площинами, що проходять через дві не сусідні бічні ребра піраміди (рис. 5.4).

Як і в задачах, пов'язаних із призмою (див. § 4), під час побудови або розгляду перерізів піраміди площинами, що не проходять через вершину піраміди, можна використовувати або властивості паралельності й перпендикулярності прямих і площин, або метод слідів (див. також с. 38–39 підручника для 10 класу). Для побудови перерізу піраміди площиною достатньо побудувати відрізки перетину її граней із січною площиною.

Наприклад, для побудови перерізу чотирикутної піраміди $SABCD$ площиною, що проходить через точки K, M, N на її ребрах (рис. 5.5), можна побудувати слід січної площини на площині основи.

Для цього доцільно розглянути центральне проектування із центром S на площину основи піраміди (див. § 7 підручника для 10 класу) або використовувати кілька допоміжних площин (див. § 3 підручника для 10 класу).

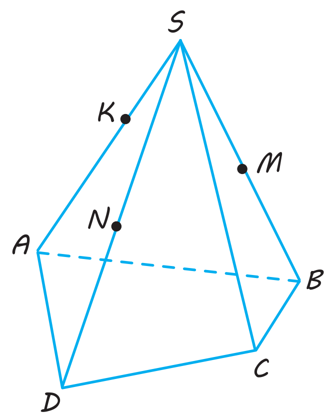


Рис. 5.5

У випадку центрального проектування проекцією відрізка KN є відрізок AD, а проекцією відрізка KM — відрізок AB.

Щоб знайти слід січної площини на площині основи, достатньо знайти дві точки перетину прямих січної площини з їхніми проекціями на площину основи.

Знаходимо точки перетину прямих KN і AD — точку Q — і прямих KM і AB — точку P (рис. 5.6).

Тоді QP — слід січної площини на площині $ABCD$. Щоб знайти точку L перетину ребра SC із січною площиною, використовуємо те, що пряма KL перетинається з її проекцією (AC) у точці, що лежить на сліді QP. Тому проводимо пряму AC до перетину зі слідом у точці T і, сполучаючи точку T із точкою K, у перетині з ребром SC одержуємо точку L перетину січної площини з ребром SC. Потім, сполучаючи точки перетину січної площини з ребрами піраміди, одержуємо шуканий переріз $KMLN$.

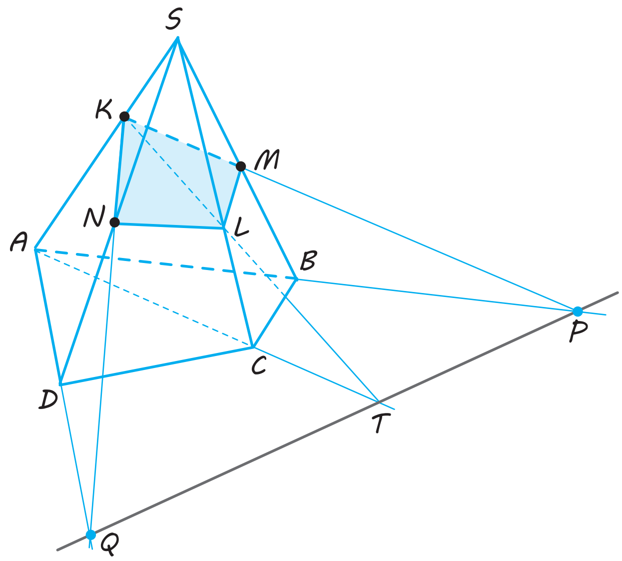


Рис. 5.6

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 1 У правильній чотирикутній піраміді бічне ребро, що дорівнює 8 см, нахилене до площини основи під кутом 45°. Знайдіть площу повної поверхні піраміди.

Розв'язання	Коментар
1. Нехай $SABCD$ (рис. 5.7) — задана піраміда з бічним ребром $SA = 8$ см. За умовою піраміда правильна, отже, основою її висоти SO є центр O основи (точка перетину діагоналей квадрата $ABCD$).	Під час розв'язування задачі та її оформлення доцільно користуватися схемою, наведеною в § 2. Нагадаємо основні етапи розв'язання за цією схемою.
2. Оскільки $SO \perp$ пл. $ABCD$, то AO — проекція бічного ребра SA на площину основи, тобто кут SAO — кут нахилу бічного ребра SA до площини основи й $\angle SAO = 45°$.	1. Обґрунтувати розташування висоти піраміди (у цьому випадку достатньо використовувати означення правильної піраміди).
3. Із прямокутного трикутника SAO (SO — висота піраміди) маємо: $$AO = SA \cdot \cos 45° = 8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2} \text{ (см)}.$$	2. Обґрунтувати, що просторові кути й просторові відстані позначені правильно (нам задано кут між бічним ребром і площиною основи, тобто кут між цим ребром і його проекцією на площину основи).
4. За властивістю діагоналей квадрата $AO \perp BD$ і $BO = AO$, тоді з прямокутного трикутника AOB маємо: $$AB = \sqrt{AO^2 + BO^2} =$$ $$= \sqrt{(4\sqrt{2})^2 + (4\sqrt{2})^2} = 8 \text{ (см)}.$$	3. Обґрунтувати вид і розташування заданого перерізу (у цій задачі перерізу немає). 4. На кожному етапі обчислень указати, елементи якого трикутника визначаєте, і якщо він прямокутний, пояснити чому. Зазначимо: щоб обґрунтувати, що трикутник SAO прямокутний, достатньо вказати, що SO — висота піраміди (тоді $SO \perp$ пл. $ABCD$, отже, $SO \perp AO$).

5. Отже, у заданій піраміді всі ребра дорівнюють 8 см. Тоді

$$S_{\text{осн}} = AB^2 = 64 \text{ см}^2.$$

$$S_{\text{бічн}} = 4S_{\triangle ASB} = 4 \cdot \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = 64\sqrt{3} \text{ (см}^2\text{)}.$$

Таким чином,

$$S_{\text{повн}} = S_{\text{бічн}} + S_{\text{осн}} = 64 + 64\sqrt{3} =$$
$$= 64\left(1+\sqrt{3}\right)\text{(см}^2\text{)}.$$

Відповідь: $64\left(1+\sqrt{3}\right)$ см². ◁

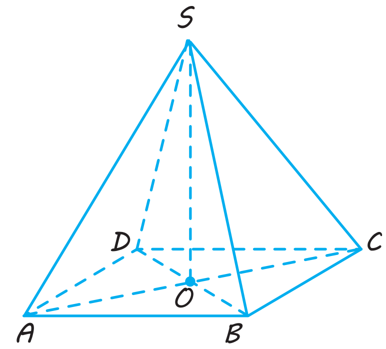


Рис. 5.7

Для знаходження площі бічної поверхні піраміди можна врахувати, що всі бічні грані правильної піраміди рівні, тому можна знайти площу однієї грані й результат помножити на 4.

Задача 2

У правильній трикутній піраміді $SABC$ з основою ABC сторона основи дорівнює $12\sqrt{3}$, а бічне ребро — 13. Знайдіть кут, який утворює пряма MN із площиною ABC, якщо точка M — середина сторони BC, а точка N — середина ребра SA.

Розв'язання	Коментар

▶ 1. Оскільки піраміда правильна, то основою її висоти SO $(SO \perp \text{пл.}\, ABCD)$ є центр O трикутника ABC — основи піраміди (тоді точка O належить медіані AM). У площині ASM проведемо відрізок $NE \parallel SO$ $(E \in AM)$.

Тоді $NE \perp \text{пл.}\, ABC$.

2. Отже, EM — проекція NM на площину ABC і кут NME — кут між прямою NM і площиною ABC.

3. За властивістю правильного трикутника $AM = \frac{\sqrt{3}}{2}AC = 18$. Тоді $AO = \frac{2}{3}AM = 12$.

4. Із прямокутного трикутника ASO (SO — висота піраміди) маємо:

$$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5.$$

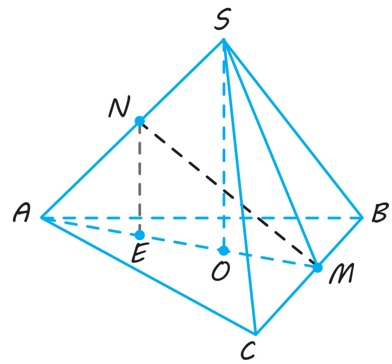


Рис. 5.8

Як завжди, на першому етапі розв'язання обґрунтовуємо розташування висоти піраміди, а на другому — розташування просторового кута між прямою й площиною.

За означенням, кут між прямою MN і площиною ABC — це кут між прямою та її проекцією на площину ABC. Точка M лежить у площині ABC і проектується на цю площину сама в себе. Щоб спроектувати точку N на площину ABC, потрібно провести перпендикуляр NE на площину ABC. Це можна зробити декількома способами.

Оскільки точка N — середина ребра SA і $SO \parallel NE$, то трикутники ANE і ASO подібні з коефіцієнтом подібності $\frac{1}{2}$. Тоді $NE = \frac{1}{2}SO = \frac{5}{2}$ і $AE = \frac{1}{2}AO = 6$.

5. Далі маємо:

$$EM = AM - AE = 12.$$

Із прямокутного трикутника NME маємо: $\operatorname{tg} \angle NME = \frac{NE}{EM} = \frac{5}{24}$.

Отже, $\angle NME = \operatorname{arctg}\frac{5}{24}$.

Відповідь: $\operatorname{arctg}\frac{5}{24}$. ◁

Наприклад, урахувати, що висота SO перпендикулярна до площини ABC, і провести $NE \parallel SO$ або врахувати, що площина SAM, яка проходить через висоту SO, перпендикулярна до площини ABC, і провести перпендикуляр до прямої їхнього перетину $(NE \perp AM)$.

Записуючи за значенням тангенса кута величину цього кута, слідураховувати, що кут між прямою і площиною може бути тільки в межах $[0°; 90°]$. Але в цьому випадку це кут прямокутного трикутника, тому він має бути в межах $(0°; 90°)$, тобто є гострим кутом. Отже, одержуємо тільки один кут, тангенс якого дорівнює $\frac{5}{24}$, — це $\operatorname{arctg}\frac{5}{24}$.

Задача 3

У правильній трикутній піраміді $SABC$ з основою ABC бічне ребро вдвічі більше за сторону основи. Точки K і L — середини ребер AB і BC відповідно. Через пряму KL паралельно ребру SC проведено площину α. Знайдіть кут між площиною α й площиною ABC.

Розв'язання	Коментар

▶ 1. Оскільки піраміда правильна, то основою її висоти SO є центр O трикутника основи — точка перетину висот, медіан і бісектрис трикутника ABC.

2. Нехай N — середина ребра SB. Тоді LN — середня лінія трикутника BSC і $LN \parallel SC$. Отже, $SC \parallel \text{пл.}\, LNK$, тобто площина LNK і є заданою січною площиною α (рис. 5.9).

3. Ураховуючи, що $LK \parallel AC$ (середня лінія трикутника ABC) і $LN \parallel SC$, маємо: $\alpha \parallel \text{пл.}\, SAC$. Але паралельні площини утворюють рівні кути із січною площиною, тому шукатимемо кут між площинами SAC і ABC.

4. Якщо $BM \perp AC$, то $SM \perp AC$ (за теоремою про три перпендикуляри), отже, кут SMO — лінійний кут гострого двогранного кута при ребрі AC.

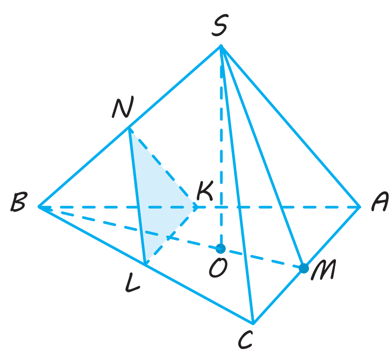


Рис. 5.9

Як було зазначено вище, спочатку можна побудувати переріз, а потім доводити, що він паралельний ребру SC, — саме так і зроблено в розв'язанні.

Але можна зробити інакше: описувати розташування перерізу, спираючись на властивості паралельності прямих і площин. Наприклад, необхідно врахувати, що через пряму SC (яка паралельна січній площині α) проходить площина SBC, що перетинає площину α по прямій LN, паралельній прямій SC. Виконувати й оформляти розв'язання можна за схемою, наведеною в § 2.

5. Нехай $AB = AC = BC = x$, тоді за умовою $SA = SB = SC = 2x$.

6. За властивістю правильного трикутника ABC одержуємо:

$$OM = \frac{1}{3}BM = \frac{x\sqrt{3}}{6} \text{ і } AM = \frac{1}{2}AC = \frac{x}{2}.$$

7. Із прямокутного трикутника SAM маємо:

$$SM = \sqrt{SA^2 - AM^2} = \\ = \sqrt{(2x)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{x\sqrt{15}}{2}.$$

8. Із прямокутного трикутника SMO одержуємо:

$$\cos\angle SMO = \frac{OM}{SM} = \frac{1}{3\sqrt{5}}.$$

Отже, шуканий кут дорівнює

$$\arccos\frac{1}{3\sqrt{5}}.$$

Відповідь: $\arccos\frac{1}{3\sqrt{5}}$. ◁

1. Обґрунтувати розташування висоти піраміди (у цьому випадку достатньо використовувати означення правильної піраміди).

2. Обґрунтувати, що просторові кути й просторові відстані позначені правильно (у цій задачі це кут між площиною α й площиною ABC). Для такого обґрунтування доцільно врахувати, що площина α паралельна площині SAC, тому з площиною ABC вони утворюють рівні кути.

3. Обґрунтувати вид і розташування заданого перерізу.

4. На кожному етапі обчислень указати, елементи якого трикутника визначаєте, і якщо він прямокутний, пояснити чому. Крім того, слід урахувати ще один орієнтир: якщо в умові задачі на обчислення не задано довжину жодного відрізка (або задані відрізки й кути не вдається об'єднати в зручний для розв'язання трикутник), то для її розв'язання доцільно ввести невідомий відрізок (або невідомий кут, або декілька невідомих).

Запитання

1. Що таке піраміда? основа піраміди? бічні грані? ребра? висота?
2. Що таке правильна піраміда? висота правильної піраміди? апофема?
3. Обґрунтуйте, що в правильній піраміді:
   1) усі бічні ребра рівні;
   2) усі бічні грані — рівні рівнобедрені трикутники, а всі апофеми рівні;
   3) усі бічні грані нахилені під рівними кутами до основи;
   4) усі бічні ребра нахилені під рівними кутами до площини основи.
4. Що таке бічна поверхня піраміди? повна поверхня піраміди?
5. Доведіть, що площа бічної поверхні правильної піраміди дорівнює добутку півпериметра основи на апофему.
6.* Доведіть, що площу бічної поверхні правильної піраміди можна обчислити за формулою $S_{\text{бічн}} = \frac{S_{\text{осн}}}{\cos\varphi}$, де φ — кут нахилу бічних граней до основи піраміди.
7. Яка фігура є перерізом піраміди площиною, що проходить через її вершину (і перетинає основу піраміди)?
8. Поясніть зміст методу слідів побудови перерізів піраміди.

Вправи

5.1.° У піраміді 31 грань. Скільки в неї ребер?

5.2.° Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює 7 см, а сторона основи — 8 см. Знайдіть бічне ребро.

5.3. За стороною основи a і бічним ребром b знайдіть висоту правильної піраміди: 1) трикутної; 2) чотирикутної; 3) шестикутної.

5.4. За стороною основи a і висотою H знайдіть апофему правильної піраміди: 1) трикутної; 2) чотирикутної; 3) шестикутної.

5.5. За стороною основи a і висотою H знайдіть площу повної поверхні правильної піраміди: 1) трикутної; 2) чотирикутної; 3) шестикутної.

5.6. Знайдіть площу повної поверхні правильної шестикутної піраміди, якщо її бічне ребро дорівнює a і радіус кола, вписаного в основу, — r.

5.7. Площа бічної поверхні правильної чотирикутної піраміди дорівнює 14,76 м^2, а площа повної поверхні — 18 м^2. Знайдіть сторону основи й висоту піраміди.

5.8. Знайдіть площу бічної поверхні правильної трикутної піраміди, якщо її висота дорівнює 4 см, а апофема — 8 см.

5.9. Знайдіть площу бічної поверхні правильної трикутної піраміди, якщо бічне ребро утворює з площиною основи кут 45°, а сторона її основи дорівнює a.

5.10. Знайдіть площу повної поверхні правильної трикутної піраміди, якщо її апофема дорівнює 10 см, а висота — 8 см.

5.11. За стороною основи a знайдіть площу бічної поверхні правильної чотирикутної піраміди, діагональний переріз якої рівновеликий основі.

5.12. Площа бічної поверхні правильної трикутної піраміди в 2 рази більша за площу основи. Знайдіть кут між бічною гранню й основою піраміди.

5.13. Знайдіть двогранні кути при основі правильної піраміди, площа основи якої дорівнює Q, а площа бічної поверхні — S.

5.14.* Знайдіть висоту й площу повної поверхні правильної чотирикутної піраміди, сторона основи якої дорівнює 30 см, а центр основи віддалений від бічної грані на 12 см.

5.15.* Знайдіть сторону основи й апофему правильної трикутної піраміди, якщо її бічне ребро дорівнює 10 см, а площа бічної поверхні — 144 см^2.

5.16. Знайдіть сторону основи правильної чотирикутної піраміди, якщо її бічне ребро дорівнює 5 см, а площа повної поверхні — 16 см^2.

5.17. Центр однієї з граней куба й середини сторін протилежної грані є вершинами піраміди. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди, якщо ребро куба дорівнює a.

5.18.* Бічне ребро правильної чотирикутної піраміди нахилене до площини основи під кутом α. Знайдіть двогранний кут при ребрі основи піраміди.

5.19.* Бічне ребро правильної трикутної піраміди нахилене до площини основи під кутом α. Знайдіть двогранний кут при ребрі основи піраміди.

5.20.* Основа висоти MO правильної чотирикутної піраміди $MABCD$ віддалена від площини бічної грані MAB на 4 см. Знайдіть відстань від вершини C до площини MAB.

5.21.* У правильній чотирикутній піраміді $MABCD$ з основою $ABCD$ плоский кут при вершині M дорівнює α. Сторона основи дорівнює a. Знайдіть:
1) двогранний кут при ребрі основи;
2) двогранний кут при бічному ребрі;
3) кут між площинами сусідніх бічних граней;
4) кут між площинами несусідніх бічних граней;
5) висоту піраміди;
6) відстань від центра основи піраміди до бічної грані;
7) відстань від вершини A до бічної грані MCB;
8) кут між бічною гранню й бічним ребром, яке не лежить у цій грані;
9) кут між бічною гранню й ребром основи, яке перетинає цю грань;
10) відстань від точки K (середини ребра AB) до бічної грані MCB;
11) кут між бічною гранню й апофемою протилежної бічної грані;
12) усі висоти піраміди $MABC$;
13) усі висоти піраміди $MAKC$.

5.22.* У правильну чотирикутну піраміду вписано куб так, що чотири його вершини лежать на бічних ребрах піраміди, а інші чотири — у площині її основи. Знайдіть ребро куба, якщо сторона основи піраміди дорівнює a, а висота піраміди — H.

5.23.* У правильній чотирикутній піраміді довжина ребра основи дорівнює a, двогранний кут при ребрі основи — α. У піраміду вписано куб так, що чотири його вершини лежать у площині основи піраміди, а інші чотири — на бічних ребрах піраміди. Знайдіть ребро куба.

5.24.* Визначте двогранний кут при основі правильної чотирикутної піраміди, бічна грань і діагональний переріз якої рівновеликі.

5.25.° Побудуйте переріз піраміди площиною, що проходить через вершину піраміди і дві задані точки на її основі.

5.26.° Побудуйте переріз трикутної піраміди площиною, що проходить через сторону основи піраміди й задану точку на протилежному ребрі.

5.27. Побудуйте переріз чотирикутної піраміди площиною, що проходить через сторону основи й точку на одному з бічних ребер.

5.28. У правильній трикутній піраміді через сторону основи проведено площину, перпендикулярну до протилежного бічного ребра. Знайдіть площу отриманого перерізу, якщо сторона основи дорівнює a, висота піраміди — h.

5.29.* Сторона основи правильної чотирикутної піраміди $SABCD$ дорівнює a. Бічне ребро утворює з площиною основи кут $60°$. Побудуйте переріз піраміди площиною, що проходить через вершину A її основи перпендикулярно до бічного ребра SC, і знайдіть площу цього перерізу.

5.30.* За стороною основи a і висотою h правильної шестикутної піраміди знайдіть площу перерізу, проведеного через сторону основи й середину висоти піраміди.

5.31.* Площа бічної грані правильної шестикутної піраміди дорівнює Q. Знайдіть площу перерізу, який проходить через середину висоти піраміди паралельно бічній грані.

5.32. Площа перерізу правильної чотирикутної піраміди площиною, проведеною через центр основи піраміди паралельно бічній грані, дорівнює Q. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

5.33. $MABCDKP$ — правильна шестикутна піраміда з основою $ABCDKP$. Переріз, що проходить через точки M, A і D, — рівносторонній трикутник зі стороною 6. Знайдіть бічне ребро й висоту піраміди.

5.34.* Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює h і утворює з бічною гранню кут α. Через сторону основи піраміди проведено площину, перпендикулярну до протилежної грані, яка перетинає цю грань. Знайдіть площу отриманого перерізу.

5.35.* У правильній трикутній піраміді $SABC$ з основою ABC бічне ребро вдвічі більше за сторону основи. Точки K і L є серединами ребер AC і BC відповідно. Через пряму KL паралельно ребру SC проведено площину α. Знайдіть кут між площиною α і площиною ABC.

Виявіть свою компетентність

5.36. Підготуйте презентацію з фотографіями фрагментів будівель або навколишніх предметів у формі різноманітних пірамід.

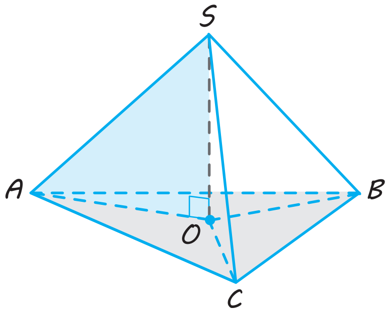
Наприклад, Палац миру та злагоди в столиці Казахстану або піраміда Хеопса (Єгипет) мають форму піраміди.

◄ Палац миру та злагоди (Казахстан)

▲ Піраміда Хеопса (Єгипет)

§ 6 РОЗТАШУВАННЯ ВИСОТИ В ДЕЯКИХ ВИДАХ ПІРАМІД

Таблиця 5

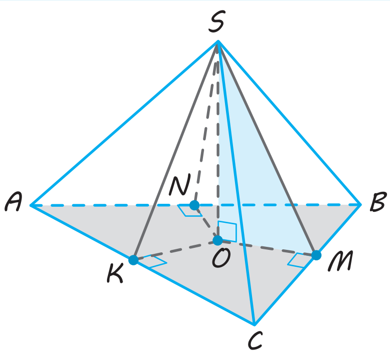


1. Якщо всі бічні ребра піраміди рівні, або нахилені під рівними кутами до площини основи, або утворюють рівні кути з висотою піраміди, то **основа висоти піраміди є центром кола, описаного навколо основи (і** навпаки).

Якщо в піраміді $SABC$: $SA = SB = SC$,
або $\angle SAO = \angle SBO = \angle SCO$,
або $\angle ASO = \angle BSO = \angle CSO$
і $SO \perp$ пл. ABC,
то O — центр описаного навколо основи кола $(OA = OB = OC)$.

Якщо в піраміді $SABC$:
$SO \perp$ пл. ABC і точка O — центр описаного навколо основи кола,
то $SA = SB = SC$,
$\angle SAO = \angle SBO = \angle SCO$
і $\angle ASO = \angle BSO = \angle CSO$.

Для розв'язання використовують прямокутний трикутник SAO, у якому:
$SO \perp AO$, $AO = R_{\text{опис}}$ — радіус описаного навколо основи кола,
$\angle SAO$ — кут нахилу бічного ребра SA до площини основи.



2. Якщо всі бічні грані піраміди утворюють рівні кути з основою, то **основою висоти піраміди є центр кола, вписаного в основу** (і навпаки).

Якщо в піраміді $SABC$:
грані SAB, SAC і SBC однаково нахилені до основи ABC
(тобто $\angle SMO = \angle SKO = \angle SNO$ — відповідні лінійні кути рівні)
і $SO \perp$ пл. ABC,
то O — центр кола, вписаного в основу $(OK = OM = ON = r_{\text{впис}})$.

Якщо в піраміді $SABC$:
$SO \perp$ пл. ABC і точка O — центр кола, вписаного в основу,
то $\angle SMO = \angle SKO = \angle SNO$
(тобто всі бічні грані піраміди нахилені під рівними кутами до основи піраміди).

Для розв'язання використовують прямокутний трикутник SOM, у якому:
$SO \perp OM$, $OM = r_{\text{впис}}$ — радіус вписаного в основу кола $(OM \perp BC)$,
$\angle SMO$ — кут нахилу бічної грані SBC до основи
($\angle SMO$ — лінійний кут двогранного кута при ребрі BC).

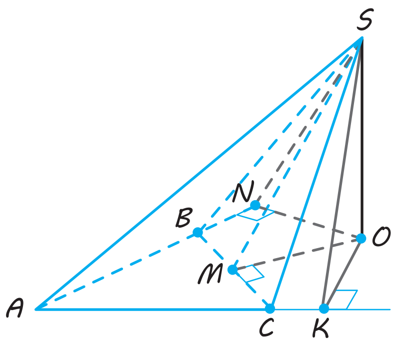
Продовження табл. 5

Для пірамід такого виду має місце формула

$$S_{\text{бічн}} = \frac{S_{\text{осн}}}{\cos\varphi},$$

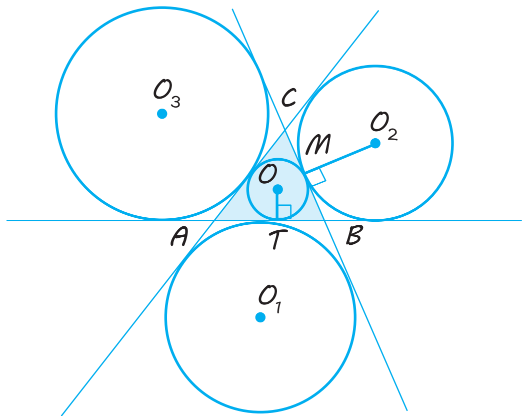
де $\varphi = \angle SMO$ — кут нахилу всіх бічних граней до основи.

3. Якщо всі бічні грані піраміди утворюють рівні кути з площиною основи, то **основою висоти піраміди є точка, рівновіддалена від усіх прямих, що містять сторони основи.**



Якщо в піраміді $SABC$ грані SAB, SAC і SBC утворюють рівні кути з площиною основи ABC (тобто $\angle SMO = \angle SKO = \angle SNO$ — відповідні лінійні кути рівні) і $SO \perp$ пл. ABC,

то O — точка, рівновіддалена від прямих AB, BC і AC $(OK = OM = ON)$.

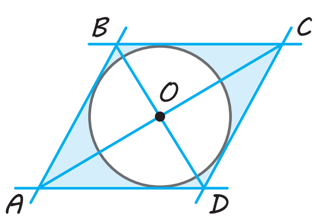


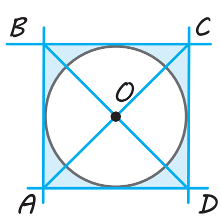
Для трикутника ABC точок, що рівновіддалені від прямих AB, BC і AC, існує чотири: центр вписаного кола — O; три центри зовнівписаних кіл — O_1, O_2, O_3.

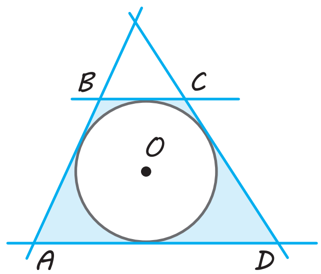
$$OT = r_{\text{впис}} = \frac{S_{\triangle ABC}}{p},$$

$$\text{де} \quad p = \frac{a+b+c}{2}.$$

$$O_2M = r_a = \frac{S_{\triangle ABC}}{p-a}.$$

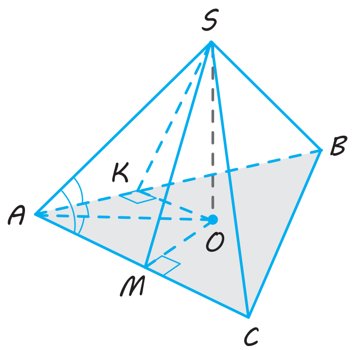






Для ромба (квадрата) і трапеції $ABCD$ точка, рівновіддалена від прямих AB, BC, CD і AD, єдина — центр O вписаного кола.

Закінчення табл. 5

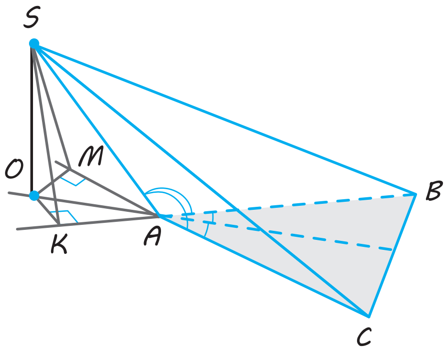


4. *Якщо* тільки дві суміжні бічні грані піраміди (або похилої призми) однаково нахилені до основи або спільне бічне ребро цих граней утворює рівні кути із суміжними з ним сторонами основи,

то це спільне бічне ребро проектується на пряму, що містить бісектрису кута між суміжними із цим ребром сторонами основи (і навпаки).

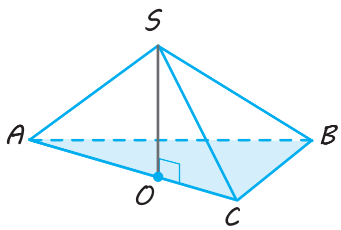
Якщо в піраміді $SABC$ грані SAB і SAC однаково нахилені до основи ABC (тобто $\angle SKO = \angle SMO$) або $\angle SAB = \angle SAC$ і $SO \perp$ пл. ABC,

то AO — бісектриса кута BAC (або пряма AO містить бісектрису кута BAC).



Якщо в піраміді $SABC$ $SO \perp$ пл. ABC і AO — бісектриса кута BAC (або пряма AO містить бісектрису кута BAC),

то $\angle SKO = \angle SMO$ (грані SAB і SAC однаково нахилені до основи) і $\angle SAB = \angle SAC$.

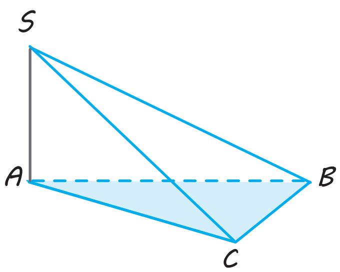


5. *Якщо* тільки одна бічна грань піраміди перпендикулярна до площини основи,

то висотою піраміди є висота цієї грані.

Якщо в піраміді $SABC$: пл. $SAC \perp$ пл. ABC і $SO \perp AC$ $(O \in AC)$,

то SO — висота піраміди $(SO \perp$ пл. $ABC)$.

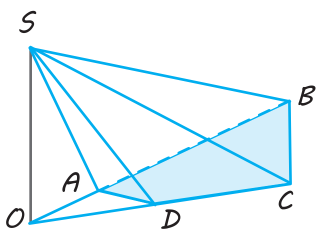


6. *Якщо* дві суміжні бічні грані піраміди перпендикулярні до площини основи,

то висотою піраміди є їхнє спільне бічне ребро.

Якщо пл. $SAB \perp$ пл. ABC і пл. $SAC \perp$ пл. ABC,

то SA — висота піраміди $(SA \perp$ пл. $ABC)$.



7. *Якщо* дві несуміжні бічні грані піраміди перпендикулярні до площини основи,

то висотою піраміди є відрізок прямої, по якій перетинаються площини цих граней.

Якщо пл. $SAB \perp$ пл. $ABCD$, пл. $SCD \perp$ пл. $ABCD$ і пл. SAB перетинає пл. SCD по прямій SO $(O \in$ пл. $ABCD)$,

то SO — висота піраміди.

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

Для розв'язання задач, пов'язаних із пірамідою, часто буває зручно використовувати певні властивості піраміди, які дозволяють уточнити розташування її висоти й урахувати його вже під час побудови рисунка до задачі.

(Зазначимо, що всі запропоновані нижче доведення можуть бути проведені не тільки для трикутних пірамід, зображених на рисунках, але й для всіх n-кутних пірамід із відповідними характеристичними властивостями.)

Властивість 1. **Якщо всі бічні ребра піраміди рівні, або нахилені під рівними кутами до площини основи, або утворюють рівні кути з висотою піраміди, то основа висоти піраміди є центром кола, описаного навколо основи піраміди (і навпаки).**

● Справді, нехай SO — висота піраміди $SABC$ (рис. 6.1). Потрібне твердження одержуємо з рівності прямокутних трикутників SOA, SOB, SOC (для доведення прямого твердження використовуємо рівність за спільним катетом SO і гіпотенузою або за спільним катетом SO і гострим кутом, а для доведення оберненого твердження — рівність за двома катетами).

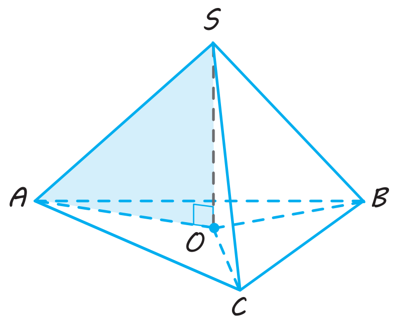


Рис. 6.1

Наприклад, якщо всі бічні ребра піраміди рівні: $SA = SB = SC$, то з рівності зазначених трикутників одержуємо: $OA = OB = OC$. Отже, точка O рівновіддалена від точок A, B, C і є центром кола, описаного навколо основи піраміди — трикутника ABC. (Інші прямі й обернені твердження із цієї властивості обґрунтуйте самостійно.) ○

Зазначимо, що для розв'язання задач, пов'язаних із пірамідами такого виду, зазвичай використовують прямокутний трикутник SAO, у якому $SO \perp AO$, $AO = R_{\text{опис}}$ (радіус кола, описаного навколо основи піраміди), $\angle SAO$ — кут нахилу бічного ребра SA до площини основи (оскільки $SO \perp$ пл. ABC, то AO — проекція ребра SA на площину основи).

Властивість 2. **Якщо всі бічні грані піраміди утворюють рівні кути з основою, то основою висоти піраміди є центр кола, вписаного в основу (і навпаки).**

● Нехай SO — висота піраміди $SABC$ (рис. 6.2). З основи висоти — точки O у площині основи піраміди проведемо $OM \perp BC$, $OK \perp AC$, $ON \perp AB$. Тоді за теоремою про три перпендикуляри $SM \perp BC$, $SK \perp AC$, $SN \perp AB$. Отже, $\angle SMO$, $\angle SKO$, $\angle SNO$ — лінійні кути двогранних кутів при ребрах основи, тобто кути нахилу бічних граней до основи.

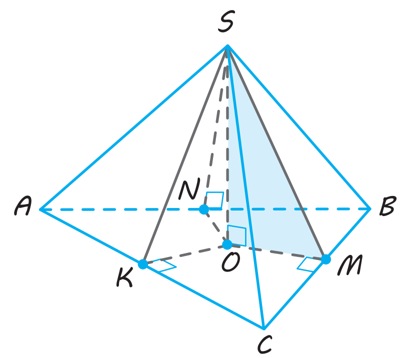


Рис. 6.2

Потрібне твердження одержуємо з рівності прямокутних трикутників SOM, SOK, SON (для доведення прямого твердження використовуємо рівність за спільним катетом SO і гострим кутом, а для доведення оберненого твердження — рівність за двома катетами).

Наприклад, якщо всі бічні грані піраміди утворюють рівні кути з основою:

$\angle SMO = \angle SKO = \angle SNO$, то з рівності зазначених трикутників одержуємо: $OM = OK = ON$. Отже, точка O рівновіддалена від сторін основи і є центром кола, вписаного в основу піраміди — трикутник ABC.

Обернене твердження обґрунтуйте самостійно. ○

Зазначимо, що для пірамід такого виду площу бічної поверхні можна обчислити за формулою

$$S_{\text{бічн}} = \frac{S_{\text{осн}}}{\cos\varphi},$$

де $\varphi = \angle SMO$ — кут нахилу всіх бічних граней до основи піраміди, а $S_{\text{осн}}$ — площа основи піраміди.

Обґрунтування цієї формули повністю збігається з обґрунтуванням, наведеним у § 5 для правильної піраміди (виконайте його самостійно).

Також зазначимо, що для розв'язання задач, пов'язаних із пірамідами такого виду, зазвичай використовують прямокутний трикутник SOM (рис. 6.2), у якому $SO \perp OM$, $OM = r_{\text{впис}}$ (радіус кола, вписаного в основу піраміди), $\angle SMO$ — кут нахилу бічної грані SBC до основи.

Властивість 3. **Якщо всі бічні грані піраміди утворюють рівні кути з площиною основи, то основою висоти піраміди є точка, рівновіддалена від усіх прямих, що містять сторони основи.**

● Нехай SO — висота піраміди $SABC$ (рис. 6.3). З основи висоти — точки O в площині основи піраміди проведемо $OM \perp BC$, $OK \perp AC$, $ON \perp AB$. Тоді за теоремою про три перпендикуляри $SM \perp BC$, $SK \perp AC$, $SN \perp AB$. Отже, $\angle SMO$, $\angle SKO$, $\angle SNO$ — кути нахилу бічних граней до площини основи. За умовою всі бічні грані піраміди утворюють рівні кути з площиною основи, тобто $\angle SMO = \angle SKO = \angle SNO$. Тоді $\triangle SMO = \triangle SKO = \triangle SNO$ (за спільним катетом SO і гострим кутом), і з рівності трикутників одержуємо: $OM = OK = ON$. Отже, точка O рівновіддалена від прямих, що містять сторони основи (сторони трикутника ABC).

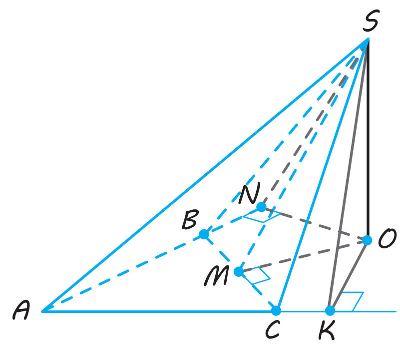


Рис. 6.3

Слід ураховувати, що в тому випадку, коли основою піраміди є трикутник, точок, рівновіддалених від прямих, що містять сторони основи, матимемо чотири: один центр вписаного кола — точка O — і три центри зовнівписаних кіл (які дотикаються до однієї сторони трикутника і до продовження двох інших його сторін) — точки O_1, O_2, O_3 (рис. 6.4).

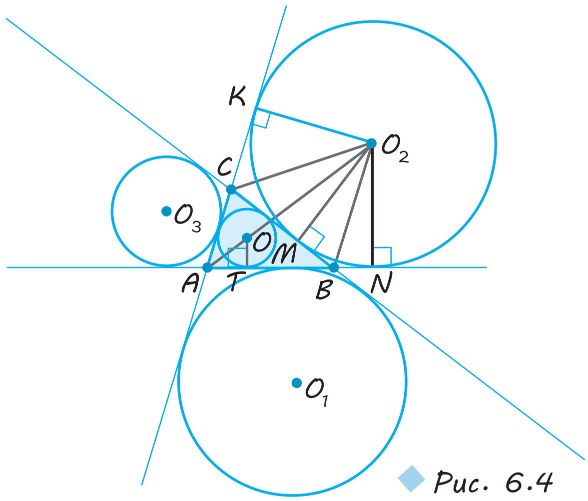


Рис. 6.4

Нагадаємо, що центр вписаного в трикутник кола — точка перетину бісектрис внутрішніх кутів трикутника, а радіус вписаного кола OT можна обчислити за формулою

$$OT = r_{\text{впис}} = \frac{S_{\triangle ABC}}{p},$$

де $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ — півпериметр.

Центр зовнівписаного кола — точка перетину однієї бісектриси внутрішнього кута трикутника і двох бісектрис зовнішніх кутів трикутника. Радіус O_2M зовнівписаного кола (яке дотикається до сторони a трикутника ABC зі сторонами $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$) можна обчислити за формулою

$$O_2M = r_a = \frac{S_{\triangle ABC}}{p-a},$$

де $p=\frac{a+b+c}{2}$ — півпериметр.

Доведемо останню формулу.

● Нехай зовнівписане коло дотикається до сторони BC у точці M, а до продовжень сторін AB і AC — у точках N і K відповідно. Тоді $O_2M \perp BC$, $O_2K \perp AC$, $O_2N \perp AB$ і $O_2M = O_2K = O_2N = r_a$. Сполучимо відрізками точку O_2 з точками A, B, C. Тоді площу утвореного чотирикутника ACO_2B можна записати двома способами: як суму площ трикутників ABC і BCO_2 або як суму площ трикутників ACO_2 і ABO_2. Одержуємо: $S_{\triangle ABC}+S_{\triangle BCO_2}=S_{\triangle ACO_2}+S_{\triangle ABO_2}$.

Тоді $S_{\triangle ABC}+\frac{1}{2}a\cdot r_a=\frac{1}{2}b\cdot r_a+\frac{1}{2}c\cdot r_a$. Звідси $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}(b+c-a)\cdot r_a$.

Додаючи до виразу в дужках значення a і віднімаючи з нього це значення, одержуємо: $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}((a+b+c)-2a)\cdot r_a$, тобто $S_{\triangle ABC}=\left(\frac{a+b+c}{2}-a\right)\cdot r_a$. Звідси $r_a=\frac{S_{\triangle ABC}}{p-a}$. ○

Зазначимо, що для ромба (або квадрата) і трапеції $ABCD$ точка, рівновіддалена від прямих AB, BC, CD і AD, єдина — це центр O вписаного кола (обґрунтуйте це самостійно).

Зауваження. Якщо в основі піраміди лежить трикутник і всі бічні грані піраміди однаково нахилені до площини основи, то згідно з властивістю 3 для повного розв'язання задачі потрібно розглянути чотири випадки:
1) основою висоти піраміди є центр вписаного в основу кола;
2) основою висоти піраміди є один із центрів зовнівписаних кіл.

Але іноді умови задачі, крім розглянутих, можуть містити ще одну умову, яка надає можливість однозначно визначити розташування основи висоти й у цьому випадку. Наприклад, якщо додатково відомо, що вершина піраміди рівновіддалена від сторін основи, то основою висоти може бути тільки центр вписаного в основу кола (обґрунтуйте це самостійно, спираючись на поняття відстані від точки до фігури, — див. § 16 підручника для 10 класу).

Властивість 4. **Якщо тільки дві суміжні бічні грані піраміди (або похилої призми) однаково нахилені до основи або спільне бічне ребро цих граней утворює рівні кути із суміжними з ним сторонами основ, то це спільне бічне ребро проектується на пряму, що містить бісектрису кута між суміжними із цим ребром сторонами основ (і навпаки).**

● Нехай SO — висота піраміди $SABC$ (рис. 6.5). З основи висоти — точки O в площині основи піраміди проведемо $OM \perp AC$ і $OK \perp AB$. Тоді за теоремою про три перпендикуляри $SM \perp AC$ і $SK \perp AB$. Отже, кути SMO і SKO — лінійні кути двогранних кутів при ребрах основи (рис. 6.5, *а*), тобто кути нахилу бічних граней до площини основи. Якщо $\angle SMO = \angle SKO = \varphi$ (рис. 6.5, *б*), то відповідні лінійні кути двогранних кутів при ребрах основи дорівнюють $180° - \varphi$.

Потрібне твердження одержуємо з рівності прямокутних трикутників SOM, SOK (для доведення прямого твердження використовуємо рівність за спільним катетом SO і гострим кутом, а для доведення оберненого твердження — рівність за двома катетами).

Наприклад, якщо дві бічні грані піраміди однаково нахилені до основи: $\angle SMO = \angle SKO$, то з рівності зазначених трикутників одержуємо: $OM = OK$. Отже, точка O рівновіддалена від сторін AB і AC кута BAC (або від продовження цих сторін;

рис. 6,5, *б*) і розташована на прямій AO, що містить бісектрису кута BAC. Ураховуючи, що відрізок AO є проекцією відрізка SA на площину ABC, одержуємо, що пряме твердження властивості 4 справедливе.

Обернене твердження обґрунтуйте самостійно. ○

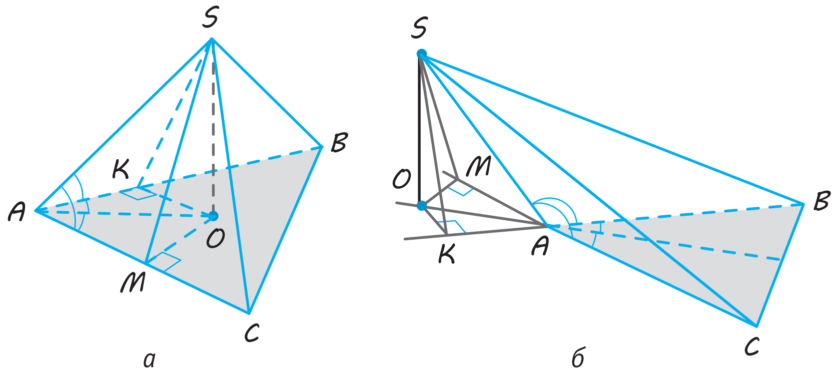


Рис. 6.5

Зауваження. Слід ураховувати, що в розглянутій властивості бічні грані піраміди (або похилої призми) однаково нахилені не до площини основи, а саме до основи. Якщо ж в умові задачі буде сказано, що дві бічні грані однаково нахилені до площини основи, то в цьому випадку спільне ребро цих граней може проектуватися не тільки на пряму, що містить бісектрису кута між суміжними сторонами основи, але й на бісектрису зовнішнього кута при відповідній вершині основи.

Властивість 5. **Якщо тільки одна бічна грань піраміди перпендикулярна до площини основи, то висотою піраміди є висота цієї грані.**

● Нехай у піраміді $SABC$ пл. $SAC \perp$ пл. ABC (рис. 6.6). Проведемо висоту SO грані SAC: $SO \perp AC$, тоді (див. теорему 14.2, наведену в § 14 підручника для 10 класу: *пряма, проведена в одній із двох перпендикулярних площин перпендикулярно до прямої їхнього перетину, перпендикулярна до другої площини). Отже, SO — висота піраміди.* ○

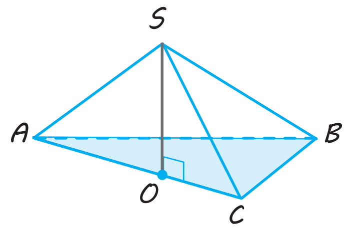


Рис. 6.6

Властивість 6. **Якщо дві суміжні бічні грані піраміди перпендикулярні до площини основи, то висотою піраміди є їх спільне бічне ребро.**

Властивість 7. **Якщо дві несуміжні бічні грані піраміди перпендикулярні до площини основи, то висотою піраміди є відрізок прямої, по якій перетинаються площини цих граней.**

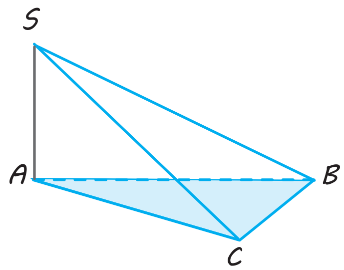


Рис. 6.7

● Нехай у піраміді $SABC$ пл. $SAB \perp$ пл. ABC і пл. $SAC \perp$ пл. ABC (рис. 6.7). Площини SAB і SAC перетинаються по прямій SA. У підручнику для 10 класу (§ 14) було обґрунтовано: *якщо дві площини, які перетинаються, перпендикулярні до третьої площини, то пряма їхнього перетину перпендикулярна до цієї (третьої) площини*. Отже, $SA \perp$ пл. ABC, тобто SA — висота піраміди. Таким чином, властивість 6 доведено.

Якщо в піраміді $SABCD$ пл. $SAB \perp$ пл. $ABCD$, пл. $SDC \perp$ пл. $ABCD$ (рис. 6.8) і площини SAB і SDC

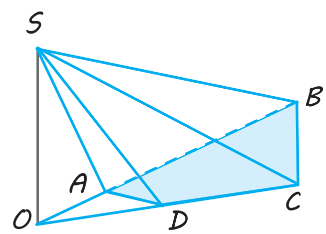


Рис. 6.8

перетинаються по прямій SO (точка O належить площині $ABCD$), то за властивістю 6 у піраміді $SOBC$ висотою є відрізок SO, тобто $SO \perp$ пл. $ABCD$. Отже, відрізок SO є висотою й для піраміди $SABCD$. Таким чином, і властивість 7 доведено. ○

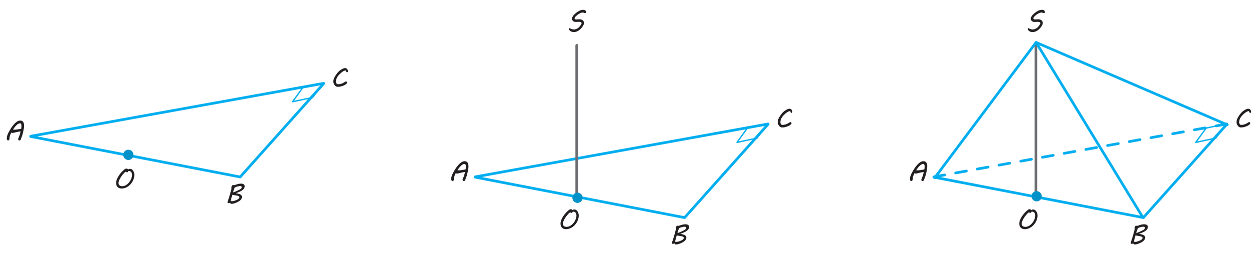
Властивості 1–7 часто доводиться використовувати не тільки під час запису розв'язання задач, пов'язаних із пірамідою, але й під час побудови рисунків до таких задач.

В останньому випадку спочатку в умові задачі виділяють фрагменти, які описуються властивостями 1–7, і визначають розташування основи висоти піраміди.

Потім зображують проекцію основи піраміди, позначають на ній точку O, яка є проекцією основи висоти піраміди (ураховуючи властивості паралельного проектування), а потім з основи висоти (точка O) вертикально (для більшої наочності) проводять висоту піраміди SO і сполучають точку S із вершинами основи.

Розглянемо як приклад побудову рисунка до такої задачі:

«Основою піраміди є прямокутний трикутник із катетом a і прилеглим гострим кутом 60°. Знайдіть висоту піраміди, якщо всі її бічні ребра нахилені до площини основи під кутом 45°».



а б в

Рис. 6.9

Спочатку будуємо проекцію основи піраміди. Проекцією прямокутного трикутника може бути довільний трикутник. Тому зображуємо довільний трикутник ABC, який є зображенням прямокутного трикутника, і позначаємо зображення прямого кута (наприклад, при вершині C, як показано на рис. 6.9, *а*). Потім звертаємо увагу на ту частину умови, яка відповідає властивостям 1–7, наведеним вище. Зокрема, якщо всі бічні ребра піраміди нахилені під рівними кутами до площини основи, то основою висоти піраміди є центр кола, описаного навколо основи піраміди (властивість 1). Центром кола, описаного навколо прямокутного трикутника, є середина гіпотенузи. Середина відрізка проектується в середину відрізка проекції, тому проекцією основи висоти є точка O — середина відрізка AB. Проводимо із точки O відрізок SO (бажано вертикально для більшої наочності), який є зображенням висоти піраміди (рис. 6.9, *б*), і, сполучаючи відрізками точку S із вершинами трикутника ABC, одержуємо зображення заданої піраміди $SABC$ (рис. 6.9, *в*). (*Розв'язання цієї задачі наведено нижче — задача 1.*)

Нагадаємо, що під час розв'язування задач на обчислення, пов'язаних із пірамідами, доцільно використовувати загальну схему розв'язання й запис задач, пов'язаних із многогранником, наведену в § 2. Ця схема передбачає виконання таких дій.

1. Обґрунтувати розташування висоти многогранника.
2. Обґрунтувати, що просторові кути й просторові відстані позначені правильно.
3. Якщо розглядаєте переріз многогранника, то обґрунтувати його форму (якщо цю форму використовуєте для розв'язування).
4. Якщо розглядаєте комбінацію многогранника й тіла обертання, то описати взаємне розташування їх елементів.

5. На кожному кроці обчислень указати, елементи якого трикутника визначаєте, і якщо він прямокутний, пояснити чому.

Звичайно, ця схема є орієнтовною, але її використання допомагає впорядкувати міркування в процесі пошуку плану розв'язання задачі, а також дозволяє не пропустити істотні моменти під час оформлення її розв'язання.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 1

Основою піраміди є прямокутний трикутник із катетом a і прилеглим гострим кутом 60°. Знайдіть висоту піраміди, якщо всі її бічні ребра нахилені до площини основи під кутом 45°.

Розв'язання

▶ 1. Нехай основою заданої піраміди $SABC$ є прямокутний трикутник ABC із прямим кутом C ($BC = a$, $\angle ABC = 60°$). Оскільки в заданій піраміді всі бічні ребра нахилені під рівними кутами до площини основи, то основою висоти SO піраміди є центр кола, описаного навколо основи піраміди. Центром кола, описаного навколо прямокутного трикутника, є середина гіпотенузи, тому основа висоти SO — точка O — це середина гіпотенузи AB (рис. 6.9, *в*).

2. Оскільки AO — проекція бічного ребра SA на площину основи ABC, то кут SAO — це кут між бічним ребром SA і площиною основи (за умовою $\angle SAO = 45°$).

3. Із прямокутного трикутника ABC одержуємо:

$$AB = \frac{BC}{\cos \angle ABC} = \frac{a}{\cos 60°} = 2a.$$

Тоді $AO = \frac{1}{2}AB = a.$

4. Із прямокутного трикутника SAO (SO — висота піраміди) маємо:

$$SO = AO \cdot \operatorname{tg} \angle SAO = a \cdot \operatorname{tg} 45° = a.$$

Відповідь: a. ◁

Коментар

Побудову зображення піраміди до цієї задачі наведено на рис. 6.9. Потім доцільно використовувати схему розв'язання задач на обчислення, пов'язаних із пірамідами, наведену вище.

Як завжди, на першому етапі розв'язання обґрунтовуємо розташування висоти піраміди, а на другому — розташування просторового кута між прямою і площиною, тобто розташування кута між бічним ребром і площиною основи піраміди (достатньо обґрунтувати розташування тільки одного кута, оскільки за умовою всі вони рівні). Подальшим етапом розв'язання є проведення обчислень. Записуючи цей етап, потрібно на кожному кроці вказувати трикутник, елементи якого визначаємо, і якщо він прямокутний, пояснити чому.

Задача 2

Основою піраміди є ромб із гострим кутом α, висота піраміди дорівнює H. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди, якщо всі її бічні грані нахилені до основи під кутом φ.

Розв'язання

▶ Нехай в основі піраміди $SABCD$ (рис. 6.10) лежить ромб $ABCD$. За умовою всі бічні грані піраміди однаково нахилені до основи, тому основою висоти SO піраміди $(SO = H)$ є точка O — центр кола, вписаного в основу піраміди, тобто O — точка перетину діагоналей ромба $(SO \perp \text{пл. } ABCD)$.

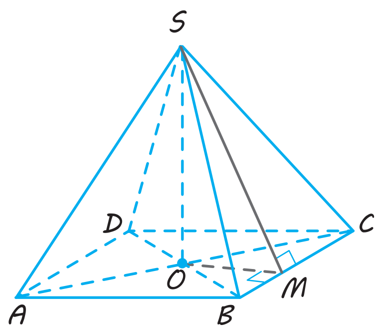


Рис. 6.10

У площині $ABCD$ проведемо перпендикуляр $OM \perp BC$. За теоремою про три перпендикуляри $SM \perp BC$. Тоді кут SMO — лінійний кут двогранного кута з ребром BC, а за умовою $\angle SMO = \varphi$.

Із прямокутного трикутника SMO (SO — висота піраміди) знаходимо радіус кола, вписаного в ромб: $OM = SO\,\text{ctg}\,\varphi = H\,\text{ctg}\,\varphi$.

Висота ромба дорівнює діаметру вписаного кола, тому, якщо $BK \perp AD$, то

$$BK = 2OM = 2H\,\text{ctg}\,\varphi \ \text{(рис. 6.11)}.$$

Із прямокутного трикутника ABK маємо: $AB = \dfrac{BK}{\sin A} = \dfrac{2H\text{ctg}\varphi}{\sin\alpha}$.

Тоді $S_{ABCD} = AB^2 \sin\alpha = \dfrac{4H^2\text{ctg}^2\varphi}{\sin\alpha}$.

Усі бічні грані піраміди нахилені до основи під кутом φ, тому площа бічної поверхні піраміди дорівнює:

$$S_{\text{бічн}} = \frac{S_{\text{осн}}}{\cos\varphi} = \frac{4H^2\text{ctg}^2\varphi}{\sin\alpha\cos\varphi}.$$

Відповідь: $\dfrac{4H^2\text{ctg}^2\varphi}{\sin\alpha\cos\varphi}$. ◁

Коментар

Як і в попередній задачі, на першому етапі розв'язання обґрунтовуємо розташування висоти піраміди (звертаємо увагу на те, що всі бічні грані піраміди однаково нахилені до основи). На другому етапі обґрунтовуємо розташування просторового кута між бічною гранню й основою піраміди. Під час побудови зображення піраміди слід урахувати, що зображенням ромба може бути довільний паралелограм.

Для побудови лінійного кута двогранного кута з ребром BC можна в площині основи піраміди провести з основи висоти — точки O перпендикуляр OM на ребро BC. Потім потрібно сполучити отриману точку M з вершиною S і використати теорему про три перпендикуляри (ураховуючи, що OM — проекція похилої SM на площину основи). Для виконання обчислювальної частини розв'язання спочатку розглянемо прямокутний трикутник SOM, із якого знайдемо катет OM. Потім урахуємо, що відрізок OM дорівнює радіусу кола, вписаного в ромб, а діаметр кола дорівнює висоті ромба. Для останніх обчислень зручно використовувати виносний рисунок основи піраміди — ромб $ABCD$ (рис. 6.11).

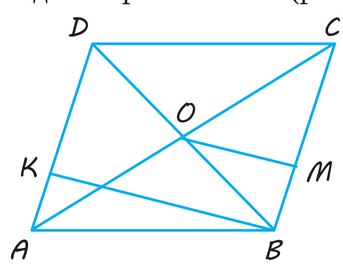


Рис. 6.11

Також слід урахувати, що у випадку, коли всі бічні грані піраміди нахилені до основи під кутом φ, площу бічної поверхні піраміди можна обчислити за формулою $S_{\text{бічн}} = \dfrac{S_{\text{осн}}}{\cos\varphi}$.

Задача 3

Основою піраміди є рівнобедрений трикутник з основою 6 см і бічною стороною 5 см. Бічні грані піраміди, що містять бічні сторони цього рівнобедреного трикутника, перпендикулярні до площини основи, а третя бічна грань нахилена до площини основи під кутом 60°. Знайдіть висоту піраміди.

Розв'язання	Коментар

Розв'язання

▶ Нехай у основі піраміди $SABC$ лежить рівнобедрений трикутник ABC ($AB = AC = 5$ см, $BC = 6$ см). За умовою суміжні бічні грані SAB і SAC перпендикулярні до площини основи, тому висотою піраміди є спільне бічне ребро цих граней, тобто SA — висота піраміди $(SA \perp \text{пл.}\, ABC)$. У площині ABC проведемо перпендикуляр $AM \perp BC$.

За теоремою про три перпендикуляри $SM \perp BC$. Отже, кут SMA — лінійний кут двогранного кута з ребром BC, а за умовою $\angle SMA = 60°$.

Із прямокутного трикутника AMC (AM — висота, медіана й бісектриса рівнобедреного трикутника ABC, тому $CM = \frac{1}{2}BC = 3$ см) маємо:

$$AM = \sqrt{AC^2 - CM^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \text{ (см)}.$$

Із прямокутного трикутника SAM $(SA \perp \text{пл.}\, ABC)$ одержуємо:

$$SA = AM \cdot \operatorname{tg} 60° = 4\sqrt{3} \text{ (см)}.$$

Відповідь: $4\sqrt{3}$ см. ◁

Коментар

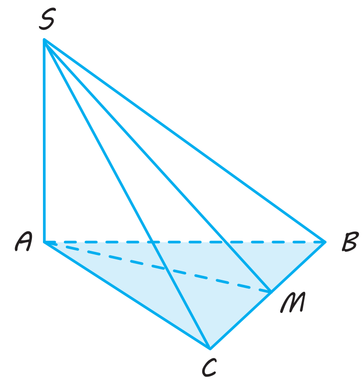


Рис. 6.12

Як звичайно, на першому етапі розв'язання обґрунтовуємо розташування висоти піраміди (у першу чергу використовуємо опорні факти, наведені в таблиці 5). На другому етапі обґрунтовуємо розташування просторового кута між бічною гранню й основою піраміди.

Для побудови лінійного кута двогранного кута з ребром BC можна в площині основи піраміди провести з основи висоти перпендикуляр AM на ребро BC. Потім потрібно сполучити отриману точку M із вершиною S і використовувати теорему про три перпендикуляри (ураховуючи, що AM — проекція похилої SM на площину основи).

Запитання

1. Укажіть розташування основи висоти піраміди, якщо:
   1) усі бічні ребра піраміди рівні або однаково нахилені до площини основи;
   2) усі бічні грані піраміди однаково нахилені:
      а) до основи, б*) до площини основи;
   3) тільки дві суміжні бічні грані піраміди (або похилої призми) однаково нахилені до основи або спільне бічне ребро цих граней утворює рівні кути із суміжними з ним сторонами основ;
   4) тільки одна бічна грань піраміди перпендикулярна до площини основи;

5) дві суміжні бічні грані піраміди перпендикулярні до площини основи;
6) дві несуміжні бічні грані піраміди перпендикулярні до площини основи.

Для кожного випадку побудуйте зображення відповідної піраміди, в основі якої лежить рівнобедрений прямокутний трикутник.

2.* Обґрунтуйте розташування висоти для кожного з випадків, зазначених у пункті 1, сформулюйте й доведіть обернене твердження.

Вправи

6.1.° Основа піраміди — прямокутник зі сторонами 6 см і 8 см. Кожне бічне ребро піраміди дорівнює 13 см. Знайдіть висоту піраміди.

6.2. Основа піраміди — рівнобедрений трикутник з основою 6 і висотою 9; усі бічні ребра піраміди дорівнюють 13. Знайдіть висоту піраміди.

6.3.° В основі піраміди лежить прямокутний трикутник із гіпотенузою c. Кожне бічне ребро утворює з площиною основи кут β. Знайдіть висоту піраміди.

6.4. Основа піраміди — рівнобедрений трикутник з бічною стороною a і кутом при основі α. Усі бічні ребра піраміди утворюють з її висотою кут φ. Знайдіть висоту піраміди.

6.5.° Знайдіть площу бічної поверхні піраміди, якщо площа її основи дорівнює Q, а двогранні кути при основі — φ.

6.6. Основа піраміди — трикутник зі сторонами 13 см, 14 см і 15 см. Бічне ребро, протилежне середній за довжиною стороні основи, перпендикулярне до площини основи й дорівнює 16 см. Знайдіть площу повної поверхні піраміди.

6.7. Основою чотирикутної піраміди є ромб, а всі бічні ребра піраміди рівні. Доведіть, що ця піраміда є правильною.

6.8. В основі піраміди лежить трикутник зі сторонами 5, 6 і 7. Усі бічні ребра піраміди рівні між собою, і кожне з них утворює з висотою піраміди кут $60°$. Знайдіть бічне ребро піраміди.

6.9. Основа піраміди — рівнобедрений трикутник ABC $(AB = BC)$ із кутом A, що дорівнює α. Висота піраміди проходить через центр кола, вписаного в основу, і дорівнює бічній стороні трикутника основи. Знайдіть кут нахилу бічних граней піраміди до основи.

6.10. В основі піраміди $MABCD$ лежить ромб $ABCD$ із діагоналями $AC = 6$, $BD = 8$, а всі бічні грані утворюють з основою кути по $45°$. Знайдіть:
1) висоту піраміди;
2) відстань від вершини M до ребра основи;
3*) відстань від вершини A до площини MBD;
4) площу перерізу, що проходить через ребро AD і точку перетину медіан грані MCB.

6.11. Основа піраміди — рівнобедрений трикутник з основою 12 і бічною стороною 10. Знайдіть висоту піраміди, якщо всі її бічні грані утворюють з основою двогранні кути по 45°.

6.12.° Основа піраміди — прямокутний трикутник із катетами 6 см і 8 см. Усі двогранні кути при основі піраміди дорівнюють 60°. Знайдіть висоту піраміди.

6.13.* Основою піраміди є трикутник зі сторонами 13, 14, 15. Кут між площиною основи й площиною кожної з бічних граней дорівнює 30°. Розгляньте чотири можливі випадки розташування основи висоти піраміди і для кожного з них знайдіть висоту піраміди.

6.14.* Основою піраміди є трапеція з основами 2 і 10 і висотою 4. Усі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом 45°. Знайдіть бічне ребро й висоту піраміди.

6.15.* Основою піраміди є трапеція, паралельні сторони якої дорівнюють 6 см і 8 см, а висота — 7 см. Кожне бічне ребро піраміди дорівнює 13 см. Знайдіть висоту піраміди.

6.16.* Основою піраміди $MABCD$ є трапеція $ABCD$ із прямим кутом A й основами $BC=3$, $AD=6$. Кожна бічна грань піраміди утворює з її висотою кут 60°. Знайдіть висоту піраміди.

6.17.* Бічні грані трикутної піраміди утворюють з основою рівні кути, а периметр основи дорівнює 60 см. Два бічні ребра піраміди дорівнюють 15 см і 20 см і утворюють прямий кут. Знайдіть довжину третього бічного ребра.

6.18. Основа піраміди — рівнобедрений трикутник зі сторонами 40 см, 25 см і 25 см. Її висота проходить через вершину кута, протилежного стороні завдовжки 40 см, і дорівнює 8 см. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

6.19. Основою піраміди є правильний трикутник. Одна з бічних граней піраміди перпендикулярна до площини її основи, а дві інші нахилені до неї під кутом α. Як нахилені до площини основи бічні ребра?

6.20.* В основі піраміди лежить рівнобедрений прямокутний трикутник із катетом 2. Одна бічна грань піраміди є рівнобедреним прямокутним трикутником і перпендикулярна до площини основи. Яких значень може набувати висота піраміди?

6.21. В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник, дві сторони якого дорівнюють b, а кут між ними — α. Дві бічні грані піраміди перпендикулярні до площини основи, а третя утворює з площиною основи кут β. Яких значень може набувати висота піраміди?

6.22. В основі піраміди лежить ромб зі стороною a і кутом 60°. Одна з бічних граней піраміди перпендикулярна до площини її основи, а дві сусідні з нею грані утворюють із основою кути по 45°. Знайдіть висоту піраміди.

6.23. В основі піраміди лежить квадрат зі стороною a. Двогранний кут при одному з ребер основи піраміди прямий, а двогранні кути при сусідніх із ним ребрах основи дорівнюють α і β. Знайдіть висоту піраміди.

6.24.* В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник, дві сторони якого дорівнюють b, а кут між ними дорівнює α. Одна з бічних граней піраміди перпендикулярна до площини основи, а дві інші бічні грані утворюють з основою двогранні кути, що дорівнюють β. Яких значень може набувати висота піраміди?

6.25.° В основі піраміди лежить паралелограм. Дві бічні грані піраміди перпендикулярні до основи, а довжина меншого бічного ребра дорівнює a. Знайдіть висоту піраміди.

6.26. В основі піраміди $MABCD$ лежить ромб $ABCD$ зі стороною 2 і кутом $60°$. Дві бічні грані піраміди перпендикулярні до площини основи, а її більше бічне ребро утворює з основою кут $60°$. Знайдіть висоту піраміди.

6.27. В основі піраміди $MABCD$ лежить трапеція $ABCD$, у якій $AB = BC = CD = 1$ і $AD = 2$. Грані MAB і MCD перпендикулярні до площини основи, а двогранний кут при ребрі AD дорівнює $30°$. Знайдіть висоту піраміди.

6.28. Основа піраміди — правильний трикутник зі стороною a. Одна з бічних граней перпендикулярна до площини основи і є рівнобедреним трикутником з основою $1{,}2a$. Знайдіть висоту піраміди.

6.29. Основою піраміди є ромб із гострим кутом α. Одна з бічних граней є рівностороннім трикутником і перпендикулярна до площини основи. Знайдіть величини двогранних кутів при ребрах основи піраміди.

6.30. Основа піраміди — прямокутний трикутник із гострим кутом $60°$. Бічна грань, що містить гіпотенузу трикутника, перпендикулярна до площини основи, а дві інші утворюють з основою кути по $45°$. Висота піраміди дорівнює 8. Знайдіть площу основи піраміди.

6.31. Основа піраміди — рівнобедрений трикутник ABC, у якому $AB = BC = 13$, $BC = 10$. Ребра MC і MA нахилені до площини основи під кутом $45°$, а грань MBA перпендикулярна до площини основи піраміди. Знайдіть висоту піраміди.

6.32. Усі бічні ребра трикутної піраміди $MABC$ утворюють із висотою MK кути, що дорівнюють α; $AB = a$, $BC = 2a$. Грань MAC перпендикулярна до площини основи. Знайдіть: 1) площу основи піраміди; 2) висоту піраміди.

6.33. Основа піраміди — квадрат зі стороною a. Дві бічні грані перпендикулярні до площини основи, а дві інші утворюють із нею кути $60°$. Знайдіть висоту піраміди.

6.34. Основа піраміди — ромб зі стороною a і тупим кутом $120°$. Дві бічні грані перпендикулярні до площини основи, а дві інші утворюють із нею кути $60°$. Знайдіть висоту піраміди (розгляньте всі можливі випадки).

6.35. Основою піраміди є трапеція зі сторонами a, a, a і $2a$. Дві бічні грані перпендикулярні до площини основи, а одна з двох інших утворює з нею кут $45°$. Знайдіть висоту піраміди (розгляньте всі можливі випадки).

6.36.* У тетраедра $ABCD$ ребра AB, AC і AD дорівнюють 3, 4 і 5 відповідно, а всі плоскі кути при вершині A — прямі. Знайдіть величину двогранного кута при кожному ребрі піраміди.

6.37. Основа піраміди — правильний шестикутник зі стороною a. Знайдіть довжини всіх бічних ребер піраміди, якщо дві несусідні бічні грані перпендикулярні до площини основи, а висота піраміди дорівнює подвоєному діаметру кола, вписаного в основу.

6.38. У трикутній піраміді мимобіжні ребра попарно рівні між собою. Знайдіть суму плоских кутів при вершині піраміди.

6.39. Основа піраміди — квадрат $ABCD$ зі стороною a. Бічні ребра MB і MA рівні між собою, двогранний кут при ребрі AD дорівнює α, а при ребрі DC — β $(\beta < \alpha < 90°)$. Знайдіть:
1) висоту піраміди;
2) кут нахилу більшого бічного ребра до площини основи піраміди.

6.40.* Основа піраміди $MABCD$ — ромб $ABCD$ із гострим кутом BCD, що дорівнює $60°$, і висотою 12. Вершина M рівновіддалена від прямих AD, BC і від вершин B і C. Знайдіть довжини бічних ребер, якщо висота піраміди дорівнює 1.

6.41. Центр однієї з граней куба й середини сторін протилежної грані є вершинами піраміди. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди, якщо ребро куба дорівнює a.

6.42. Основа піраміди — прямокутник, діагональ якого дорівнює 8 см. Площини двох бічних граней перпендикулярні до площини основи, а дві інші бічні грані утворюють із основою кути $30°$ і $45°$. Знайдіть площу повної поверхні піраміди.

6.43.* Два бічні ребра трикутної піраміди дорівнюють 25 см і 30 см, а сторона основи, що сполучає їх, дорівнює 25 см. Знайдіть інші сторони основи, якщо площа бічної поверхні піраміди дорівнює 840 см^2 і висота піраміди проходить через центр кола, вписаного в основу піраміди.

6.44. Основою піраміди є ромб із гострим кутом $30°$. Кожний двогранний кут при основі піраміди дорівнює $60°$. Знайдіть площу повної поверхні піраміди, якщо її висота дорівнює H.

6.45. Основа піраміди — правильний трикутник зі стороною a; одна з бічних граней піраміди — також рівносторонній трикутник і перпендикулярна до площини основи. Знайдіть площу бічної поверхні цієї піраміди.

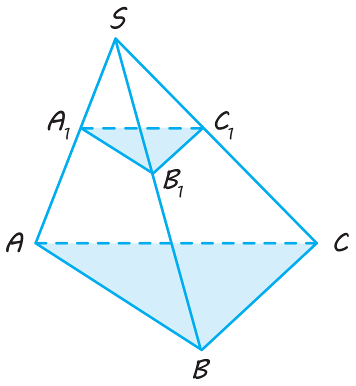
Виявіть свою компетентність

6.46. Скільки квадратних метрів парусини витратили на виготовлення намету, що має форму правильної чотирикутної піраміди (без основи), якщо сторона її основи дорівнює 4,8 м, а висота — 3,2 м? (На шви й обрізку витрачено 4 % від загальної кількості парусини).

§ 7 ПАРАЛЕЛЬНІ ПЕРЕРІЗИ ПІРАМІДИ. ЗРІЗАНА ПІРАМІДА

Таблиця 6

Зрізана піраміда



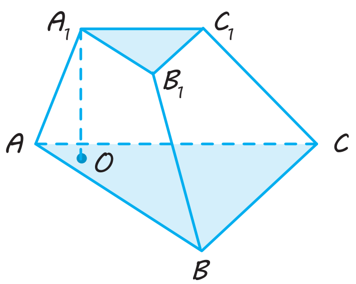
Означення зрізаної піраміди

Якщо задано піраміду $SABC$ і проведено площину $A_1B_1C_1$, паралельну основі піраміди $(\text{пл.}\, A_1B_1C_1 \parallel \text{пл.}\, ABC)$, то ця площина відтинає від заданої піраміди піраміду $SA_1B_1C_1$, подібну заданій (із коефіцієнтом подібності $k = \frac{SA_1}{SA} = \frac{A_1B_1}{AB}$).

Іншу частину заданої піраміди — многогранник $ABCA_1B_1C_1$ — називають **зрізаною пірамідою.**

Паралельні грані ABC і $A_1B_1C_1$ — основи.

Трапеції ABB_1A_1, BCC_1B_1, ACC_1A_1 — бічні грані.



Висотою зрізаної піраміди називається перпендикуляр, проведений із будь-якої точки однієї основи на іншу основу. $A_1O \perp \text{пл.}\, ABC$, тоді $A_1O = H$ — висота.

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

Теорема 7.1. Площина, що перетинає піраміду й паралельна її основі, відтинає подібну піраміду.

Нехай S — вершина піраміди, A — вершина основи й A_1 — точка перетину січної площини з бічним ребром SA (див. рисунок у верхній частині таблиці). Застосуємо до піраміди перетворення гомотетії з центром S і коефіцієнтом гомотетії $k = \frac{SA_1}{SA}$. У результаті такої гомотетії площина основи переходить у паралельну площину, що проходить через точку A_1, тобто в січну площину, а отже, уся піраміда переходить у верхню її частину, що відтинається цією площиною. Оскільки гомотетія є перетворенням подібності, то частина піраміди, що відтинається, є пірамідою, подібною заданій. ○

Зазначимо, що в подібних фігурах коефіцієнт подібності дорівнює відношенню будь-яких відповідних відрізків. Тому розглянутий у доведенні коефіцієнт подібності (гомотетії) дорівнює також відношенню довжин відповідних сторін основ пірамід або відношенню довжин відповідних висот пірамід тощо.

За теоремою 7.1 площина, що паралельна площині основи піраміди й перетинає її бічні ребра, відтинає від неї подібну піраміду. Інша частина — многогранник, який називається *зрізаною пірамідою* (див. рисунок у нижній частині таблиці 6 й рис. 7.1).

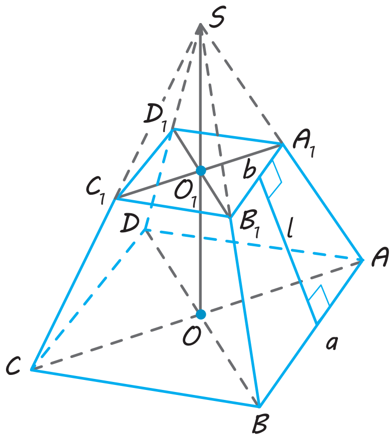


Рис. 7.1

Грані зрізаної піраміди, що лежать у паралельних площинах, називаються основами; інші грані називаються *бічними гранями*. Ребра зрізаної піраміди, що не лежать у площинах основ, називаються *бічними ребрами*. Основи зрізаної піраміди є подібними (більше того, гомотетичними) многокутниками, бічні грані — трапеціями.

Висотою зрізаної піраміди називається перпендикуляр, проведений із будь-якої точки однієї основи на іншу основу (нагадаємо, що його довжина дорівнює відстані між паралельними основами зрізаної піраміди).

Відрізок, що сполучає дві вершини зрізаної піраміди, які не належать до однієї грані, називається *діагоналлю зрізаної піраміди*.

Якщо зрізана піраміда отримана із правильної піраміди, то вона називається *правильною зрізаною пірамідою*, висота бічної грані називається *апофемою правильної зрізаної піраміди*, а пряма, що містить висоту піраміди, яка проходить через центри основ, — *віссю правильної зрізаної піраміди*.

Основами правильної зрізаної піраміди є **подібні правильні многокутники**. Усі бічні грані правильної зрізаної піраміди — **рівні рівнобічні трапеції**.

Зрізана піраміда широко використовується в техніці й архітектурі. Наприклад, клавіатуру комп'ютера часто виготовляють в формі зрізаних чотирикутних пірамід, а іноді й будівлям та їхнім фрагментам надають таку ж форму.

Піраміда Кулькана, Мексика

Будівля Муніципалітету м. Трієст, Італія

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 1 Бічне ребро піраміди розділили на три рівні частини й через точки поділу провели площини, паралельні основі (рис. 7.2). Площа основи дорівнює 900 см². Знайдіть площі перерізів.

Розв'язання

▶ Отримані перерізи подібні основам піраміди з коефіцієнтами подібності

$$k_1 = \frac{SA_1}{SA} = \frac{1}{3} \text{ і } k_2 = \frac{SA_2}{SA} = \frac{2}{3}.$$

Відношення площ подібних фігур дорівнює квадрату коефіцієнта подібності. Тому відношення площ перерізів до площ основ піраміди дорівнюють

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} \text{ і } \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}.$$

Отже, площі перерізів дорівнюють:

$$900 \cdot \frac{1}{9} = 100 \ (\text{см}^2)$$

$$\text{і } 900 \cdot \frac{4}{9} = 400 \ (\text{см}^2).$$

Відповідь: 100 см² і 400 см². ◁

Коментар

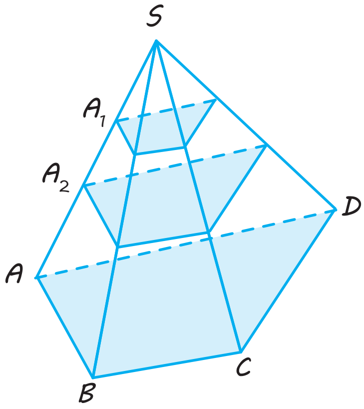


Рис. 7.2

Кожна з площин, паралельних основі, за теоремою 7.1 відтинає від заданої піраміди подібну їй піраміду (з коефіцієнтом подібності, що дорівнює відношенню будь-яких відповідних елементів цих пірамід, тобто коефіцієнт подібності дорівнює відношенню відповідних бічних ребер, або висот пірамід, або відповідних сторін основи пірамід тощо). Із подібності пірамід одержуємо, що їх основи теж подібні з тим самим коефіцієнтом подібності (а відношення площ подібних фігур дорівнює квадрату коефіцієнта подібності).

Задача 2 Доведіть, що **площа бічної поверхні правильної зрізаної піраміди дорівнює добутку півсуми периметрів основ на апофему.**

Розв'язання

▶ Бічні грані зрізаної піраміди — рівні рівнобічні трапеції з верхньою основою a, нижньою основою b і висотою (апофемою) l. Тому площа однієї грані дорівнює $\frac{a+b}{2} \cdot l$. Площа всіх граней, тобто площа бічної поверхні, дорівнює:

$$n \cdot \frac{a+b}{2} \cdot l = \frac{an+bn}{2} \cdot l,$$

де n — число вершин основи піраміди; an і bn — периметри основ піраміди. ◁

Коментар

Площа бічної поверхні правильної n-кутної зрізаної піраміди дорівнює сумі площ n рівних бічних граней, кожна з яких є рівнобічною трапецією. Тому для знаходження площі бічної поверхні можна знайти площу однієї бічної грані й помножити результат на n.

Задача 3 Площі основ зрізаної піраміди дорівнюють Q_1 й Q_2. Через середину висоти проведено площину, паралельну основі, Q — площа отриманого перерізу. Доведіть, що $\sqrt{Q}=\frac{\sqrt{Q_1}+\sqrt{Q_2}}{2}$.

Розв'язання	Коментар

▶ Нехай площа меншої основи зрізаної піраміди дорівнює Q_1, а площа більшої — Q_2. За означенням зрізана піраміда є частиною повної піраміди з вершиною S і висотою SO_2 (рис. 7.3). Позначимо точки перетину висоти: з меншою основою зрізаної піраміди — через O_1, а із січною площиною — через O. Тоді O_1O_2 — висота зрізаної піраміди, а за умовою $O_1O=OO_2$. Також позначимо $SO_1=H$, $O_1O=OO_2=h$.

Ураховуємо, що січні площини, паралельні основі ABC повної піраміди, відтинають від неї подібні піраміди, у яких відношення площ основ дорівнюють:

$$\frac{Q_2}{Q_1}=\left(\frac{H+2h}{H}\right)^2=\left(1+\frac{2h}{H}\right)^2, \quad (1)$$

$$\frac{Q}{Q_1}=\left(\frac{H+h}{H}\right)^2=\left(1+\frac{h}{H}\right)^2. \quad (2)$$

Із рівності (1) одержуємо:

$$\sqrt{\frac{Q_2}{Q_1}}=1+2\frac{h}{H}, \quad (3)$$

а з рівності (2) маємо:

$$\frac{h}{H}=\sqrt{\frac{Q}{Q_1}}-1. \quad (4)$$

Підставляючи з рівності (4) значення $\frac{h}{H}$ у рівність (3), одержуємо:

$$\sqrt{\frac{Q_2}{Q_1}}=1+2\left(\sqrt{\frac{Q}{Q_1}}-1\right).$$

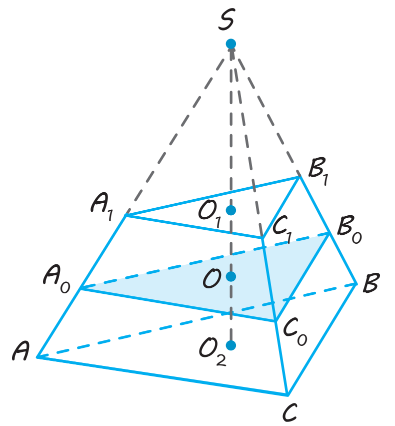


Рис. 7.3

Якщо доповнити зрізану піраміду до повної, то можна скористатися властивістю, наведеною в теоремі 7.1: *площина, що перетинає піраміду й паралельна її основі, відтинає подібну піраміду* (а тому й основи цих пірамід подібні).

Далі слід пригадати, що відношення площ подібних фігур дорівнює квадрату коефіцієнта подібності (який дорівнює відношенню будь-яких відповідних відрізків, наприклад, відношенню відповідних висот пірамід).

Також зручно використовувати введення невідомих відрізків, позначивши висоту найменшої повної піраміди через H, а половину висоти заданої зрізаної піраміди — через h. Для одержання потрібного співвідношення доцільно з отриманих рівностей виділити відношення $\frac{h}{H}$ (поділивши вираз у дужках у рівностях 1 і 2 почленно на H). Наведемо кілька зауважень щодо побудови зображення до задачі.

Оскільки наведені вище міркування не залежать від форми основ пірамід (а пов'язані тільки з їхніми висотами), то на рисунку можна зобразити трикутну піраміду. Зазначимо, що площини основ зрізаної піраміди паралельні, а за умовою січна площина також їм паралельна, тому прямі перетину цих площин із кожною бічною гранню паралельні.

Звідси

$$\sqrt{Q_2}=\sqrt{Q_1}+2\sqrt{Q}-2\sqrt{Q_1}.$$

Тоді $\sqrt{Q}=\dfrac{\sqrt{Q_1}+\sqrt{Q_2}}{2}$, що й потрібно було довести. ◁

У результаті паралельного проектування паралельність прямих зберігається, тому на рисунку 7.3 відповідні прямі паралельні (наприклад, $A_0C_0 \parallel AC \parallel A_1C_1$). Також зберігається відношення відрізків прямої, тому на рисунку точка O — середина відрізка O_1O_2, а точка A_0 — середина відрізка AA_1 (обґрунтуйте це самостійно).

Запитання

1•. Яку піраміду відтинає від заданої піраміди площина, паралельна її основі?

2.* Доведіть властивість перерізу піраміди площиною, паралельною її основі.

3. Поясніть, що таке зрізана піраміда, її висота й діагональ. Що таке правильна зрізана піраміда, її вісь і апофема?

Вправи

7.1. Висота піраміди дорівнює 24 см, а площа основи — 72 см². На якій відстані від основи потрібно провести переріз піраміди, паралельний основі, щоб його площа дорівнювала 8 см²?

7.2. Площа основи піраміди дорівнює 162 см², а площа перерізу, паралельного основі, — 32 см². Відстань між основою піраміди та її перерізом дорівнює 10 см. Знайдіть висоту піраміди.

7.3. Площа основи піраміди дорівнює 128 см². Площі двох перерізів, паралельних основі, дорівнюють 18 см² і 50 см², відстань між площинами перерізів — 12 см. Знайдіть висоту піраміди.

7.4. Переріз піраміди, паралельний її основі, ділить висоту піраміди у відношенні 2:3, починаючи від вершини, а площа перерізу менша від площі основи піраміди на 105 см². Знайдіть площу основи піраміди.

7.5.* Основою піраміди є трикутник, сторони якого дорівнюють 5 дм, 5 дм і 6 дм, а висота піраміди проходить через центр вписаного в основу кола. Висота бічної грані піраміди дорівнює 2,5 дм. Знайдіть площу перерізу, паралельного основі піраміди і проведеного на відстані 8 см від вершини.

7.6.° Скільки діагоналей можна провести у зрізаній п'ятикутній піраміді? у зрізаній n-кутній піраміді?

7.7. Сторони основ правильної зрізаної піраміди дорівнюють 4 см і 6 см, а бічне ребро нахилене до площини основи під кутом 60°. Знайдіть бічне ребро, висоту й апофему, якщо зрізана піраміда: 1) чотирикутна; 2) трикутна; 3) шестикутна.

7.8. Площі основ зрізаної піраміди дорівнюють 75 см² і 147 см². Знайдіть площу перерізу, що проходить через середини всіх бічних ребер.

7.9. Доведіть, що діагоналі правильної чотирикутної зрізаної піраміди перетинаються в одній точці.

7.10. Діагональ правильної чотирикутної зрізаної піраміди має довжину 15 см і ділить відрізок, який сполучає центри основ, на частини, що дорівнюють 4 см і 5 см. Знайдіть площі основ зрізаної піраміди.

7.11. Висота правильної чотирикутної зрізаної піраміди дорівнює 7 см. Сторони основ дорівнюють 10 см і 2 см. Визначте бічне ребро піраміди.

7.12. Сторони основ правильної трикутної зрізаної піраміди дорівнюють 4 дм і 1 дм, бічне ребро — 2 дм. Знайдіть висоту піраміди.

7.13. Сторони основ правильної трикутної зрізаної піраміди дорівнюють 2 дм і 5 дм, висота — 1 дм. Знайдіть площу перерізу, що проходить через сторону меншої основи паралельно бічному ребру.

7.14. Бічне ребро правильної зрізаної піраміди дорівнює c, а сторони нижньої й верхньої основ — відповідно a і b. Знайдіть висоту зрізаної піраміди, якщо піраміда: 1) трикутна; 2) чотирикутна; 3) шестикутна.

7.15. Визначте сторони основ правильної чотирикутної зрізаної піраміди, якщо її висота дорівнює 7 см, бічне ребро — 9 см, а діагональ — 11 см.

7.16.* Сторони основ правильної трикутної зрізаної піраміди відносяться як 1:3. Периметр бічної грані дорівнює периметру однієї з основ. Знайдіть кут між бічним ребром і площиною основи піраміди.

7.17.* Сторони основ правильної шестикутної зрізаної піраміди дорівнюють 5 см і 11 см. Відстань між паралельними сторонами основ, що не лежать в одній грані, дорівнює 19 см. Знайдіть площу поверхні зрізаної піраміди.

7.18.* Переріз, що проходить через середини всіх бічних ребер правильної піраміди, ділить її на частини, площі повних поверхонь яких відносяться як 3:11. Визначте двогранний кут при основі піраміди.

7.19.* Периметри основ правильної трикутної зрізаної піраміди дорівнюють 18 см і 36 см. Відстань від вершини верхньої основи до протилежної сторони нижньої основи дорівнює 7 см. Знайдіть площу бічної поверхні зрізаної піраміди.

7.20.* Основи зрізаної піраміди — ромби, у кожному з яких відношення діагоналей дорівнює 3:4, а довжини сторін — 15 см і 25 см. Одне з бічних ребер перпендикулярне до площини основи й дорівнює меншій діагоналі верхньої основи. Знайдіть площу поверхні зрізаної піраміди.

7.21. Діагоналі AC_1 і A_1C правильної чотирикутної зрізаної піраміди $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перпендикулярні; кожна з них дорівнює 2. Знайдіть висоту піраміди.

7.22. Діагоналі правильної чотирикутної зрізаної піраміди перпендикулярні до бічних ребер. Сторона нижньої основи дорівнює 9 см, а бічне ребро — 8 см. Знайдіть сторону верхньої основи, висоту зрізаної піраміди й відстань від точки перетину її діагоналей до площини нижньої основи.

7.23. Сторона нижньої основи правильної чотирикутної зрізаної піраміди дорівнює a, сторона верхньої — b. Бічне ребро утворює з основою кут 45°. Знайдіть бічне ребро.

7.24. Сторони основ правильної трикутної зрізаної піраміди дорівнюють 2 см і 6 см. Бічна грань утворює з нижньою основою кут 60°. Знайдіть висоту зрізаної піраміди.

7.25. Висота правильної чотирикутної зрізаної піраміди дорівнює 63 см, апофема — 65 см, а сторони основ відносяться як 7:3. Знайдіть довжини цих сторін.

7.26. Висота правильної чотирикутної зрізаної піраміди дорівнює 2 см, а сторони основ — 3 см і 5 см. Знайдіть діагональ цієї зрізаної піраміди.

7.27. Висота правильної чотирикутної зрізаної піраміди дорівнює 4. Сторони основ дорівнюють 2 і 8. Знайдіть площі діагональних перерізів.

7.28. Сторони основ правильної трикутної зрізаної піраміди дорівнюють 8 м і 5 м, а висота — 3 м. Побудуйте переріз, що проходить через сторону нижньої основи й протилежну їй вершину верхньої основи. Знайдіть площу перерізу і двогранний кут між перерізом і нижньою основою.

7.29.* Сторони основ правильної чотирикутної зрізаної піраміди дорівнюють 6 см і 8 см, а бічне ребро — 10 см. Побудуйте переріз, що проходить через кінець діагоналі верхньої основи перпендикулярно до цієї діагоналі й знайдіть його площу.

7.30.* Нижня основа зрізаної піраміди — правильний трикутник, сторона якого дорівнює 8 см. Одна з бічних граней перпендикулярна до площини основи, протилежне їй бічне ребро нахилене до площини основи під кутом 45° і однаково нахилене до прилеглих ребер основи. Периметр верхньої основи цієї піраміди дорівнює 12 см. Знайдіть висоту піраміди.

Виявіть свою компетентність

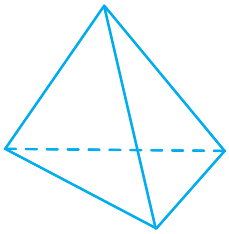
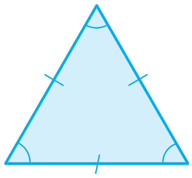
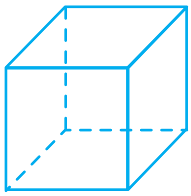
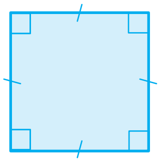
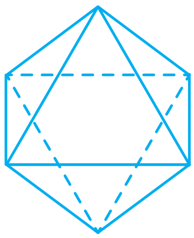
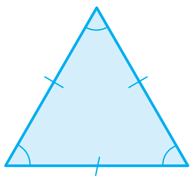
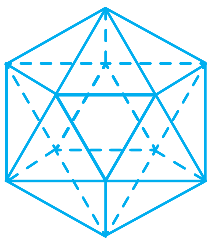
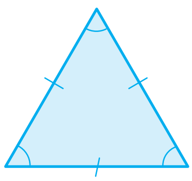
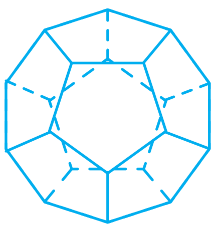
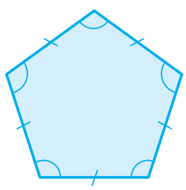
7.31. Підготуйте презентацію з фотографіями фрагментів будівель або навколишніх предметів у формі різноманітних зрізаних пірамід.

§ 8 ПРАВИЛЬНІ МНОГОГРАННИКИ

Таблиця 7

Правильні многогранники

Означення. Опуклий многогранник називається **правильним**, якщо його грані — рівні правильні многокутники й у кожній вершині сходиться одна й та сама кількість ребер.

№	Тип правильного многогранника	Форма грані	Число граней	Число вершин	Число ребер
1	**Тетраедр (чотиригранник)** 		4	4	6
2	**Гексаедр (шестигранник),** або **куб** 		6	8	12
3	**Октаедр (восьмигранник)** 		8	6	12
4	**Ікосаедр (двадцятигранник)** 		20	12	30
5	**Додекаедр (дванадцятигранник)** 		12	20	30

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

Означення. **Опуклий многогранник називається правильним, якщо його грані — рівні правильні многокутники й у кожній вершині многогранника сходиться одне й те саме число ребер.**

Прикладом правильного многогранника є *куб* (рис. 8.1): усі його грані — рівні квадрати, і в кожній вершині сходяться три ребра.

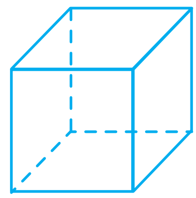


Рис. 8.1

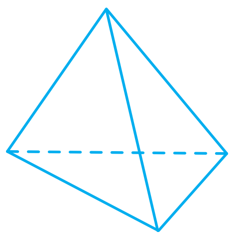


Рис. 8.2

Із означення правильного многогранника випливає, що всі ребра правильного многогранника рівні. Також можна довести, що в правильному многограннику рівні всі двогранні кути, що містять дві грані зі спільним ребром.

Визначимо, які правильні многокутники можуть утворювати правильний многогранник. Для цього скористаємося таким твердженням: *сума величин плоских кутів кожного многогранного кута (при кожній із вершин многогранника) менша від 360°* (див. § 1).

Найбільш простим правильним многогранником є трикутна піраміда, усі грані якої — правильні трикутники (рис. 8.2), а в кожній її вершині сходяться три ребра (три грані). Оскільки у цього многогранника всього чотири грані, його називають також тетраедром, що в перекладі з грецької означає «чотиригранник».

Іноді тетраедром називають також довільну трикутну піраміду. Тому у випадку, коли мова йде про правильний многогранник, говоритимемо — *правильний тетраедр*.

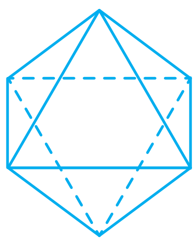


Рис. 8.3

Многогранник, гранями якого є правильні трикутники й у кожній вершині якого сходяться чотири ребра (і чотири грані), зображено на рис. 8.3. Його поверхня складається з восьми правильних трикутників, тому його називають *октаедром*.

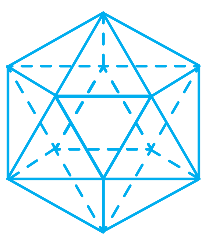


Рис. 8.4

Многогранник, у кожній вершині якого сходяться п'ять правильних трикутників, зображено на рис. 8.4. Його поверхня складається з двадцяти правильних трикутників, тому його називають *ікосаедром*.

Зазначимо, що вершина правильного многогранника не може бути вершиною більше ніж п'яти правильних трикутників, оскільки в іншому випадку сума плоских кутів при вершині була б більшою або дорівнювала 360°, що неможливо. Отже, інших правильних многогранників, гранями яких є правильні трикутники, не існує.

Аналогічно, оскільки вершина опуклого многогранника може бути вершиною тільки трьох квадратів, то, крім куба (рис. 8.1), інших правильних многогранників, у яких гранями є квадрати, не існує. Куб має шість граней, тому його ще називають *гексаедром*.

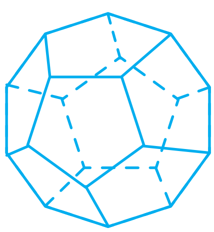


Рис. 8.5

Многогранник, гранями якого є правильні п'ятикутники й у кожній вершині сходяться три ребра, зображено на рис. 8.5. Його поверхня складається із дванадцяти правильних п'ятикутників, тому його називають *додекаедром*.

Зазначимо, що вершина опуклого многогранника не може бути вершиною чотирьох і більше правильних п'ятикутників. Також вершина опуклого многогранника не може бути вершиною правильного многокутника з кількістю сторін більше ніж п'ять (поясніть чому). Отже, інших правильних многогранників не існує, і є тільки п'ять правильних многогранників: тетраедр, гексаедр (куб), октаедр, додекаедр і ікосаедр.

Як і для інших многогранників, моделі правильних многогранників можна виготовити з розгорток або геометричного конструктора. На рис. 8.6 зображено одну з можливих розгорток додекаедра (додаткові частини в правильних п'ятикутниках призначені для склеювання відповідних граней).

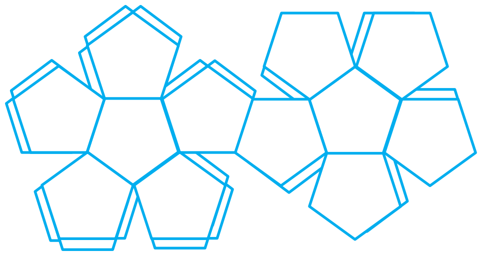


Рис. 8.6

Кристал піріту

Зауважимо, що форму правильних многогранників мають деякі кристали. Наприклад, кристали піріту мають форму додекаедра. Під час виробництва алюмінію користуються алюмокалієвими галунами, монокристал яких має форму правильного октаедра. Отримання сірчаної кислоти, заліза й особливих сортів цементу не обходиться без сірчистого колчедану. Кристали цієї хімічної речовини мають форму додекаедра. Ще один правильний многогранник — ікосаедр передає форму кристалів бору.

Кристал алюмокалієвого галуна

Спробуйте в мережі Інтернет знайти інформацію про те, кристали яких речовин мають форму тетраедра.

ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ

Задача Знайдіть двогранні кути правильного тетраедра.

Розв'язання	Коментар
► Проведемо з вершини D правильного тетраедра $ABCD$ висоту DN його грані DBC і висоту DO тетраедра (рис. 8.7).	Правильний тетраедр є правильною трикутною пірамідою, основою якої можна вважати будь-яку грань цього тетраедра.

Якщо $DN \perp BC$, то $ON \perp BC$ (за теоремою про три перпендикуляри), тому кут DNO — лінійний кут двогранного кута при ребрі BC.

Позначимо ребро тетраедра через a, тоді висоти граней дорівнюють $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Оскільки правильний тетраедр є правильною трикутною пірамідою, то основа висоти піраміди — центр правильного трикутника, який є центром описаного і вписаного в трикутник кіл.

Ураховуючи, що $ON \perp BC$, одержуємо: ON — радіус кола, вписаного в правильний трикутник, і $ON = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Із прямокутного трикутника DON одержуємо:

$$\cos\angle DNO = \frac{ON}{DN} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{6}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Тоді $\angle DNO = \arccos\frac{1}{3}$.

Очевидно, що двогранні кути при інших ребрах тетраедра є такими самими за величиною. ◁

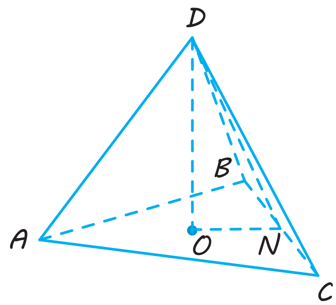


Рис. 8.7

Справді, в основі лежить правильний трикутник, а основою висоти піраміди є центр цієї основи, оскільки рівні похилі мають рівні проекції.

Отже, основою висоти є центр описаного кола, який у правильному трикутнику збігається із центром вписаного кола і є центром цього правильного трикутника.

Для побудови лінійного кута двогранного кута при ребрі правильного тетраедра зручно вважати обране ребро ребром основи трикутної піраміди, провести висоту піраміди й апофему (тобто висоту) відповідної бічної грані й використовувати теорему про три перпендикуляри.

Також доцільно врахувати, що в запропонованій задачі на обчислення не задано жодного відрізка, тому для її розв'язування зручно ввести невідомий відрізок (наприклад, довжину ребра тетраедра).

Запитання

1. Який многогранник називається правильним?
2. Назвіть п'ять типів правильних многогранників і опишіть їх.
3.* Обґрунтуйте, чому не може бути більше ніж п'ять типів правильних многогранників.

Вправи

8.1.° Чи є правильним многогранником: 1) довільна правильна піраміда; 2) довільна правильна призма?

8.2.° Чи існує: 1) піраміда; 2) призма, яка є правильним многогранником?

8.3.° Чому гранями правильного многогранника не можуть бути правильні шестикутники?

8.4.° Многогранник є об'єднанням двох правильних тетраедрів, що мають спільну основу. Чи буде такий многогранник правильним? Чому?

8.5.° Які площини симетрії має правильний: 1) тетраедр; 2) гексаедр?

8.6. Скільки площин симетрії має правильний: 1) октаедр; 2) додекаедр; 3) ікосаедр?

8.7. Доведіть, що кінці двох непаралельних діагоналей протилежних граней куба є вершинами правильного тетраедра.

8.8.° Ребро октаедра дорівнює a. Знайдіть площу його поверхні.

8.9.° Площа грані правильного додекаедра дорівнює 8 см^2. Знайдіть площу поверхні цього додекаедра.

8.10.° Площа поверхні правильного тетраедра дорівнює $100\sqrt{3}$ см^2. Чому дорівнює його ребро?

8.11. З однієї вершини куба провели три діагоналі граней і сполучили їхні кінці відрізками. Чи буде утворена піраміда правильним тетраедром? Відповідь обґрунтуйте.

8.12. Доведіть, що в октаедрі протилежні ребра паралельні.

8.13. Знайдіть двогранні кути октаедра.

8.14. Ребро октаедра дорівнює a. Визначте відстань між його протилежними вершинами.

8.15. Від кожної вершини тетраедра з ребром 2 см відтинається тетраедр із ребром 1 см. Який многогранник залишиться?

8.16.* Доведіть, що центри граней куба є вершинами октаедра, а центри граней октаедра — вершинами куба.

8.17. Які із зображених на рисунку 8.8 фігур можна вважати розгортками октаедра?

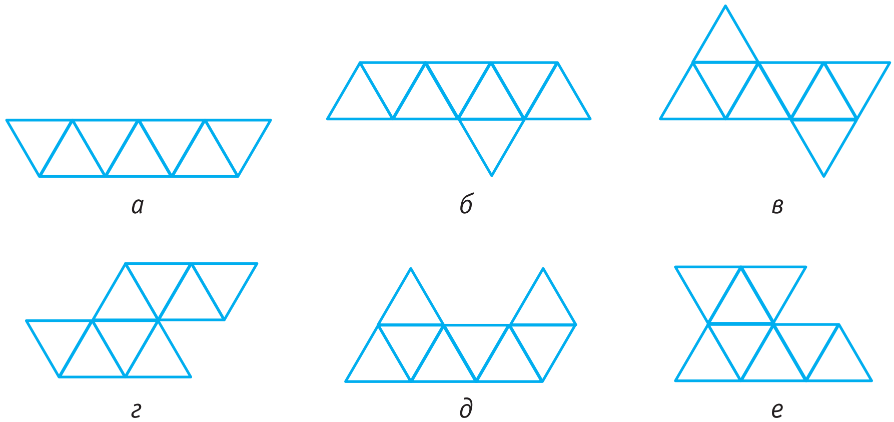


Рис. 8.8

Виявіть свою компетентність

8.18. Побудуйте розгортки правильних многогранників. Виготовте з розгорток моделі правильних многогранників.

§ 9 ПОНЯТТЯ ГЕОМЕТРИЧНОГО ТІЛА ТА ЙОГО ПОВЕРХНІ

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

Одним з основних об'єктів вивчення в курсі стереометрії є геометричні тіла. До них належать уже відомі вам піраміда, куб, паралелепіпед, призма, циліндр, конус і куля. Під час вивчення многогранників (призм і пірамід) в 11 класі ми не користувалися їхніми означеннями як геометричних тіл, а формулювали ці означення за допомогою переліку всіх точок простору, із яких утворюються відповідні многогранники. Нагадаємо, наприклад, що призмою називається многогранник, складений із двох плоских многокутників, які лежать у різних площинах і суміщаються паралельним перенесенням, і всіх відрізків, що сполучають відповідні точки цих многокутників (рис. 9.1).

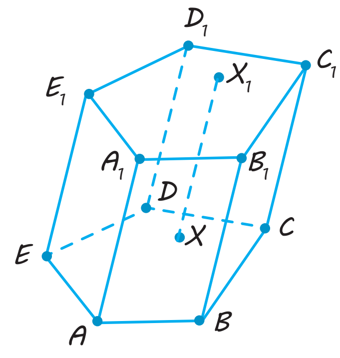


Рис. 9.1

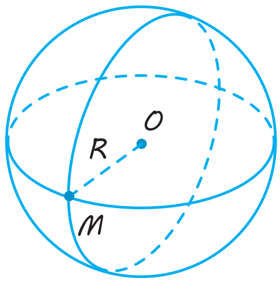


Рис. 9.2

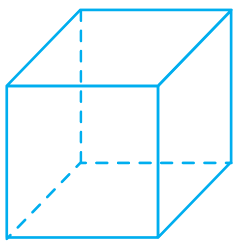


Рис. 9.3

Разом із тим, під час вивчення стереометрії в 10 класі ми користувалися наочним уявленням про геометричне тіло й уявляли його як частину простору, який займає фізичне тіло, обмежене деякою поверхнею. Таке уявлення дозволяє говорити про *внутрішні точки* будь-якого геометричного тіла, які на інтуїтивному рівні можна уявляти як точки, відділені від інших точок простору границею цього тіла. Наприклад, внутрішні точки кулі (рис. 9.2) відділені від інших точок простору своєю границею — сферою, а внутрішні точки куба (рис. 9.3) теж відділені своєю границею — шістьма його гранями.

Також слід зазначити, що будь-які дві внутрішні точки геометричного тіла, наприклад кулі, можуть бути сполучені лінією, яка повністю розташована всередині цієї кулі, тобто лінією, що утворена тільки внутрішніми точками цієї кулі.

Сформулюємо строге означення зазначеним характеристичним властивостям геометричного тіла. Для цього нагадаємо й уведемо низку необхідних понять.

✓ **Означення 1. Сферою із заданим центром O і радіусом $R>0$ називається множина всіх точок M простору, відстань від кожної з яких до центра O дорівнює R, тобто $MO=R$ (рис. 9.2).**

✓ **Означення 2. Кулею із заданим центром O і радіусом $R>0$ називається множина всіх точок M простору, відстань від кожної з яких до центра O не перевищує R, тобто $MO \leqslant R$ (рис. 9.2).**

Уведемо також загальне поняття опуклої фігури (на площині або в просторі).

✓ **Означення 3. Фігура F називається опуклою, якщо відрізок AB із кінцями в будь-яких двох точках A і B фігури F повністю міститься в цій фігурі.**

На рис. 9.4 зображена опукла фігура F_1: будь-який відрізок, наприклад відрізок AB, що сполучає дві довільні точки фігури, повністю міститься в цій фігурі.

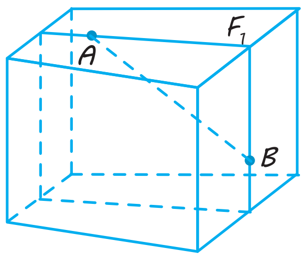


Рис. 9.4

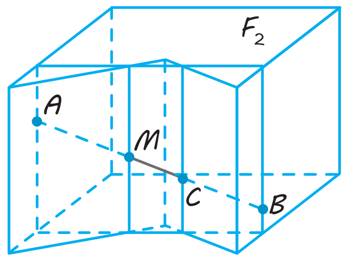


Рис. 9.5

Фігура F_2 (рис. 9.5) не є опуклою (є неопуклою), оскільки можна вказати дві точки A і B фігури F_2 такі, що відрізок AB не міститься повністю в цій фігурі: на відрізку AB є точки, які лежать між точками M і C і не належать фігурі F_2.

Із означення опуклої фігури випливає, що всі точки опуклого многогранника розташовані по один бік від площини кожного плоского многокутника на його поверхні. Це повністю узгоджується з означенням опуклого многогранника, наведеного у параграфі 2.

Означення 4. Фігура F називається зв'язною, якщо будь-які дві її точки можна сполучити лінією фігури, що повністю належить цій фігурі F.

При цьому конфігурація лінії, що сполучає точки, може виявитися досить складною.

На рис. 9.6 зображена зв'язна фігура F: будь-які точки цієї фігури, наприклад K і M, можна сполучити ламаною KAM, яка повністю міститься у фігурі F.

Фігура F, зображена на рис. 9.7, є об'єднанням фігур F_1 і F_2 — тетраедрів $PABC$ і $P_1A_1B_1C_1$, які не мають спільних точок. Якщо точка K належить тетраедру $PABC$, а точка M — тетраедру $P_1A_1B_1C_1$, то сполучити точки K і M лінією, що повністю належить фігурі $F=F_1\cup F_2$, неможливо, оскільки ці точки належать (по одній) тетраедрам, які не перетинаються. Тому фігура F, що складається з двох тетраедрів, які не перетинаються, є незв'язною.

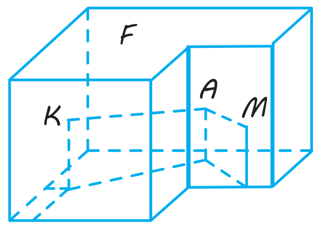


Рис. 9.6

Фігури, зображені на рис. 9.4 і 9.5, — зв'язні.

Сформулюємо означення внутрішньої точки фігури в просторі.

Означення 5. Точка M фігури F називається внутрішньою точкою цієї фігури, якщо існує куля з центром у точці M, яка повністю міститься у фігурі F.

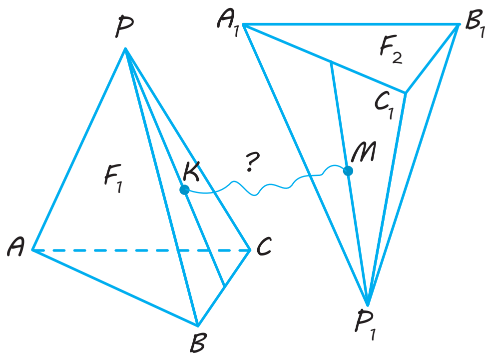


Рис. 9.7

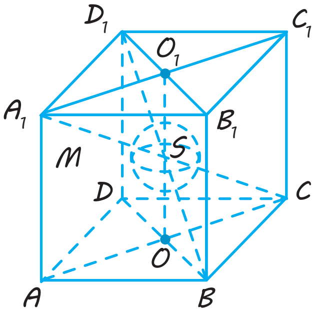


Рис. 9.8

Можна, наприклад, говорити про множину всіх внутрішніх точок куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ із ребром 2 (рис. 9.8). Наприклад, нехай точка S — середина відрізка OO_1, що сполучає центри двох граней $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$. Оскільки $OO_1=2$, то $SO=SO_1=1$. Куля з центром S і радіусом $R<1$ повністю міститься в цьому кубі. Отже, S — внутрішня точка куба.

Нехай M — будь-яка точка куба, що не належить його граням. Знайдемо відстані від точки M до всіх шести площин, у яких лежать грані куба. Якщо d — найменша із цих шести відстаней, то куля з центром M і радіусом $R<d$ повністю міститься в кубі. Тому точка M є внутрішньою точкою куба. Це означає, що будь-яка точка куба, що не належить його граням, є внутрішньою точкою цього куба.

Означення 6. Точка M простору називається граничною точкою фігури F, якщо будь-яка куля з центром у точці M містить як точки фігури F, так і точки, що не належать цій фігурі. Множина всіх граничних точок фігури F називається границею цієї фігури.

Наприклад, точка O_1 грані $A_1B_1C_1D_1$ (рис. 9.9), точка K ребра CC_1 і вершина B куба є граничними точками цього куба, оскільки будь-яка куля з центром O_1 (K, B) містить як точки заданого куба, так і точки, що не належать йому. Тому кожна вершина куба, кожна точка кожного ребра, кожна точка кожної його грані — граничні точки куба. Це означає, що границею куба є об'єднання всіх шести його граней.

Із наведеного означення також випливає, що границею кулі з центром O і радіусом $R>0$ є сфера з центром O і радіусом R.

Отже, для будь-якої зв'язної фігури можуть існувати три види точок: її внутрішні точки, її граничні точки й точки, які їй не належать, — їх називають зовнішніми точками фігури. Для незв'язних фігур можуть існувати ще ізольовані точки.

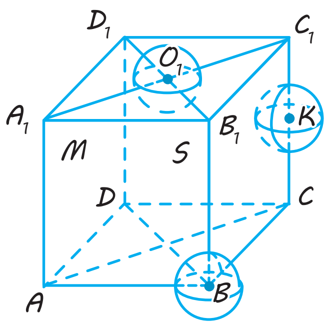


Рис. 9.9

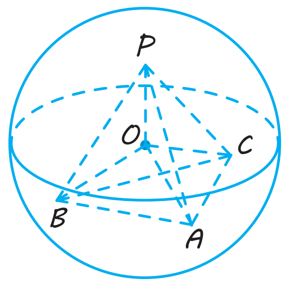


Рис. 9.10

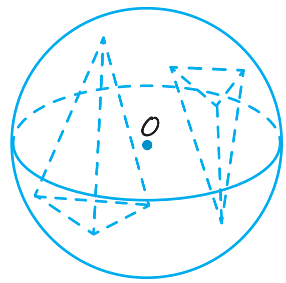


Рис. 9.11

Означення 7. Фігура F називається обмеженою, якщо існує куля, що повністю містить цю фігуру.

Розглянемо, наприклад, тетраедр $PABC$. Нехай O — точка цього тетраедра (рис. 9.10), а m — найбільша з відстаней OA, OB, OC, OP від точки O до вершин тетраедра. Тоді куля з центром O і радіусом $R>m$ повністю містить тетраедр $PABC$. Отже, тетраедр — обмежена фігура.

Фігура, що є об'єднанням двох тетраедрів, які не перетинаються (рис. 9.11), також є обмеженою.

Тригранний кут $SABC$ (рис. 9.12) — фігура необмежена, оскільки не обмежені його ребра SA, SB, SC і грані ASB, BSC, CSA, тому не існує кулі, яка б повністю містила цю фігуру.

Наведені означення дають можливість сформулювати строге означення геометричного тіла та його поверхні.

Означення 8. Геометричним тілом називається обмежена фігура в просторі, яка має такі властивості:

1) **у неї є внутрішні точки, причому будь-які дві з них можна сполучити лінією, усі точки якої також є внутрішніми;**

2) **фігура містить свою границю, причому її границя збігається з границею множини всіх її внутрішніх точок.**

Означення 9. Границя тіла називається його поверхнею. Говорять, що поверхня тіла обмежує це тіло.

Прикладами геометричних тіл можуть служити фігури, зображені на рис. 9.1–9.6, 9.8.

Не є тілом об'єднання двох тетраедрів (див. рис. 9.7, 9.11) (ця фігура незв'язна) і тригранний кут (необмежена фігура) (рис. 9.12).

Із означення геометричного тіла одержуємо, що геометричним тілом є фігура в просторі, для якої виконуються такі умови:

1) задана фігура є обмеженою;
2) у неї є внутрішні точки, і будь-які дві з них можна сполучити лінією, усі точки якої теж є внутрішніми;
3) фігура містить свою границю та її границя збігається з границею множини всіх її внутрішніх точок (тобто з границею її внутрішньої частини).

Зазначимо, що, згідно з другою умовою, внутрішня частина тіла (тобто множина всіх його внутрішніх точок) не розпадається на окремі шматки.

Тому фігура, складена з об'єднання двох куль, які не мають спільних точок, не є тілом.

Аналогічно не вважають тілом фігуру, що складена з двох куль, які мають лише одну спільну точку (поясніть чому).

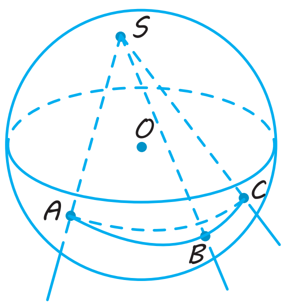


Рис. 9.12

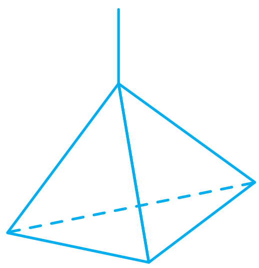


Рис. 9.13

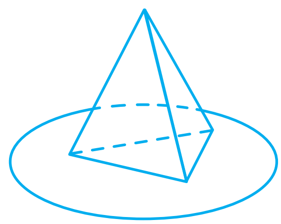


Рис. 9.14

Третя умова означає, по-перше, що границя тіла належить йому так, що куля без обмежувальної його сфери або навіть куля без однієї її точки — уже не є тілом.

По-друге, згідно з умовою 2, границя тіла скрізь прилягає до його внутрішньої частини так, що піраміда зі шпилем — відрізком (рис. 9.13) — і піраміда з плоскими «полями», як у капелюха (рис. 9.14), не є тілами.

Використовуючи поняття геометричного тіла, можна сформулювати *загальне означення многогранника*, а саме:

Многогранник — це геометричне тіло, поверхня якого є об'єднанням скінченного числа плоских многокутників.

Зазначимо, що поняття внутрішньої та граничної точки, а також області можна ввести і на площині, якщо у відповідних означеннях замість кулі й сфери розглядати круг і коло відповідно.

Тоді, наприклад, плоский многокутник — обмежена замкнена область на площині, границею якої є многокутник.

ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ

Задача

Чи є геометричним тілом фігура, що складається з двох рівних правильних тетраедрів, у яких спільна: 1) вершина; 2) грань? Відповідь обґрунтуйте.

Розв'язання

▶ **1)** Задана фігура (рис. 9.15) не є геометричним тілом. Справді, якщо M і K — внутрішні точки двох тетраедрів, із яких складається задана фігура, то лінія, що їх сполучає і проходить тільки через точки заданої фігури, обов'язково проходить через спільну вершину A заданих тетраедрів.

Але ця точка не є внутрішньою для заданої фігури (вона є граничною, оскільки будь-яка куля із центром у точці A містить як точки заданої фігури, так і точки, що не належать цій фігурі).

2) Задана фігура $DABCE$ (грань ABC — спільна для правильних тетраедрів $DABC$ і $ABCE$; рис. 9.16) — є геометричним тілом.

Справді, вона обмежена. (Якщо точка O — центр правильного трикутника ABC, то з відрізків OA і OD виберемо більший — відрізок $OD = h$. Тоді куля з центром O і радіусом $R > h$ повністю містить задану фігуру.)

Оскільки в тетраедрах, із яких складається задана фігура, спільна основа, то внутрішніми точками фігури є всі внутрішні точки обох тетраедрів і внутрішні точки трикутника ABC (тому будь-які дві внутрішні точки M і K можна сполучити лінією, наприклад, відрізком MK, усі точки якого внутрішні). Границею для внутрішньої частини заданої фігури є об'єднання трикутників ADC, ADB, BDC, ABE, ACE, BCE, і ця границя належить заданій фігурі (інших граничних точок ця фігура не має). ◁

Коментар

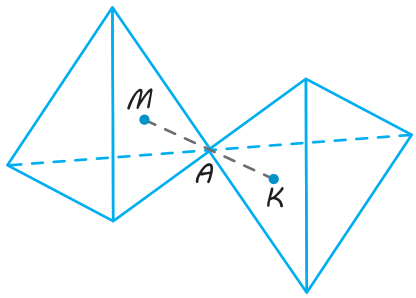


Рис. 9.15

Щоб переконатися, що задана фігура є геометричним тілом, слід перевірити виконання таких умов:
1) фігура є обмеженою;
2) у неї є внутрішні точки, будь-які дві з них можна сполучити лінією, усі точки якої теж є внутрішніми;
3) фігура містить свою границю, причому вона збігається із границею множини всіх її внутрішніх точок (тобто границею її внутрішньої частини). Для того щоб зробити висновок, що задана фігура не є геометричним тілом, достатньо вказати хоча б одну з характеристичних властивостей тіла, яка не виконується для цієї фігури.

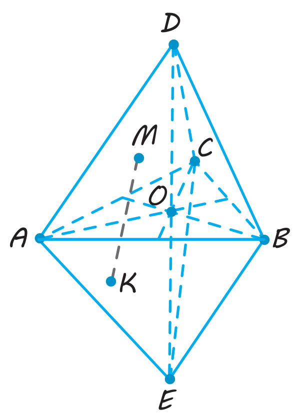


Рис. 9.16

Запитання

1. Яка фігура в просторі називається опуклою? Наведіть приклади опуклих і неопуклих просторових фігур.
2. Яка фігура в просторі називається зв'язною? Наведіть приклади зв'язних і незв'язних просторових фігур.
3. Яка точка просторової фігури називається внутрішньою? Чи є внутрішньою точкою правильного тетраедра основа його висоти? середина його висоти? Відповідь обґрунтуйте.
4. Яка точка просторової фігури називається граничною? Чи є граничною точкою правильного тетраедра одна з його вершин? основа його висоти? Відповідь обґрунтуйте.
5. Що таке границя просторової фігури? Що є границею правильного тетраедра?
6. Яка фігура в просторі називається обмеженою? Наведіть приклади обмежених і необмежених фігур.
7. Що таке геометричне тіло? Наведіть приклади.
8. Що таке поверхня геометричного тіла? Наведіть приклади.

Вправи

9.1. Чи є геометричним тілом двогранний кут? Відповідь обґрунтуйте.

9.2. Чи є геометричним тілом фігура, що складена з двох рівних кубів, у яких спільна: 1) вершина; 2) ребро; 3) грань; 4) діагональ? Виконайте відповідні рисунки. Відповідь обґрунтуйте.

9.3. Зобразіть дві просторові фігури й розмістіть їх так, щоб: 1) їх об'єднання було геометричним тілом; 2) їх переріз був геометричним тілом; 3) їх об'єднання не було геометричним тілом; 4) їх переріз не був геометричним тілом.

9.4. Що є множиною всіх точок простору, координати яких задовольняють умову:

1) $x^2+y^2+z^2=4$; 2) $x^2+y^2+z^2\leqslant 4$; 3) $x^2+y^2+z^2<4$?

Яка з цих трьох фігур є геометричним тілом?

9.5. Зобразіть у декартовій системі координат фігуру, координати якої задовольняють умови $0\leqslant x\leqslant 2$, $0\leqslant y\leqslant 2$, $0\leqslant z\leqslant 2$. Чи є ця фігура геометричним тілом?

9.6. Чи є фігура, координати якої задовольняють умови $0<x<2$, $0<y<2$, $0<z<2$, геометричним тілом?

9.7. Чи є фігура, координати точок якої задовольняють систему нерівностей $\begin{cases} x^2+y^2+z^2>1, \\ x^2+y^2+z^2<16, \end{cases}$ геометричним тілом?

Відомості з історії

Многогранники і, зокрема, правильні многогранники з давніх часів привертали до себе увагу вчених, архітекторів і представників багатьох інших професій. Їх вражала краса, досконалість, гармонія многогранників. Піфагорійці вважали правильні многогранники божественними й використовували їх у своїх філософських творах про суть світу. Детально описав властивості правильних многогранників давньогрецький учений Платон (429—348 рр. до н. е.). Саме тому правильні многогранники називаються також тілами Платона. Правильним многогранникам присвячена остання, XIII, книга знаменитих «Начал» Евкліда.

Услід за Евклідом вивченням п'яти правильних многогранників займався Архімед (287—212 рр. до н. э.). Переконавшись у тому, що не можна побудувати шостий правильний многогранник, Архімед почав будувати многогранники, у яких гранями є правильні, але не одноіменні многокутники, а в кожній вершині, як і у правильних многогранників, сходиться одна й та сама кількість ребер. Так він отримав 13 напівправильних многогранників.

До нас дійшла робота вченого «Про многогранники», у якій детально описані й наведені рисунки усіх 13 многогранників, названих на честь ученого тілами Архімеда (див. рис. 1).

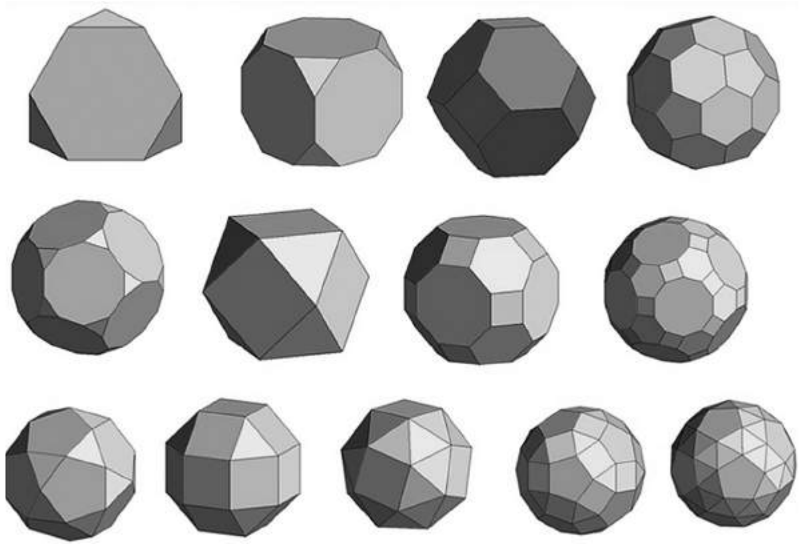


Рис. 1. Тіла Архімеда

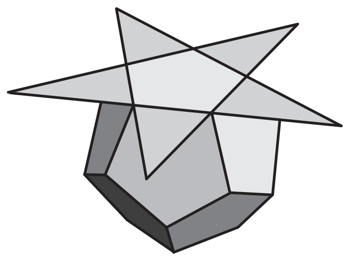


Рис. 2. Зірчастий правильний п'ятикутник

Крім правильних і напівправильних многогранників красиві форми мають так звані зірчасті многогранники. Наприклад, існує тільки чотири правильні зірчасті многогранники. Перші два були відкриті І. Кеплером (1571—1630), а два інших майже 200 років по тому побудував Л. Пуансо (1777—1859). Саме тому правильні зірчасті многогранники називаються тілами Кеплера — Пуансо. Їх можна одержати з правильних многогранників продовженням їх граней або ребер. Із тетраедра, куба і октаедра зірчасті многогранники одержати не вдається. Якщо розглянути додекаедр, то продовження його ребер приводить до заміни кожної грані зірчастим правильним п'ятикутником (рис. 2) і в результаті виникає многогранник, який називається малим зірчастим додекаедром (рис. 3, *а*).

У результаті продовження граней додекаедра з'являються дві можливості. По-перше, якщо розглядати правильні п'ятикутники, то одержуємо так званий великий додекаедр (рис. 3, *г*). По-друге, якщо як грані розглядати зірчасті п'ятикутники, то одержуємо великий зірчастий додекаедр (рис. 3, *б*).

Ікосаедр має одну зірчасту форму. У результаті продовження граней ікосаедра одержуємо великий зірчастий ікосаедр (рис. 3, *в*).

Таким чином, існують тільки чотири типи правильних зірчастих многогранників.

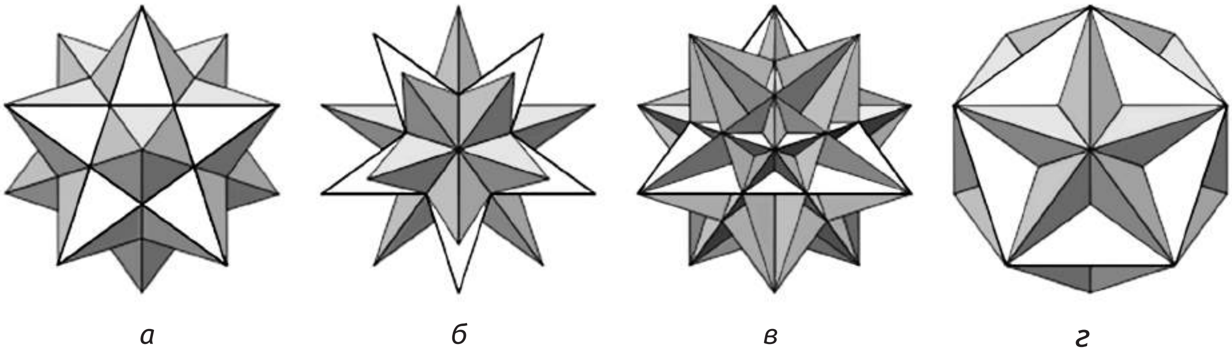
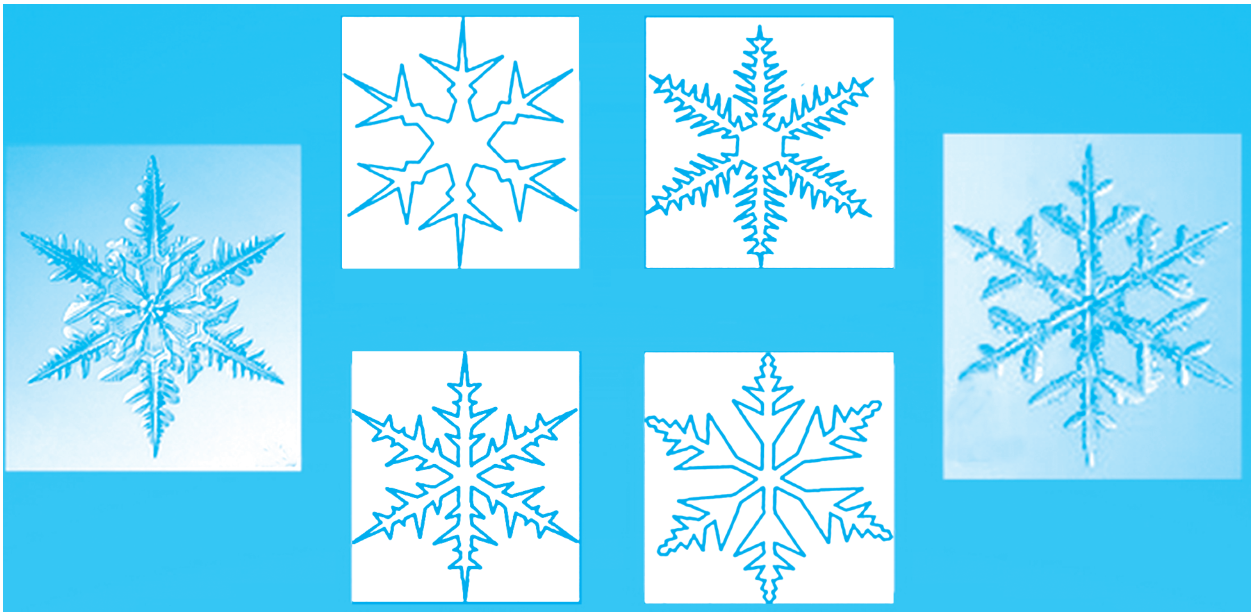


Рис. 3. Зірчасті многогранники

Багато форм зірчастих многогранників підказує сама природа. Сніжинки — це зірчасті многогранники. Із давнини люди намагалися описати всі можливі типи сніжинок, складали спеціальні атласи. Зараз відомо кілька тисяч різних типів сніжинок.



В епоху Відродження великий інтерес до форм правильних многогранників проявили скульптори, архітектори, художники. Леонардо да Вінчі, наприклад, захоплювався теорією многогранників і часто зображував їх на своїх полотнах. Він проілюстрував зображеннями правильних і напівправильних многогранників книгу свого друга ченця Луки Пачолі (1445—1514) «Про божественну пропорцію». Іншим знаменитим художником епохи Відродження, який також захоплювався геометрією, був А. Дюрер. У його відомій гравюрі «Меланхолія» (див. рисунок на с. 92) на передньому плані зображено додекаедр. 1525 року Дюрер написав трактат, у якому представив п’ять правильних многогранників, поверхні яких служать гарними моделями перспективи. Як ілюстрація цього висновку на знаменитій картині Сальвадора Далі «Таємна вечеря» міститься перспективне зображення правильного додекаедра.

Гравюра «Меланхолія» (А. Дюрер)

Картина «Таємна вечеря» (Сальвадор Далі)

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПІДГОТОВКИ ДО ОЦІНЮВАННЯ

Тест № 1

Пройдіть онлайн-тестування

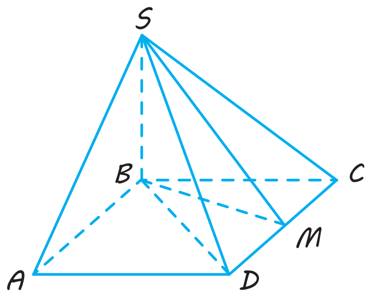
1. Знайдіть діагональ прямокутного паралелепіпеда, якщо його виміри дорівнюють 3 см, 4 см, 12 см.

А 5 см **Б** 12 см **В** 13 см **Г** 14 см **Д** 15 см

2. Обчисліть площу бічної поверхні прямої призми, основою якої є паралелограм зі сторонами 6 см і 14 см, а висота призми дорівнює 12 см.

А 144 см^2 **Б** 168 см^2 **В** 240 см^2 **Г** 336 см^2 **Д** 480 см^2

3. Основою піраміди $SABCD$, зображеної на рисунку, є квадрат, бічне ребро SB перпендикулярне до площини основи піраміди, точка M — середина відрізка CD. Укажіть лінійний кут двогранного кута піраміди при ребрі CD.

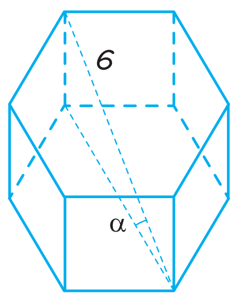


А $\angle SAB$ **Б** $\angle SDB$ **В** $\angle SCB$ **Г** $\angle SMB$ **Д** $\angle SCD$

4. Діагональ правильної чотирикутної призми дорівнює d і утворює кут φ з площиною основи призми. Знайдіть ребро основи призми.

А $d\cos\varphi$ **Б** $d\sqrt{2}\sin\varphi$ **В** $\frac{d\sqrt{2}}{2}\sin\varphi$ **Г** $d\sqrt{2}\cos\varphi$ **Д** $\frac{d\sqrt{2}}{2}\cos\varphi$

5. На рисунку зображено правильну шестикутну призму. Більша діагональ призми дорівнює 6 і утворює кут α з площиною основи. Установіть відповідність між заданими величинами (1–3) та виразами для їх обчислення (А–Г).



1 Висота призми
2 Сторона основи призми
3 Площа найбільшого діагонального перерізу

А $3\cos\alpha$
Б $6\cos\alpha$
В $6\sin\alpha$
Г $18\sin 2\alpha$

6. Основа прямої трикутної призми — прямокутний трикутник із катетами 10 см і 24 см, а висота призми 5 см. Знайдіть площу повної поверхні призми.

А 120 см^2 **В** 300 см^2 **Д** 540 см^2
Б 240 см^2 **Г** 470 см^2

7. Знайдіть площу бічної поверхні правильної чотирикутної піраміди, висота якої дорівнює 6 см, а сторона основи — 16 см.

8. В основі піраміди лежить прямокутний трикутник із гіпотенузою c і гострим кутом α. Дві бічні грані, які проходять через катети, перпендикулярні до площини основи, а третя бічна грань нахилена до основи під кутом φ. Знайдіть висоту піраміди.

Теми навчальних проектів

1. Многогранники в архітектурі світу й України.
2. Правильні й напівправильні многогранники.
3. Геометрія в кристалах.
4. Зірчасті многогранники.

Для виконання проекту створюється кілька груп, кожна має знайти певну інформацію.

Результати роботи над проектом кожна група оформлює у вигляді комп'ютерної презентації, захист проектів доцільно провести у формі дебатів.

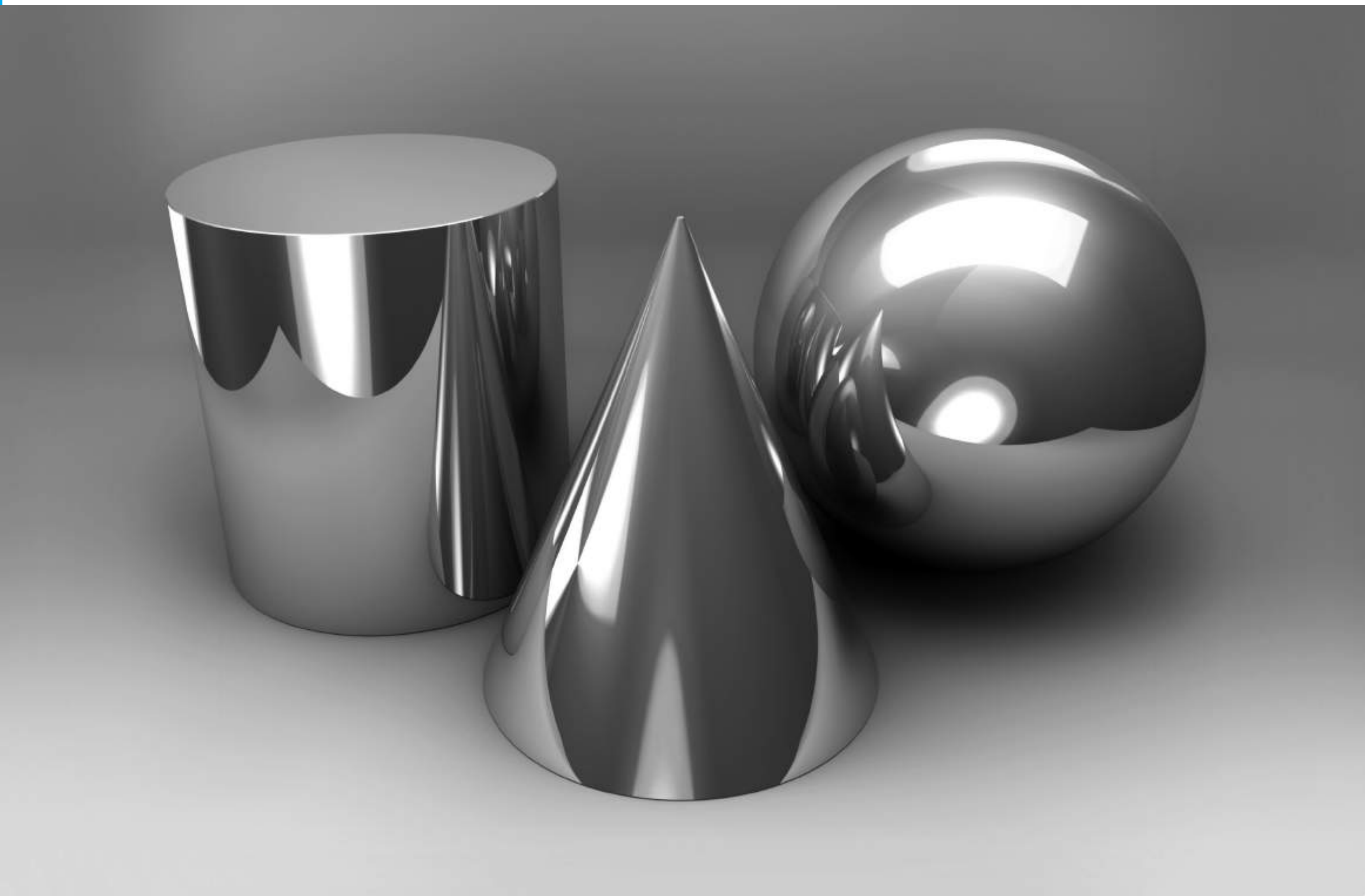
З етапами роботи над проектом можна ознайомитися, звернувшись до інтернет-підтримки підручника.

Розділ 2

ТІЛА ОБЕРТАННЯ

У ЦЬОМУ РОЗДІЛІ ВИ:

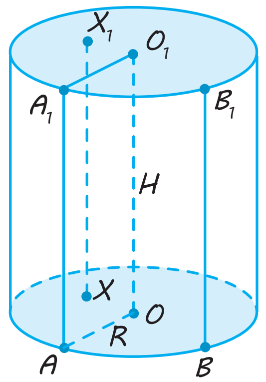
- ознайомитеся з основними тілами обертання: циліндром, конусом, кулею та їхніми властивостями;
- навчитеся розв'язувати задачі, пов'язані з тілами обертання;
- зможете уточнити розташування центрів вписаних і описаних куль у призмах і пірамідах;
- навчитеся розв'язувати задачі, у яких розглядаються перерізи тіл обертання та комбінації многогранників з кулею



§ 10 ЦИЛІНДР І ДЕЯКІ ЙОГО ПЕРЕРІЗИ

Таблиця 8

Циліндр



Циліндром (круговим циліндром) називається тіло, що складається з двох кругів, які не лежать в одній площині і суміщаються паралельним перенесенням, і всіх відрізків, що сполучають відповідні точки цих кругів.

Круги — **основи циліндра.**

Відрізки, що сполучають відповідні точки кіл кругів, — **твірні циліндра.**

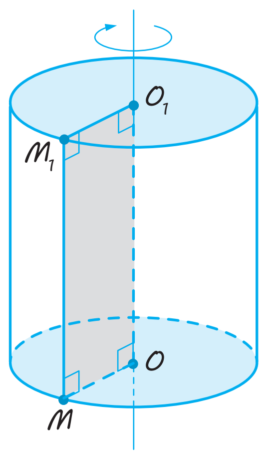
AA_1, BB_1 — твірні циліндра.

Циліндр називається *прямим*, якщо його твірні перпендикулярні до площин основ.

У шкільних підручниках:

циліндр = прямий круговий циліндр

Властивості



1. Основи циліндра рівні й паралельні.

$OA = O_1A_1 = R$, пл. $AOB \parallel$ пл. $A_1O_1B_1$.

O — центр нижньої основи,

O_1 — центр верхньої основи.

2. Твірні циліндра паралельні й рівні.

$AA_1 \parallel BB_1$, $AA_1 = BB_1$.

3. Висота циліндра (відстань між площинами основ) дорівнює довжині твірної.

$H_{\text{цил}} = AA_1 = OO_1$.

4. У результаті обертання прямокутника навколо його сторони як осі утворюється циліндр.

OMM_1O_1 — прямокутник,

OO_1 — вісь утвореного циліндра $(OO_1 \parallel MM_1)$.

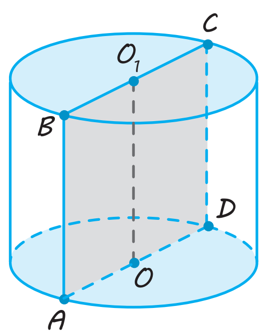
$R_{\text{цил}} = OM = O_1M_1$, $H_{\text{цил}} = MM_1 = OO_1$.

5. $S_{\text{осн. цил}} = \pi R^2$, $S_{\text{бічн. цил}} = 2\pi RH$.

$S_{\text{повн}} = S_{\text{бічн}} + 2S_{\text{осн}} = 2\pi R(H+R)$

Перерізи циліндра площинами

Осьовий переріз циліндра



$ABCD$ — **осьовий переріз** (переріз, що проходить через вісь OO_1),

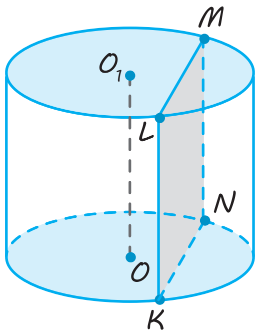
$ABCD$ — прямокутник.

$AD = d_{\text{осн}} = 2R$, $AB = H_{\text{цил}}$.

AB і CD — твірні циліндра

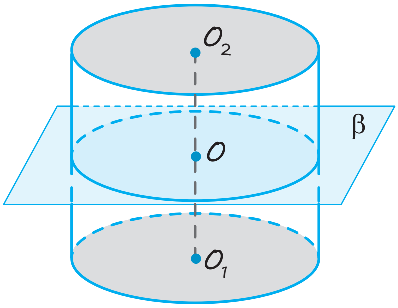
Закінчення табл. 8

Переріз циліндра площиною, паралельною його осі



пл. $KLM \parallel OO_1$,
$KLMN$ — прямокутник.
KL і MN — твірні циліндра,
$$KL = H_{\text{цил}}$$

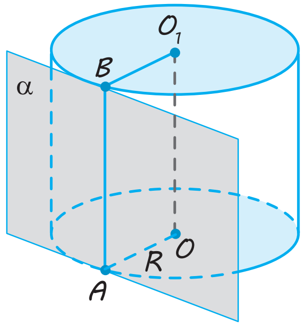
Переріз циліндра площиною, паралельною його основам



Площина, паралельна площині основи циліндра, перетинає його бічну поверхню по колу, що дорівнює колу основи.

$$R_{\text{перерізу}} = R_{\text{цил}}$$

Площина, дотична до циліндра



Площина, що проходить через твірну циліндра перпендикулярно до осьового перерізу, який містить цю твірну, називається **площиною, дотичною до циліндра**.
α — дотична площина до циліндра.
AB — твірна, площина α проходить через AB.
$$\alpha \perp \text{пл. } AOO_1$$

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1. Циліндр

Означення. Циліндром (точніше, круговим циліндром) називається тіло, що складається з двох кругів, які не лежать в одній площині й суміщаються паралельним перенесенням, і всіх відрізків, що сполучають відповідні точки цих кругів (рис. 10.1).

Слово «циліндр» походить від грецького «килиндро» — обертаю.

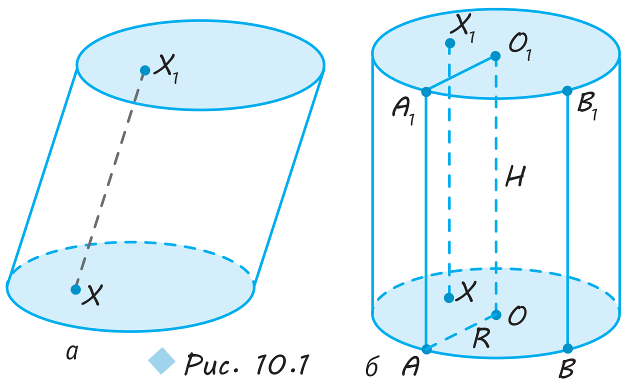


Рис. 10.1

Круги називаються *основами циліндра*, а відрізки, що сполучають відповідні точки кіл кругів, — *твірними циліндра*.

Оскільки паралельне перенесення є рухом, то **основи циліндра рівні**. Оскільки в результаті паралельного перенесення площина переходить у паралельну площину (або в себе), то **основи циліндра лежать у паралельних площинах**. Оскільки в результаті паралельного перенесення точки зміщуються по паралельних прямих (або по прямих, які збігаються) на ту саму відстань, то **твірні циліндра паралельні й рівні**.

Циліндр називається *прямим*, якщо його твірні перпендикулярні до площин основ: $AA_1 \perp$ пл. ABO (рис. 10.1, *б*).

Далі розглядатимемо тільки прямий циліндр, який називатимемо просто *циліндром*. *Прямий циліндр наочно можна розглядати як тіло, утворене в результаті обертання прямокутника навколо сторони як осі* (рис. 10.2).

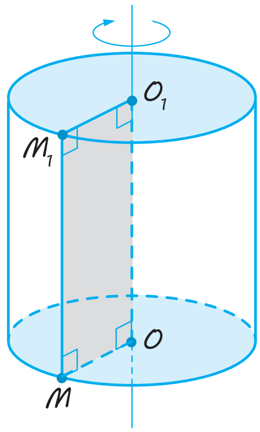


Рис. 10.2

Радіусом циліндра називається радіус його основи.

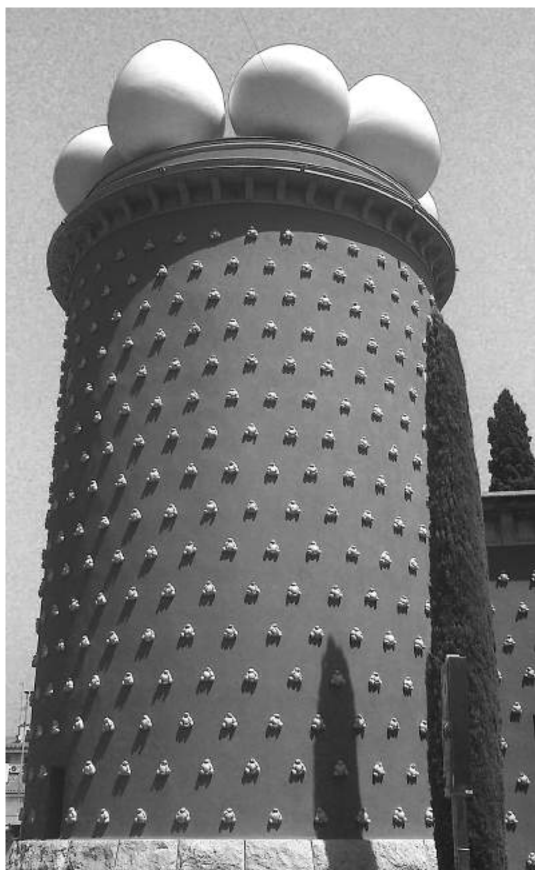
Висотою циліндра називається перпендикуляр, проведений із будь-якої точки однієї основи на іншу. Також висотою називають довжину цього перпендикуляра, тобто відстань між площинами його основ.

Зазначимо, що висота циліндра дорівнює його твірній.

Віссю циліндра називається пряма, що проходить через центри його основ. Вісь паралельна твірним.

Об'єкти циліндричної форми часто зустрічаються в побуті, техніці та архітектурі (див. рисунки).

Музей С. Далі, м. Фігерас, Іспанія



Поверхня циліндра складається з основ і бічної поверхні. ***Бічну поверхню*** циліндра утворюють твірні.

Якщо поверхню циліндра розрізати по колах основ і якій-небудь твірній, а потім розгорнути на площині, то одержимо розгортку циліндра (рис. 10.3). Вона складається із прямокутника — розгортки бічної поверхні циліндра — і двох рівних кругів. Якщо радіус циліндра дорівнює R, а висота — H, то його бічну поверхню розгортаємо в прямокутник зі сторонами $2\pi R$ і H. Площу цієї розгортки $2\pi RH$ приймають за *площу бічної поверхні циліндра**.

Отже,

$$S_{\text{бічн. цил}} = 2\pi RH,$$

де R — радіус циліндра, H — його висота.

Тоді площа повної поверхні циліндра дорівнює:

$$S_{\text{повн}} = S_{\text{бічн. цил}} + 2S_{\text{осн}} =$$
$$= 2\pi RH + 2\pi R^2 = 2\pi R(H + R).$$

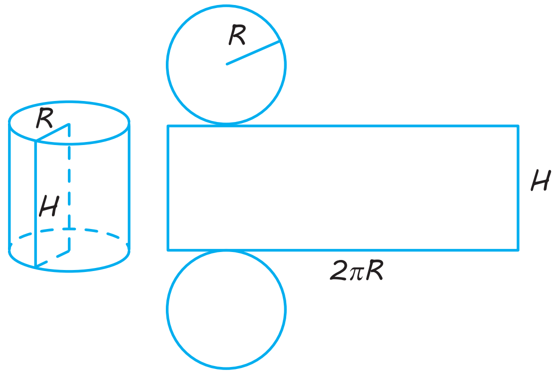


Рис. 10.3

2. Переріз циліндра площинами

Переріз циліндра площиною, паралельною його осі, є прямокутником (рис. 10.4).

Дві його сторони — твірні циліндра, а дві інші — паралельні хорди основ.

Зокрема, прямокутником є осьовий переріз. Це переріз циліндра площиною, що проходить через його вісь (рис. 10.5).

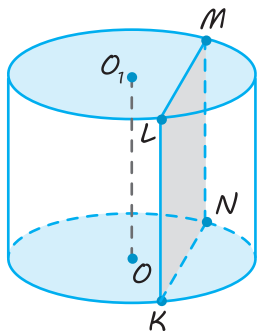


Рис. 10.4

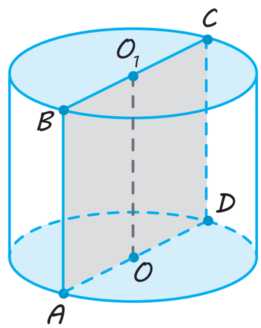


Рис. 10.5

Теорема 10.1. Площина, паралельна площині основи циліндра, перетинає його бічну поверхню по колу, що дорівнює колу основи.

● Нехай β — площина, паралельна площині основи циліндра (рис. 10.6). Паралельне перенесення вздовж напрямку осі циліндра, що суміщає площину β з площиною основи циліндра, також суміщає переріз бічної поверхні площиною β з колом основи. Отже, переріз є колом, що дорівнює колу основи. ○

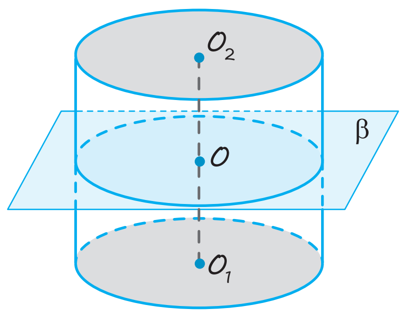


Рис. 10.6

3. Вписана й описана призми

Означення. Призма називається вписаною в циліндр (а циліндр — описаним навколо призми), якщо основи призми вписані в кола основ циліндра.

* Більш строго цю формулу буде обґрунтовано в § 17.

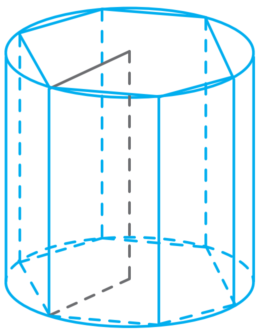


Рис. 10.7

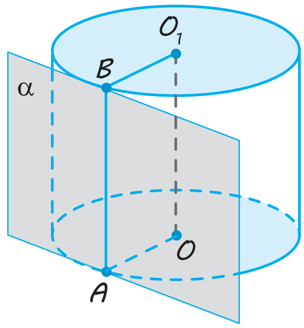


Рис. 10.8

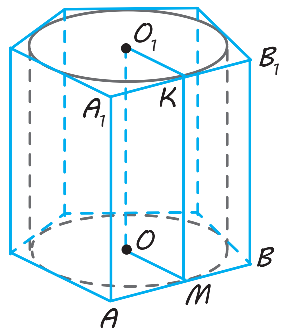


Рис. 10.9

Із означень призми й циліндра маємо, що бічні ребра вписаної в циліндр призми є твірними циліндра (рис. 10.7).

Площина, що проходить через твірну циліндра перпендикулярно до осьового перерізу, який містить цю твірну, називається площиною, *дотичною до циліндра* (рис. 10.8).

Означення. Призма називається описаною навколо циліндра (а циліндр — вписаним у призму), якщо основи призми описані навколо основ циліндра.

Покажемо, що в описаній призмі бічні грані є дотичними до циліндра (рис. 10.9).

● Нехай M — точка дотику кола нижньої основи циліндра зі стороною AB основи описаної призми. Проведемо через точку M осьовий переріз циліндра. Вісь OO_1 перпендикулярна до площини основи ABO, тоді $OO_1 \perp AB$. Крім того, $OM \perp AB$ (за властивістю дотичної) і за ознакою перпендикулярності прямої й площини $AB \perp$ пл. O_1OM. Тоді за ознакою перпендикулярності площин пл. $ABB_1A \perp$ пл. O_1OM, тобто площина бічної грані призми є дотичною до циліндра. ○

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 1 Осьовий переріз циліндра — квадрат, площа якого дорівнює Q. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.

Розв'язання	Коментар
▶ Якщо сторона квадрата осьового перерізу (рис. 10.5) дорівнює x, то $x^2 = Q$. Висота циліндра дорівнює x, діаметр основи також дорівнює x (тобто $2R = x$). Отже, $S_{\text{бічн. цил}} = 2\pi RH = \pi \cdot (2R) \cdot H =$ $= \pi \cdot x \cdot x = \pi x^2 = \pi Q$. ◁	Якщо осьовий переріз циліндра — квадрат зі стороною x, то площа перерізу дорівнює x^2. Маємо рівняння $x^2 = Q$, звідки $x = \sqrt{Q}$. Зазначимо, що в задачі потрібно визначити площу бічної поверхні. У формулу значення x входитиме в квадраті, тому можна, не розв'язуючи рівняння, записати вимогу задачі через x, а в отриману формулу підставити значення x^2.

Задача 2 Висота циліндра дорівнює 8 см, радіус основи — 5 см. Циліндр перетнули площиною, паралельною осі так, що в перерізі дістали квадрат. Знайдіть відстань від цього перерізу до осі.

Розв'язання

▶ Нехай переріз $ABCD$ (рис. 10.10) паралельний осі OO_1 циліндра ($AD = AB = 8$ см, $AO = 5$ см). Відстань між віссю й перерізом дорівнює відстані від точки O до перерізу. Ураховуючи, що твірна $AD \perp$ пл. ABO, маємо: пл. $ABC \perp$ пл. ABO.

Проведемо $OH \perp AB$.

Тоді $OH \perp$ пл. ABC.

Тобто відрізок OH — відстань від перерізу до осі.

Якщо $OH \perp AB$, то точка H — середина відрізка AB і $AH = 4$ см. Тоді з прямокутного трикутника AOH знаходимо:

$OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ (см). ◁

Коментар

Відстань від осі до паралельної їй площини можна знайти як відстань від будь-якої точки осі (наприклад, від точки O) до цієї площини. Щоб знайти відстань від точки O до січної площини, достатньо помітити, що площина основи перпендикулярна до площини перерізу. Тоді перпендикуляр OH до прямої AB перетину перпендикулярних площин є перпендикуляром до січної площини.

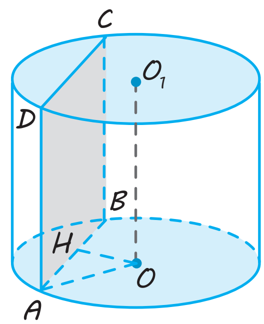


Рис. 10.10

Задача 3 Знайдіть площу бічної поверхні правильної трикутної призми, вписаної в циліндр, радіус основи якого дорівнює 8, а висота — 3.

Розв'язання

▶ Якщо правильна призма $ABCA_1B_1C_1$ вписана в циліндр (рис. 10.11), то висота призми AA_1 дорівнює висоті циліндра, тобто $AA_1 = 3$.

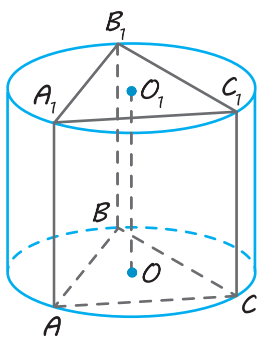


Рис. 10.11

Коментар

Якщо призма вписана в циліндр, то їхні висоти рівні й основа призми вписана в основу циліндра. Слід також урахувати, що висота правильної призми дорівнює бічному ребру.

Сторона основи заданої правильної призми дорівнює стороні a правильного трикутника, вписаного в коло радіуса $R = 8$.

Для її знаходження можна скористатися формулою $a = R\sqrt{3}$ або формулою $R = \dfrac{a}{2\sin A}$, тоді

$$a = 2R\sin A = 2R\sin 60^\circ = 2R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}.$$

Можна також урахувати, що центр O — точка перетину висот, медіан і бісектрис правильного трикутника ABC.

Сторона основи призми дорівнює стороні правильного трикутника, вписаного в коло радіуса $R=8$.

Тоді

$$AB = R\sqrt{3} = 8\sqrt{3}.$$

Отже,

$$S_{\text{бічн. пр}} = P_{\triangle ABC} \cdot AA_1 = 3AB \cdot AA_1 =$$

$$= 3 \cdot 8\sqrt{3} \cdot 3 = 72\sqrt{3} \text{ (кв. од.).} \triangleleft$$

Із прямокутного трикутника AOH (рис. 10.12) маємо: $AH = AO\cos 30°$, тобто $\frac{a}{2} = R\frac{\sqrt{3}}{2}$, тоді $a = R\sqrt{3}$.

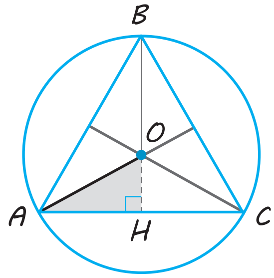


Рис. 10.12

Запитання

1. Поясніть, що таке циліндр (прямий круговий циліндр). Що таке твірна циліндра? основи циліндра? бічна поверхня циліндра? висота й вісь циліндра?
2. Якою фігурою є переріз циліндра площиною, паралельною його осі?
3. Якою фігурою є осьовий переріз циліндра?
4. Якою фігурою є переріз циліндра площиною, паралельною його основам? Відповідь обґрунтуйте.
5. Поясніть, що таке розгортка циліндра.
6. Запишіть формули для визначення площ бічної та повної поверхонь циліндра.
7. Поясніть, яка призма називається вписаною в циліндр.
8. Яка площина називається дотичною до циліндра?
9. Поясніть, яка призма називається описаною навколо циліндра.
10.* Доведіть, що в описаній призмі бічні грані є дотичними до циліндра.

Вправи

10.1.° Чи має циліндр:
1) центр симетрії;
2) вісь симетрії;
3) площину симетрії?
Укажіть їх.

10.2.° Радіус основи циліндра дорівнює 2 м, висота — 3 м. Знайдіть:
1) діагональ осьового перерізу циліндра;
2) площу бічної поверхні циліндра;
3) площу повної поверхні циліндра.

10.3.° Площа бічної поверхні циліндра дорівнює 72π, а висота — 8. Знайдіть діаметр основи.

10.4. Осьовий переріз циліндра — квадрат, площа якого дорівнює S. Знайдіть площу основи циліндра.

10.5. Висота циліндра дорівнює 6 см, радіус основи — 5 см. Знайдіть площу перерізу, проведеного паралельно осі циліндра на відстані 4 см від неї.

10.6. Радіус основи циліндра дорівнює 1, висота — 20, площа перерізу, паралельного осі, дорівнює 20 кв. од. Знайдіть відстань від цього перерізу до осі циліндра.

10.7. Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює 48 см, а кут між цією діагоналлю й віссю циліндра — $60°$. Знайдіть:
1) висоту циліндра;
2) радіус основи циліндра;
3) площу основи циліндра.

10.8. У циліндрі паралельно його осі проведено площину, що відтинає від кола основи дугу $120°$. Довжина відрізка осі між центрами основ становить 10 см, відстань від осі до січної площини дорівнює 2 см. Знайдіть площу перерізу.

10.9.* Через твірну циліндра проведено дві взаємно перпендикулярні площини. Площа кожного з отриманих перерізів дорівнює Q. Знайдіть площу осьового перерізу.

10.10. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, якщо площа його осьового перерізу дорівнює S.

10.11. Розгорткою бічної поверхні циліндра є прямокутник зі сторонами 8 і 3. Знайдіть твірну й радіус основи циліндра, якщо відомо, що цей радіус більший за 1.

10.12. Площа повної поверхні циліндра дорівнює 288π см^2. Знайдіть висоту й радіус основи циліндра, якщо відомо, що висота на 12 см більша за радіус.

10.13. Кут між твірною циліндра й діагоналлю осьового перерізу дорівнює φ. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, якщо площа його основи дорівнює Q.

10.14. Діагональ розгортки бічної поверхні циліндра дорівнює d і утворює кут φ з основою розгортки. Знайдіть:
1) площу повної поверхні циліндра;
2*) кут φ, при якому площа повної поверхні циліндра найбільша.

10.15. Один циліндр отримали обертанням у просторі прямокутника $ABCD$ навколо прямої AB, а інший — обертанням того самого прямокутника навколо прямої BC.
1) Доведіть, що площі бічних поверхонь цих циліндрів рівні;
2) знайдіть відношення площ повних поверхонь циліндрів, якщо $AB = a$, $BC = b$.

10.16.* Висота циліндра дорівнює 2 м, радіус основи — 7 м. У цей циліндр похило до осі вписано квадрат так, що всі вершини його розташовані на колах основ. Знайдіть сторону квадрата.

10.17. Площина α перетинає основи циліндра по хордах, довжини яких дорівнюють 16 см і 12 см. Знайдіть тангенс кута між площиною α і площиною основи циліндра, якщо радіус циліндра дорівнює 10 см, а висота — 30 см.

10.18.* Площа основи циліндра відноситься до площі осьового перерізу як 1:4. Знайдіть кут між діагоналями осьового перерізу.

10.19.* Через твірну циліндра проведено дві січні площини, кут між якими дорівнює φ. Одна з площин проходить через вісь циліндра. Знайдіть відношення площ перерізів циліндра цими площинами.

10.20.* Висота циліндра дорівнює 6 дм, радіус основи — 5 дм. Кінці відрізка AB, довжина якого дорівнює 10 дм, лежать на колах обох основ. Знайдіть відстань від цього відрізка до осі циліндра.

10.21.* У рівносторонньому циліндрі (діаметр дорівнює висоті циліндра) точка кола верхньої основи сполучена з точкою кола нижньої основи. Кут між радіусами, проведеними в ці точки, дорівнює 60°. Знайдіть кут між проведеною прямою й віссю циліндра.

10.22. Осьовим перерізом циліндра є квадрат, діагональ якого дорівнює $10\sqrt{2}$. Знайдіть площі бічної й повної поверхонь правильної призми, вписаної в цей циліндр, якщо призма:
1) трикутна;
2) чотирикутна;
3) шестикутна.

10.23.° Прямокутний паралелепіпед описано навколо циліндра (рис. 10.13), радіус основи й висота якого дорівнюють 8. Знайдіть площу повної поверхні паралелепіпеда.

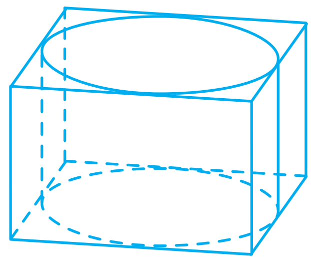


Рис. 10.13

10.24. В основі прямої призми лежить квадрат зі стороною 6. Бічні ребра дорівнюють 10. Знайдіть площу повної поверхні циліндра, описаного навколо цієї призми.

10.25. В основі прямої призми лежить прямокутний трикутник із катетами 6 і 8. Бічні ребра дорівнюють 10. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, описаного навколо цієї призми.

10.26. У циліндр вписано правильну шестикутну призму. Знайдіть кут між діагоналлю її бічної грані й віссю циліндра, якщо радіус основи дорівнює висоті циліндра.

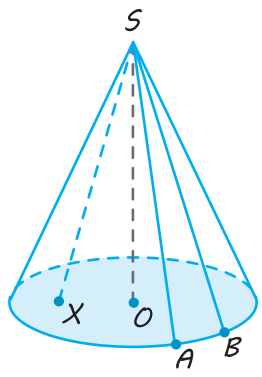
Виявіть свою компетентність

10.27. Скільки банок фарби, місткістю 2,8 кг, потрібно придбати для фарбування в два шари 10 закритих металевих циліндричних бочок із діаметром дна 60 см і висотою 85 см, якщо для фарбування 1 м² металевої поверхні витрачається 120 г фарби?

§ 11 КОНУС І ДЕЯКІ ЙОГО ПЕРЕРІЗИ. ЗРІЗАНИЙ КОНУС

Таблиця 9

Конус



Конусом (круговим конусом) називається тіло, що складається із круга, точки, що не лежить у площині цього круга, і всіх відрізків, які сполучають цю точку з точками круга.

Круг — **основа конуса.**

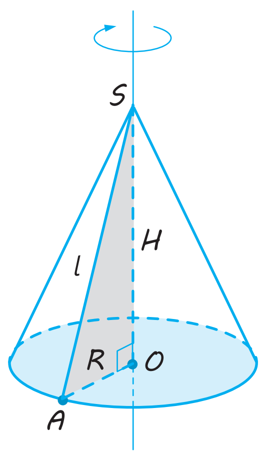
Точка S — **вершина конуса.**

Відрізки, що сполучають вершину конуса з точками кола основи, — **твірні конуса.**
SA, SB — твірні конуса.

Конус називається *прямим*, якщо $SO \perp \text{пл.}\, AOB$ (O — центр круга основи).

У шкільних підручниках:
конус = прямий круговий конус

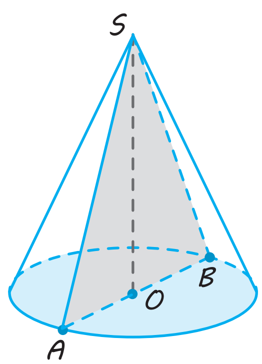
Властивості



1. Твірні конуса рівні.
$$SA = SB = \ \dots$$
2. $H_{\text{кон}} = SO$ — висота конуса, $SO \perp \text{пл.}\, AOB$.
3. У результаті обертання прямокутного трикутника навколо його катета як осі утворюється конус.
$\triangle AOS$ — прямокутний, $\angle AOS = 90°$.
Пряма SO — вісь конуса,
$$R_{\text{кон}} = AO, \ H_{\text{кон}} = SO.$$
AS — твірна, $AS = l$.
4. $S_{\text{осн. кон}} = \pi R^2$, $S_{\text{бічн. кон}} = \pi R l$,
$$S_{\text{повн}} = S_{\text{бічн. кон}} + S_{\text{осн}} = \pi R l + \pi R^2 = \pi R (l + R)$$

Перерізи конуса площинами

Осьовий переріз конуса

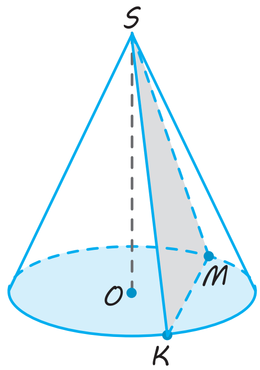


$\triangle SAB$ — осьовий переріз (переріз, що проходить через вісь SO).

$\triangle SAB$ — рівнобедрений, $SA = SB$ (SA і SB — твірні)

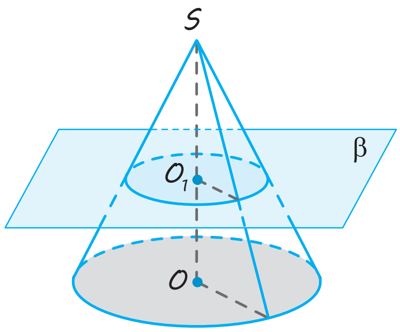
Продовження табл. 9

Переріз конуса площиною, що проходить через його вершину



$\triangle SMK$ — рівнобедрений,
$SM = SK$ (SM і SK — твірні)

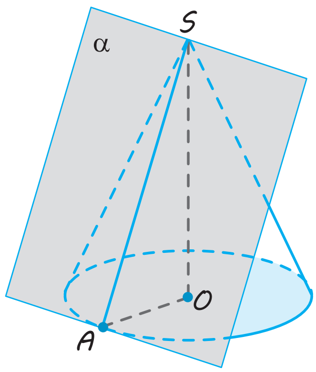
Переріз конуса площиною, паралельною його основі



Площина, паралельна площині основи конуса, перетинає конус по кругу, а бічну поверхню — по колу з центром на осі конуса.

$$\frac{R_{\text{перерізу}}}{R} = \frac{SO_1}{SO}$$

Площина, дотична до конуса



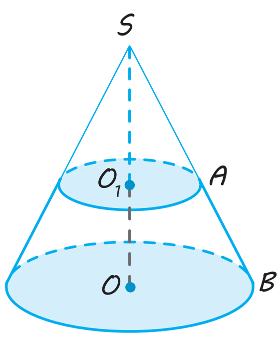
Площиною, дотичною до конуса, називається площина, що проходить через твірну конуса й перпендикулярна до площини осьового перерізу, який містить цю твірну.

α — площина, дотична до конуса.

SA — твірна, площина α проходить через твірну SA, $\alpha \perp \text{пл.}\, SAO$

Зрізаний конус

Утворення зрізаного конуса

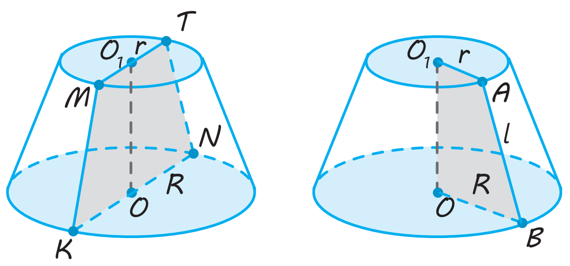


Якщо в заданому конусі (з вершиною S і кругом основи з центром O) проведено площину, паралельну його основі, що перетинає конус, то ця площина відтинає від нього менший конус (із вершиною S і кругом основи з центром O_1). Частина цього конуса, що залишилася, називається **зрізаним конусом** (на рисунку виділена жирною лінією).

Закінчення табл. 9

Висотою зрізаного конуса називається перпендикуляр, проведений із будь-якої точки однієї основи на іншу основу.
Зокрема, $OO_1 = H_{\text{зріз. кон}}$, де O і O_1 — центри основ зрізаного конуса.

Властивості



1. Осьовий переріз зрізаного конуса — рівнобічна трапеція.
   $MKNT$ — осьовий переріз,
   $MT \parallel KN$, $MK = TN$ (твірні),
   $MT = 2r$, $KN = 2R$,
   $OO_1 \perp KN$, $OO_1 = H$.
2. У результаті обертання прямокутної трапеції $OBAO_1$ навколо осі, що проходить через бічну сторону, перпендикулярну до основ, утворюється зрізаний конус.
3. $S_{\text{бічн. зріз. кон}} = \pi(R+r)l$, де R і r — радіуси нижньої й верхньої основ, $l = AB$ — твірна.

$$S_{\text{повн}} = S_{\text{бічн}} + S_{1\text{ осн}} + S_{2\text{ осн}} = \pi(R+r)l + \pi R^2 + \pi r^2$$

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1. Конус

Означення. Конусом (точніше, круговим конусом) називається тіло, що складається із круга — основи конуса, точки, яка не лежить у площині цього круга, — вершини конуса, і всіх відрізків, що сполучають вершину конуса з точками основи (рис. 11.1).

> Конус походить від грецького слова «конос» — соснова шишка.

Відрізки, що сполучають вершину конуса з точками кола основи, називаються *твірними конуса* (наприклад, на рис. 11.1 відрізки SA і SB — твірні конуса). Конус називається *прямим*, якщо пряма, що сполучає вершину конуса з центром основи, перпендикулярна до площини основи (якщо на рис. 11.1, *б* $SO \perp$ пл. AOB, то зображений конус — прямий).

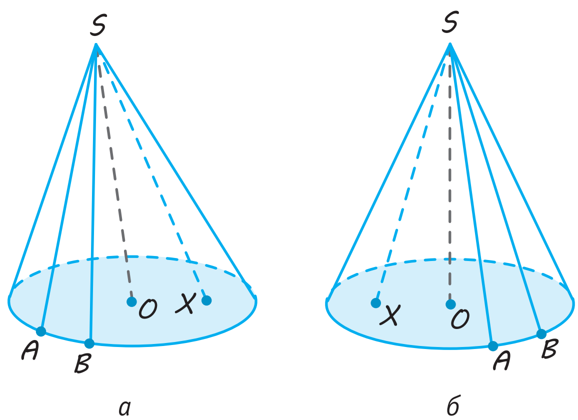


Рис. 11.1

Далі розглядатимемо тільки прямий конус, який називатимемо просто конусом.

Наочно *прямий круговий конус можна розглядати як тіло, утворене в результаті обертання прямокутного трикутника навколо його катета як осі* (рис. 11.2).

Радіусом конуса називається радіус його основи.

Висотою конуса називається перпендикуляр, проведений із його вершини на площину основи. У прямого конуса основа висоти збігається з центром основи.

Віссю прямого кругового конуса називається пряма, що містить його висоту.

У прямого кругового конуса **всі твірні рівні** (як похилі, що мають рівні проекції — радіуси основи конуса).

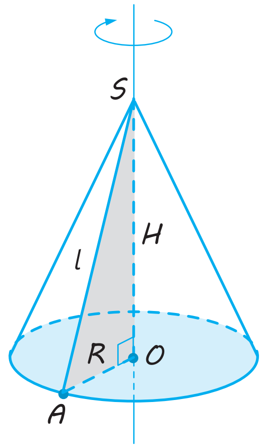


Рис. 11.2

Предмети конічної форми часто зустрічаються в побуті, техніці (рисунок — патрон для дриля) та архітектурі (див. рисунок).

Поверхня конуса складається з основи й бічної поверхні. ***Бічну поверхню*** конуса утворюють твірні.

Якщо бічну поверхню конуса розрізати за якою-небудь твірною й розгорнути на площині, то одержимо її розгортку. Розгортка бічної поверхні конуса радіуса R із твірною l є сектором радіуса l, довжина дуги якого дорівнює довжині кола основи, тобто $2\pi R$ (рис. 11.3).

Площу цієї розгортки приймають за *площу бічної поверхні конуса**.

* Більш строго це поняття буде розглянуто в § 17.


Ворота Кайо, м. Бордо, Франція


Патрон для дриля

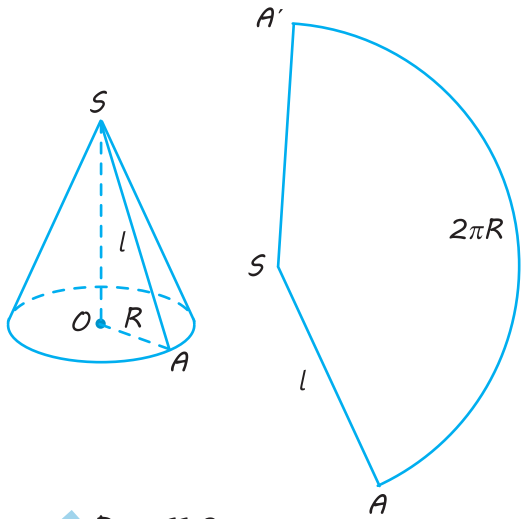


Рис. 11.3

Вона в стільки разів менша від площі круга радіуса l, у скільки разів довжина дуги сектора $2\pi R$ менша від довжини кола радіуса l, тобто $2\pi l$.

Тому

$$\frac{S_{\text{бічн. кон}}}{\pi l^2}=\frac{2\pi R}{2\pi l},$$

звідки

$$S_{\text{бічн. кон}}=\pi R l.$$

Щоб знайти площу повної поверхні конуса, треба до площі його бічної поверхні додати площу основи:

$$S_{\text{повн}}=S_{\text{бічн. кон}}+S_{\text{осн}}=\pi R l+\pi R^2=\pi R(l+R).$$

2. Переріз конуса площинами

Переріз конуса площиною, що проходить через його вершину, є рівнобедреним трикутником, бічні сторони якого є твірними конуса (рис. 11.4). Зокрема, рівнобедреним трикутником є *осьовий переріз конуса*. Цей переріз проходить через вісь конуса (рис. 11.5).

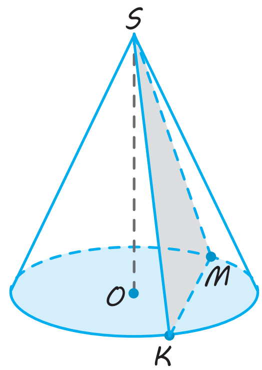


Рис. 11.4

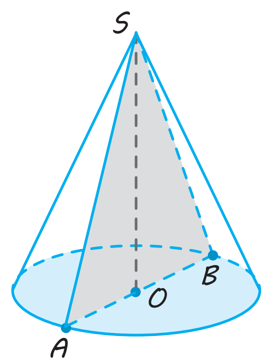


Рис. 11.5

Теорема 11.1. Площина, паралельна площині основи конуса, перетинає конус по кругу, а бічну поверхню — по колу з центром на осі конуса.

Нехай β — площина, що паралельна площині основи конуса й перетинає конус (рис. 11.6). Перетворення гомотетії відносно вершини S конуса, яке суміщає площину β з площиною основи, суміщає переріз конуса площиною β з основою конуса. Отже, переріз конуса площиною є круг, а переріз бічної поверхні — коло з центром на осі конуса. ○

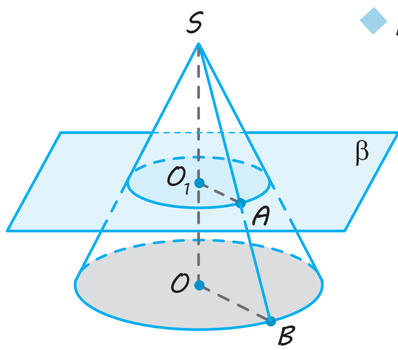


Рис. 11.6

Площина, паралельна основі конуса, що перетинає конус, відтинає від нього менший конус (рис. 11.6). Частина, що залишилася, *називається зрізаним конусом* (рис. 11.7).

Зрізаний конус обмежено двома кругами — його основами (площини яких паралельні) і бічною поверхнею. *Висотою зрізаного конуса* називається перпендикуляр, проведений із будь-якої точки однієї основи на іншу, наприклад, відрізок O_1O, що сполучає центри кругів основ.

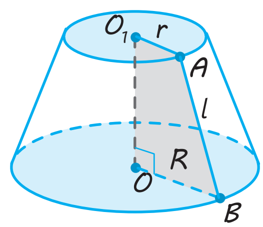


Рис. 11.7

Довжина цього перпендикуляра дорівнює відстані між основами зрізаного конуса — її також називають *висотою зрізаного конуса*.

Відрізок AB, що сполучає найближчі точки кіл основ, — *твірна* (вона є частиною твірної SB повного конуса, із якого був одержаний зрізаний конус (див. рис. 11.6). Довжина цього відрізка AB також називається *твірною зрізаного конуса*.

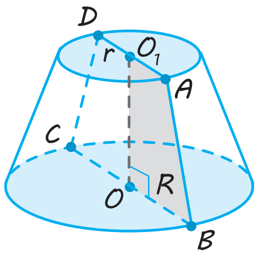


Рис. 11.8

Ураховуючи, що на рис. 11.6 площина SOB перетинає паралельні площини основ зрізаного конуса по паралельних прямих, одержуємо, що $O_1A \parallel OB$, тому осьовим перерізом зрізаного конуса є рівнобічна трапеція ($ABCD$ на рис. 11.8), і зрізаний конус можна також розглядати як тіло, утворене обертанням прямокутної трапеції AO_1OB навколо бічної сторони O_1O, перпендикулярної до основи трапеції.

3. Вписана й описана піраміди

Означення. Піраміда називається вписаною в конус (а конус — описаним навколо піраміди), якщо основа піраміди вписана в коло основи конуса, а вершиною піраміди є вершина конуса (рис. 11.9).

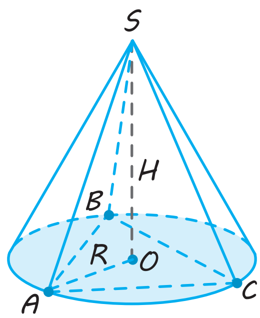


Рис. 11.9

Із цього означення одержуємо, що бічні ребра вписаної в конус піраміди є твірними конуса, висоти піраміди й конуса збігаються, а радіус конуса дорівнює радіусу кола, описаного навколо основи піраміди.

Дотичною площиною до конуса називається площина, що проходить через твірну конуса і перпендикулярна до площини осьового перерізу, який містить цю твірну (якщо площина α проходить через твірну SA конуса і $\alpha \perp$ пл. SAO, то α — дотична площина до конуса; рис. 11.10).

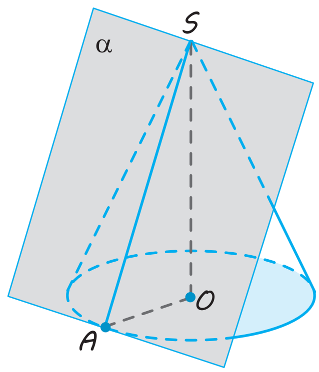


Рис. 11.10

Означення. Піраміда називається описаною навколо конуса (а конус — вписаним у піраміду), якщо основа піраміди описана навколо кола основи конуса, а вершиною піраміди є вершина конуса (рис. 11.11).

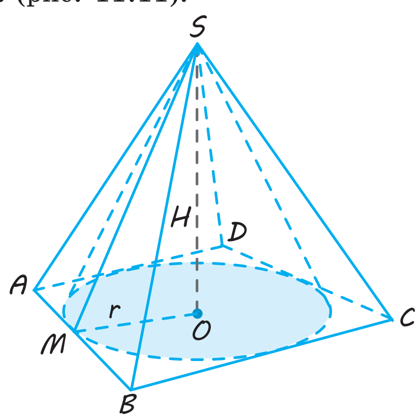


Рис. 11.11

Із цього означення одержуємо, що висоти піраміди й конуса збігаються, а радіус конуса дорівнює радіусу кола, вписаного в основу піраміди.

Покажемо, що *в описаній навколо конуса піраміді площини бічних граней є дотичними площинами до конуса* (рис. 11.11).

● Нехай M — точка дотику кола до основи конуса зі стороною AB основи описаної піраміди. Проведемо через точку M осьовий переріз конуса.

Вісь SO перпендикулярна до площини основи ABC, тоді $SO \perp AB$. Крім того, $OM \perp AB$ (за властивістю дотичної) і за ознакою перпендикулярності прямої й площини $AB \perp$ пл. SOM. Тоді за ознакою перпендикулярності площин маємо: пл. $ASB \perp$ пл. SOM, тобто площина бічної грані піраміди є дотичною площиною до конуса. ○

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 1 Конус перетнули площиною, паралельною основі, на відстані d від вершини. Знайдіть площу перерізу, якщо радіус основи конуса дорівнює R, а висота — H.

Розв'язання	Коментар
▶ Розглянемо гомотетію з центром у точці S із коефіцієнтом гомотетії $$k = \frac{SO_1}{SO} = \frac{d}{H}.$$ За цієї гомотетії основа конуса перетвориться на шуканий переріз, тому радіус перерізу дорівнює: $$r_{\text{перерізу}} = R \cdot k = \frac{Rd}{H}.$$ Тоді площа перерізу дорівнює: $$S_{\text{перерізу}} = \pi r^2_{\text{перерізу}} = \frac{\pi R^2 d^2}{H^2}. \triangleleft$$	Переріз конуса (рис. 11.12) можна одержати з основи конуса перетворенням гомотетії відносно вершини конуса з коефіцієнтом гомотетії $$k = \frac{SO_1}{SO} = \frac{d}{H}.$$ Справді, за цієї гомотетії точка O перетвориться на точку O_1, а площина основи конуса — на паралельну їй площину, що проходить через точку O_1, тобто на задану площину перерізу β.

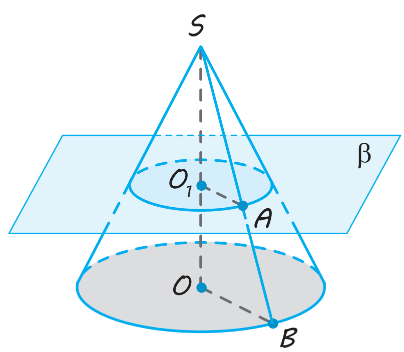


Рис. 11.12

Задача 2

Знайдіть площу поверхні тіла, отриманого обертанням рівнобедреного трикутника з бічними сторонами 8 см і кутом між ними 120° навколо прямої, що містить бічну сторону трикутника.

Розв'язання	Коментар

▶ Нехай рівнобедрений трикутник ABC ($AC = BC = 8$ см, $\angle ACB = 120°$) обертається навколо осі, що містить сторону BC (рис. 11.13). Проведемо $OA \perp BC$.

У результаті обертання прямокутного трикутника AOB навколо осі BO утворюється конус, тому відрізок AB у результаті обертання навколо осі BO утворює бічну поверхню конуса з твірною AB і радіусом основи AO.

Аналогічно в результаті обертання прямокутного трикутника AOC навколо осі BO утворюється конус, тому відрізок AC у результаті обертання навколо осі BO утворює бічну поверхню конуса з твірною AC і радіусом основи AO.

Тоді площа поверхні отриманого тіла дорівнює сумі площ бічних поверхонь цих конусів.

Із прямокутного трикутника AOC $(\angle ACO = 60°)$ маємо:

$$OA = AC \cdot \sin 60° = 4\sqrt{3} \text{ (см)}.$$

Із прямокутного трикутника AOB $(\angle ABC = 30°)$ одержуємо:

$$AB = \frac{AO}{\sin 30°} = 8\sqrt{3} \text{ (см)}.$$

Тоді поверхня тіла обертання дорівнює

$$S = \pi \cdot AO \cdot AB + \pi \cdot AO \cdot AC =$$
$$= \pi \cdot 4\sqrt{3} \cdot 8\sqrt{3} + \pi \cdot 4\sqrt{3} \cdot 8 =$$
$$= 96\pi + 32\sqrt{3}\pi = 32\left(3 + \sqrt{3}\right)\pi \text{ (см}^2\text{)}. \triangleleft$$

Коментар. Під час розв'язування задач, пов'язаних із обертанням фігур навколо осі, слід ураховувати, що в результаті обертання прямокутного трикутника навколо катета як осі утворюється конус, а в результаті обертання прямокутної трапеції навколо бічної сторони, перпендикулярної до основи трапеції, — зрізаний конус. Тому доцільно з кожної вершини заданого многокутника, що не лежить на осі обертання, провести перпендикуляр на вісь і розглянути поверхню, яку описує кожний із відрізків, що не лежить на осі обертання.

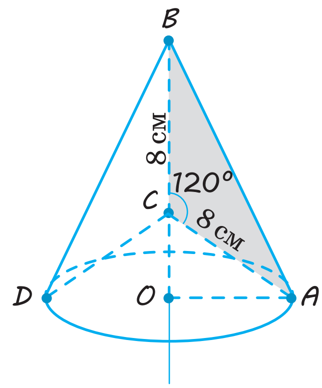


Рис. 11.13

Задача 3

Доведіть, що **площа бічної поверхні зрізаного конуса з твірною l і радіусами основ R і r дорівнює $\pi l(R + r)$.**

Розв'язання	Коментар

Доповнимо заданий зрізаний конус до повного конуса (рис. 11.14). За умовою $OB = R$, $O_1A = r$, $AB = l$. Площа бічної поверхні зрізаного конуса дорівнює різниці площ бічних поверхонь двох конусів із твірними SB і SA.

Коментар. Якщо доповнити заданий зрізаний конус до повного конуса, із якого він був отриманий (рис. 11.14), то площу бічної поверхні зрізаного конуса можна одержати як різницю площ бічних поверхонь двох повних конусів.

▶ Позначимо $SA = x$, тоді $SB = x + l$.

Із подібності трикутників SAO_1 і SBO одержуємо:

$$\frac{x}{x+l} = \frac{r}{R}.$$

Тоді

$$xR = xr + lr \text{ і } x = \frac{lr}{R-r}.$$

Отже, площа бічної поверхні зрізаного конуса дорівнює:

$$S = \pi R(x+l) - \pi r x = \pi x(R-r) + \pi R l =$$

$$= \pi \cdot \frac{lr}{R-r} \cdot (R-r) + \pi R l =$$

$$= \pi r l + \pi R l = \pi l(R+r).$$ ◁

Площина SOB перетинає паралельні площини основ зрізаного конуса по паралельних прямих $(O_1A \parallel OB)$, тому трикутники SAO_1 і SBO подібні.

Для запису площ бічних поверхонь повних конусів зручно одну з твірних позначити через x, а для визначення x скористатися пропорційністю сторін подібних трикутників.

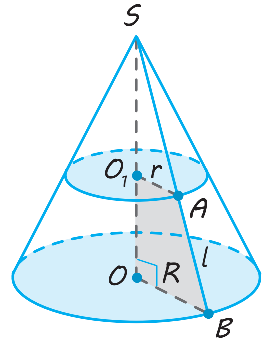


Рис. 11.14

Задача 4

В основі піраміди лежить прямокутний трикутник із катетами 6 см і 8 см. Усі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом 60°. Знайдіть площу бічної поверхні конуса, описаного навколо цієї піраміди.

Розв'язання	Коментар

▶ Нехай $SABC$ (рис. 11.15) — задана піраміда. Оскільки всі її бічні ребра нахилені під рівними кутами до площини основи, то основою її висоти SO є центр кола, описаного навколо основи піраміди, який у прямокутному трикутнику ABC лежить у середині гіпотенузи AB, тобто точка O — середина AB.

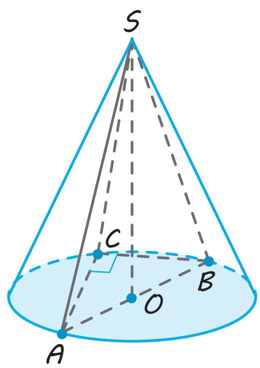


Рис. 11.15

Корисно використовувати трохи уточнену (див. п. 4 нижче) загальну схему розв'язання задач, пов'язаних із многогранниками.

1. Обґрунтувати розташування висоти піраміди (якщо всі бічні ребра піраміди нахилені під рівними кутами до площини основи, то основою висоти піраміди є центр кола, описаного навколо основи піраміди, тобто середина гіпотенузи; це слід урахувати ще до побудови рисунка до задачі).
2. Обґрунтувати, що просторові кути й просторові відстані позначені правильно (у нас задано кут між бічним ребром і площиною основи, тобто кут між цим ребром і його проекцією на площину основи).

Оскільки $SO \perp$ пл. ABC, то AO — проекція SA на площину ABC, тобто $\angle SAO$ — кут між бічним ребром і площиною ABC $(\angle SAO = 60°)$.

Якщо конус описаний навколо піраміди, то їх вершини збігаються і коло основи конуса описане навколо основи піраміди, тобто радіус основи конуса дорівнює OA, а твірна конуса дорівнює бічному ребру SA піраміди.

Із прямокутного трикутника ABC $(\angle C = 90°)$ одержуємо: $AB = 10$ см, тоді $AO = 5$ см.

Із прямокутного трикутника AOS маємо:

$$SA = \frac{AO}{\cos 60°} = 10 \text{ (см)}.$$

Тоді площа бічної поверхні конуса дорівнює:

$$S_{\text{бічн}} = \pi \cdot AO \cdot SA = \pi \cdot 5 \cdot 10 = 50\pi \text{ (см}^2\text{)}. \triangleleft$$

3. Обґрунтувати вид і розташування заданого перерізу (у цій задачі перерізи не розглядаються).
4. Якщо розглядається комбінація многогранника й тіла обертання, то вказати взаємне розташування їх елементів (тільки те, що буде використано під час розв'язування).
5. На кожному етапі обчислень указуємо, елементи якого трикутника визначаємо. Якщо трикутник прямокутний, то пояснюємо чому.

Запитання

1. Поясніть, що таке конус (прямий круговий конус). Що таке твірна конуса? основа конуса? бічна поверхня конуса? висота й вісь конуса?
2. Якою фігурою є переріз конуса, що проходить через його вершину?
3. Якою фігурою є осьовий переріз конуса?
4. Якою фігурою є переріз конуса площиною, паралельною його основі? Відповідь обґрунтуйте.
5. Поясніть, що таке розгортка бічної поверхні конуса.
6. Запишіть формули для визначення площ бічної й повної поверхонь конуса.
7. Поясніть, яка піраміда називається вписаною в конус.
8. Яка площина називається дотичною до конуса?
9. Поясніть, яка піраміда називається описаною навколо конуса.
10.* Доведіть, що в описаній піраміді площини бічних граней є дотичними до конуса.

Вправи

11.1.° Радіус основи конуса дорівнює 3 м, висота — 4 м. Знайдіть:
1) твірну конуса;
2) площу бічної поверхні конуса;
3) площу повної поверхні конуса.

11.2.° Твірна конуса дорівнює 10 і нахилена до площини основи під кутом 30°. Знайдіть висоту конуса.

11.3.° Висота конуса дорівнює 8, а довжина твірної — 10. Знайдіть діаметр основи конуса.

11.4.° Висота конуса дорівнює 15, а діаметр основи — 16. Знайдіть:
1) твірну конуса;
2) площу бічної поверхні конуса;
3) площу повної поверхні конуса.

11.5. Радіус основи конуса дорівнює R. Осьовий переріз конуса — прямокутний трикутник. Знайдіть площу бічної поверхні конуса.

11.6. У рівносторонньому конусі (в осьовому перерізі — правильний трикутник) радіус основи дорівнює R. Знайдіть площу перерізу, проведеного через дві твірні, кут між якими дорівнює α.

11.7. Доведіть, що з усіх перерізів конуса площиною, що проходить через його вершину, найбільший периметр має осьовий переріз.

11.8. Чи правильно, що з усіх перерізів конуса площиною, що проходить через його вершину, найбільшу площу має осьовий переріз? Відповідь обґрунтуйте.

11.9.° У скільки разів збільшиться площа бічної поверхні конуса, якщо його твірну збільшити в три рази (радіус основи залишається без зміни)? Відповідь обґрунтуйте.

11.10. Висота конуса дорівнює H. На якій відстані від вершини треба провести площину, паралельну основі, щоб площа перерізу дорівнювала половині площі основи?

11.11. Через середину висоти конуса проведено пряму, паралельну твірній. Знайдіть довжину відрізка прямої, що розташований усередині конуса, якщо довжина твірної дорівнює l.

11.12.* Висота конуса дорівнює 20, радіус його основи — 25. Знайдіть площу перерізу, проведеного через вершину, якщо відстань від нього до центра основи конуса дорівнює 12.

11.13.* Радіус основи конуса дорівнює R, а твірна нахилена до площини основи під кутом α. Через вершину конуса проведено площину під кутом φ до його висоти. Знайдіть площу утвореного перерізу.

11.14.* Твірна конуса дорівнює 13 см, висота — 12 см. Конус перетнули прямою, паралельною основі, відстань від неї до основи дорівнює 6 см, а до висоти — 2 см. Знайдіть відрізок цієї прямої, який розташований усередині конуса.

11.15.° Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють 3 м і 6 м, висота — 4 м. Знайдіть твірну зрізаного конуса.

11.16. Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють R і r $(R > r)$, твірна нахилена до площини основи під кутом $45°$. Знайдіть висоту зрізаного конуса.

11.17. Радіус однієї основи зрізаного конуса вдвічі більший за радіус другої основи. Знайдіть кожний із радіусів, якщо твірна зрізаного конуса дорівнює $2a$ і нахилена до площини основи під кутом $60°$.

11.18. Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють 3 дм і 7 дм, твірна — 5 дм. Знайдіть площу осьового перерізу.

11.19. Площі основ зрізаного конуса дорівнюють 4 дм^2, 16 дм^2. Через середину висоти проведено площину, паралельну основам. Знайдіть площу перерізу.

11.20. Площі основ зрізаного конуса M і m. Знайдіть площу перерізу, що паралельний основам і проходить через середину висоти зрізаного конуса.

11.21. Знайдіть площу поверхні тіла, отриманого в результаті обертання квадрата зі стороною 4 см навколо прямої, що проходить через вершину квадрата перпендикулярно до діагоналі, яка виходить із цієї вершини.

11.22. Усі бічні ребра піраміди рівні. Доведіть, що вона вписана в деякий конус.

11.23. Основою піраміди є прямокутний трикутник із катетами 6 см і 8 см, а всі двогранні кути при основі дорівнюють 60°. Знайдіть площу повної поверхні конуса, вписаного в цю піраміду.

11.24.* Основою піраміди є рівнобедрений трикутник із бічними сторонами a, а кут між ними дорівнює α. Усі бічні ребра піраміди утворюють із площиною основи рівні кути β. Знайдіть площу повної поверхні конуса, описаного навколо цієї піраміди.

11.25.* У конусі радіус основи дорівнює R, висота — H. Знайдіть ребро куба, чотири вершини якого лежать на основі конуса, а чотири — на бічній поверхні конуса (рис. 11.16).

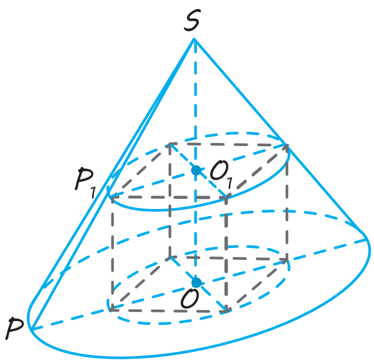


Рис. 11.16

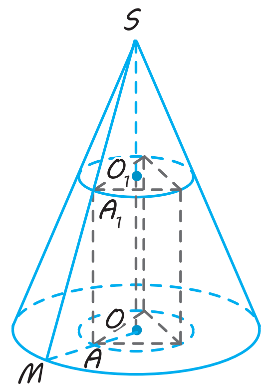


Рис. 11.17

11.26.* У конусі радіус основи дорівнює R, висота — H. Знайдіть ребро правильної трикутної призми, усі ребра якої рівні, якщо три її вершини лежать на основі конуса, а три — на бічній поверхні конуса (рис. 11.17).

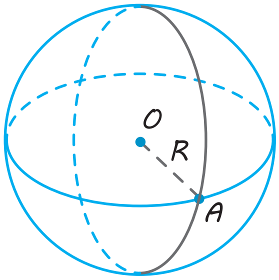
Виявіть свою компетентність

11.27. До стандартного набору пожежного щита, який повинен бути в кожному цеху на підприємстві, входить конічне відро з діаметром основи 30 см і висотою 35 см. Завгоспу підприємства потрібно пофарбувати 50 таких відер (зовні і зсередини). У нього є дві банки червоної фарби, місткістю 0,9 кг кожна. Чи вистачить йому фарби, якщо для фарбування 1 м² металу витрачається 120 г фарби?

§ 12 КУЛЯ Й СФЕРА

Таблиця 10

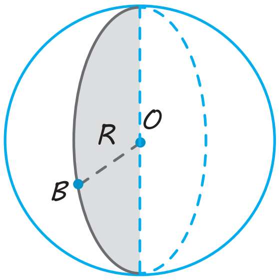
Сфера й куля



Сферою називається тіло, що складається з усіх точок простору, розташованих на заданій відстані (R) від заданої точки (O).

O — центр сфери, OA — радіус сфери, $OA = R$.

У результаті обертання півкола навколо його діаметра одержуємо сферу.

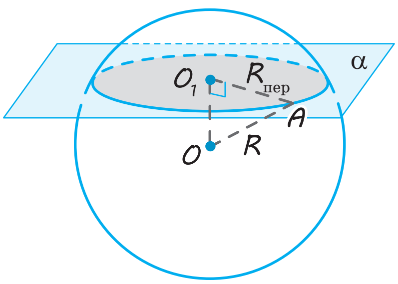


Кулею називається тіло, що складається з усіх точок простору, розташованих на відстані, не більшій за задану (R), від заданої точки (O).

O — центр кулі, OB — радіус кулі, $OB = R$.

У результаті обертання півкруга навколо його діаметра одержуємо кулю.

Переріз кулі площиною



Будь-який переріз кулі площиною є кругом.

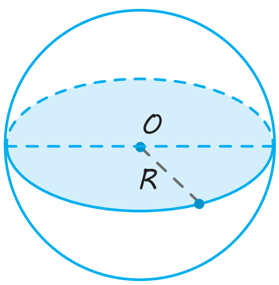
Центр цього круга — основа перпендикуляра, проведеного з центра кулі на січну площину.

O — центр кулі,

O_1 — центр круга перерізу.

$OO_1 \perp \alpha$.

Із $\triangle OO_1A$: $R_{\text{перерізу}} = \sqrt{R_{\text{кулі}}^2 - OO_1^2}$.

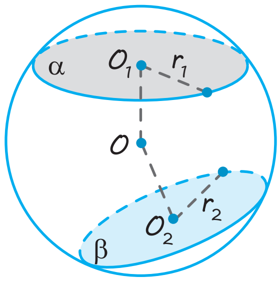


Переріз, що проходить через центр кулі, називається **великим кругом.**

$$R_{\text{вел. кр}} = R_{\text{кулі}}$$

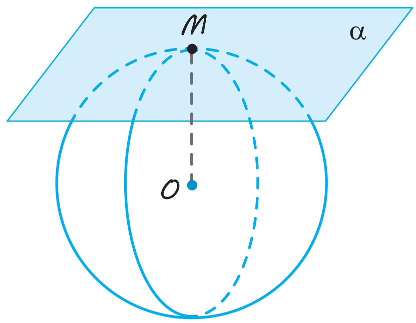
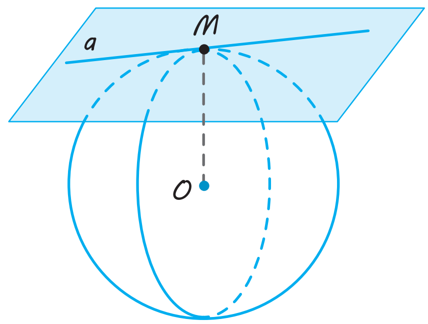
Продовження табл. 10

Переріз кулі двома площинами



$OO_1 \perp \alpha$, $OO_2 \perp \beta$, r_1 і r_2 — радіуси кругів перерізів.
$OO_1 = OO_2 \;\Leftrightarrow\; r_1 = r_2$;
$OO_1 < OO_2 \;\Leftrightarrow\; r_1 > r_2$;
$OO_1 > OO_2 \;\Leftrightarrow\; r_1 < r_2$.

Площина й пряма, дотичні до кулі (сфери)

Дотична площина	***Дотична пряма***
	
Площина, що має з кулею (сферою) тільки одну спільну точку, називається **дотичною площиною**.	Пряма, яка належить дотичній площині до кулі (сфери) і проходить через точку дотику, називається **дотичною до кулі** (сфери) в цій точці.

Властивості

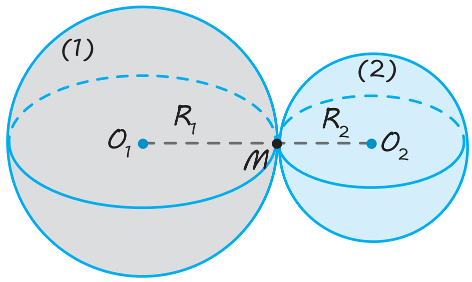
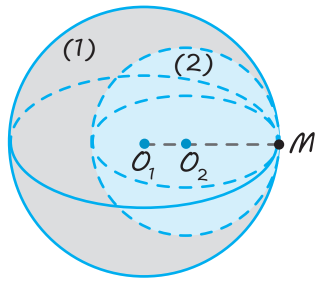
Дотична площина (пряма) перпендикулярна до радіуса кулі (сфери), проведеного в точку дотику.
І навпаки: якщо площина (пряма) проходить через точку сфери й перпендикулярна до радіуса, проведеного в цю точку, то вона дотикається до сфери.

α — дотична площина, M — точка дотику	$\Leftrightarrow$	$OM \perp \alpha$ (OM — радіус кулі)		a — дотична пряма, M — точка дотику	$\Leftrightarrow$	$OM \perp a$ (OM — радіус кулі)

Дотик двох сфер

Дві сфери називаються дотичними одна до одної, якщо вони мають тільки одну спільну точку.

Закінчення табл. 10

Зовнішній дотик	***Внутрішній дотик***
Сфера (1) дотикається до сфери (2) у точці M $\Leftrightarrow$ $M \in O_1O_2$, $O_1O_2 = R_1 + R_2$	Сфера (1) дотикається до сфери (2) у точці M $\Leftrightarrow$ $M \in O_1O_2$, $O_1O_2 = R_1 - R_2$
	

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1. Куля й сфера

Нагадаємо, що ***кулею*** називається тіло, що складається з усіх точок простору, віддалених від заданої точки на відстань, не більшу за задану. Ця точка називається ***центром кулі***, а задана відстань — ***радіусом кулі***.

Границя кулі називається *кульовою поверхнею* або *сферою*. Отже, точками сфери є всі точки кулі, віддалені від центра на відстань, що дорівнює радіусу. Будь-який відрізок, що сполучає центр кулі з точкою кульової поверхні, також називають *радіусом*.

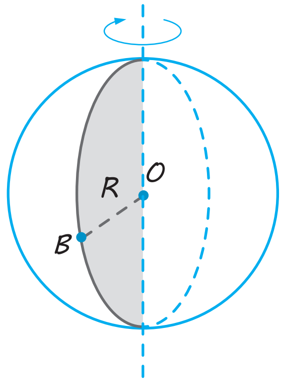


Рис. 12.1

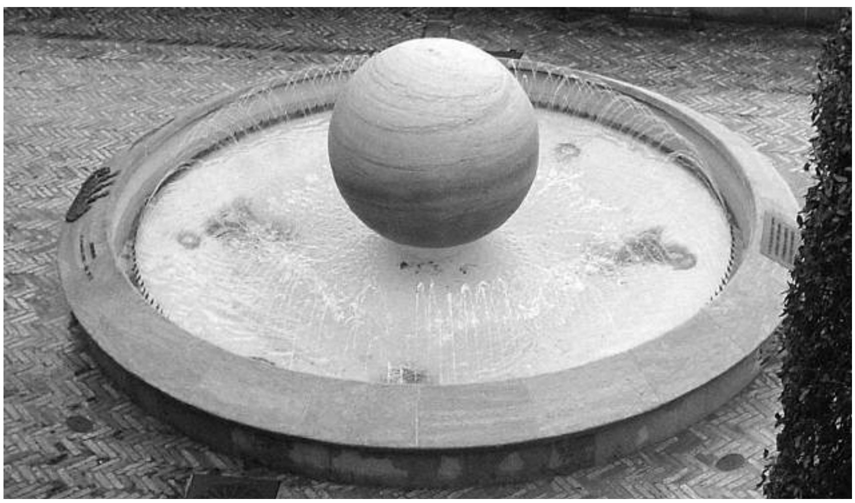
Сфера походить від грецького слова «сфайра» — кругле тіло.

Відрізок, що сполучає дві точки кульової поверхні й проходить через центр кулі, називається *діаметром* кулі. Кінці будь-якого діаметра називаються *діаметрально протилежними точками кулі*.

Куля, так само як циліндр і конус, є тілом обертання. Вона утворюється в результаті обертання півкруга навколо його діаметра як осі (рис. 12.1). Сфера може бути отримана в результаті обертання півкола навколо його діаметра.

Кулі й сфери ми часто спостерігаємо в природі, побуті, у техніці й архітектурі (див. рисунки на с. 119–120).

Домініканський собор та вежа Корнякта, м. Львів, Україна



2. Переріз кулі площиною

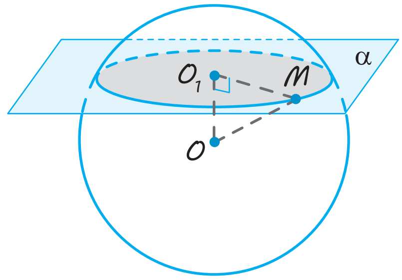


Рис. 12.2

Теорема 12.1. Будь-який переріз кулі площиною є кругом. Центр цього круга є основою перпендикуляра, проведеного з центра кулі на січну площину.

● Нехай α — січна площина й O — центр кулі (рис. 12.2). Проведемо перпендикуляр із центра кулі на площину α і позначимо через O_1 основу цього перпендикуляра. Нехай M — довільна точка кулі, що належить площині α. За теоремою Піфагора, $OM^2 = OO_1^2 + O_1M^2$. Оскільки відстань OM не більша за радіус R кулі, то $O_1M \leqslant \sqrt{R^2 - OO_1^2}$. Маємо: довільна точка перерізу кулі площиною α розташована від точки O_1 на відстані, не більшій за $\sqrt{R^2 - OO_1^2}$, отже, вона належить кругу з центром O_1 і радіусом $\sqrt{R^2 - OO_1^2}$.

І навпаки: *будь-яка точка M цього круга належить кулі*. А це означає, що перерізом кулі площиною α є круг із центром у точці O_1. ○

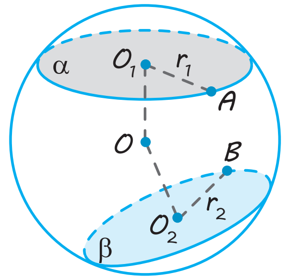


Рис. 12.3

Зазначимо, що якщо розглянути переріз кулі двома площинами α і β, то одержимо в перерізі два круги радіусами r_1 і r_2 відповідно (рис. 12.3). Нехай O_1 і O_2 — основи перпендикулярів, проведених із центра кулі O на площини α і β відповідно. Якщо радіус кулі дорівнює R, то $r_1 = \sqrt{R^2 - OO_1^2}$ і $r_2 = \sqrt{R^2 - OO_2^2}$. Порівняємо ці вирази. Одержуємо, що $r_1 = r_2$ тоді й тільки тоді, коли $OO_1 = OO_2$, а $r_1 < r_2$ тоді й тільки тоді, коли $OO_1 > OO_2$. Отже, *рівні перерізи кулі розташовані на рівних відстанях від його центра (і навпаки), переріз більшого радіуса розташований на меншій відстані від центра кулі (і навпаки)*.

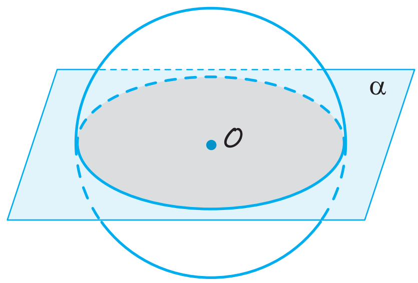


Рис. 12.4

Площина, що проходить через центр кулі, називається *діаметральною площиною*. Переріз кулі *діаметральною площиною* називається *великим кругом* (рис. 12.4), а переріз сфери — *великим колом*.

Теорема 12.2. Будь-яка діаметральна площина кулі є його площиною симетрії. Центр кулі є його центром симетрії.

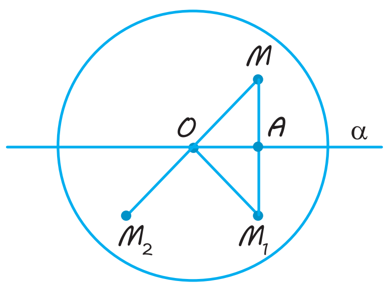


Рис. 12.5

● Нехай α — діаметральна площина й M — довільна точка кулі (рис. 12.5). Побудуємо точку M_1, симетричну точці M відносно площини α. Площина α перпендикулярна до відрізка MM_1 і ділить його навпіл (у точці A). Із рівності прямокутних трикутників OAM і OAM_1 випливає, що $OM_1 = OM$. Оскільки $OM \leqslant R$, то і $OM_1 \leqslant R$, тобто точка, симетрична точці M відносно площини α, належить кулі. Перше твердження теореми доведено.

Нехай тепер M_2 — точка, симетрична точці M відносно центра кулі. Тоді $OM_2 = OM \leqslant R$, тобто точка M_2 належить кулі. Теорему доведено повністю. ○

3. Дотична площина до кулі (сфери)

Площина, що має з кулею (сферою) тільки одну спільну точку, називається *дотичною площиною до кулі (сфери)*. Спільна точка дотичної площини й кулі (сфери) називається *точкою дотику*.

Теорема 12.3. Дотична площина до кулі перпендикулярна до радіуса, проведеного в точку дотику.

● Нехай площина α в точці M дотикається до кулі з центром у точці O і радіуса R (рис. 12.6). Доведемо, що $OM \perp \alpha$.

Припустимо, що OM — похила до площини α. Проведемо перпендикуляр OM_1 до площини α. Оскільки перпендикуляр має довжину, меншу від довжини похилої, то $OM_1 < OM = R$. Але тоді точка M_1 належить одночасно і кулі, і площині α, а це суперечить умові, що площина α — дотична до кулі й у них тільки одна спільна точка M. Отже, радіус кулі OM не може бути похилою до дотичної площини α, тобто $OM \perp \alpha$. ○

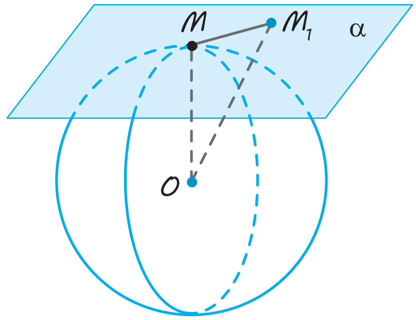


Рис. 12.6

Також має місце й обернене твердження: *якщо площина проходить через точку M сфери й перпендикулярна до радіуса, проведеного в цю точку, то вона дотикається до сфери* (обґрунтуйте це самостійно).

Пряма, що належить дотичній площині кулі (сфери) й проходить через точку дотику, називається *дотичною до кулі (сфери)* в цій точці. Оскільки дотична площина має з кулею тільки одну спільну точку, то дотична пряма має з кулею тільки одну спільну точку — точку дотику. Оскільки дотична пряма до кулі лежить у дотичній площині, що перпендикулярна до радіуса, проведеного в точку дотику, то дотична пряма до кулі перпендикулярна до радіуса, проведеного в точку дотику. Наприклад, на рис. 12.6 пряма MM_1 — дотична до кулі (сфери). Також має місце й обернене твердження: *якщо пряма проходить через точку M сфери й перпендикулярна до радіуса, проведеного в цю точку, то вона дотикається до сфери*. Обґрунтуйте це самостійно.

Зазначимо, що властивості, сформульовані в теоремах 12.1 і 12.3, дозволяють зв'язати взаємне розташування кулі й площини з відстанню $OA = d$ від центра кулі до площини та радіусом R кулі. Справді, якщо $d < R$, то площина перетинає кулю; якщо $d = R$, то площина дотикається до кулі; якщо $d > R$, то площина й куля не мають спільних точок (рис. 12.7).

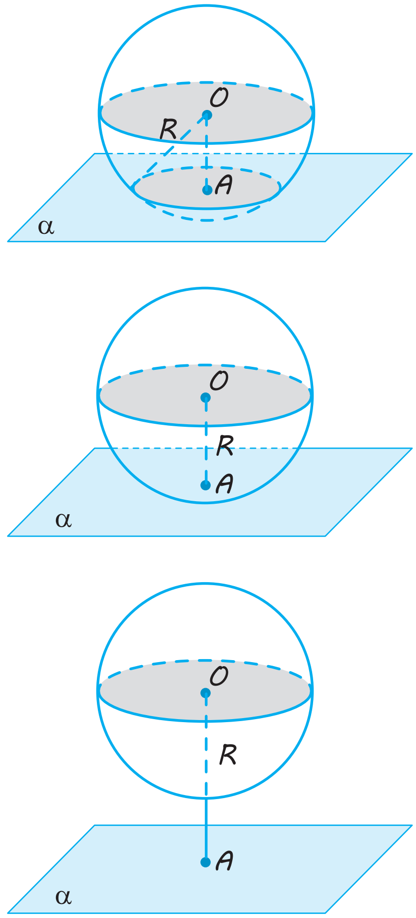


Рис. 12.7

4. Перетин і дотик двох сфер

Теорема 12.4. Лінія перетину двох сфер є колом.

● Нехай O_1 і O_2 — центри сфер і A — точка їх перетину (рис. 12.8). Проведемо через точку A площину α, перпендикулярну до прямої O_1O_2.

Позначимо через B точку перетину площини α з прямою O_1O_2. За теоремою 12.1 площина α перетинає обидві сфери по колу ω з центром у точці B, що

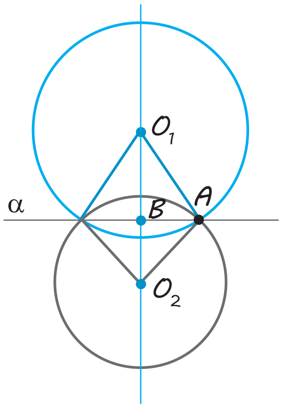


Рис. 12.8

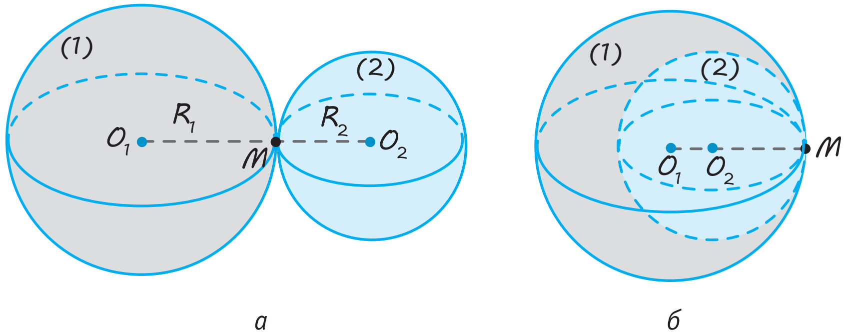


Рис. 12.9

проходить через точку A. Отже, коло ω належить лінії перетину сфер.

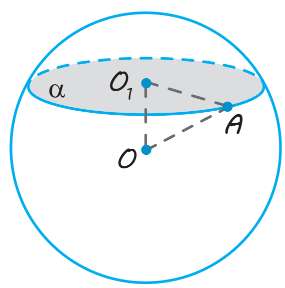
Покажемо тепер, що сфери не мають інших точок перетину, крім точок кола ω. Припустимо, що точка X лінії перетину сфер не лежить на колі ω. Проведемо площину через точку X і пряму O_1O_2. Вона перетне сфери по колах із центрами O_1 і O_2. Ці кола перетинаються у двох точках, що належать колу ω, і ще в точці X. Але два кола не можуть мати більш ніж дві точки перетину. Дійшли протиріччя. Отже, перетином наших сфер є коло ω. ○

Якщо дві сфери мають тільки одну спільну точку, то вони називаються ***дотичними одна до одної.***

Коли сфери дотикаються зовнішньо (рис. 12.9, *а*), то відстань між їхніми центрами O_1O_2 дорівнює сумі їхніх радіусів $(O_1O_2 = R_1 + R_2)$. Коли сфери дотикаються внутрішньо (рис. 12.9, *б*), то відстань між їхніми центрами O_1O_2 дорівнює різниці їхніх радіусів $(O_1O_2 = R_1 - R_2)$. У обох випадках точка дотику лежить на прямій O_1O_2 (обґрунтуйте це самостійно).

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 1 У кулі радіуса 26 см на відстані 10 см від центра проведено січну площину. Знайдіть площу перерізу.

Розв'язання	Коментар
▶ Проведемо перпендикуляр із центра кулі O на січну площину α і позначимо через O_1 основу цього перпендикуляра — центр круга перерізу (рис. 12.10). Нехай O_1A — радіус перерізу, а OA — радіус кулі ($OA = 26$ см). Оскільки $OO_1 \perp \alpha$, то OO_1 — відстань від центра кулі до січної площини і $OO_1 = 10$ см. Тоді з прямокутного трикутника OO_1A маємо: $O_1A^2 = OA^2 - OO_1^2 = 26^2 - 10^2 = 576$. Отже, площа перерізу дорівнює: $\pi \cdot O_1A^2 = 576\pi$ (см²). ◁	 Рис. 12.10 Згідно з теоремою 12.1, будь-який переріз кулі площиною є кругом.

Продовження коментаря

Центр цього круга є основою перпендикуляра, проведеного з центра кулі на січну площину. Тому для розв'язування потрібно з центра кулі провести перпендикуляр на січну площину α. Довжина цього перпендикуляра є відстанню від центра кулі до січної площини.
Корисно також урахувати, що для знаходження площі перерізу — круга використовуватимемо формулу $S = \pi R^2$, тому достатньо знайти $R^2 = O_1A^2$ (і не обов'язково знаходити довжину O_1A).

Задача 2

Куля з центром у точці O дотикається до площини. Точка A лежить у цій площині. Знайдіть відстань від точки A до точки дотику, якщо відстань від неї до центра кулі дорівнює 25 см, а радіус кулі — 15 см.

Розв'язання

▶ Нехай M — точка дотику кулі з площиною α і $A \in \alpha$ (рис. 12.11). За властивістю дотичної площини $OM \perp \alpha$, тоді $OM \perp AM$.

За умовою

$$OM = 15 \text{ см}, \ OA = 25 \text{ см}.$$

Із прямокутного трикутника OAM маємо:

$$AM = \sqrt{OA^2 - OM^2} = \sqrt{25^2 - 15^2} = \sqrt{400} = 20 \text{ (см)}. \ \triangleleft$$

Коментар

Згідно з теоремою 12.3, дотична площина до кулі перпендикулярна до радіуса, проведеного в точку дотику, але тоді й будь-яка пряма дотичної площини перпендикулярна до цього радіуса кулі.

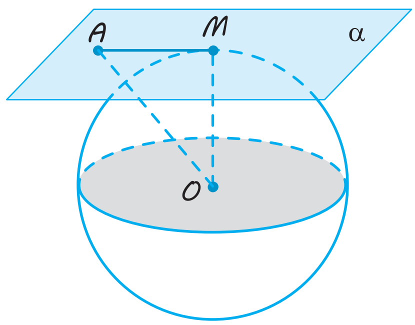


Рис. 12.11

Задача 3

Куля радіуса R дотикається до всіх сторін правильного трикутника зі стороною a. Знайдіть відстань від центра кулі до площини трикутника.

Розв'язання

▶ Площина трикутника перетинає кулю по кругу. Оскільки куля дотикається до всіх сторін трикутника, то точки дотику лежать у площині трикутника.

Круг також дотикається до всіх сторін трикутника, тобто буде вписаним у трикутник.

Коментар

Оскільки куля дотикається до всіх сторін правильного трикутника, то площина трикутника має з кулею більше ніж одну спільну точку, тобто площина трикутника перетинає кулю (по кругу).

За умовою кожна сторона трикутника є дотичною до кулі. Тому кожна сторона має єдину спільну точку з кулею, а отже, і єдину спільну точку з кругом, що лежить у перерізі.

Проведемо перпендикуляр із центра кулі O на площину трикутника й позначимо через O_1 основу цього перпендикуляра — центр круга, отриманого в перерізі (рис. 12.12). Тоді OO_1 — відстань від центра кулі до площини трикутника. Якщо N — точка дотику до сторони AB трикутника з кругом перерізу, то $ON = R$ і O_1N — радіус перерізу, який дорівнює радіусу кола, вписаного в правильний трикутник зі стороною a, тобто $\frac{a}{2\sqrt{3}}$.

Із прямокутного трикутника OO_1N маємо:

$$OO_1 = \sqrt{ON^2 - O_1N^2} = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{12}}. \ \triangleleft$$

Отже, круг, отриманий у перерізі, є вписаним у заданий правильний трикутник.

Радіус круга, вписаного в правильний трикутник, можна обчислити або за формулою

$$r = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{6},$$

або з прямокутного трикутника AO_1N (рис. 12.12), де O_1 — точка перетину висот, медіан і бісектрис правильного трикутника (тому $AN = \frac{a}{2}$, $\angle O_1AN = 30°$).

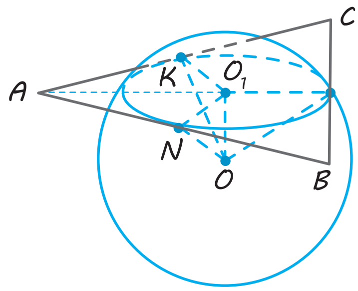


Рис. 12.12

Задача 4

Дві рівні кулі радіуса R розташовані так, що центр однієї лежить на поверхні іншої. Знайдіть довжину лінії, по якій перетинаються їхні поверхні.

Розв'язання

▶ Проведемо переріз через центри куль (рис. 12.13). Лінія, про яку йде мова в задачі, є колом, а його радіус дорівнює висоті AO_2 рівностороннього трикутника OAO_1, сторони якого дорівнюють R. Висота AO_2 дорівнює $\frac{R\sqrt{3}}{2}$.

Отже, довжина лінії перетину поверхонь куль дорівнює $\pi R\sqrt{3}$. ◁

Коментар

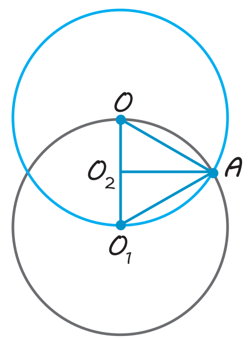


Рис. 12.13

Під час розв'язування задач на комбінацію тіл обертання часто буває зручно розглянути осьовий переріз заданої комбінації.

Також слід урахувати, що лінія перетину двох сфер є колом (теорема 12.4) з радіусом AO_2 (де $AO_2 \perp OO_1$).

Тоді довжина шуканого кола дорівнює $2\pi AO_2$.

Запитання

1. Поясніть, що таке куля й сфера. Що таке центр кулі? радіус і діаметр кулі?
2. Якою фігурою є переріз кулі площиною? Що таке великий круг кулі? велике коло сфери?
3.* Сформулюйте й доведіть теорему про переріз кулі площиною.
4. Як пов'язані між собою радіуси кругів — перерізів кулі двома площинами й відстані від цих кругів до центра кулі?
5. Чи має куля центр симетрії й площини симетрії? Обґрунтуйте відповідні твердження.
6. Яка площина називається дотичною площиною до кулі (сфери)?
7.* Сформулюйте й доведіть властивість дотичної площини до кулі.
8. Яка пряма називається дотичною до кулі (сфери)?
9. Як розташовані куля й площина залежно від відстані від центра кулі до площини?
10.* Яка лінія є лінією перетину двох сфер? Доведіть відповідне твердження.
11.* Які дві сфери називаються дотичними одна до одної? Як пов'язані відстань між центрами дотичних сфер та їхніми радіусами у випадку зовнішнього дотику? внутрішнього дотику?

Вправи

12.1.° Площина проходить через центр сфери й перетинає її по колу, довжина якого дорівнює 6π. Знайдіть діаметр сфери.

12.2.° Знайдіть довжину лінії перетину сфери радіуса 5 і площини, віддаленої від центра цієї сфери на 3.

12.3. Площина віддалена на відстань 3 від центра сфери радіуса 10. На яку найбільшу відстань віддалені від цієї площини точки сфери?

12.4.° Усі вершини квадрата зі стороною 8 дм належать сфері радіуса 9 дм. На якій відстані від центра сфери розташована площина квадрата?

12.5.° Вершини прямокутника лежать на сфері радіуса 10 см. Знайдіть відстань від центра сфери до площини прямокутника, якщо його діагональ дорівнює 16 см.

12.6. Усі вершини правильного трикутника зі стороною 6 дм належать сфері радіуса 8 дм. На якій відстані від центра сфери розташована площина трикутника?

12.7. Сфера проходить через усі вершини прямокутного трикутника з катетами 6 і 8, а центр сфери віддалений від площини цього трикутника на відстань 12. Знайдіть радіус сфери.

12.8.* Куля радіуса 3 дотикається до сторін рівностороннього трикутника в точках A, B і C. Визначте довжину найкоротшого шляху по поверхні кулі від точки A до точки B, якщо довжина сторони цього трикутника дорівнює 6.

12.9. Сфера радіуса 6 дотикається до площини трикутника ABC у центрі описаного навколо нього кола. Знайдіть відстань від центра сфери до вершин трикутника, якщо $AB = 3$, $AC = 4$, $BC = 5$.

12.10. Сфера радіуса 1,5 дотикається до площини трикутника ABC у центрі вписаного в нього кола. Знайдіть відстань від центра сфери до сторін трикутника, якщо $AB = 6$, $AC = 8$, $BC = 10$.

12.11. Сфера дотикається до трьох сторін трикутника зі сторонами 5, 5, 8. Знайдіть радіус сфери, якщо її центр лежить у площині цього трикутника.

12.12. Кулю радіуса 41 дм перетнули площиною, розташованою на відстані 9 дм від центра. Знайдіть площу перерізу.

12.13. Через середину радіуса кулі проведено площину, перпендикулярну до нього. Як відноситься площа утвореного перерізу до площі великого круга?

12.14.* Сфера проходить через три вершини ромба зі стороною 6 і кутом 60°. Знайдіть відстань від центра сфери до четвертої вершини ромба, якщо радіус сфери дорівнює 10.

12.15. Дві паралельні площини перетинають сферу радіуса 5 по колах радіусів 3 і 4. Знайдіть відстань між площинами.

12.16. Сфера дотикається до однієї з паралельних площин і перетинає іншу по колу радіуса 4. Знайдіть радіус сфери, якщо відстань між площинами дорівнює 8.

12.17. Радіус кулі дорівнює R. Через кінець радіуса проведено площину під кутом 60° до нього. Знайдіть площу перерізу.

12.18. Діаметр кулі дорівнює 25 см. На його поверхні задані точка A і коло, усі точки якого віддалені (по прямій) від точки A на 15 см. Знайдіть радіус цієї кола.

12.19.* Радіус кулі дорівнює 7 см. На його поверхні задано два рівні кола, що мають спільну хорду довжиною 2 см. Знайдіть радіуси кіл, якщо їхні площини перпендикулярні (рис. 12.14).

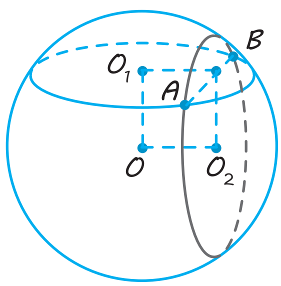


Рис. 12.14

12.20.* Задано кулю радіуса R. Через одну точку його поверхні проведено дві площини: перша — дотична до кулі, друга — під кутом 30° до першої. Знайдіть площу перерізу кулі.

12.21. Діагоналі ромба дорівнюють 15 см і 20 см. Кульова поверхня дотикається до всіх його сторін. Радіус кулі дорівнює 10 см. Знайдіть відстань від центра кулі до площини ромба.

12.22.* Через дотичну до поверхні кулі проведено дві взаємно перпендикулярні площини, що перетинають кулю по кругах радіусами r_1 і r_2. Знайдіть радіус кулі.

12.23.* Радіуси куль дорівнюють 25 дм і 29 дм, а відстань між їхніми центрами — 36 дм. Знайдіть довжину лінії, по якій перетинаються їхні поверхні.

12.24. На поверхні сфери задано три точки. Відстані між ними дорівнюють 6 см, 8 см і 10 см. Радіус сфери дорівнює 13 см. Знайдіть відстань від центра сфери до площини, що проходить через задані три точки.

12.25.* Площа великого круга кулі дорівнює 50π см^2. Два взаємно перпендикулярні перерізи кулі мають спільну хорду довжиною 6 см. Знайдіть відстань від центра кулі до площин перерізу, якщо площа одного з них дорівнює 25π см^2.

12.26. Радіус сфери дорівнює 63 см. Точка A лежить на дотичній площині до сфери на відстані 16 см від точки дотику. Знайдіть найменшу відстань від точки A до сфери.

Виявіть свою компетентність

12.27. Радіус земної кулі дорівнює R. Чому дорівнює довжина паралелі, якщо її широта становить 60° (рис. 12.15)? Радіус Землі вважайте рівним 6000 км.

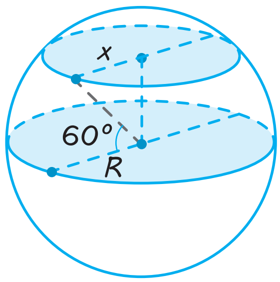


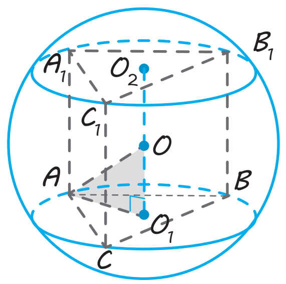
Рис. 12.15

12.28. Місто N розташоване на 60° північної широти. Який шлях робить цей пункт протягом 1 год унаслідок обертання Землі навколо своєї осі? Радіус Землі вважайте рівним 6000 км.

§ 13 КОМБІНАЦІЇ МНОГОГРАННИКІВ ІЗ КУЛЕЮ

Таблиця 11

1. Куля, описана навколо призми



Куля називається описаною навколо призми, якщо всі вершини призми лежать на поверхні кулі.

O — центр описаної кулі,

$$OA = OB = OA_1 = OB_1 = OC_1 = R_{\text{опис. кулі}}$$

Властивості

1. Кулю можна описати тільки навколо прямої призми, навколо основи якої можна описати коло.
2. Центр кулі, описаної навколо прямої призми, лежить у середині відрізка, що сполучає центри кіл, описаних навколо основ призми (точка O — середина відрізка O_1O_2).

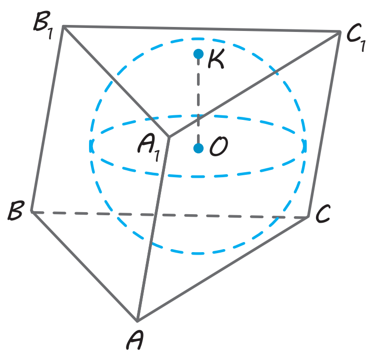
Для розв'язування зазвичай використовують прямокутний трикутник AOO_1, у якому:

$AO = R_{\text{опис. кулі}}$ — радіус описаної кулі,

$AO_1 = R_{\text{кола}}$ — радіус кола, описаного навколо основи призми,

$$OO_1 = \frac{1}{2}AA_1 = \frac{1}{2}H_{\text{пр}}$$

2. Куля, вписана в призму



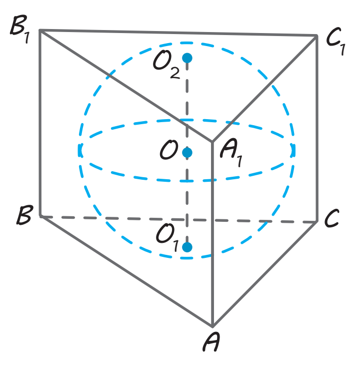
Куля називається вписаною в призму, якщо всі грані призми дотикаються до цієї кулі.

O — центр вписаної кулі,

K — точка дотику з гранню $A_1B_1C_1$.

$$OK = r_{\text{впис. кулі}} \quad (OK \perp \text{пл. } A_1B_1C_1)$$

Пряма призма



Центр кулі, вписаної в пряму призму, лежить у середині відрізка, що сполучає центри кіл, вписаних в основи призми. Причому радіус кулі дорівнює радіусу кола, вписаного в основу призми, а діаметр кулі — висоті призми.

Якщо $ABCA_1B_1C_1$ — пряма призма

й O_1 — центр кола, вписаного в основу ABC,

O_2 — центр кола, вписаного в основу $A_1B_1C_1$,

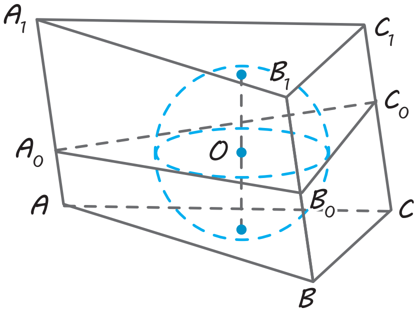
O — середина відрізка O_1O_2,

то O — центр вписаної кулі,

$$r_{\text{впис. кулі}} = r_{\text{кола, впис. в осн}},$$
$$d_{\text{впис. кулі}} = H_{\text{пр}}$$

Продовження табл. 11

Похила призма



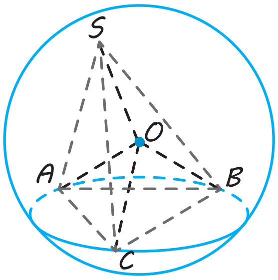
Якщо в похилу призму вписано кулю, то радіус кулі дорівнює радіусу кола, вписаного в перпендикулярний переріз призми, а діаметр кулі дорівнює висоті призми.

Якщо в призму $ABCA_1B_1C_1$ вписано кулю і $A_0B_0C_0$ — перпендикулярний переріз $(\text{пл. } A_0B_0C_0 \perp AA_1)$,

то $r_{\text{впис. кулі}} = r_{\text{кола, впис. у перп. пер. } A_0B_0C_0}$,

$$d_{\text{впис. кулі}} = H_{\text{пр}}$$

3. Куля, описана навколо піраміди

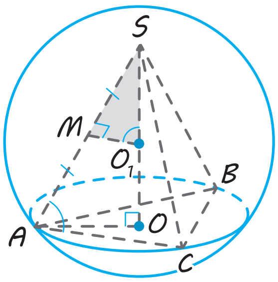


Куля називається описаною навколо піраміди, якщо всі вершини піраміди лежать на поверхні кулі.

O — центр описаної кулі,

$$OA = OB = OC = SO = R_{\text{опис. кулі}}$$

Піраміда, основою висоти якої є центр описаного навколо основи кола



У такій піраміді центр описаної кулі лежить на прямій, що містить висоту піраміди, у точці перетину цієї прямої із серединним перпендикуляром до бічного ребра.

SO — висота піраміди $SABC$,

O — центр кола, описаного навколо основи піраміди,

M — середина ребра SA,

$MO_1 \perp SA$ (у площині ASO),

MO_1 перетинає пряму SO у точці O_1,

O_1 — центр описаної кулі,

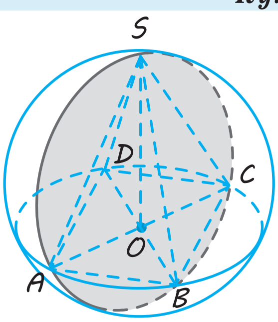
$$SO_1 = R_{\text{опис. кулі}},$$

$$AO = R_{\text{кола, опис. навк. осн}}$$

Шляхи розв'язування:

1) Ураховуючи, що $\angle SO_1M = \angle SAO$, обчислюємо елементи прямокутних трикутників SAO і SMO_1...
2) Ураховуючи, що $\triangle SMO_1 \sim \triangle SOA$, записуємо відповідні пропорції...

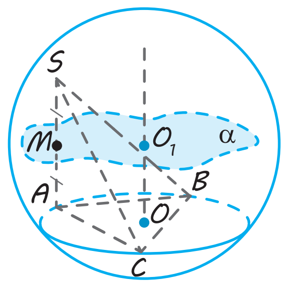
Куля, описана навколо правильної піраміди



1. Навколо будь-якої правильної піраміди можна описати кулю (сферу).
   Центр кулі (сфери), описаної навколо правильної піраміди, лежить на осі піраміди.
2. Радіус кулі (сфери), описаної навколо правильної чотирикутної піраміди, дорівнює радіусу кола, описаного навколо діагонального перерізу піраміди, (діагональний переріз — це переріз піраміди, що проходить через вершину піраміди і діагональ основи).

Продовження табл. 11

Довільна піраміда



Центр кулі, описаної навколо довільної піраміди (навколо основи якої можна описати коло), лежить на прямій, перпендикулярній до площини основи, що проходить через центр кола, описаного навколо основи, у точці перетину цієї прямої з площиною, яка перпендикулярна до бічного ребра і проходить через його середину.

O — центр кола, описаного навколо основи,

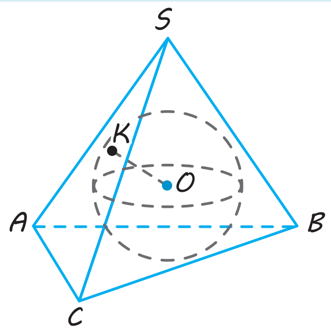
$$OO_1 \perp \text{пл.}\ ABC,$$

M — середина ребра SA, $\alpha \perp SA$ $(M \in \alpha)$,

α перетинає OO_1 у точці O_1,

O_1 — центр описаної кулі

4. Куля, вписана в піраміду



Куля називається вписаною в піраміду, якщо всі грані піраміди дотикаються до цієї кулі.

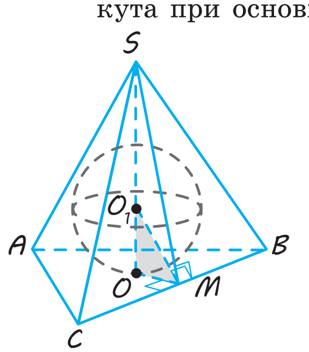
O — центр вписаної кулі,

K — точка дотику до грані SAC,

$$OK = r_{\text{впис. кулі}} \quad (OK \perp \text{пл.}\ SAC)$$

Піраміда, основа висоти якої — центр вписаного в основу кола

У такої піраміди центр вписаної кулі лежить на висоті піраміди, у точці перетину висоти з бісектрисою лінійного кута двогранного кута при основі.



SO — висота піраміди $SABC$ (O — центр кола, вписаного в основу),

$\angle SMO$ — лінійний ($OM \perp BC$, $SM \perp BC$),

MO_1 — бісектриса кута SMO,

MO_1 перетинає SO в точці O_1,

O_1 — центр вписаної кулі,

$$OO_1 = r_{\text{впис. кулі}},$$

$$OM = r_{\text{кола, впис. в осн}}$$

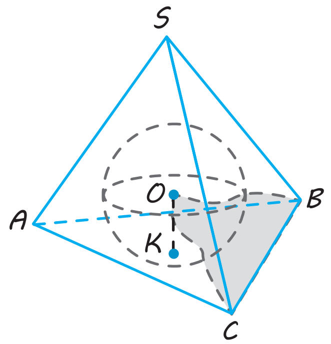
Шляхи розв'язування:

1) $\angle OMO_1 = \frac{1}{2}\angle SMO$. Розглядаємо прямокутні трикутники OMO_1 і SOM...;

2) оскільки MO_1 — бісектриса $\triangle SMO$, то $\frac{SO_1}{OO_1} = \frac{SM}{OM}$...;

3) $r_{\text{впис. кулі}} = \frac{3V_{\text{пір}}}{S_{\text{повн. пір}}}$ (обґрунтування формули наведене в § 17, с. 176).

Закінчення табл. 11

Довільна піраміда	
	Центр кулі, вписаної в довільну трикутну піраміду, лежить у точці перетину бісекторних площин двогранних кутів при ребрах піраміди. Достатньо розглянути три бісекторні площини. O — центр вписаної кулі, пл. BCO — бісекторна площина двогранного кута при ребрі BC. $OK \perp \text{пл.}\, ABC$, $OK = r_{\text{впис. кулі}}$, $r_{\text{впис. кулі}} = \dfrac{3V_{\text{пір}}}{S_{\text{повн. пір}}}$

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1. Вписані й описані многогранники. Куля, описана навколо призми.

Означення. **Многогранник називається вписаним у кулю, якщо всі його вершини лежать на поверхні кулі (а куля називається описаною навколо многогранника).**

Означення. **Многогранник називається описаним навколо кулі, якщо всі його грані дотикаються до поверхні кулі (а куля називається вписаною у многогранник).**

Розглянемо більш детально розташування центра кулі, описаної навколо призми (за означенням усі вершини такої призми лежать на поверхні описаної кулі).

● Нехай кулю описано навколо призми $ABCA_1B_1C_1$ і точка O — центр кулі (рис. 13.1). Розглянемо переріз кулі площинами нижньої й верхньої основ. У перерізі одержуємо круги, описані навколо основ. Оскільки основи призми рівні, то й круги перерізів будуть рівні, а отже, розташовуватимуться на рівній відстані від центра. Проведемо з центра кулі перпендикуляр $OO_1 \perp \text{пл.}\, ABC$, тоді за теоремою 12.1 точка O_1 — центр круга перерізу кулі площиною ABC. Продовжимо відрізок O_1O до перетину з площиною $A_1B_1C_1$ у точці O_2. Основи призми паралельні, тоді пряма O_1O_2, перпендикулярна до однієї з них, буде перпендикулярна й іншій, тобто $OO_2 \perp \text{пл.}\, A_1B_1C_1$. Маємо, що точка O_2 — центр круга перерізу кулі площиною $A_1B_1C_1$, а відрізки OO_1 й OO_2 — рівні відстані від центра кулі до кругів перерізів. За означенням верхня й нижня основи призми суміщаються паралельним перенесенням на вектор A_1A. Але при цьому суміщаються й центри O_2 та O_1 кіл, описаних навколо основ призми. Тоді $A_1A \parallel O_2O_1$ і $O_2O_1 \perp \text{пл.}\, ABC$, тому $A_1A \perp \text{пл.}\, ABC$, тобто призма пряма. ○

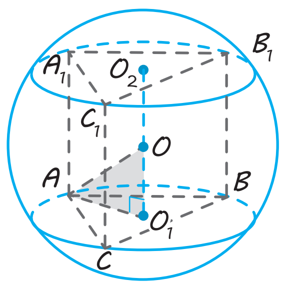


Рис. 13.1

Отже, *кулю можна описати тільки навколо прямої призми, навколо основи якої можна описати коло. Центр кулі, описаної навколо прямої призми, лежить у середині відрізка, що сполучає центри кіл, описаних навколо основ призми.*

Зазначимо, що обґрунтування розташування центра кулі, описаної навколо призми, було наведено для трикутної призми, але воно є правильним і для будь-якої прямої призми, навколо основи якої можна описати коло. Також зазначимо, що для розв'язування задач на обчислення, пов'язаних із кулею, описаною навколо прямої призми, зазвичай доводиться розглядати прямокутний трикутник AOO_1, виділений кольором на рис. 13.1, у якому $AO = R_{\text{кулі}}$, AO_1 — радіус кола, описаного навколо основи призми, і $OO_1 = \frac{1}{2} A_1 A$.

2. Куля, вписана в призму

Як і для будь-якого многогранника, *куля* називається *вписаною в призму*, якщо всі грані призми дотикаються до цієї кулі.

● Нехай кулю вписано в призму $ABCA_1B_1C_1$ і точка O — центр кулі (рис. 13.2). Якщо M — точка дотику кулі з гранню ABB_1A_1, то за теоремою 12.3 радіус $OM \perp$ пл. ABB_1. Але тоді $OM \perp AA_1$.

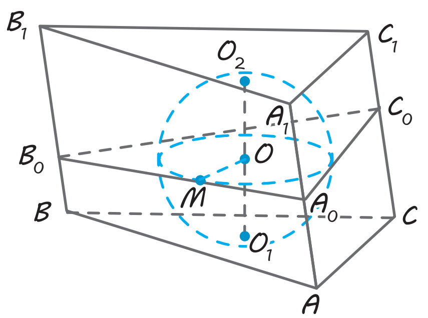


Рис. 13.2

Проведемо через точку M у грані ABB_1A_1 пряму $A_0B_0 \perp AA_1$ і розглянемо переріз призми й кулі площиною, що проходить через прямі A_0B_0 і OM, які перетинаються. За ознакою перпендикулярності прямої й площини площина отриманого перерізу $A_0B_0C_0$ перпендикулярна до ребра AA_1, тоді отриманий переріз $A_0B_0C_0$ перпендикулярний до всіх бічних ребер. Його називають *перпендикулярним перерізом призми*. Також за ознакою перпендикулярності площин перпендикулярний переріз буде перпендикулярним до кожної бічної грані призми. Тому всі точки дотику сфери з бічними гранями (як основи перпендикулярів, проведених із центра кулі на дотичні площини) лежатимуть у площині $A_0B_0C_0$. Переріз кулі цією площиною буде великим кругом, вписаним у трикутник $A_0B_0C_0$.

Сполучимо центр кулі з точкою O_1 — точкою дотику кулі з основою ABC призми. Тоді $OO_1 \perp$ пл. ABC. Продовжимо відрізок O_1O до перетину з площиною $A_1B_1C_1$ у точці O_2. Основи призми паралельні, тоді пряма O_1O_2, перпендикулярна до однієї з них, буде перпендикулярна й до іншої, тобто $OO_2 \perp$ пл. $A_1B_1C_1$. Оскільки з точки O можна провести тільки один перпендикуляр на площину $A_1B_1C_1$, то O_2 — точка дотику кулі з площиною $A_1B_1C_1$ і відрізок O_1O_2 — діаметр кулі $(O_1O_2 \perp \text{пл. } ABC)$. ○

Отже, *якщо в похилу призму вписано кулю, то радіус кулі дорівнює радіусу кола, вписаного в перпендикулярний переріз призми, а діаметр кулі дорівнює висоті призми*.

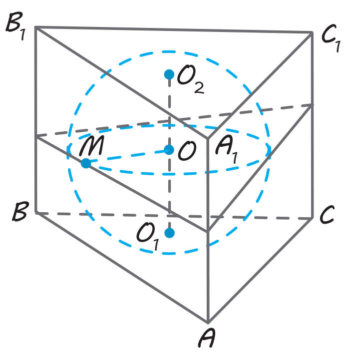


Рис. 13.3

Якщо врахувати, що в прямій призмі перпендикулярний переріз призми дорівнює її основам (рис. 13.3), то *центр кулі, вписаної в пряму призму, лежить у середині відрізка, що сполучає центри кіл, вписаних в основи призми. Причому радіус кулі дорівнює радіусу кола, вписаного в основу призми, а діаметр кулі — висоті призми*.

3. Куля, описана навколо піраміди

Як і для будь-якого многогранника, куля називається *описаною навколо піраміди*, якщо всі вершини піраміди лежать на поверхні кулі.

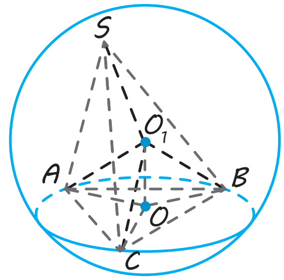


Рис. 13.4

● Розглянемо переріз кулі площиною основи піраміди. У перерізі дістанемо круг, описаний навколо основи піраміди, оскільки всі вершини основи лежать на поверхні кулі (круг, описаний навколо трикутника ABC, у пірамідах $SABC$ на рис. 13.4 і 13.5).

Якщо із центра кулі — точки O_1 провести перпендикуляр O_1O на січну площину, то його основа — точка O буде центром круга перерізу, тобто центром кола, описаного навколо основи піраміди.

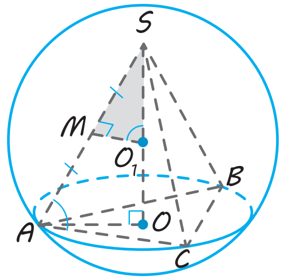


Рис. 13.5

Отже, *центр кулі, описаної навколо довільної піраміди, (навколо основи якої можна описати коло) лежить на прямій, що перпендикулярна до площини її основи і проходить через центр кола, описаного навколо основи піраміди.*

Можливі два випадки розташування вершини піраміди S відносно прямої OO_1.

1. Вершина S (протилежна основі піраміди) лежить на прямій OO_1 (рис. 13.5). Це буде в тому випадку, коли основою висоти піраміди є центр описаного навколо основи піраміди кола (оскільки через точку O можна провести тільки одну пряму, перпендикулярну до площини основи). Тоді бічне ребро піраміди (наприклад, SA) лежатиме в одній площині з висотою SO піраміди. У цій площині центр кулі — точка O_1 (лежить на прямій SO) рівновіддалена від кінців відрізка SA ($SO_1 = AO_1$ як радіуси кулі) і тому лежить на серединному перпендикулярі до ребра SA.
2. Вершина S може не лежати на прямій OO_1. Але і в цьому випадку центр кулі — точка O_1 (лежить на прямій OO_1), рівновіддалена від кінців відрізка SA ($SO_1 = AO_1$ як радіуси кулі) і тому лежить у площині, що перпендикулярна до ребра SA і проходить через його середину (див. § 17 підручника для 10 класу або табл. 9 на с. 195). ○

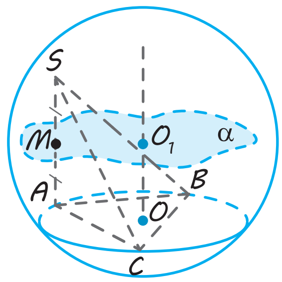


Рис. 13.6

Отже, ми обґрунтували твердження, викладені в пункті 3 табл. 11, а саме:

1. *Якщо в піраміді основою висоти є центр кола, описаного навколо основи, то центр описаної навколо піраміди кулі лежить на прямій, що містить висоту піраміди, у точці перетину цієї прямої із серединним перпендикуляром до бічного ребра* (рис. 13.5).
2. *Центр кулі, описаної навколо довільної піраміди, лежить на прямій, перпендикулярній до площини основи, що проходить через центр кола, описаного навколо основи, у точці перетину цієї прямої з площиною, що перпендикулярна до бічного ребра і проходить через його середину* (рис. 13.6).

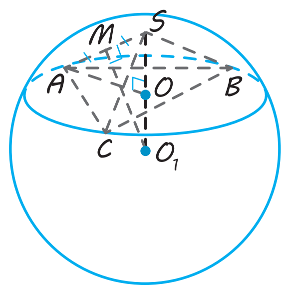


Рис. 13.7

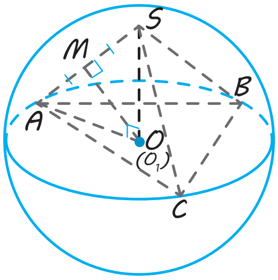


Рис. 13.8

Зазначимо, що якщо в піраміді основою висоти є центр кола, описаного навколо основи, то центр описаної кулі може розташовуватися на висоті піраміди (рис. 13.5), або на продовженні висоти (рис. 13.7), або збігатися з основою висоти піраміди (рис. 13.8).

Також зазначимо, що в правильній піраміді основою висоти є центр основи, який у правильному многокутнику є і центром кола, описаного навколо основи, тому *центр описаної навколо правильної піраміди кулі лежатиме на прямій, що містить висоту піраміди, тобто на осі правильної піраміди.*

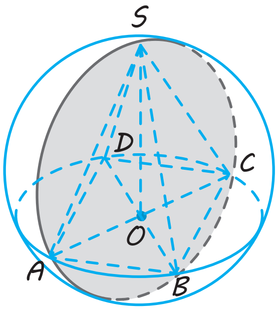


Рис. 13.9

У випадку правильної чотирикутної піраміди зазвичай буває зручно розглянути діагональний переріз піраміди, тобто переріз піраміди, що проходить через вершину піраміди і діагональ основи. Оскільки цей переріз проходить через центр кулі, то в перерізі одержимо великий круг, описаний навколо діагонального перерізу (рис. 13.9).

Маємо, що *радіус кулі (сфери), описаної навколо правильної чотирикутної піраміди, дорівнює радіусу кола, описаного навколо діагонального перерізу піраміди.*

4. Куля, вписана в піраміду

Як і для будь-якого многогранника, *куля* називається *вписаною в піраміду*, якщо всі грані піраміди дотикаються до цієї кулі.

Якщо кожна грань піраміди є дотичною до кулі, то всі відстані від центра кулі до граней дорівнюють радіусу кулі (оскільки радіус, проведений у точку дотику, перпендикулярний до відповідної грані). Тоді центр кулі рівновіддалений від граней усіх двогранних кутів при ребрах піраміди. Ураховуючи, що геометричним місцем точок, рівновіддалених від двох площин, що перетинаються, є бісекторні площини утворених двогранних кутів (див. § 17 підручника для 10 класу або табл. 9 на с. 195), одержуємо, що центр кулі, вписаної в довільну трикутну піраміду, розташований у точці перетину бісекторних площин двогранних кутів при ребрах піраміди*. У трикутній піраміді ці бісекторні площини завжди перетинаються в одній точці (рис. 13.10).

* Зазначимо, що в піраміду можна вписати кулю тоді й тільки тоді, коли всі бісекторні площини внутрішніх двогранних кутів піраміди перетинаються в одній точці.

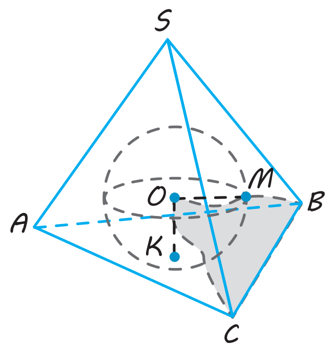


Рис. 13.10

Для піраміди, основою висоти якої є центр кола, вписаного в основу, можна вказати більш зручний орієнтир для визначення центра вписаної кулі, а саме:

якщо основою висоти піраміди є центр кола, вписаного в основу, то центр вписаної кулі лежить на висоті піраміди в точці перетину висоти з бісектрисою лінійного кута двогранного кута при основі піраміди.

● Нехай у піраміді $SABC$ основою висоти SO є точка O — центр вписаного в основу кола (рис. 13.11), а M і N — точки дотику кола, вписаного в основу піраміди, зі сторонами BC і AC відповідно. Тоді $OM \perp BC$ і за теоремою про три перпендикуляри $SM \perp BC$, отже, $\angle SMO$ — лінійний кут двогранного кута при ребрі BC. Аналогічно, $\angle SNO$ — лінійний кут двогранного кута при ребрі AC $(\angle SNO = \angle SMO)$.

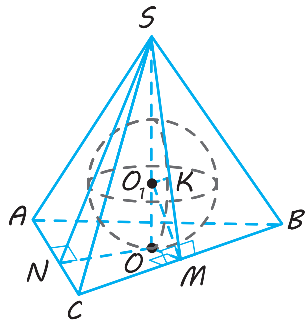


Рис. 13.11

Проведемо бісектрису MO_1 лінійного кута SMO й позначимо через O_1 точку перетину бісектриси з висотою SO піраміди. Упишемо в кут SMO півкруг з центром у точці O_1 і радіуса O_1O так, як показано на рис. 13.11 ($O_1K \perp SM$, $O_1O = O_1K$). Обертатимемо півкруг навколо прямої SO. Одержимо кулю. Доведемо, що ця куля вписана в задану піраміду.

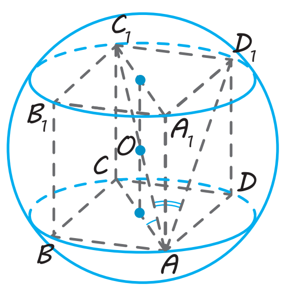
Оскільки O_1O — радіус кулі й $O_1O \perp$ пл. ABC (O_1O — частина висоти SO піраміди), то площина ABC є дотичною до побудованої кулі. Ураховуючи, що площина лінійного кута перпендикулярна до кожної грані цього кута, маємо, що пл. $SMO \perp$ пл. SBC. Але радіус $O_1K \perp SM$, тоді $O_1K \perp$ пл. SBC, отже, площина SBC — дотична до побудованої кулі.

Ці міркування можна повторити щодо будь-якої бічної грані піраміди. Для цього достатньо врахувати, що, наприклад, $\triangle SON = \triangle SOM$, і повернути трикутник SOM навколо осі SO так, щоб він сумістився з трикутником SON.

Тоді всі грані піраміди будуть дотичними до кулі, і, за означенням, куля буде вписана в піраміду. ○

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 1 У кулю радіуса R вписано прямокутний паралелепіпед, діагональ якого утворює з площиною основи та з однією з бічних граней кути 30°. Знайдіть виміри паралелепіпеда.

Розв'язання	Коментар
▶ Оскільки всі діагоналі прямокутного паралелепіпеда рівні, перетинаються в одній точці й точкою перетину (точкою O) діляться навпіл, то точка O рівновіддалена від усіх вершин цього прямокутного паралелепіпеда, тобто є центром описаної кулі, а кожна діагональ прямокутного паралелепіпеда є діаметром цієї кулі, наприклад $AC_1 = 2R$ (рис. 13.12). У прямокутному паралелепіпеді $C_1D_1 \perp$ пл. ADD_1, тоді $\angle C_1AD_1$ — кут нахилу діагоналі C_1A до грані ADD_1A_1 і $\angle C_1AD_1 = 30°$. Аналогічно $C_1C \perp$ пл. ABC, тоді $\angle C_1AC$ — кут нахилу діагоналі C_1A до площини ABC і $\angle C_1AC = 30°$.	За умовою задачі паралелепіпед вписаний у кулю, отже, куля описана навколо паралелепіпеда.  Рис. 13.12 Для розв'язування цієї задачі можна пригадати, що прямокутний паралелепіпед є прямою призмою і розташування центра описаної кулі, зазначене в пункті 1 табл. 11.

Із прямокутного трикутника ACC_1 маємо:

$$CC_1 = AC_1 \cdot \sin 30° = 2R \cdot \frac{1}{2} = R,$$

$$AC = AC_1 \cdot \cos 30° = 2R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}.$$

Аналогічно з прямокутного трикутника AC_1D_1 маємо: $C_1D_1 = R$. Із прямокутного трикутника ACD $(CD = C_1D_1 = R)$ маємо:

$$AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} = \sqrt{(R\sqrt{3})^2 - R^2} = R\sqrt{2}.$$

Тоді виміри заданого прямокутного паралелепіпеда дорівнюють $R\sqrt{2}$; R; R. ◁

Однак простіше врахувати, що в прямокутному паралелепіпеді точка перетину його діагоналей рівновіддалена від усіх його вершин, тобто є центром описаної навколо нього кулі. Для обґрунтування кута між діагоналлю паралелепіпеда й відповідною площиною слід урахувати, що в прямокутному паралелепіпеді $C_1C \perp$ пл. ABC і $C_1D_1 \perp$ пл. ADD_1. Тоді AC — проекція відрізка AC_1 на площину ABC і AD_1 — проекція відрізка AC_1 на площину ADD_1. Далі враховуємо, що кут між похилою й площиною — це кут між похилою та її проекцією на цю площину.

Зауваження. Із розв'язання цієї задачі маємо, що *центр кулі, описаної навколо прямокутного паралелепіпеда, лежить у точці перетину його діагоналей, а кожна діагональ прямокутного паралелепіпеда є діаметром описаної кулі.*

Задача 2

В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник із кутом β при основі трикутника. Дві рівні бічні грані піраміди перпендикулярні до площини її основи, а третя бічна грань утворює з основою кут α. Знайдіть висоту піраміди, якщо радіус описаної навколо піраміди кулі дорівнює R.

Розв'язання

▶ 1. Нехай у піраміді $SABC$ $AB = BC$, $\angle ACB = \beta$, пл. $SAB \perp$ пл. ABC і пл. $SBC \perp$ пл. ABC (рис. 13.13). Тоді SB — висота піраміди $(SB \perp \text{пл. } ABC)$.

2. Проведемо $BM \perp AC$, тоді $SM \perp AC$ за теоремою про три перпендикуляри, отже, $\angle SMB$ — лінійний кут двогранного кута при ребрі AC і $\angle SMB = \alpha$.

3. Нехай точка O — центр кола, описаного навколо рівнобедреного трикутника ABC (він лежить на прямій BM, оскільки BM — висота й медіана трикутника, а отже, і серединний перпендикуляр до сторони AC). Тоді центр O_1 описаної кулі лежить на прямій OO_1, перпендикулярній до площини ABC. Також $SB \perp$ пл. ABC, отже, $OO_1 \parallel SB$. Паралельні прямі лежать в одній площині, і в цій площині точка O_1 рівновіддалена від точок S і B $(SO_1 = BO_1 = R)$.

Коментар

1. Для обґрунтування розташування висоти піраміди враховуємо: якщо дві суміжні бічні грані піраміди перпендикулярні до площини основи, то висотою піраміди є їхнє спільне бічне ребро (див. § 5). Це необхідно врахувати вже під час побудови рисунка (рис. 13.13).

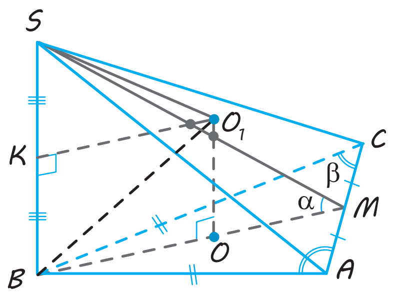


Рис. 13.13

Отже, точка O_1 розташована на серединному перпендикулярі KO_1 до ребра SB. (Зазначимо, що тоді OO_1KB — прямокутник

$$\text{і } OO_1 = BK = \frac{1}{2}SB.)$$

4. Позначимо $SB = x$ (де $x > 0$). Тоді

$$OO_1 = BK = \frac{1}{2}SB = \frac{x}{2}.$$

Із прямокутного трикутника SMB:

$$BM = SB\operatorname{ctg}\alpha = x\operatorname{ctg}\alpha.$$

Із прямокутного трикутника BMC маємо:

$$BC = \frac{BM}{\sin\beta} = \frac{x\operatorname{ctg}\alpha}{\sin\beta}.$$

Радіус кола, описаного навколо трикутника, дорівнює:

$$BO = \frac{BC}{2\sin\angle BAC} = \frac{x\operatorname{ctg}\alpha}{2\sin^2\beta}.$$

Із прямокутного трикутника BOO_1 маємо:

$$OO_1^2 + BO^2 = O_1B^2.$$

Тоді

$$\frac{x^2}{4} + \frac{x^2\operatorname{ctg}^2\alpha}{4\sin^4\beta} = R^2.$$

Звідси $x^2\left(\sin^4\beta + \operatorname{ctg}^2\alpha\right) = 4R^2\sin^4\beta$.

Маємо:

$$x = \frac{2R\sin^2\beta}{\sqrt{\sin^4\beta + \operatorname{ctg}^2\alpha}}$$ — висота піраміди. ◁

У цьому випадку рівні бічні грані міститимуть рівні сторони рівнобедреного трикутника, що лежить в основі піраміди ($\triangle SAB = \triangle SCB$ за двома катетами).

2. Для побудови лінійного кута двогранного кута при ребрі AC достатньо в площині основи з основи висоти провести перпендикуляр BM до цього ребра, сполучити отриману точку M із вершиною піраміди S і скористатися теоремою про три перпендикуляри.

3. Для обґрунтування розташування центра описаної кулі скористаємося твердженням, що центр кулі, описаної навколо довільної піраміди, лежить на прямій, перпендикулярній до площини її основи, що проходить через центр кола, описаного навколо основи піраміди.

4. Під час виконання обчислювальної частини розв'язання слід урахувати, що заданий відрізок (радіус кулі R) і задані кути (α і β) неможливо об'єднати в зручний для розв'язування трикутник, тому корисно ввести невідомий відрізок (наприклад, довжину висоти піраміди, яку потрібно знайти). Для складання рівняння зручно використовувати прямокутний трикутник BOO_1, гіпотенуза якого відома (R), а катети нескладно виразити через x і задані кути.

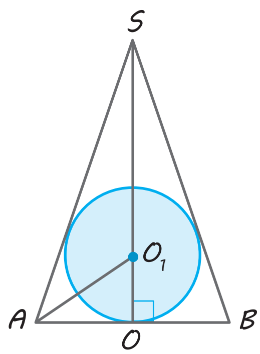
Розглянемо також приклад розв'язування задачі на комбінацію тіл обертання. Нагадаємо, що під час розв'язування задач на комбінацію тіл обертання часто буває зручно розглянути осьовий переріз заданої комбінації (і звести задачу до планіметричної — див. також задачу 4 § 12 на с. 127).

Зазначимо, що *кулею, вписаною в конус, називається куля, яка дотикається до площини основи конуса, а кожна з твірних конуса є дотичною до кулі.* Аналогічно *кулею, вписаною в циліндр, називається куля, що дотикається до площин основ циліндра, а кожна з твірних циліндра є дотичною до кулі.*

Із міркувань симетрії одержуємо, що центр кулі, вписаної в конус або в циліндр, розташований на їхній осі.

Задача 3

Висота конуса дорівнює 8 см, а радіус вписаної кулі — 3 см. Знайдіть площу бічної поверхні конуса.

Розв'язання	Коментар
▶ Розглянемо осьовий переріз комбінації заданих тіл (рис. 13.14). Осьовим перерізом конуса є рівнобедрений трикутник SAB, основа якого дорівнює діаметру основи конуса, висота SO — висоті конуса, а бічна сторона — твірній конуса. Осьовим перерізом кулі є круг, радіус якого дорівнює радіусу кулі. Оскільки куля вписана в конус, то круг буде вписаний у трикутник. За умовою $SO=8$ см. Центр O_1 вписаного круга (кола) лежить у точці перетину бісектрис кутів трикутника. У рівнобедреному трикутнику SAB висота SO є одночасно бісектрисою й медіаною. Отже, точка O_1 лежить на висоті SO і відрізок AO_1 — бісектриса кута A. Тоді OO_1 — радіус вписаного кола, а отже, і радіус кулі, вписаної в конус. Звідси $OO_1=3$ см. Тоді $SO_1=5$ см. Нехай $SA=x$ $(x>0)$. У трикутнику SAO відрізок AO_1 — бісектриса, тоді $$\frac{OO_1}{SO_1}=\frac{AO}{SA},\text{ тобто }\frac{3}{5}=\frac{AO}{x}.$$ Звідси $AO=\frac{3}{5}x$. Із прямокутного трикутника ASO маємо: $SA^2=AO^2+SO^2$, тоді $x^2=\frac{9}{25}x^2+64$. Звідси $x=10$ (см). Одержуємо: $$SA=x=10\text{ см},\quad AO=\frac{3}{5}x=6\text{ (см)}.$$ Тоді площа бічної поверхні конуса дорівнює $$\pi\cdot AO\cdot SA=\pi\cdot 6\cdot 10=60\pi\ (\text{см}^2).$$ ◁	Оскільки в задачі розглядається комбінація конуса й кулі — двох тіл обертання, то зручно розглянути осьовий переріз цієї комбінації. Приступаючи до обчислювальної частини розв'язання задачі, слід урахувати, що задані відрізки не вдається об'єднати в зручний для розв'язання трикутник, тому доцільно ввести невідомий відрізок. Зокрема, ураховуючи формулу для обчислення площі бічної поверхні конуса, одержимо: $S=\pi Rl=\pi\cdot AO\cdot SA$. Зручно позначити через x відрізок AO або відрізок SA. Щоб скласти рівняння зі змінною x, можна виразити сторони SA і AO прямокутного трикутника ASO через x і скористатися теоремою Піфагора. Для одержання зв'язку між довжинами сторін SA і AO зручно врахувати, що в трикутнику ASO відрізок AO_1 — бісектриса, яка ділить протилежну сторону на частини, довжини яких пропорційні довжинам прилеглих сторін.  Рис. 13.14

Запитання

1. Яка куля називається описаною навколо многогранника? вписаною в многогранник?
2. Яка куля називається описаною навколо призми? Навколо якої призми можна описати кулю?

3. 1) Де розташований центр кулі, описаної навколо прямої призми?
2*) Обґрунтуйте розташування центра кулі, описаної навколо прямої призми.
3) Де розташований центр кулі, описаної навколо прямокутного паралелепіпеда?

4. Яка куля називається вписаною в призму?

5. 1) Де розташований центр кулі, вписаної в пряму призму?
2) Чому дорівнює радіус такої кулі?
3) Як пов'язані довжина висоти призми й діаметр вписаної кулі?
4*) Обґрунтуйте розташування центра кулі, вписаної в пряму призму.

6. 1) Чому дорівнює радіус кулі, вписаної в похилу призму?
2) Як пов'язані довжина висоти призми й діаметр вписаної кулі?

7. Яка куля називається описаною навколо піраміди?

8. 1) Де розташований центр кулі, описаної навколо піраміди, основою висоти якої є центр описаного навколо основи кола?
2*) Відповідь обґрунтуйте.

9. 1) Де розташований центр кулі, описаної навколо довільної піраміди (навколо основи якої можна описати коло)?
2*) Відповідь обґрунтуйте.

10. Яка куля називається вписаною в піраміду?

11. 1) Де розташований центр кулі, вписаної в піраміду, основою висоти якої є центр вписаного в основу кола?
2*) Відповідь обґрунтуйте.

12. 1) Де розташований центр кулі, вписаної в довільну трикутну піраміду?
2*) Відповідь обґрунтуйте.

13. Яка куля називається вписаною в конус? у циліндр? Чи в будь-який циліндр можна вписати кулю?

Вправи

13.1.° 1) Знайдіть радіус сфери, вписаної в куб із ребром a.
2) Визначте відстані від центра цієї сфери до грані, ребра й вершини куба.

13.2.° Знайдіть діагональ куба, вписаного в кулю радіуса 8 см.

13.3. Навколо правильної трикутної призми, усі ребра якої дорівнюють a, описано кулю. Знайдіть радіус кулі.

13.4. Знайдіть радіус кулі, описаної навколо прямої призми, основа якої — прямокутний трикутник із гіпотенузою 5, а бічне ребро дорівнює 12.

13.5. Радіус сфери, вписаної в правильну трикутну призму, дорівнює r. Знайдіть площу повної поверхні призми.

13.6. Радіус сфери дорівнює R. Знайдіть площу повної поверхні описаного навколо сфери многогранника, якщо цим многогранником є:

1) куб;
2) правильна шестикутна призма;
3) правильний тетраедр.

13.7. Прямокутний паралелепіпед описано навколо сфери радіуса 8. Знайдіть площу його повної поверхні.

13.8. У прямий паралелепіпед із діагоналями основи 6 см і 8 см вписано кулю. Знайдіть площу поверхні паралелепіпеда.

13.9. Бічне ребро правильної трикутної піраміди дорівнює 12 см і утворює з площиною основи кут $60°$. Знайдіть радіус сфери, описаної навколо піраміди.

13.10. Навколо правильної шестикутної призми, висота якої дорівнює 12 см, описано сферу радіуса 10 см. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

13.11. Радіус сфери, описаної навколо правильної трикутної піраміди, дорівнює 13 см, а відстань від її центра до площини основи піраміди — 5 см. Знайдіть бічне ребро піраміди. Розгляньте два випадки.

13.12.* У кулю радіуса 10 см вписано піраміду, у основі якої лежить прямокутний трикутник із катетами 12 см і 16 см. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди, якщо її висота дорівнює 10 см.

13.13.* Доведіть, що для того щоб навколо призми можна було описати кулю, необхідно й достатньо, щоб призма була прямою й навколо її основи можна було описати коло.

13.14.* Знайдіть відношення радіуса кулі, вписаної в правильну шестикутну призму, до радіуса кулі, описаної навколо призми.

13.15. Знайдіть площу осьового перерізу циліндра, у який вписано кулю радіуса R.

13.16. Навколо кулі радіуса r описано конус, твірна якого нахилена до площини основи під кутом α. Знайдіть площу осьового перерізу конуса.

13.17. У конус вписано кулю. Радіус кола, по якому дотикаються конус і куля, дорівнює R. Знайдіть площу бічної поверхні конуса, якщо кут між висотою і твірною конуса дорівнює α.

13.18. Знайдіть радіус сфери, вписаної в зрізаний конус, якщо радіуси його основ дорівнюють r і R.

13.19. Знайдіть радіус кулі, вписаної в правильну n-кутну піраміду, сторона основи якої дорівнює a, а двогранний кут при ребрі основи — α, якщо: 1) $n=4$; 2) $n=3$; 3) $n=6$.

13.20. Основа піраміди — рівнобедрений трикутник з основою a і кутом при основі α. Усі бічні грані піраміди утворюють з основою кут β. Знайдіть радіус кулі, вписаної в піраміду.

13.21. У сферу радіуса R вписано правильну чотирикутну піраміду, бічне ребро якої нахилене до площини основи під кутом α. Знайдіть висоту піраміди.

13.22. Знайдіть радіус сфери, описаної навколо прямокутного паралелепіпеда з вимірами a, b і c.

13.23. Знайдіть радіус сфери, описаної навколо прямої призми, якщо висота призми дорівнює c, а в її основі лежить прямокутний трикутник із катетами a і b.

13.24. Знайдіть радіус сфери, описаної навколо піраміди, бічні ребра якої попарно перпендикулярні, а їх довжини дорівнюють a, b і c.

13.25. Бічне ребро похилої призми дорівнює 12 см, а радіус вписаної сфери дорівнює 3 см. Знайдіть кут нахилу бічного ребра призми до площини основи.

13.26.* Центр кулі, описаної навколо правильної чотирикутної піраміди, ділить її висоту у відношенні 3:4, починаючи від основи. Знайдіть величину двогранного кута при бічному ребрі піраміди.

13.27.* У правильний тетраедр $ABCD$ вписано сферу радіуса R. Знайдіть радіус сфери, яка дотикається до вписаної сфери і трьох граней тетраедра, що виходять із вершини A.

13.28. Ребро правильного тетраедра дорівнює a. Знайдіть радіус кулі, що дотикається до всіх ребер тетраедра.

13.29. В основі прямої призми лежить рівнобедрений прямокутний трикутник із гіпотенузою 2. Відомо, що в призму можна вписати сферу. Знайдіть відстань між центрами вписаної й описаної сфер.

13.30.* Відстань від центра описаної навколо правильної піраміди сфери до її основи у два рази менша від радіуса сфери. Знайдіть кут між бічним ребром і висотою піраміди.

13.31. Основою трикутної піраміди з рівними бічними ребрами є прямокутний трикутник із гіпотенузою 10. Висота піраміди дорівнює 12. Знайдіть радіус описаної кулі.

13.32. Дві сусідні грані трикутної піраміди — прямокутні трикутники зі спільною гіпотенузою c. Знайдіть радіус описаної навколо цієї піраміди сфери.

13.33.* В основі піраміди лежить рівносторонній трикутник зі стороною a. Одна з бічних граней — такий самий трикутник, при цьому вона перпендикулярна до площини основи. Знайдіть радіус описаної навколо піраміди кулі.

Відомості з історії

Поняття тіла обертання було відомо ще з догрецьких часів. Означення циліндра, конуса й кулі як тіл обертання наведені в «Началах» Евкліда (близько 300 до н.е.), але значна заслуга в дослідженні цих тіл належить його сучасникам і послідовникам — Евдоксу (близько 408 до н.е. — близько 355 до н.е.), Аполлонію (262 до н.е. — 190 до н.е.), Архімеду (близько 287 до н.е. — 212 до н.е.). Зокрема, Аполлоній Пергський у своїй роботі «Конічні перерізи» встановив, що перетинами конічної поверхні можуть бути коло, еліпс, парабола або гіпербола.

Досить цікаве застосування куль, вписаних і описаних навколо правильних многогранників, запропонував Йоганн Кеплер (1571—1630) у своїй праці «Таємниця світобудови» (1596). Він запропонував принцип, якому, на його думку, підпорядковуються форми й розміри орбіт відомих на той час планет Сонячної системи. За Кеплером геометрія Сонячної системи описувалася так: «Земля (мається на увазі орбіта Землі) є міра всіх орбіт. Навколо неї опишемо додекаедр. Описана навколо додекаедра сфера є сфера Марса. Навколо сфери Марса опишемо тетраедр. Описана навколо тетраедра сфера є сфера Юпітера. Навколо сфери Юпітера опишемо куб.

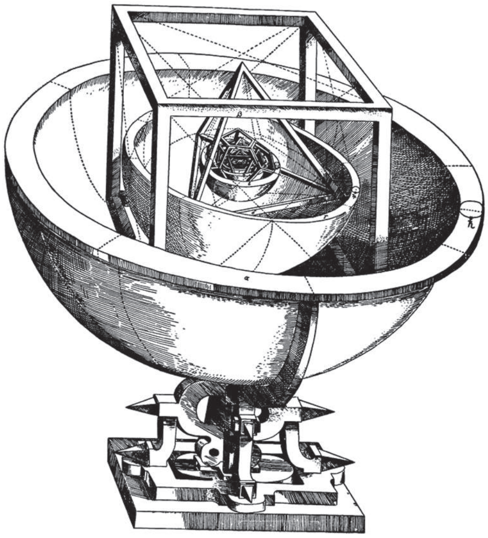


Рис. Модель Сонячної системи Кеплера «Космічний кубок»

Описана навколо куба сфера є сфера Сатурна. У сферу Землі впишемо ікосаедр. Вписана в нього сфера є сфера Венери. У сферу Венери впишемо октаедр. Вписана в нього сфера є сфера Меркурія». Така модель Сонячної системи отримала назву «Космічного кубка» Кеплера (рисунок). Ця робота після подальших відкриттів Кеплера втратила своє первинне значення, оскільки орбіти планет виявилися не круговими, а еліптичними, проте, у наявність прихованої математичної гармонії Всесвіту Кеплер вірив до кінця життя.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПІДГОТОВКИ ДО ОЦІНЮВАННЯ

Тест № 2

Пройдіть онлайн-тестування

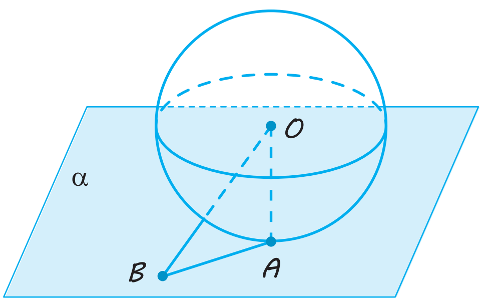
1. Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює 20 см. Знайдіть площу осьового перерізу, якщо радіус циліндра дорівнює 6 см.

А 36 см^2 **В** 120 см^2 **Д** 200 см^2
Б 96 см^2 **Г** 192 см^2

2. Твірна конуса дорівнює 30 см і нахилена до площини основи під кутом 60°. Знайдіть висоту конуса.

А 15 см **В** $15\sqrt{2}$ см **Д** $30\sqrt{3}$ см
Б $15\sqrt{3}$ см **Г** $10\sqrt{3}$ см

3. Куля з центром у точці O дотикається до площини α в точці A, а точка B лежить в α, $AB=a$, $\angle AOB=\varphi$. Знайдіть радіус кулі.



А $a\sin\varphi$ **В** $a\,\mathrm{tg}\,\varphi$ **Д** $\dfrac{a}{\sin\varphi}$
Б $a\cos\varphi$ **Г** $a\,\mathrm{ctg}\,\varphi$

4. Кулю радіуса 10 перетнули площиною на відстані 6 від центра. Знайдіть площу перерізу.

А 16π **В** 36π **Д** 100π
Б 20π **Г** 64π

5. Циліндр, осьовим перерізом якого є квадрат зі стороною 20, перетнули площиною, паралельною осі циліндра, на відстані 6 від центра. Установіть відповідність між величинами (1–3) та їхніми значеннями (А–Г).

1 Довжина твірної циліндра	**А** 10
2 Площа одержаного перерізу	**Б** 20
3 Довжина діагоналі одержаного перерізу	**В** 320
	Г $4\sqrt{41}$

6. Через вершину конуса з висотою 6 і радіусом основи 4 проведено січну площину, яка утворює кут 60° з площиною основи. Знайдіть площу перерізу.

7. У циліндр з радіусом основи 5 см і висотою 6 см вписано пряму призму, в основі якої лежить рівнобедрений прямокутний трикутник. Знайдіть площу повної поверхні призми.

8. Знайдіть радіус кулі, вписаної в правильну чотирикутну піраміду, сторона основи якої дорівнює a, а висота — H.

Теми навчальних проектів

1. Тіла обертання в архітектурі світу й України.
2. Тіла обертання в природі й техніці.
3. Елементи сферичної геометрії та її зв'язок із практикою.
4. Геометричні форми в покрівлях будівель.
5. Еліпс, гіпербола й парабола як конічні перерізи.

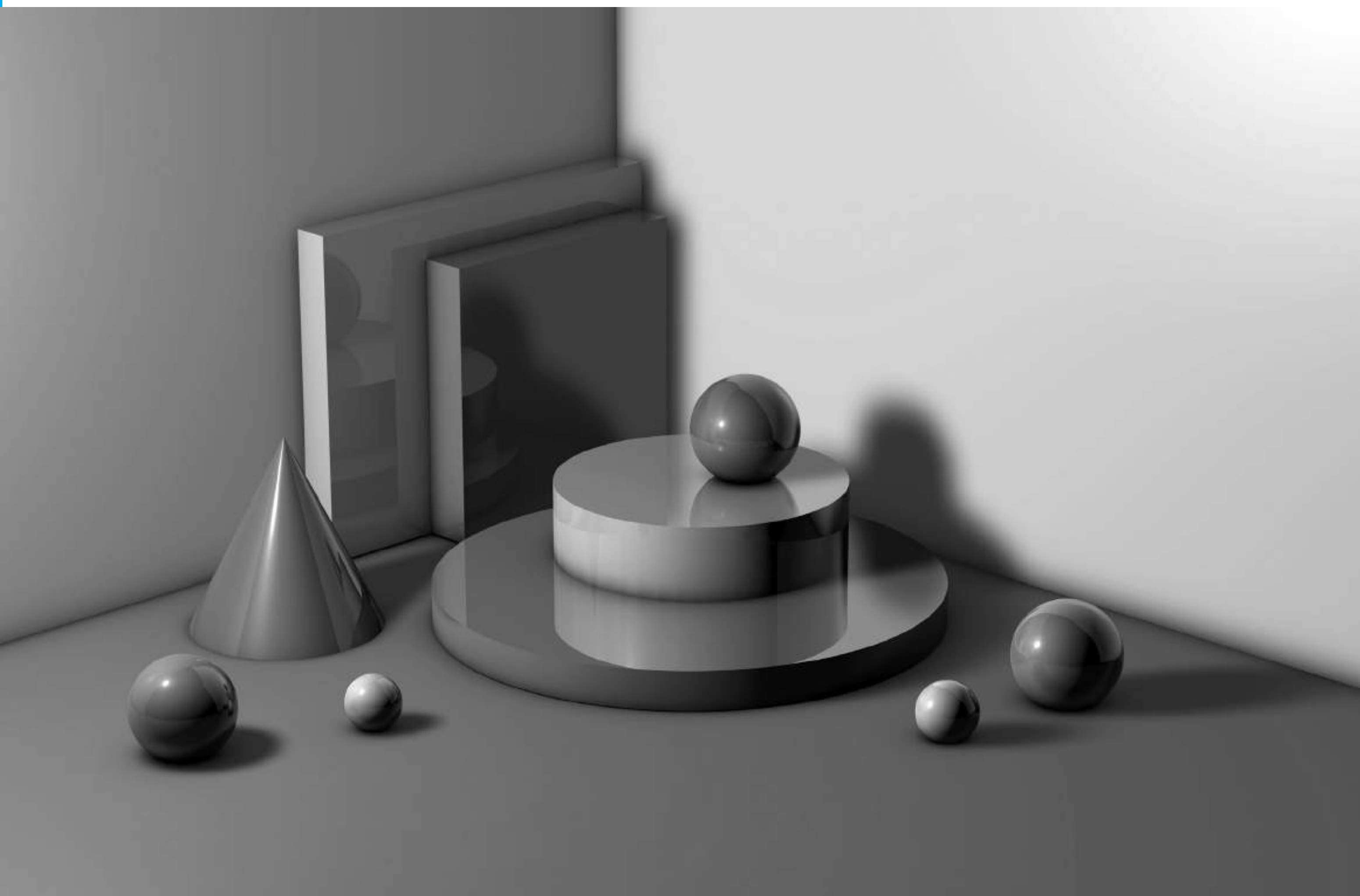
Указівка. Використайте для підготовки навчального проекту також матеріал з інтернет-підтримки підручника.

Розділ 3

ОБ’ЄМИ ТА ПЛОЩІ ПОВЕРХОНЬ ГЕОМЕТРИЧНИХ ТІЛ

У ЦЬОМУ РОЗДІЛІ ВИ:

- ознайомитеся з поняттями об’єму тіла та поверхні тіла;
- ознайомитеся з формулами об’ємів призми, піраміди, циліндра, конуса, кулі та її частин, з формулами площі сфери, поверхонь геометричних тіл;
- навчитеся розв’язувати задачі на знаходження об’ємів і площ поверхонь геометричних тіл



§ 14 ПОНЯТТЯ ОБ'ЄМУ ТІЛ. ОБ'ЄМИ ПРИЗМИ Й ЦИЛІНДРА

Таблиця 12

Об'єми тіл

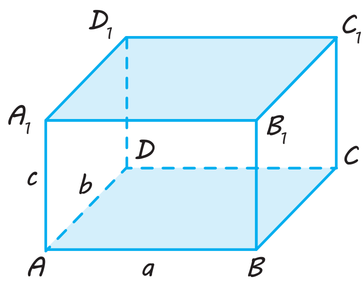
1. Поняття й основні властивості об'єму

Об'єм — величина, що ставить у відповідність тілам у просторі невід'ємні дійсні числа.

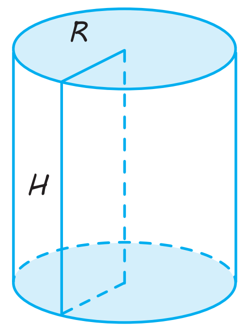
Властивості

1. Об'єм тіла в просторі є невід'ємним числом.
2. Рівні тіла мають рівні об'єми.
3. Якщо тіло F поділене на частини, що не перетинаються, то об'єм тіла дорівнює сумі об'ємів його частин.
4. Об'єм куба, ребро якого дорівнює одиниці довжини, дорівнює одиниці.

2. Деякі формули знаходження об'ємів



1. Об'єм прямокутного паралелепіпеда дорівнює добутку трьох його вимірів:
$$V = a \cdot b \cdot c,$$
де a, b, c — ребра прямокутного паралелепіпеда.
2. Об'єм прямої призми дорівнює добутку площі її основи на висоту:
$$V = S \cdot H.$$
3. Об'єм прямого кругового циліндра дорівнює добутку площі його основи на висоту:
$$V = \pi R^2 \cdot H,$$
де R — радіус основи, H — висота циліндра.



ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

Проблема обчислення об'ємів просторових фігур із прадавніх часів привертала до себе увагу вчених. Обчисленням об'ємів найпростіших просторових фігур займалися Демокрит (бл. 460–370 рр. до н.е.), Євдокс (406–355 рр. до н.е.), Архімед (287–212 рр. до н.е.). У середні віки обчисленням об'ємів просторових фігур займалися І. Кеплер (1571–1630), В. Кавальєрі (1598–1647), П. Ферма (1601–1665) та ін. Поява інтегрального числення наприкінці XVII століття в роботах І. Ньютона (1643–1727) і Г. Лейбніца (1646–1716) дала потужний метод обчислення об'ємів довільних просторових фігур. Із цим методом ви ознайомитеся в курсі алгебри й початків аналізу. У цьому розділі ми розглянемо поняття об'єму, його властивості й обчислення об'ємів вивчених многогранників і тіл обертання.

Об'єм — величина, аналогічна площі, що ставить у відповідність тілам у просторі невід'ємні дійсні числа. За одиницю об'єму приймають куб, ребро якого дорівнює одиниці вимірювання довжини. Якщо за одиницю вимірювання довжини приймають 1 мм, 1 см або 1 м, то об'єм одержують у кубічних міліметрах (мм^3), кубічних сантиметрах (см^3) або в кубічних метрах (м^3) відповідно.

Об'єм — число V, що показує, скільки разів одиниця вимірювання об'єму та її частини вкладаються в заданому тілі. Це число може бути натуральним, раціональним або навіть ірраціональним.

Для об'ємів просторових тіл мають місце властивості, аналогічні властивостям площ плоских фігур (див. табл. 13).

Таблиця 13

Властивості площ фігур	Властивості об'ємів тіл
1. Площа фігури на площині є невід'ємним числом.	1. Об'єм тіла є невід'ємним числом.
2. Рівні фігури мають рівні площі.	2. Рівні тіла мають рівні об'єми.
3. Якщо фігуру F поділено на частини, що не перетинаються, то площа всієї фігури дорівнює сумі площ її частин.	3. Якщо тіло F поділено на частини, що не перетинаються, то об'єм тіла дорівнює сумі об'ємів його частин.
4. Площа квадрата, сторона якого дорівнює одиниці довжини, дорівнює одиниці.	4. Об'єм куба, ребро якого дорівнює одиниці довжини, дорівнює одиниці.

Означення. Два тіла, що мають рівні об'єми, називаються рівновеликими.

Наприклад, рівновеликими є тіла, складені з однакового числа рівних кубиків (рис. 14.1).

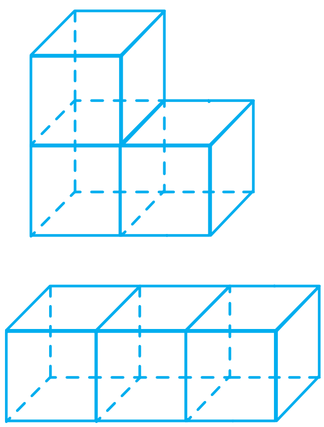


Рис. 14.1

Для знаходження об'ємів тіл зручно об'єднати деякі тіла в один клас. Із цією метою сформулюємо загальне означення циліндра.

Нехай α і β — дві паралельні площини, l — пряма, що перетинає ці площини; F — фігура на одній із цих площин, F' — її паралельна проекція на іншу площину в напрямку прямої l (рис. 14.2, *а*).

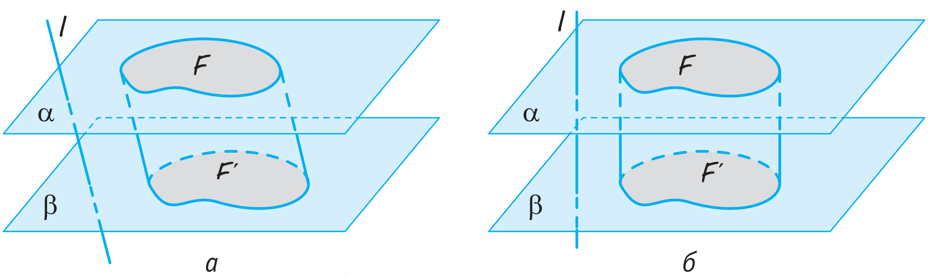


Рис. 14.2

Усі відрізки, що сполучають точки фігури F з їхніми проекціями, утворюють тіло, яке називається *циліндром*. Фігури F і F' називаються *основами циліндра*. Відстань між площинами основ називається *висотою циліндра*.

У випадку, якщо в означенні циліндра замість паралельної проекції береться ортогональна, тобто пряма l перпендикулярна до площин α і β, то циліндр називається *прямим* (рис. 14.2, *б*). А якщо ні, то циліндр називається *похилим*.

Зазначимо, що з позиції загального означення циліндра окремим випадком такого циліндра є призма.

У випадку, якщо основа F циліндра є кругом, то циліндр називається *круговим*. Раніше ми розглядали тільки прямі кругові циліндри і називали їх просто циліндрами (у задачах цього розділу під словом «циліндр» ми також розумітимемо прямий круговий циліндр).

Знайдемо формулу для обчислення об'єму прямого циліндра, основою якого є довільна обмежена замкнена плоска фігура.

Теорема 14.1. Об'єм прямого циліндра дорівнює добутку площі його основи на висоту.

Спочатку розглянемо випадок, коли в основі циліндра лежить квадрат зі стороною, що дорівнює одиниці, висота циліндра дорівнює H (рис. 14.3).

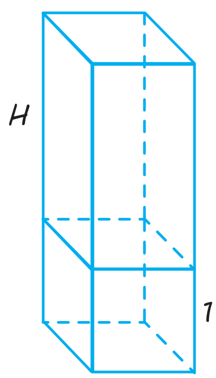


Рис. 14.3

Оскільки задана одиниця вимірювання довжини та її частини укладаються у висоті H разів, то й одиничний куб укладатиметься в цьому циліндрі H разів, отже, об'єм циліндра дорівнює H.

Тепер розглянемо прямий циліндр із площею основи S і висотою H. Виділимо в ньому шар висотою 1, який є прямим циліндром із тією самою основою, що й заданий циліндр (рис. 14.4).

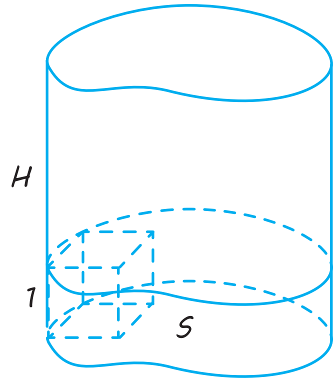


Рис. 14.4

Кожному одиничному квадрату, що лежить в основі циліндра, відповідатиме одиничний куб, що міститься в шарі. Те, що площа основи циліндра дорівнює S, означає, що одиничний квадрат і його частини укладаються в основі циліндра S разів. Оскільки розбиттю одиничного квадрата на рівні частини відповідає розбиття одиничного куба на рівні частини, то одиничний куб і його частини укладатимуться в шарі S разів, тобто об'єм виділеного шару дорівнюватиме S.

Те, що висота циліндра дорівнює H, означає, що одиничний відрізок і його частини укладаються по висоті H разів. Оскільки розбиттю одиничного відрізка на рівні частини відповідає розбиття шару на рівні частини, то виділений шар і його частини укладатимуться в циліндрі H разів.

Отже, одиничний куб укладається в шарі S разів і цей шар укладається в циліндрі H разів. Отже, одиничний куб укладатиметься в циліндрі $S \cdot H$ разів, тобто має місце формула

$$V = S \cdot H, \quad (1)$$

де S — площа основи, H — висота циліндра.

Оскільки прямокутний паралелепіпед, пряма призма й прямий круговий циліндр є окремими випадками розглянутого прямого циліндра, то з формули (1) одержимо наслідки.

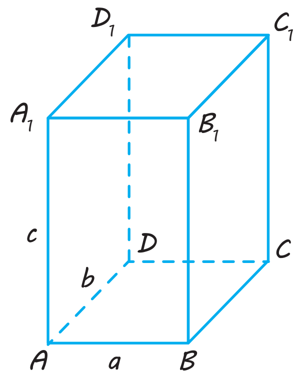


Рис. 14.5

Наслідок 1. Об’єм прямокутного паралелепіпеда (рис. 14.5) дорівнює добутку трьох його вимірів, тобто має місце формула

$$V = a \cdot b \cdot c,$$

де a, b, c — ребра прямокутного паралелепіпеда.

(Справді, у цьому випадку $S = a \cdot b$ і $c = H$.)

Наслідок 2. Об’єм прямої призми дорівнює добутку площі її основи на висоту, тобто має місце формула

$$V = S \cdot H,$$

де S — площа основи, H — висота призми.

Наслідок 3. Об’єм прямого кругового циліндра, висота якого дорівнює H і радіус основи — R, обчислюється за формулою

$$V = \pi R^2 \cdot H.$$

(Справді, у цьому випадку $S = \pi R^2$.)

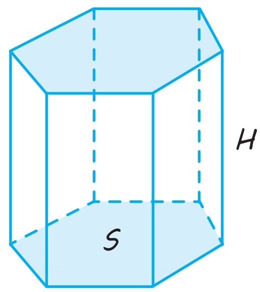


Рис. 14.6

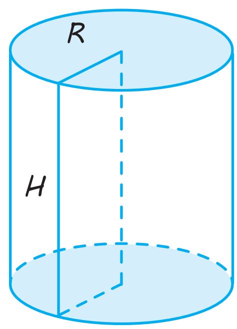


Рис. 14.7

ПРИКЛАДИ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 1 Осьовий переріз прямого кругового циліндра — квадрат зі стороною a. Знайдіть об’єм циліндра.

Розв’язання	Коментар
Якщо сторона квадрата осьового перерізу (рис. 14.8) дорівнює a, то висота циліндра $H = a$, а радіус основи $R = \frac{a}{2}$. Тоді його об’єм дорівнює $V = \pi R^2 H = \frac{\pi a^3}{4}$.	Якщо осьовий переріз циліндра — квадрат (рис. 14.8), то висота AB циліндра дорівнює a і діаметр основи AD теж дорівнює a. Якщо радіус основи дорівнює R, то $2R = a$, отже, $R = \frac{a}{2}$. Далі використовуємо формулу об’єму циліндра $V = \pi R^2 H$.

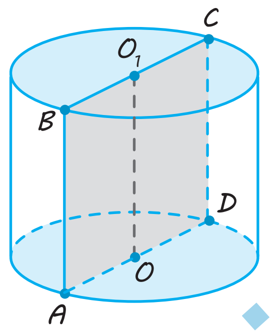
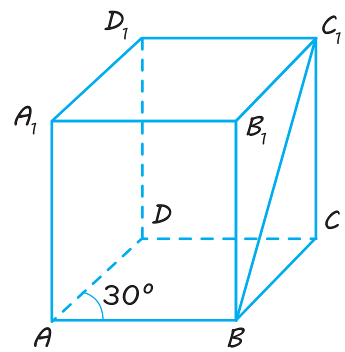


Рис. 14.8

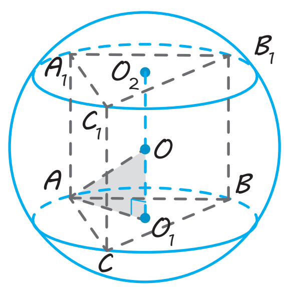
Задача 2

В основі прямого паралелепіпеда лежить ромб зі стороною 4 см і гострим кутом 30°. Знайдіть об’єм паралелепіпеда, якщо діагональ його бічної грані дорівнює 5 см.

Розв’язання	Коментар
▶ Нехай у прямому паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 14.9) $BC_1 = 5$ см, $ABCD$ — ромб: $AB = BC = CD = AD = 4$ см і $\angle BAD = 30°$. Із прямокутного трикутника BCC_1 (паралелепіпед прямий, тому $C_1C \perp$ пл. $ABCD$) маємо: $C_1C = \sqrt{BC_1^2 - BC^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ (см). $S_{осн} = AB \cdot AD \cdot \sin 30° = 4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 8$ (см²). Тоді $V = S \cdot H = S_{осн} \cdot C_1C = 8 \cdot 3 = 24$ (см³). ◁	Оскільки прямий паралелепіпед є прямою призмою, то для обчислення його об’єму можна скористатися формулою $V = S \cdot H$, де S — площа основи, H — висота призми, яка в прямій призмі дорівнює бічному ребру. Для обчислення площі ромба, що лежить у основі, можна скористатися тим, що площа паралелограма дорівнює добутку суміжних сторін на синус кута між ними.  Рис. 14.9

Задача 3*

Правильну трикутну призму вписано в кулю радіуса $\sqrt{7}$. Знайдіть об’єм призми, якщо всі її ребра мають однакову довжину.

Розв’язання	Коментар
▶ Нехай правильну призму $ABCA_1B_1C_1$ вписано в кулю (рис. 14.10). Оскільки правильна призма пряма, то центр O описаної кулі лежить у середині відрізка O_1O_2, що сполучає центри кіл, описаних навколо основ призми (радіус кулі $AO = \sqrt{7}$). Позначимо довжину ребра призми через x $(x > 0)$. За умовою всі ребра мають однакову довжину, тобто x. Тоді $OO_1 = \frac{1}{2}AA_1 = \frac{x}{2}$ і знаходимо AO_1 — радіус кола, описаного навколо правильного трикутника ABC: $AO_1 = \frac{AC}{\sqrt{3}} = \frac{x}{\sqrt{3}}$.	 Рис. 14.10 Правильна призма є прямою (тоді її висота дорівнює бічному ребру), тому можна використовувати таку властивість (див. § 13): *центр кулі, описаної навколо*

Запишемо теорему Піфагора для прямокутного трикутника AOO_1 ($O_1O_2 \parallel AA_1$, тому $O_1O_2 \perp$ пл. ABC): $AO_1^2 + OO_1^2 = AO^2$.

Маємо:

$$\frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{4} = 7.$$

Тоді $x = 2\sqrt{3}$.

Отже, об'єм призми дорівнює

$$V_{\text{пр}} = S_{\triangle ABC} \cdot AA_1 = \frac{AC^2\sqrt{3}}{4} \cdot AA_1 =$$

$$= \frac{x^2\sqrt{3}}{4} \cdot x = \frac{\left(2\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}}{4} \cdot 2\sqrt{3} = 18 \text{ (куб. од.).}$$

◁

прямої призми, лежить у середині відрізка, що сполучає центри кіл, описаних навколо основ призми.

В умові задано тільки один відрізок — радіус кулі, тому в обчислювальній частині розв'язання доцільно ввести невідомий відрізок (наприклад, ребро призми позначити через x), а для складання рівняння використовувати прямокутний трикутник AOO_1 (рис. 14.10), у якому AO — радіус кулі, AO_1 — радіус кола, описаного навколо правильного трикутника ABC, і $OO_1 = \frac{1}{2}AA_1$.

Для обчислення об'єму правильної призми скористаємося формулою $V = S \cdot H$, де S — площа основи, H — висота призми, а для обчислення площі правильного трикутника, що лежить в основі, — формулою $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, де a — сторона правильного трикутника.

Запитання

1. Поясніть, що таке об'єм тіла в просторі. Сформулюйте основні властивості об'єму.
2. Сформулюйте загальне означення циліндра. Що таке основи, твірна і висота такого циліндра?
3. 1) Чому дорівнює об'єм прямого циліндра?
   2*) Обґрунтуйте відповідну формулу.
4. Запишіть формулу для обчислення об'єму: 1) прямокутного паралелепіпеда; 2) прямої призми; 3) прямого кругового циліндра. Поясніть справедливість цих формул.

Вправи

14.1. Чи може об'єм тіла бути:
1) від'ємним числом;
2) нулем?

14.2.° Чому дорівнює об'єм просторового хреста (рис. 14.11), якщо ребра кубів, що його утворюють, дорівнюють одиниці?

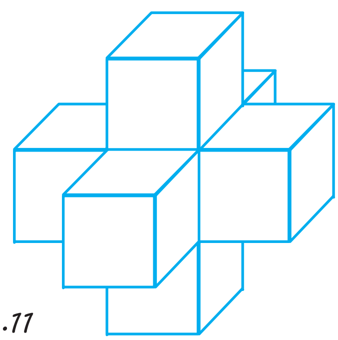


Рис. 14.11

14.3.° Чому дорівнює об'єм многогранника, зображеного на рисунку 14.12 (усі двогранні кути прямі)?

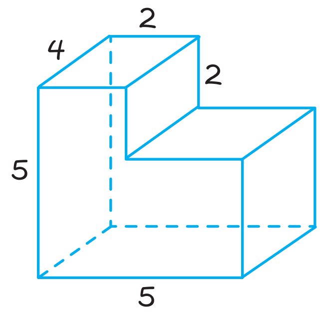


Рис. 14.12

14.4.° Знайдіть об'єм многогранника, зображеного на рисунку 14.13 (усі двогранні кути прямі).

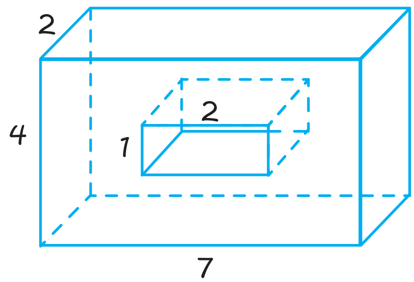


Рис. 14.13

14.5.° Знайдіть об'єм V частини циліндра, зображеної:
1) на рисунку 14.14;
2) на рисунку 14.15.

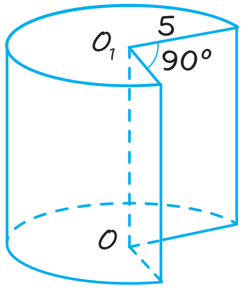


Рис. 14.14

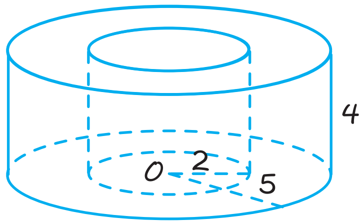


Рис. 14.15

14.6. Через два протилежні ребра куба проведено площину. У якому відношенні ця площина ділить об'єм куба? Поясніть відповідь.

14.7. Діагональ куба дорівнює 6 см. Знайдіть його об'єм.

14.8. Основою прямої трикутної призми є прямокутний трикутник із катетами 6 см і 8 см, висота призми дорівнює 10 см. Знайдіть об'єм цієї призми.

14.9. Знайдіть об'єм правильної чотирикутної призми, сторона основи якої дорівнює 6 см, а висота — 5 см.

14.10. Як зміниться об'єм прямокутного паралелепіпеда, якщо:
1) один із його вимірів збільшити в 2 рази;
2) два його виміри збільшити, причому кожне з них у 2 рази;
3) усі три його виміри збільшити в 2 рази?

14.11. Знайдіть висоту правильної чотирикутної призми, якщо сторона її основи дорівнює 20 см, а об'єм — 4800 см^3.

14.12. Через середню лінію основи трикутної призми проведено площину, паралельну бічному ребру. У якому відношенні ця площина ділить об'єм призми?

14.13. Як відносяться об'єми двох кубів: заданого та його моделі, зменшеної в масштабі:
1) 1:2;
2) 1:3;
3) $1:n$?

14.14. Чому дорівнює об'єм прямокутного паралелепіпеда, діагональ якого дорівнює d і утворює з площиною основи кут α, а з площиною бічної грані — кут β?

14.15. У прямому паралелепіпеді сторони основи дорівнюють 16 см і 10 см і утворюють кут 60°. Менша діагональ паралелепіпеда утворює з площиною основи кут 30°. Визначте об'єм цього паралелепіпеда.

14.16. За стороною основи a і бічному ребру b знайдіть об'єм правильної призми:
1) трикутної;
2) чотирикутної;
3) шестикутної.

14.17. Знайдіть об'єм фігури, утвореної в результаті обертання квадрата навколо його сторони, що дорівнює a.

14.18. Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює a і нахилена до площини основи під кутом φ. Знайдіть об'єм циліндра.

14.19. Два циліндри утворені обертанням того самого прямокутника навколо кожної з нерівних його сторін a і b. Як відносяться об'єми цих циліндрів?

14.20.* У скільки разів об'єм циліндра, описаного навколо правильної чотирикутної призми, більший за об'єм циліндра, вписаного в цю ж призму?

14.21.* Доведіть, що будь-яка площина, що проходить через центр куба, ділить його на дві рівновеликі частини.

14.22.* Доведіть, що будь-яка площина, що проходить через середину осі прямого кругового циліндра, ділить його на дві рівновеликі частини.

Указівка. Обґрунтуйте, що середина осі є центром симетрії циліндра, а потім обґрунтуйте, що задана площина розбиває циліндр на рівні тіла.

14.23.* В основі прямої призми лежить прямокутний трикутник із гострим кутом α. Через вершину кута α верхньої основи й протилежний катет нижньої основи проведено переріз, який утворює з основою кут β. Знайдіть об'єм циліндра, описаного навколо призми, якщо перпендикуляр, проведений із вершини кута α нижньої основи до перерізу, дорівнює d.

14.24. В основі прямої призми лежить прямокутний трикутник із катетами 6 см і 8 см. Висота призми дорівнює 4 см. Знайдіть об'єм циліндра, описаного навколо призми.

14.25. Знайдіть об'єм циліндра, вписаного в правильну шестикутну призму, кожне ребро якої дорівнює a.

14.26. У циліндр вписано правильну трикутну призму, а в неї вписано циліндр. Знайдіть відношення об'ємів цих циліндрів (більшого до меншого).

14.27. Основою прямої призми є паралелограм. Через сторону основи, яка дорівнює a, і протилежну їй сторону іншої основи проведено переріз, який утворює кут β з площиною основи. Площа перерізу дорівнює Q. Знайдіть об'єм призми.

14.28.* Основа прямої призми — ромб із гострим кутом α. Менша діагональ призми дорівнює d і утворює з площиною основи кут β. Знайдіть об'єм призми.

14.29. Діагональ прямокутного паралелепіпеда дорівнює 35 см, а ребра відносяться як 2: 3: 6. Знайдіть його об'єм.

14.30. Знайдіть об'єм прямокутного паралелепіпеда, діагональ якого дорівнює 14 см, периметр основи — 20 см і периметр меншої бічній грані — 32 см.

14.31. У циліндр вписано правильну трикутну піраміду так, що основа піраміди вписана в одну основу циліндра, а вершина піраміди розташована в центрі другої основи. Знайдіть об'єм циліндра, якщо відомо, що довжина сторони основи піраміди дорівнює b, а бічні ребра нахилені до площини основи під кутом φ.

14.32. У циліндрі паралельно його осі на відстані a від неї проведено січну площину, яка від кола основи відтинає дугу α. Площа перерізу дорівнює S. Знайдіть об'єм циліндра.

14.33. Площа осьового перерізу циліндра дорівнює Q, кут між діагоналлю перерізу й площиною основи дорівнює α. Знайдіть об'єм циліндра.

14.34.* У циліндр вписано правильну n-кутну призму. Знайдіть відношення об'ємів призми й циліндра.

14.35. У циліндр вписано прямокутний паралелепіпед, діагональ якого дорівнює m і утворює з площиною основи кут α. Знайдіть об'єм циліндра.

14.36.* Основа прямої трикутної призми — рівнобедрений трикутник, сторони якого довжиною a утворюють кут α. Діагональ грані, протилежної до цього кута, утворює з другою бічною гранню кут φ. Знайдіть об’єм призми.

14.37. Сторона основи правильної трикутної призми дорівнює a, кут між діагоналями двох бічних граней, проведених з однієї вершини, дорівнює β. Знайдіть об’єм призми.

14.38. Об’єм правильної трикутної призми дорівнює V, кут між діагоналями двох бічних граней, проведених з однієї вершини, дорівнює α. Знайдіть сторону основи призми.

14.39. Діагональ прямокутного паралелепіпеда дорівнює 12 см і утворює кут 30° із площиною бічної грані й кут 45° із бічним ребром. Знайдіть об’єм паралелепіпеда.

14.40. У кулю радіуса R вписано правильну чотирикутну призму, діагональ бічної грані якої утворює з площиною основи кут α. Знайдіть об’єм призми.

14.41. В основі прямої призми лежить рівнобічна трапеція, діагональ якої дорівнює a, а кут між діагоналлю й більшою основою дорівнює α. Діагональ призми нахилена до площини основи під кутом β. Знайдіть об’єм призми.

14.42.* У кулю вписано прямокутний паралелепіпед із найбільшою бічною поверхнею, периметр основи якого дорівнює 16 см. Знайдіть об’єм паралелепіпеда, якщо діаметр кулі дорівнює 9 см.

14.43.* Із множини паралелепіпедів, периметри бічних граней яких дорівнюють 12 см і 18 см, визначте об’єм того паралелепіпеда, навколо якого можна описати кулю найменшого радіуса.

14.44.* У кулю радіуса R вписано правильну трикутну призму. Висота призми дорівнює H. Знайдіть об’єм призми.

Виявіть свою компетентність

14.45. У циліндричну посудину з рідиною, діаметр якої дорівнює 8 см, занурена деталь. При цьому рівень рідини в посудині піднявся на 10 см. Чому дорівнює об’єм деталі?

14.46. У циліндричній посудині рівень рідини досягає 20 см. На якій висоті буде рівень рідини, якщо перелити її в другу посудину, діаметр якої в 2 рази більший за перший?

14.47. Перший кухоль удвічі вищий за другий, проте другий у два рази ширший. Який кухоль має більший об’єм, якщо обидва мають циліндричну форму?

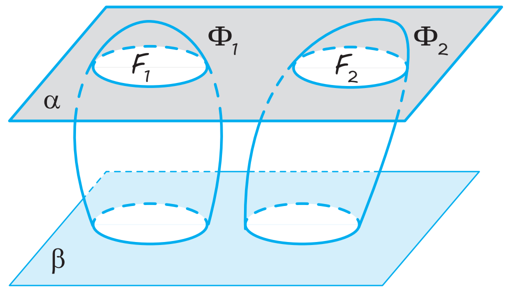
14.48. На полиці в магазині стоять дві банки абрикосового варення одного й того ж сорту. Одна банка в два рази вище за іншу, проте її діаметр в 2 рази менший. Висока банка коштує 23 гривні, а низька — 43 гривні. Яку банку купувати вигідніше?

§ 15 ПРИНЦИП КАВАЛЬЄРІ. ОБ'ЄМ ПОХИЛОЇ ПРИЗМИ. ОБ'ЄМИ ПІРАМІДИ І КОНУСА

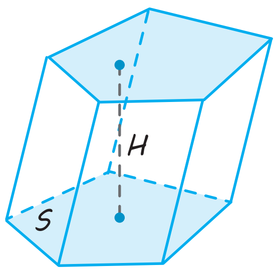
Таблиця 14

1. Принцип Кавальєрі

Якщо в результаті перетину двох тіл Φ_1 і Φ_2 площинами, паралельними одній тій самій площині, у перерізах одержуються фігури F_1 і F_2 однакової площі, то об'єми вихідних тіл рівні.

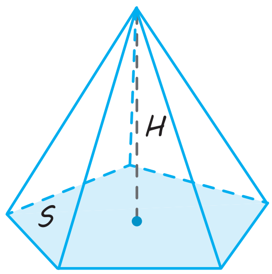


2. Деякі формули знаходження об'ємів



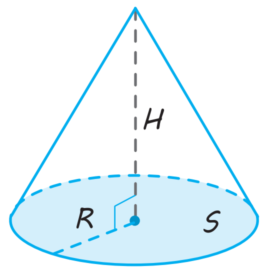
Об'єм похилої призми дорівнює добутку площі її основи на висоту.

$$V = S \cdot H$$



Об'єм піраміди дорівнює одній третині добутку площі її основи на висоту.

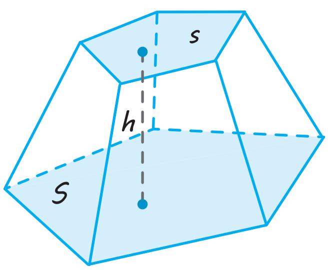
$$V = \frac{1}{3} S \cdot H$$



Об'єм конуса дорівнює одній третині добутку площі його основи на висоту.

$$V = \frac{1}{3} S \cdot H = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot H,$$

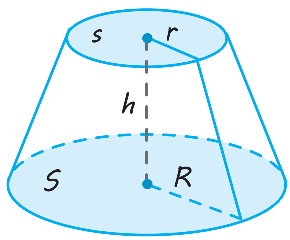
де R — радіус основи, H — висота конуса.



Об'єм зрізаної піраміди

$$V = \frac{1}{3} h \left(S + \sqrt{Ss} + s\right),$$

де S, s — площі основ, h — висота зрізаної піраміди.



Об'єм зрізаного конуса

$$V = \frac{1}{3} \pi h \left(R^2 + Rr + r^2\right),$$

де R, r — радіуси основ, h — висота зрізаного конуса.

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1. Принцип Кавальєрі. Об'єм похилої призми

Розглянемо метод обчислення об'ємів тіл (просторових фігур), запропонований італійським математиком Б. Кавальєрі (1598–1647) і названий згодом принципом Кавальєрі. Він полягає в такому.

Принцип Кавальєрі. Якщо в результаті перетину двох тіл Φ_1 і Φ_2 площинами, паралельними одній тій самій площині, у перерізах одержуються фігури F_1 і F_2 однакової площі (рис. 15.1), то об'єми вихідних тіл рівні.

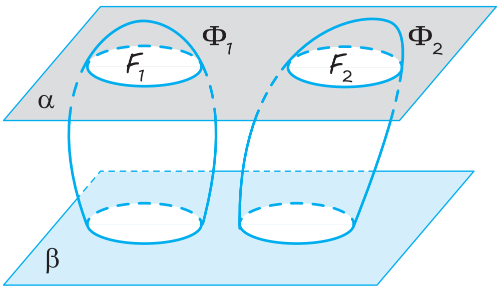


Рис. 15.1

Строге обґрунтування принципу Кавальєрі проводиться в курсах математичного аналізу. Укажемо ідею обґрунтування цього принципу. Уявимо, що тіла Φ_1 і Φ_2 складені з тонких шарів однакової товщини, які одержуються в результаті перетину тіл Φ_1 і Φ_2 площинами, паралельними деякій заданій площині (рис. 15.1). Тіла, одержувані в кожному із цих тонких шарів, можна вважати прямими циліндрами. Тоді з рівності площ їхні основ і рівності висот одержуємо, що рівні й об'єми частин заданих фігур у кожному шарі. Отже, рівні й об'єми тіл Φ_1 і Φ_2, складених із рівних частин у кожному шарі.

Теорема 15.1. Об'єм похилого циліндра дорівнює добутку площі його основи на висоту.

● Для заданого похилого циліндра з основою F, площа якого дорівнює S, і висотою H розглянемо прямий циліндр із такою самою основою й висотою. Розташуємо ці два циліндри так, щоб їхні основи лежали в одній площині (рис. 15.2).

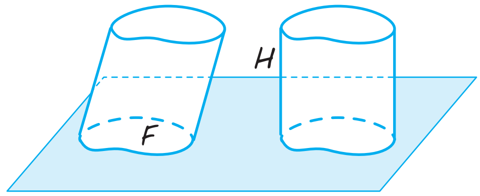


Рис. 15.2

Тоді перерізи цих циліндрів площинами, паралельними цій площині, дадуть фігури, що дорівнюють фігурі F, отже, вони матимуть рівні площі. За принципом Кавальєрі маємо рівність об'ємів циліндрів, а отже, для обчислення об'єму похилого циліндра можна скористатися тією самою формулою, що й для обчислення об'єму прямого циліндра:

$$V = S \cdot H,$$

де S — площа основи, H — висота циліндра. ○

Оскільки похила призма є окремим випадком розглянутого в доведенні теореми 15.1 похилого циліндра, то з наведеної вище формули матимемо наслідок.

Наслідок. Об'єм похилої призми з площею основи S і висотою H обчислюється за формулою

$$V = S \cdot H,$$

де S — площа основи, H — висота призми.

2. Об'єми піраміди й конуса

Сформулюємо загальне означення конуса, що дозволяє об'єднати в один клас розглянуті раніше конуси й піраміди.

Означення. **Нехай F — фігура на площині α, S — точка поза цією площиною. Усі відрізки, що сполучають точки фігури F із точкою S, утворюють тіло, яке називатимемо конусом (рис. 15.3).**

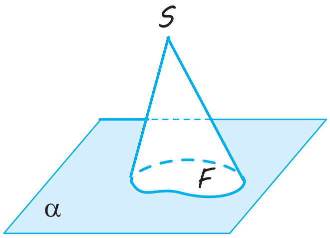


Рис. 15.3

Фігура F називається *основою* конуса, точка S — *вершиною* конуса. Перпендикуляр, проведений із вершини конуса на площину основи, називається *висотою* конуса.

У випадку, якщо фігура F є кругом, конус називається *круговим*. Якщо висота кругового конуса проходить через центр основи, то такий конус називається *прямим* круговим. Раніше ми розглядали прямі кругові конуси й називали їх просто *конусами**. Зазначимо, що окремим випадком конуса в новому розумінні є також піраміда.

Використовуючи принцип Кавальєрі, доведемо теорему.

Теорема 15.2. Якщо два конуси мають рівні висоти й основи рівної площі, то їх об’єми рівні.

Нехай конуси Φ_1 і Φ_2 мають висоти, що дорівнюють H, а основи площею S розташовані в одній площині α (рис. 15.4). Проведемо площину β, паралельну площині α, на відстані x від неї $(0<x<H)$. Тоді фігури F_1 і F_2, що утворюються в перерізах конусів площиною β, подібні відповідним основам, і коефіцієнт подібності k в обох випадках дорівнює відношенню висот відповідних конусів: $k=(H-x):H$. Отже, площі S_1 і S_2 фігур F_1 і F_2 відповідно виражаються формулами $S_1=k^2\cdot S$, $S_2=k^2\cdot S$, тобто рівні. Згідно з принципом Кавальєрі маємо, що об’єми конусів рівні. ○

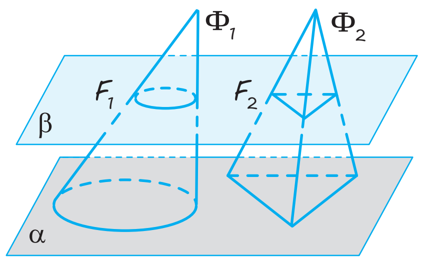


Рис. 15.4

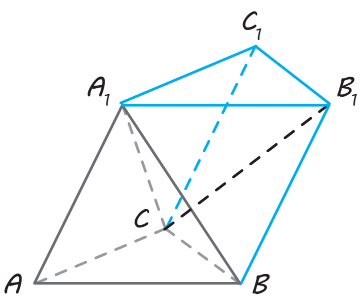


Рис. 15.5

Теорема 15.3. Об’єм піраміди дорівнює одній третині добутку площі її основи на висоту.

Розглянемо спочатку випадок трикутної піраміди.

Нехай A_1ABC — трикутна піраміда. Добудуємо її до трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 15.5). Площини A_1BC і A_1B_1C розбивають цю призму на три піраміди — A_1ABC, A_1BB_1C і $A_1CC_1B_1$ із вершинами в точці A_1.

Піраміди A_1BB_1C і $A_1CC_1B_1$ мають рівні основи BB_1C і CC_1B_1, оскільки діагональ CB_1 розбиває паралелограм CBB_1C_1 на два рівні трикутники.

Крім того, задані піраміди мають спільну вершину, а їх основи лежать в одній площині. Отже, ці піраміди мають спільну висоту. За теоремою 15.2 ці піраміди мають рівні об’єми.

Розглянемо тепер піраміди A_1ABC і $CA_1B_1C_1$.

Вони мають рівні основи ABC і $A_1B_1C_1$ та рівні висоти (дорівнюють висоті призми). Отже, вони мають рівні об’єми.

Таким чином, об’єми всіх трьох розглянутих пірамід рівні.

Ураховуючи, що об’єм призми дорівнює добутку площі основи на висоту, одержимо формулу об’єму трикутної піраміди

$$V=\frac{1}{3}S\cdot H,$$

де S — площа основи, H — висота піраміди.

* У задачах до цього й решти розділів під терміном «конус» продовжуватимемо розуміти прямий круговий конус, а узагальнене поняття конуса нам потрібне тільки для спрощення доведення основних формул обчислення об’ємів.

Якщо в основі піраміди лежить довільний многокутник, то розглянемо трикутну піраміду з такою самою висотою H і такою самою площею основи S. За теоремою 15.2 об'єми цих пірамід рівні, отже, має місце формула

$$V = \frac{1}{3} S \cdot H,$$

де S — площа основи, H — висота піраміди. ○

Теорема 15.4. Об'єм конуса дорівнює одній третині добутку площі його основи на висоту.

● Для заданого конуса з основою, площа якого дорівнює S, і висотою H розглянемо яку-небудь піраміду з такими самими площею основи S і висотою H (рис. 15.4). Тоді за принципом Кавальєрі одержуємо, що об'єми цих піраміди й конуса рівні. Але для об'єму піраміди має місце формула

$$V = \frac{1}{3} S \cdot H,$$

де S — площа основи, H — висота піраміди. Отже, вона має місце і для об'єму конуса (де H — висота конуса).

Зокрема, для прямого кругового конуса, в основі якого лежить круг радіуса R і висота якого дорівнює H (тоді $S = \pi R^2$), має місце формула

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot H. \quad ○$$

3. Об'єми зрізаних конуса й піраміди

Уведемо поняття узагальненого зрізаного конуса так само, як було введене поняття зрізаного прямого кругового конуса.

Для заданого конуса розглянемо площину β, паралельну основі (площині α), яка перетинає конус. Частина конуса, що міститься між цією площиною й основою, називається *зрізаним конусом* (рис. 15.6).

Отриманий переріз конуса площиною β також називається *основою зрізаного конуса*.

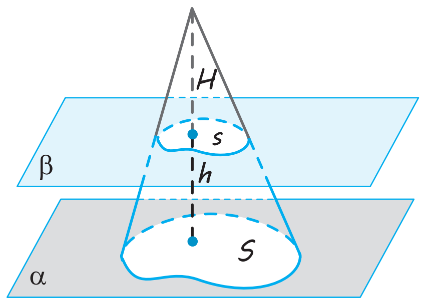


Рис. 15.6

Відстань між площинами основ називається *висотою зрізаного конуса*.

Теорема 15.5. Об'єм зрізаного конуса обчислюється за формулою

$$V = \frac{1}{3} h\left(S + \sqrt{Ss} + s\right),$$

де S, s — площі основ, h — висота зрізаного конуса.

● Подамо зрізаний конус (рис. 15.6) як різницю більшого й меншого конусів. Тоді об'єм зрізаного конуса обчислимо як різницю об'ємів більшого й меншого конусів.

Нехай площі основ більшого й меншого конусів дорівнюють відповідно S і s, висота меншого конуса дорівнює H і висота зрізаного конуса — h. Тоді висота більшого конуса дорівнює $H_1 = H + h$. Об'єм зрізаного конуса обчислюється за формулою

$$V = \frac{1}{3} SH_1 - \frac{1}{3} sH = \frac{1}{3}\left(S(H+h) - sH\right).$$

Зазначимо, що в перерізі конуса площиною, паралельною основі, матимемо фігуру, подібну основі, і коефіцієнт подібності дорівнює відношенню відстаней від вершини конуса до площини перерізу й площини основи. Крім того, відношення площ подібних фігур дорівнює квадрату коефіцієнта подібності. Отже, маємо рівність

$$\frac{S}{s} = \left(\frac{H+h}{H}\right)^2 \text{ або } \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{s}} = \frac{H+h}{H},$$

із якої можна знайти висоту H:

$$H = \frac{h\sqrt{s}}{\sqrt{S} - \sqrt{s}}.$$

Підставляючи тепер цю формулу у вираз для знаходження об'єму зрізаного конуса, маємо:

$$V=\frac{1}{3}\left(S\left(\frac{h\sqrt{s}}{\sqrt{S}-\sqrt{s}}+h\right)-s\frac{h\sqrt{s}}{\sqrt{S}-\sqrt{s}}\right)=\frac{1}{3}\left(h\frac{S\sqrt{S}-s\sqrt{s}}{\sqrt{S}-\sqrt{s}}\right)=\frac{1}{3}h\left(S+\sqrt{Ss}+s\right).$$

Ураховуючи, що піраміда й прямий круговий конус є окремими випадками узагальненого конуса, формулу об'єму зрізаного конуса можна застосовувати до знаходження об'ємів зрізаної піраміди й зрізаного прямого кругового конуса. Так, наприклад, об'єм зрізаного прямого кругового конуса, в основах якого — круги радіусами R і r, а висота дорівнює h, виражається формулою

$$V=\frac{1}{3}\pi h\left(R^2+Rr+r^2\right).$$ ○

4. Об'єми подібних тіл

Нехай F і F_1 — два подібні тіла (циліндри, призми, конуси або піраміди). Це означає, що існує перетворення подібності, за якого тіло F переходить у тіло F_1.

Позначимо через k коефіцієнт подібності. Тоді відношення висот розглянутих тіл дорівнює k, а відношення площ їхніх основ — k^2. Отже, відношення об'ємів тіл F_1 і F дорівнює k^3 (справді, для циліндра й призми:

$$\frac{V_{F_1}}{V_F}=\frac{S_1\cdot H_1}{S\cdot H}=\frac{S_1}{S}\cdot\frac{H_1}{H}=k^2\cdot k=k^3,$$

а для піраміди й конуса

$$\frac{V_{F_1}}{V_F}=\frac{\frac{1}{3}S_1\cdot H_1}{\frac{1}{3}S\cdot H}=\frac{S_1}{S}\cdot\frac{H_1}{H}=k^2\cdot k=k^3).$$

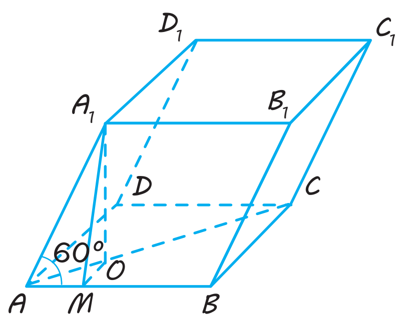
Ураховуючи, що число k — коефіцієнт подібності — дорівнює відношенню відстаней між будь-якими відповідними парами точок за перетворення подібності, маємо, що це число дорівнює відношенню будь-яких двох відповідних лінійних розмірів тіл F і F_1. Тоді

об'єми двох подібних тіл відносяться як куби їхніх відповідних лінійних розмірів.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 1

Основа похилого паралелепіпеда — квадрат зі стороною 1 м. Одне з бічних ребер дорівнює 2 м і утворює з кожним із прилеглих сторін основи кут 60°. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

Розв'язання	Коментар
▶ Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 15.7) — заданий похилий паралелепіпед ($ABCD$ — квадрат, $AB=1$ м, $AA_1=2$ м, $\angle A_1AB=\angle A_1AD=60°$). Проведемо висоту A_1O паралелепіпеда $A_1O\perp$ пл. ABC. Оскільки в похилому паралелепіпеді бічне ребро AA_1 утворює рівні кути із суміжними сторонами основи, то це ребро проектується на бісектрису кута BAD, тобто на діагональ AC ($O\in AC$) квадрата $ABCD$.	 Рис. 15.7

Проведемо $OM \perp AB$, тоді $A_1M \perp AB$ за теоремою про три перпендикуляри. Із прямокутного трикутника AA_1M маємо:

$$AM = AA_1 \cdot \cos 60° = 1 \text{ (м)}.$$

Із прямокутного трикутника AOM маємо:

$$AO = \frac{AM}{\cos 45°} = \sqrt{2} \text{ (м)}.$$

Із прямокутного трикутника AA_1O маємо:

$$A_1O = \sqrt{AA_1^2 - AO^2} = \sqrt{2^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{2} \text{ (м)}.$$

Тоді об'єм заданого паралелепіпеда дорівнює:

$$V = S_{ABCD} \cdot A_1O = 1 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2} \text{ (м}^3\text{)}. \triangleleft$$

Якщо в похилій призмі (або в піраміді) бічне ребро утворює рівні кути із суміжними сторонами основи, то воно проектується на пряму, що містить бісектрису кута між цими сторонами основи (§ 6, с. 59). А оскільки задані рівні кути гострі, то бічне ребро AA_1 проектуватиметься на бісектрису кута BAD (рис. 15.7), яка в квадраті $ABCD$ є діагоналлю AC.

Для обчислень зручно з основи висоти паралелепіпеда (точки O) провести в площині основи $OM \perp AB$ і використовувати теорему про три перпендикуляри (одержимо $A_1M \perp AB$). Потім послідовно розглянути прямокутні трикутники: AA_1M (знаходимо AM), AOM (знаходимо AO), AA_1O (знаходимо A_1O). Далі можна скористатися формулою для обчислення об'єму похилої призми $V = S_{\text{осн}} \cdot H$.

Задача 2

Основою піраміди є прямокутний трикутник із катетами a і b. Кожне її бічне ребро нахилене до площини основи під кутом φ. Знайдіть об'єм піраміди.

Розв'язання

▶ Нехай у піраміді $SABC$ (рис. 15.8) трикутник ABC прямокутний ($\angle C = 90°$, $BC = a$, $AC = b$).

Проведемо висоту піраміди SO. Оскільки за умовою всі бічні ребра піраміди однаково нахилені до площини основи, то O — центр кола, описаного навколо основи, тобто точка O — середина гіпотенузи AB. Ураховуючи, що відрізок AO — проекція бічного ребра SA на площину ABC, одержуємо, що $\angle SAO$ — кут нахилу бічного ребра SA до площини основи й $\angle SAO = \varphi$.

Із прямокутного трикутника ABC одержуємо: $AB = \sqrt{BC^2 + AC^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$, тоді

$$AO = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Із прямокутного трикутника SAO маємо:

$$SO = AO \cdot \operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}\operatorname{tg}\varphi.$$

Коментар

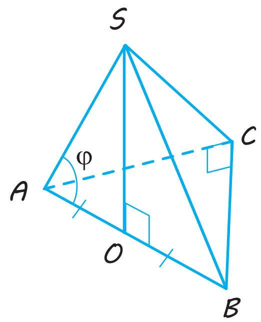


Рис. 15.8

Спочатку визначимо розташування висоти піраміди: *якщо всі бічні ребра піраміди однаково нахилені до площини основи, то основою висоти піраміди є центр описаного навколо основи кола* (§ 6, с. 57).

Як відомо, центр кола, описаного навколо прямокутного трикутника, лежить у середині гіпотенузи.

Одержуємо:

$$V=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot SO=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}BC\cdot AC\cdot SO=$$

$$=\frac{ab}{12}\sqrt{a^2+b^2}\,\mathrm{tg}\,\varphi\,. \triangleleft$$

Потім визначимо кут між бічним ребром і площиною основи (кут між похилою і площиною — це кут між похилою та її проекцією на цю площину).

Для використання формули об'єму піраміди $V=\frac{1}{3}S_{\text{осн}}\cdot H$ знаходимо

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AC$$

і висоту піраміди SO (із прямокутного трикутника SAO).

Задача 3

Знайдіть об'єм частини конуса, зображеної на рис. 15.9.

Розв'язання

▶ На рисунку зображена чверть конуса з радіусом основи $R=12$ і висотою $H=16$.

Тоді

$$V_{\text{кон}}=\frac{1}{3}\pi R^2H=768\pi \text{ (куб. од.).}$$

Отже,

$$V_{\text{тіла}}=\frac{1}{4}V_{\text{кон}}=\frac{1}{4}\cdot 768\pi=192\pi \text{ (куб. од.).} \triangleleft$$

Коментар

Оскільки в основі тіла, зображеного на рисунку, лежить сектор із центральним кутом 90°, то його дуга становить чверть усього кола основи конуса (який містить 360°). Висота заданого тіла збігається з висотою конуса, тому задане тіло становить чверть конуса з радіусом 12 і висотою 16.

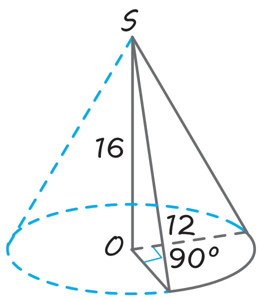


Рис. 15.9

Задача 4

Через середину висоти піраміди проведено площину, паралельну основі. У якому відношенні вона ділить об'єм піраміди?

Розв'язання

▶ Проведена площина відтинає подібну піраміду (рис. 15.10). Коефіцієнт подібності k дорівнює відношенню висот пірамід, тобто $k=\frac{1}{2}$.

Тоді відношення об'ємів пірамід дорівнює $k^3=\frac{1}{8}$.

Коментар

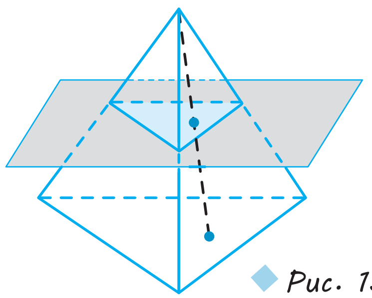


Рис. 15.10

Отже, площина відтинає піраміду, об’єм якої становить $\frac{1}{8}$ об’єму піраміди, а об’єм частини, що залишився, дорівнює $1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$ об’єму піраміди. Таким чином, площина ділить задану піраміду на частини, об’єми яких відносяться як $\frac{1}{8}:\frac{7}{8}=1:7$. ◁

Спочатку слід урахувати, що площина, паралельна основі піраміди, відтинає піраміду, подібну заданій (§ 7), а потім ураховуємо, що об’єми двох подібних тіл відносяться як куби їхніх відповідних лінійних розмірів (зокрема, можна взяти відношення висот).

Знаючи, яку частину об’єму піраміди відтинає площина, знаходимо частину, що залишилася, і відношення об’ємів.

Запитання

1. Сформулюйте принцип Кавальєрі для порівняння об’ємів двох тіл.
2. 1) Чому дорівнює об’єм похилої призми?
   2*) Обґрунтуйте відповідну формулу.
3. Сформулюйте загальне означення конуса. Що таке основа й висота такого конуса?
4. 1) Чому дорівнює об’єм піраміди?
   2*) Обґрунтуйте відповідну формулу.
5. 1) Чому дорівнює об’єм конуса?
   2*) Обґрунтуйте відповідну формулу.

Вправи

15.1.° В основі похилого паралелепіпеда лежить ромб із діагоналями 6 см і 8 см. Висота паралелепіпеда дорівнює 10 см. Знайдіть його об’єм.

15.2.° Знайдіть об’єм похилої призми, в основі якої лежить прямокутник зі сторонами 4 см і 5 см, а бічне ребро дорівнює 8 см і нахилене до площини основи під кутом 30°.

15.3. Основа похилої призми — правильний трикутник зі стороною 2 м. Одне з бічних ребер дорівнює 4 м і утворює з кожною із прилеглих сторін основи кут 45°. Знайдіть об’єм призми.

15.4. В основах похилої призми — квадрати. Чи правильно, що будь-яка площина, яка проходить через центри квадратів, ділить призму на дві рівновеликі частини?

15.5.° Вершинами піраміди є всі вершини однієї основи й одна вершина іншої основи призми. Яку частину об’єму призми становить об’єм піраміди?

15.6.° Знайдіть об’єм піраміди, висота якої дорівнює h, а в основі лежить прямокутник зі сторонами a і b.

15.7.° Знайдіть об’єм правильної трикутної піраміди, сторона основи якої дорівнює a, висота — h.

15.8.° Знайдіть об’єм правильної чотирикутної піраміди, висота якої дорівнює h, а діагональ основи — d.

15.9. Визначте об'єм правильної чотирикутної піраміди, якщо її діагональним перерізом є правильний трикутник зі стороною, що дорівнює 12.

15.10. Знайдіть об'єм правильного тетраедра з ребром, що дорівнює 1.

15.11. Об'єм правильної шестикутної піраміди дорівнює 6 см^3. Сторона основи дорівнює 1 см. Знайдіть бічне ребро піраміди.

15.12. Бічні ребра трикутної піраміди взаємно перпендикулярні, кожне з них дорівнює b. Знайдіть об'єм піраміди.

15.13. Як зміниться об'єм правильної піраміди, якщо висота її буде збільшена в n разів, а сторона основи зменшена в стільки ж разів?

15.14. У куб із ребром, яке дорівнює 1, вписано правильний тетраедр так, що його вершини збігаються з чотирма вершинами куба. Визначте об'єм тетраедра.

15.15. Знайдіть об'єм октаедра з ребром, яке дорівнює 1.

15.16. Сторона основи правильної шестикутної піраміди дорівнює a, а кут між бічною гранню й основою — 45°. Знайдіть об'єм піраміди.

15.17.* У правильному тетраедрі $ABCD$, усі ребра якого дорівнюють a, проведіть переріз через вершину D паралельно ребру AC і точку M — середину ребра BC. Визначте об'єми многогранників, на які розбивається цей тетраедр площиною перерізу.

15.18.* Два правильні тетраедри з ребрами a мають спільну висоту. Вершина одного з них лежить у центрі основи іншого й навпаки. Сторони основ тетраедрів попарно паралельні. Знайдіть об'єм спільної частини цих тетраедрів.

15.19.* Доведіть, що сума відстаней від точки, що лежить усередині правильного многогранника, до площин усіх його граней не залежить від вибору цієї точки.

15.20.° Висота конуса дорівнює 6, твірна — 10. Знайдіть об'єм конуса.

15.21.° У скільки разів збільшиться об'єм кругового конуса, якщо:
1) висоту збільшити в 3 рази;
2) радіус основи збільшити в 2 рази?

15.22. Чи зміниться об'єм кругового конуса, якщо радіус основи збільшити в 2 рази, а висоту зменшити в 2 рази?

15.23. Циліндр і конус мають спільну основу й висоту. Обчисліть об'єм циліндра, якщо об'єм конуса дорівнює 40π см^3.

15.24. Об'єм конуса дорівнює V. Паралельно основі конуса проведено переріз, що ділить висоту навпіл. Чому дорівнює відношення об'ємів отриманих частин конуса?

15.25. Діаметр основи конуса дорівнює 12 см, а кут при вершині осьового перерізу — 90°. Обчисліть об'єм конуса.

15.26. Знайдіть об'єм тіла, отриманого в результаті обертання рівнобедреного прямокутного трикутника навколо катета, довжина якого дорівнює 3 см.

15.27. Рівносторонній трикутник обертається навколо своєї сторони a. Знайдіть об'єм тіла обертання.

15.28. Два конуси отримані обертанням нерівнобедреного прямокутного трикутника навколо кожного з катетів. Чи рівні об'єми цих конусів?

15.29. Знайдіть об'єм частини конуса, зображеної на рис. 15.11.

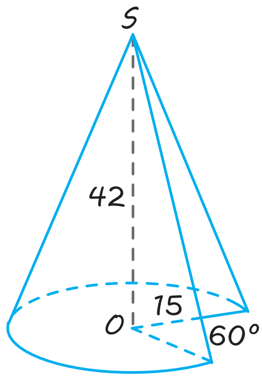


Рис. 15.11

15.30. Конус вписано в правильну трикутну піраміду зі стороною основи a і висотою h. Знайдіть його об'єм.

15.31. Конус описано навколо правильної чотирикутної піраміди зі стороною основи a і висотою h. Знайдіть його об'єм.

15.32.* У скільки разів об'єм конуса, описаного навколо правильної чотирикутної піраміди, більший за об'єм конуса, вписаного в цю піраміду?

15.33.* Бічне ребро правильної чотирикутної зрізаної піраміди дорівнює 3 м, сторони основ — 5 м і 1 м. Знайдіть об'єм піраміди.

15.34. Площі основ зрізаної піраміди дорівнюють 245 м^2 і 80 м^2, а висота повної піраміди дорівнює 35 м. Знайдіть об'єм зрізаної піраміди.

15.35.* Знайдіть об'єм правильної шестикутної зрізаної піраміди, якщо сторони її основ дорівнюють a і b, бічне ребро утворює з основою кут 30° $(a > b)$.

15.36. Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють R і r $(R > r)$. Твірна нахилена до основи під кутом 45°. Знайдіть об'єм зрізаного конуса.

15.37.* Об'єм зрізаного конуса дорівнює 584 см^3, а радіуси основ — 10 см і 7 см. Знайдіть висоту зрізаного конуса.

15.38.* Об'єм конуса дорівнює V. Його висоту розділено на три рівні частини і через точки поділу паралельно основі проведено площини. Знайдіть об'єм середньої частини конуса.

15.39.* Висота зрізаного конуса дорівнює 3. Радіус однієї основи вдвічі більший за інший, а твірна нахилена до основи під кутом 45°. Знайдіть об'єм зрізаного конуса.

15.40. Основою чотирикутної призми є ромб зі стороною 2 см і гострим кутом 30°. Діагональ однієї бічної грані перпендикулярна до площини основи, а бічне ребро утворює з площиною основи кут 60°. Знайдіть об'єм призми.

15.41. Сторони основи похилої трикутної призми дорівнюють 1,7 дм, 2,8 дм і 3,9 дм. Одна з вершин верхньої основи віддалена від кожної сторони нижньої основи на 1,3 дм. Знайдіть об'єм призми

15.42.* Основою похилого паралелепіпеда є ромб $ABCD$ зі стороною a і гострим кутом α. Ребро AA_1 дорівнює b і утворює з ребрами AB і AD кут φ. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

15.43. Основою піраміди є трикутник зі сторонами 6 см, 5 см і 5 см. Бічні грані піраміди утворюють з її основою рівні двогранні кути по 45°. Знайдіть об'єм піраміди.

15.44. Основою піраміди є рівнобедрений трикутник, сторони якого дорівнюють 6 см, 6 см і 8 см. Бічні ребра піраміди рівні між собою і кожне дорівнює 9 см. Знайдіть об'єм піраміди.

15.45.* У правильній чотирикутній піраміді висота дорівнює H, а двогранний кут при бічному ребрі — α. Знайдіть об'єм піраміди.

15.46. Плоскі кути при вершині трикутної піраміди дорівнюють 60°, 90°, 120°, а всі бічні ребра — l. Знайдіть об'єм піраміди.

15.47.* Кулю радіуса $R = 0,5$ вписано в піраміду, в основі якої лежить ромб із кутом 30°. Бічні грані піраміди нахилені до основи під кутом 60°. Знайдіть об'єм піраміди.

15.48. Знайдіть радіус сфери, описаної навколо правильної трикутної піраміди, якщо об'єм піраміди дорівнює $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ см^3, а висота — 2 см.

15.49. У кулю, радіус якої дорівнює 13, вписано правильну трикутну піраміду. Висота піраміди в два рази більша за сторону основи. Знайдіть об'єм піраміди.

15.50. Правильний тетраедр вписано в сферу радіуса $R = 3\sqrt{3}$. Знайдіть об'єм тетраедра.

15.51. Об'єм конуса дорівнює 384. Знайдіть площу осьового перерізу конуса, якщо довжина кола в основі конуса дорівнює 15.

15.52. У конус, осьовий переріз якого є рівносторонній трикутник, вписано кулю радіуса $r = 2$ см. Знайдіть об'єм конуса.

15.53. У конус, радіус основи якого дорівнює R, вписано правильну трикутну піраміду, бічні ребра якої попарно перпендикулярні. Знайдіть об'єм конуса.

15.54. Площина, паралельна основі конуса, відтинає від нього конус, об'єм якого дорівнює $\frac{1}{27}$ об'єму заданого конуса. У якому відношенні ця площина ділить висоту заданого конуса?

15.55.* У конус вписано кулю. Радіус кола, по якому дотикаються конус і куля, дорівнює R. Знайдіть об'єм конуса, якщо кут між висотою й твірною конуса дорівнює α.

15.56. Двогранний кут при бічному ребрі правильної трикутної піраміди дорівнює 2α. Висота піраміди дорівнює h. Знайдіть об’єм конуса, описаного навколо піраміди.

15.57.* Кулі однакового радіуса вписані в правильний тетраедр і в прямий круговий конус із діаметром основи, що дорівнює довжині твірної. Знайдіть відношення об’єму тетраедра до об’єму конуса.

15.58. У правильній зрізаній піраміді сторони нижньої й верхньої основ дорівнюють a і b ($a > b$), а двогранний кут при ребрі нижньої основи дорівнює α. Знайдіть об’єм піраміди, якщо вона: 1) чотирикутна; 2) трикутна.

15.59. Висоту піраміди розділили на три рівні частини й через кожну точку поділу провели переріз, паралельний основі піраміди. Знайдіть об’єм кожного з многогранників, на які розбилася піраміда, якщо об’єм піраміди дорівнює V.

15.60. Знайдіть об’єм правильної чотирикутної зрізаної піраміди, діагональ якої дорівнює 11 см, бічне ребро — 9 см і різниця між сторонами основ становить 8 см.

Виявіть свою компетентність

15.61. Пакетик для томатної пасти (рис.) має форму піраміди, в основі якої рівнобедрений трикутник із рівними сторонами 12 см і кутом між ними 30°. Висота піраміди дорівнює 6 см. Обчисліть об’єм пакетика.

15.62. Знайдіть об’єм пожежного відра конічної форми, якщо його стандартні розміри такі: діаметр основи — 30 см і твірна конуса — 38 см. Відповідь дайте в літрах, округливши її до десятих частин літра.

15.63. При насипанні сипучого матеріалу у вигляді купи, близької за формою до конуса, для кожного сипучого матеріалу кут природного укосу (кут нахилу твірної конуса до площини його основи) свій і для вологого піску він наближено дорівнює 45° (рис.). Для бетонування підлоги в їдальні школи привезли пісок, який висипали в купу, що має форму конуса, з твірною 1,2 м. Цей пісок необхідно перенести до приміщення. Скільки відер із піском місткістю 10 л доведеться перенести до приміщення.

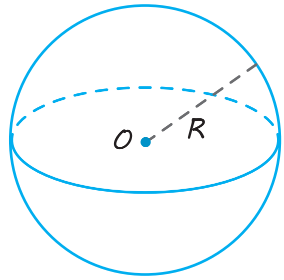
§ 16 ОБ'ЄМ КУЛІ ТА ЇЇ ЧАСТИН

Таблиця 15

Об'єм кулі

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

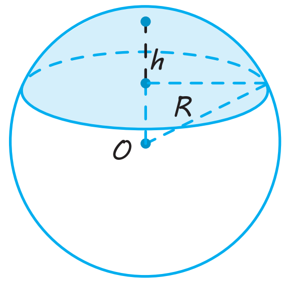
де R — радіус кулі.



Об'єм кульового сегмента

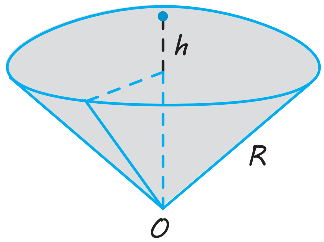
$$V = \pi h^2\left(R - \frac{1}{3}h\right),$$

де R — радіус кулі,
h — висота сегмента.



Об'єм кульового сектора

$$V_{\text{сект}} = V_{\text{сегм}} + V_{\text{кон}}$$



ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

Розглянемо питання про знаходження об'єму кулі.

Теорема 16.1. Об'єм кулі радіуса R виражається формулою

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Нехай задано півкулю радіуса R, основа якої лежить у площині α. Розглянемо циліндр, основа якого — круг радіуса R, розташований у тій самій площині α, і висота циліндра дорівнює R (рис. 16.1). У циліндр впишемо конус, основою якого є верхня основа циліндра, а вершиною — центр нижньої основи циліндра. Доведемо, що тіло, утворене з точок циліндра, що не потрапили всередину конуса, і задана півкуля мають рівні об'єми.

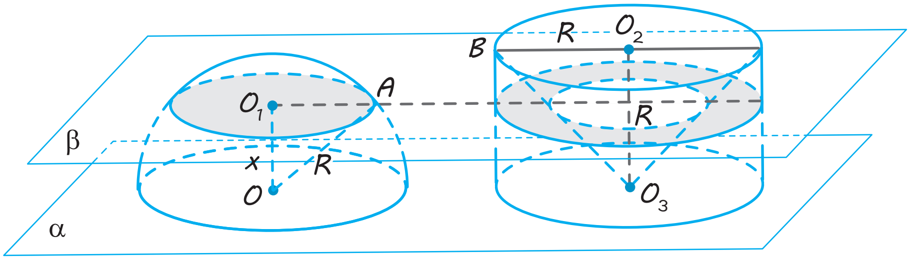


Рис. 16.1

Проведемо площину β, паралельну площині α, на відстані x від неї, $0 \leqslant x \leqslant R$. У перерізі півкулі цією площиною одержимо круг радіуса $O_1A = \sqrt{R^2 - x^2}$ з площею $S_1 = \pi O_1A^2 = \pi(R^2 - x^2)$.

У перерізі іншого тіла одержимо кільце, радіус зовнішнього круга якого дорівнює R, а радіус внутрішнього круга — x (оскільки трикутник BO_3O_2 рівнобедрений і прямокутний, то $\angle BO_3O_2 = 45°$). Площа цього кільця дорівнює $\pi R^2 - \pi x^2 = \pi(R^2 - x^2)$ і, отже, дорівнює площі перерізу півкулі.

За принципом Кавальєрі одержуємо, що півкуля й побудоване тіло мають рівні об'єми. Обчислимо цей об'єм. Він дорівнює різниці об'ємів циліндра й конуса:

$$V = V_{\text{цил}} - V_{\text{кон}} =$$
$$= \pi R^2 \cdot R - \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot R = \frac{2}{3}\pi R^3.$$

Об'єм кулі вдвічі більший за об'єм півкулі й, отже, виражається формулою

$$V_{\text{кулі}} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$ ○

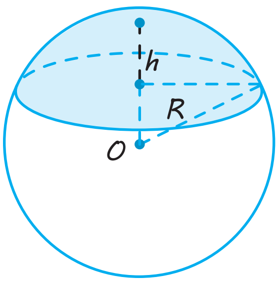


Рис. 16.2

Кульовим кільцем називається тіло, що міститься між поверхнями двох куль зі спільним центром.

Кульовим сегментом називається менша частина кулі, що відтинається від неї якою-небудь площиною, яка не проходить через центр кулі (рис. 16.2).

Круг, утворений перерізом кулі цією площиною, називається *основою кульового сегмента*.

Частина радіуса кулі, що лежить усередині кульового сегмента і перпендикулярна до його основи, називається *висотою кульового сегмента*.

Теорема 16.2. Об'єм кульового сегмента висотою h, що відтинається від кулі радіуса R, виражається формулою

$$V = \pi h^2\left(R - \frac{1}{3}h\right).$$

● Розглянемо ситуацію, зображену на рисунку 16.1, і припустимо, що площина β відтинає від півкулі сегмент висотою h. Тоді вона відтинає від циліндра і вписаного в нього конуса циліндр і зрізаний конус висотою h.

За принципом Кавальєрі об'єм V кульового сегмента дорівнюватиме різниці об'ємів цих циліндра і зрізаного конуса. Об'єм циліндра $V_{\text{ц}}$ дорівнює $\pi R^2 h$.

Об'єм зрізаного конуса $V_{\text{зріз. кон}}$ дорівнює різниці об'ємів великого й малого конусів:

$$V_{\text{зріз. кон}} = \frac{1}{3}\pi R^3 - \frac{1}{3}\pi(R - h)^3 =$$
$$= \pi R^2 h - \pi R h^2 + \frac{1}{3}\pi h^3.$$

Отже,

$$V = V_{\text{ц}} - V_{\text{зріз. кон}} = \pi h^2\left(R - \frac{1}{3}h\right).$$ ○

Кульовим сектором називається частина кулі, утворена з кульового сегмента й конуса, основою якого є основа кульового сегмента, а вершиною — центр кулі (рис. 16.3). Для знаходження об'єму кульового сектора достатньо до об'єму кульового сегмента додати об'єм відповідного конуса.

Кульовим шаром (поясом) називатимемо частину кулі, що міститься між двома паралельними січними площинами (рис. 16.4). Перерізи кулі цими площинами називаються *основами кульового шару*, а відстань між ними — *висотою кульового шару*.

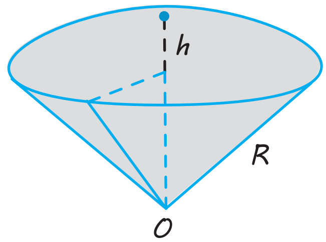


Рис. 16.3

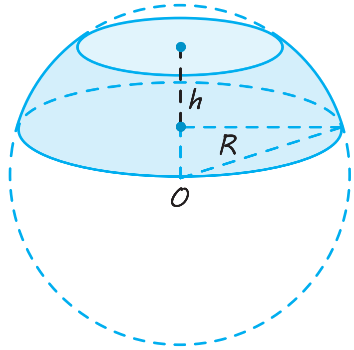


Рис. 16.4

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 1 Знайдіть об'єм кулі, описаної навколо куба зі стороною a.

Розв'язання

▶ Діагональ куба є діаметром описаної навколо нього кулі.

Тоді $d_{\text{кулі}} = a\sqrt{3}$, а $R_{\text{кулі}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Отже, $V_{\text{кулі}} = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{2}$. ◁

Коментар

Центр кулі, описаної навколо куба, лежить на середині діагоналі куба, тому діагональ куба є діаметром описаної кулі.

Далі пригадуємо, що діагональ куба зі стороною a дорівнює $a\sqrt{3}$, і використовуємо формулу об'єму кулі $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$, де R — радіус кулі.

Задача 2 Знайдіть об'єм кулі, вписаної в конус, твірна якої дорівнює 12 см і нахилена до площини основи під кутом 60°.

Розв'язання

▶ Розглянемо осьовий переріз заданої комбінації тіл. Осьовим перерізом конуса є рівнобедрений трикутник SAB, у якому сторона SB дорівнює твірній конуса ($SB = 12$ см), а висота SO є висотою конуса (рис. 16.5). Тоді кут SBO — кут нахилу твірної SB до площини основи і $\angle SBO = 60°$.

Перерізом кулі є круг, радіус OO_1 якого дорівнюватиме радіусу кулі.

Коментар

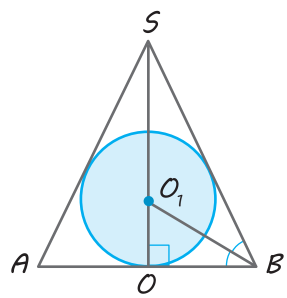


Рис. 16.5

Оскільки куля вписана в конус, то круг буде вписано в трикутник.

Тоді відрізок BO_1 — бісектриса кута SBO і $\angle OBO_1 = 30°$.

Із прямокутного трикутника SBO маємо:

$$BO = SB \cdot \cos 60° = 6 \text{ (см)}.$$

Із прямокутного трикутника OBO_1 одержуємо:

$$OO_1 = OB \cdot \operatorname{tg} 30° = 2\sqrt{3} \text{ (см)}.$$

Тоді об’єм кулі дорівнює

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot OO_1^3 = 32\sqrt{3}\pi \text{ (см}^3\text{)}. \triangleleft$$

Під час розв’язування задач на комбінацію тіл обертання зручно розглянути осьовий переріз цієї комбінації. Одержавши в перерізі круг, вписаний у трикутник, слід урахувати, що центр круга, вписаного в трикутник, є точкою перетину бісектрис кутів трикутника. У рівнобедреному трикутнику SAB однією з таких бісектрис є висота, медіана й бісектриса SO. Для обґрунтування кута між твірною і площиною основи враховуємо, що кут між похилою і площиною — це кут між похилою SB та її проекцією OB на цю площину.

Для обчислення об’єму кулі радіуса R використовуємо формулу $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Запитання

1. 1) Чому дорівнює об’єм кулі радіуса R? 2*) Обґрунтуйте відповідну формулу.
2. 1) Що таке кульовий сегмент? 2) Чому дорівнює об’єм кульового сегмента? 3*) Обґрунтуйте відповідну формулу.
3. 1) Що таке кульовий сектор? 2) Як можна обчислити об’єм кульового сектора?

Вправи

16.1.° Діаметр кулі дорівнює 10 см. Знайдіть його об’єм.

16.2.° Задано дві кулі. Радіус першої кулі у два рази більший за радіус другої. У скільки разів об’єм першої кулі більший за об’єм другої?

16.3.° У скільки разів збільшиться об’єм кулі, якщо його радіус збільшити: 1) у три рази; 2) у п’ять разів?

16.4.° Об’єм однієї кулі в 64 рази більший за об’єм іншої. У скільки разів радіус першої кулі більший за радіус іншої кулі?

16.5. Мідний куб, ребро якого дорівнює 10 см, переплавлений у кулю. Знайдіть радіус кулі. (Витратами металу під час переплавлення можна знехтувати.)

16.6. Потрібно переплавити в одну кулю дві чавунні кулі діаметрами 10 см і 20 см. Знайдіть діаметр нової кулі.

16.7. Є шматок свинцю масою 1 кг. Скільки кульок діаметра 1 см можна відлити з цього шматка? (Густина свинцю становить 11,4 г/см^3.)

16.8. Переріз кулі площиною, віддаленою від центра кулі на відстань 8 см, має радіус 6 см. Знайдіть об’єм кулі.

16.9. Циліндр описано навколо кулі. Об'єм циліндра дорівнює 6 куб. од. Знайдіть об'єм кулі.

16.10. Із дерев'яного циліндра, висота якого дорівнює діаметру основи (рівносторонній циліндр), виточили найбільшу кулю. Визначте, скільки відсотків матеріалу сточили.

16.11. Знайдіть об'єм кулі, описаної навколо правильного тетраедра з ребром a.

16.12. Конус вписано в кулю. Радіус основи конуса дорівнює радіусу кулі, об'єм конуса дорівнює 6 куб. од. Знайдіть об'єм кулі.

16.13.* Знайдіть об'єм кулі, вписаної в октаедр із ребром a.

16.14. Яку частину об'єму кулі становить об'єм кульового сегмента, висота якого дорівнює 0,1 діаметра кулі?

16.15. Кулю радіуса 10 см перетнули площиною, що проходить на відстані 4 см від центра кулі. Знайдіть об'єм кожної з відсічених частин кулі.

16.16.* Знайдіть формулу об'єму кульового сектора радіуса R із кутом φ при вершині його осьового перерізу.

16.17.* Чому дорівнює об'єм кульового сектора, якщо радіус кола його сегмента дорівнює 60 см, а радіус кулі — 75 см?

16.18. Знайдіть об'єм кульового шару, якщо радіуси його основ дорівнюють 3 см і 4 см, а радіус кулі — 5 см. (Розгляньте два випадки.)

16.19.* Куля дотикається до всіх дванадцяти ребер куба з ребром a. Знайдіть об'єм частини кулі, розташованої всередині цього куба.

16.20. Знайдіть радіус кулі, об'єм якої дорівнює об'єму тіла, утвореного обертанням рівнобедреного прямокутного трикутника навколо гіпотенузи, довжина якої дорівнює $2a$.

16.21. Тіло складається з двох конусів, що мають спільну основу й розташовані по різні боки від площини основи. Знайдіть об'єм кулі, вписаної в тіло, якщо радіуси основ конусів дорівнюють 1, а висоти — 1 і 2.

16.22. У конус вписано кулю. Знайдіть об'єм кулі, якщо твірна конуса дорівнює l і нахилена до площини основи конуса під кутом α.

16.23. Твірна конуса дорівнює 5, висота конуса — 4. Знайдіть об'єм кулі, вписаної в цей конус.

16.24. У конус, осьовим перерізом якого є рівносторонній трикутник, вписано кулю, об'єм якої дорівнює 36π. Знайдіть висоту конуса.

16.25. Відношення висоти конуса до радіуса описаної навколо нього кулі дорівнює $\frac{2}{3}$. Знайдіть відношення об'єму кулі до об'єму конуса.

16.26. У кулю об'ємом $4\sqrt{3}$ дм^3 вписано циліндр, твірну якого видно з центра кулі під кутом $60°$. Знайдіть об'єм циліндра.

16.27. У конус, осьовим перерізом якого є рівносторонній трикутник, вписано кулю. Знайдіть об'єм конуса, якщо об'єм кулі дорівнює 20.

16.28.* У конус, осьовим перерізом якого є рівносторонній трикутник, вписано кулю. Знайдіть відношення об'єму конуса до об'єму кулі.

16.29.* У кулю вписано піраміду, основою якої є прямокутний трикутник із гіпотенузою, що дорівнює 2 см. Знайдіть об'єм кулі, якщо кожне бічне ребро піраміди нахилене до площини основи під кутом α.

16.30. Висота правильного тетраедра дорівнює 9 см. Знайдіть об'єм вписаної в неї кулі.

16.31.* Діаметр кулі є віссю циліндра. Знайдіть об'єм частини кулі, що лежить поза циліндром, якщо радіуси кулі й основи циліндра відповідно дорівнюють 15 см і 12 см.

16.32. У кулю вписано циліндр, у якому кут між діагоналями осьового перерізу дорівнює α. Твірна циліндра дорівнює l. Знайдіть об'єм кулі.

16.33.* Діаметр кулі завдовжки 30 см, є віссю циліндра, радіус основи якого дорівнює 12 см. Знайдіть об'єм частини кулі, що міститься всередині циліндра.

16.34. Центр однієї з двох рівних куль радіуса R розміщений на поверхні іншої кулі. Знайдіть об'єм спільної частини куль.

16.35. Знайдіть об'єм кулі, описаної навколо піраміди, основою якої служить прямокутник із діагоналлю 10 см, а кожне бічне ребро піраміди утворює з площиною її основи кут β.

16.36. Конус і куля мають рівні об'єми. Радіус основи конуса дорівнює радіусу кулі. У скільки разів висота конуса більша за радіус кулі?

16.37.* Навколо кулі описані рівносторонній циліндр (його осьовим перерізом є квадрат) і рівносторонній конус (його осьовим перерізом є рівносторонній трикутник). Доведіть, що об'єм циліндра є середня пропорційна величина між об'ємами кулі й конуса.

16.38.* Рівносторонній циліндр і рівносторонній конус вписано в кулю. Доведіть, що об'єм циліндра є середня пропорційна величина між об'ємами кулі й конуса.

16.39. У кулю вписано трикутну призму, усі ребра якої дорівнюють a. Радіус кулі, проведений у вершину основи, утворює з площиною основи призми кут α. Знайдіть об'єм кулі.

Виявіть свою компетентність

16.40. Резервуар для води складається з півкулі радіуса R і циліндра з таким самим радіусом основи (рис. 16.6). Якої висоти h повинна бути його циліндрична частина, щоб об'єм усього резервуара дорівнював 200 м³? (Розміри на рисунку наведено в сантиметрах.)

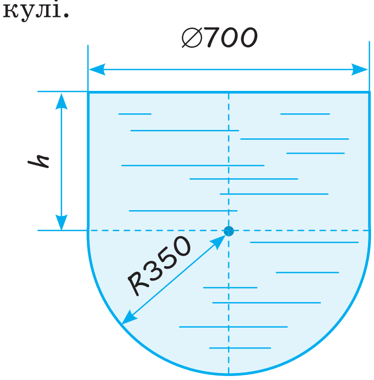


Рис. 16.6

§ 17 ПЛОЩА ПОВЕРХНІ

Таблиця 16

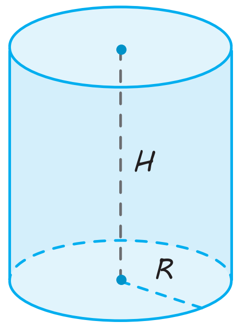
Площі поверхонь тіл обертання

Площа поверхні циліндра

$S_{\text{бічн}} = 2\pi RH$,

$S_{\text{повн}} = S_{\text{бічн}} + 2S_{\text{осн}} =$
$= 2\pi RH + 2\pi R^2 = 2\pi R(H + R)$,

де R — радіус циліндра,
H — його висота.

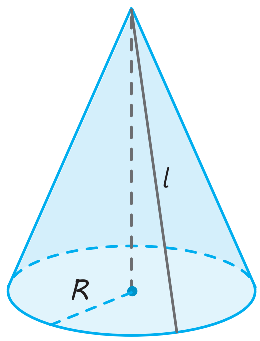


Площа поверхні конуса

$S_{\text{бічн}} = \pi Rl$,

$S_{\text{повн}} = S_{\text{бічн}} + S_{\text{осн}} =$
$= \pi Rl + \pi R^2 = \pi R(l + R)$,

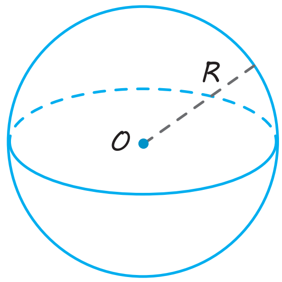
де R — радіус конуса,
l — його твірна.



Площа поверхні кулі

$S = 4\pi R^2$,

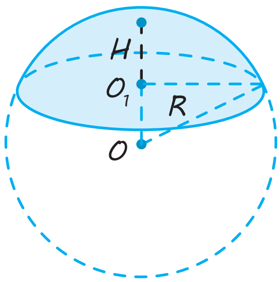
де R — радіус кулі.

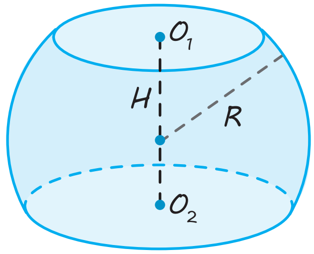


Площа поверхні сферичної частини кульового сегмента й кульового шару

$S_{\text{сф. ч}} = 2\pi RH$,

де R — радіус кулі,
H — висота сегмента
(або кульового шару).





ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

Площею поверхні многогранника, за означенням, уважають суму площ граней многогранника, що утворюють цю поверхню.

Наприклад, площа поверхні призми складається з площі бічної поверхні й площ основ, а площа поверхні піраміди складається з площі бічної поверхні й площі основи.

У попередніх параграфах, спираючись на розгортки циліндра й конуса, були одержані формули для знаходження площ бічних і повних поверхонь циліндра (§ 10) і конуса (§ 11). Нагадаємо їх.

Для циліндра:

$$S_{\text{бічн}} = 2\pi RH,$$
$$S_{\text{повн}} = S_{\text{бічн}} + 2S_{\text{осн}} = 2\pi RH + 2\pi R^2 = 2\pi R(H+R),$$

де R — радіус циліндра, H — його висота.

Для конуса:

$$S_{\text{бічн}} = \pi Rl,$$
$$S_{\text{повн}} = S_{\text{бічн}} + S_{\text{осн}} = \pi Rl + \pi R^2 = \pi R(l+R),$$

де R — радіус конуса, l — його твірна.

Однак для знаходження площі поверхні кулі розгортку використовувати неможливо, оскільки поверхню кулі не можна розгорнути на площину. Тому скористаємося іншим методом визначення площі поверхні кулі. Під площею поверхні тіла розумітимемо границю площ описаних навколо нього многогранників. При цьому повинна виконуватися умова, згідно з якою всі точки поверхонь цих многогранників стають як завгодно близькими до поверхні заданого тіла.

Площа поверхні кулі

● Для одержання формули площі поверхні кулі радіуса R опишемо навколо неї який-небудь опуклий многогранник (рис. 17.1), який має n малих граней (уважатимемо, що лінійні розміри граней, тобто відстань між будь-якими двома точками будь-якої грані, менша від ε).

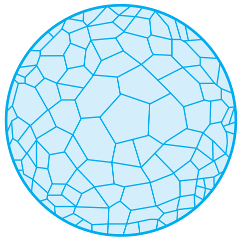


Рис. 17.1

Нехай S_n — площа поверхні многогранника, тобто сума площ усіх його граней. Уявимо, що отриманий многогранник складений із пірамід, вершини яких збігаються з центром кулі, а основами є грані многогранника (рис. 17.2). Зрозуміло, що висоти цих пірамід дорівнюють радіусу кулі, а об'єм V_n многогранника дорівнює сумі об'ємів усіх пірамід і обчислюється за формулою

$$V_n = \frac{1}{3}S_nR. \qquad (1)$$

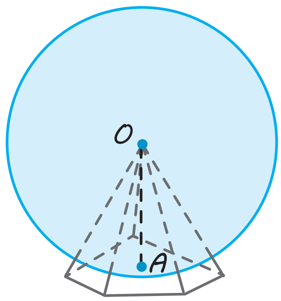


Рис. 17.2

Звідси одержуємо

$$S_n = \frac{3V_n}{R}. \qquad (2)$$

Тепер необмежено збільшуватимемо кількість n граней описаного многогранника так, щоб найбільший розмір ε кожної грані прямував до нуля. При цьому об'єм V_n описаного многогранника прямуватиме до об'єму кулі. Справді, описаний многогранник розташований у кулі з центром у точці O і радіуса $R+\varepsilon$ і містить задану кулю радіуса R. Тоді

$$\frac{4}{3}\pi R^3 < V_n < \frac{4}{3}\pi (R+\varepsilon)^3.$$

Оскільки $\frac{4}{3}\pi(R+\varepsilon)^3 \to \frac{4}{3}\pi R^3$ при $\varepsilon \to 0$,

то і $V_n \to \frac{4}{3}\pi R^3$ при $\varepsilon \to 0$.

Ураховуючи формулу (2), одержуємо, що площа S_n поверхні описаного многогранника за необмеженого зменшення розмірів його граней (тобто при $\varepsilon \to 0$) прямує до виразу

$$\frac{3 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3}{R} = 4\pi R^2.$$

Тому величину $4\pi R^2$ приймають за площу поверхні кулі. Отже, площа поверхні кулі радіуса R обчислюється за формулою $\boxed{S = 4\pi R^2}$. ○

Зауваження. Якщо многогранник описано навколо кулі радіуса R, то куля буде вписаною в цей многогранник, тоді з формули (1) одержуємо, що радіус кулі, вписаної в многогранник, можна обчислювати за формулою

$$\boxed{R = \frac{3V}{S_{\text{повн}}}},$$

де V — об'єм многогранника, $S_{\text{повн}}$ — площа повної поверхні многогранника.

Якщо провести міркування, аналогічні до тих, які ми використовували під час обґрунтування площі поверхні кулі радіуса R, для площі поверхні сферичних частин кульового сегмента (рис. 17.3) і кульового шару (рис. 17.4) з висотою H, то одержимо однакові формули

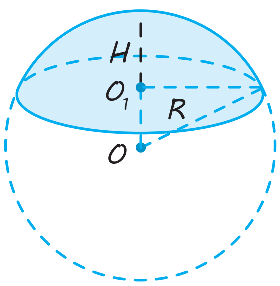


Рис. 17.3

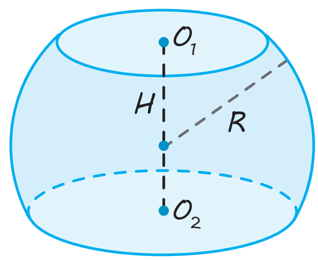


Рис. 17.4

$$\boxed{S_{\text{сф. ч}} = 2\pi RH}.$$

Зазначимо, що метод, розглянутий під час знаходження площі поверхні кулі, дозволяє також визначити площі бічних поверхонь циліндра й конуса.

Для цього можна розглянути правильні n-кутні призми й піраміди, описані відповідно навколо циліндра (рис. 17.5) і конуса (рис. 17.6).

Площа бічної поверхні правильної призми дорівнює

$$S_{\text{бічн. пр}} = P_{\text{осн}} \cdot H$$

(де $P_{\text{осн}}$ — периметр основи, H — висота призми), а площа бічної поверхні правильної піраміди дорівнює

$$S_{\text{бічн. пір}} = \frac{1}{2} P_{\text{осн}} \cdot l$$

(де $P_{\text{осн}}$ — периметр основи, l — апофема піраміди).

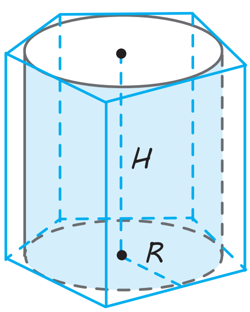


Рис. 17.5

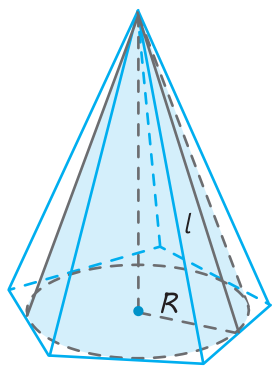


Рис. 17.6

За необмеженого збільшення n площа кожної грані описаного многогранника прямуватиме до нуля і площа бічної поверхні циліндра є границею площ бічних поверхонь описаних призм, а площа бічної поверхні конуса є границею площ бічних поверхонь описаних пірамід.

Ураховуючи, що за необмеженого збільшення n периметри n-кутників, описаних навколо кіл радіусів R, наближатимуться до довжини кола, тобто до $2\pi R$, одержуємо для площі бічної поверхні циліндра формулу

$$\boxed{S_{\text{бічн. цил}} = 2\pi RH},$$

а для площі бічної поверхні конуса формулу

$$\boxed{S_{\text{бічн. кон}} = \pi Rl}.$$

Ці ж формули ми одержали під час визначення площ бічних поверхонь циліндра й конуса через їхні розгортки.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 1 Знайдіть площу поверхні кулі, вписаної в куб зі стороною a.

Розв'язання	Коментар
▶ Радіус кулі, вписаної в куб, дорівнює половині сторони куба: $R_{\text{кулі}} = \frac{a}{2}$. Отже, $S_{\text{кулі}} = 4\pi R^2 = \pi a^2$. ◁	Якщо куля вписана в куб, то її діаметр дорівнює стороні куба. Далі знаходимо радіус кулі й використовуємо формулу для обчислення площі поверхні кулі $S = 4\pi R^2$, де R — радіус кулі.

Задача 2 Навколо кулі описано циліндр, площа поверхні якого дорівнює 18. Знайдіть площу поверхні кулі.

Розв'язання	Коментар
▶ Нехай радіус кулі дорівнює R (рис. 17.7), тоді радіус основи описаного циліндра дорівнює R, а висота H циліндра дорівнює $2R$. Площа поверхні циліндра дорівнює: $S_{\text{ц}} = S_{\text{бічн}} + 2S_{\text{осн}} = 2\pi RH + 2\pi R^2 = 2\pi R \cdot 2R + 2\pi R^2 = 6\pi R^2$. За умовою $6\pi R^2 = 18$, тоді $\pi R^2 = 3$. Площа поверхні кулі дорівнює: $S_{\text{кулі}} = 4\pi R^2 = 12$. ◁	Якщо циліндр описано навколо кулі, то радіус основи циліндра дорівнює радіусу кулі, а діаметр кулі дорівнює висоті циліндра. Оскільки в умові цієї задачі на обчислення не задано жодного відрізка, то для розв'язування такої задачі зручно ввести невідомий відрізок, наприклад, радіус кулі. Зазначимо, що з одержаного рівняння $(6\pi R^2 = 18)$ немає необхідності знаходити невідомий радіус R — достатньо записати відповідь через R: $S_{\text{кулі}} = 4\pi R^2$ і врахувати, що відповідь виражається через πR^2.

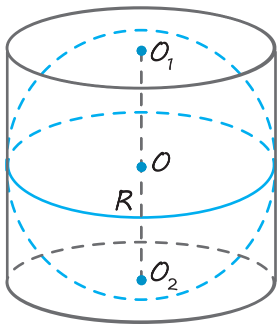


Рис. 17.7

Запитання

1. Поясніть, як можна визначити площу поверхні кулі.
2. 1) Чому дорівнює площа поверхні кулі радіуса R?
   2*) Обґрунтуйте відповідну формулу.
3. 1) Поясніть, як можна визначити площу поверхні циліндра й конуса, не використовуючи поняття розгортки їхньої бічної поверхні.
   2*) Обґрунтуйте формули для знаходження площ бічних поверхонь циліндра й конуса.
4. Чому дорівнює площа поверхонь сферичних частин кульового сегмента й кульового пояса з висотою H, одержаних із кулі радіуса R?

Вправи

17.1.° Площа великого круга кулі дорівнює 9 см^2. Знайдіть площу поверхні кулі.

17.2.° Як зміниться площа поверхні кулі, якщо збільшити радіус кулі: 1) у 2 рази; 2) у 3 рази; 3) у n разів?

17.3. У скільки разів площа поверхні Землі більша за площу поверхні Місяця? (Уважати, що діаметр Землі приблизно дорівнює 13 тис. км, діаметр Місяця — 3,5 тис. км.)

17.4. Переріз кулі площиною, віддаленої від центра кулі на відстань 8 см, має радіус 6 см. Знайдіть площу поверхні кулі.

17.5. Об’єм кулі дорівнює 288π м^3. Знайдіть площу поверхні кулі.

17.6. Площі поверхонь двох куль відносяться як 4:9. Знайдіть відношення їхніх діаметрів.

17.7. Площі поверхонь двох куль відносяться як $m:n$. Як відносяться їхні об’єми?

17.8. Об’єми двох куль відносяться як $m:n$. Як відносяться площі їхніх поверхонь?

17.9. У скільки разів площа поверхні кулі, описаної навколо куба, більша за площу поверхні кулі, вписаної в цей же куб?

17.10. Навколо октаедра, ребро якого дорівнює 2 дм, описано кулю. Знайдіть площу поверхні кулі.

17.11. Доведіть, що поверхня тіла, утвореного обертанням квадрата навколо сторони, рівновелика поверхні кулі, що має радіусом сторону квадрата.

17.12.* Навколо кулі описано циліндр. Знайдіть відношення площ їхніх поверхонь і об’ємів.

17.13.* Доведіть, що якщо навколо кулі описано конус, висота якого вдвічі більша за діаметр кулі, то об’єм і площа поверхні конуса вдвічі більші за об’єм і площу поверхні кулі відповідно.

17.14.* Довжина твірної конуса дорівнює діаметру основи. Доведіть, що площа поверхні конуса дорівнює площі сфери, діаметр якої дорівнює висоті конуса.

17.15. У кулі проведено по один бік від центра два паралельні перерізи; площі їх дорівнюють $272{,}25\pi$ дм^2 і $992{,}25\pi$ дм^2, а відстань між ними дорівнює 20 дм. Знайдіть площу поверхні кулі.

17.16. У сферу вписано конус, твірна якого дорівнює l, а кут при вершині осьового перерізу дорівнює $60°$. Знайдіть площу сфери.

17.17. Знайдіть площу поверхні кульового сегмента (його сферичної частини), що відтинається від кулі радіуса R, площиною, що проходить на відстані b від центра кулі.

17.18.* Знайдіть площу поверхні кульового шару (його сферичної частини), якщо радіуси його основ дорівнюють r_1 і r_2 $(r_1 > r_2)$, а радіус кулі дорівнює R. Розгляньте два випадки.

17.19.* Кулю радіуса R перетнули двома паралельними площинами, які ділять перпендикулярний до них діаметр кулі у відношенні $1:2:3$. Визначте площу поверхні кулі, що міститься між січними площинами.

17.20. Знайдіть відношення поверхні кулі до поверхні вписаного в нього куба.

17.21. У правильну чотирикутну піраміду вписано кулю. Знайдіть площу поверхні кулі, якщо сторона основи піраміди дорівнює a, а плоский кут при її вершині дорівнює 2α.

17.22. Навколо конуса з твірною m і висотою h описано кулю. Знайдіть площу поверхні кулі.

17.23. У конус вписано кулю. Площа поверхні кулі відноситься до площі основи конуса як $4:3$. Знайдіть величину кута при вершині конуса в його осьовому перерізі.

17.24. Об'єм кулі дорівнює 12. Знайдіть об'єм іншої кулі, площа поверхні якої в 9 разів більша, ніж у заданої кулі.

17.25. Навколо кулі радіуса R описано конус, висота якого вдвічі більша за діаметр кулі. Знайдіть відношення площі повної поверхні конуса до площі поверхні кулі.

17.26.* Навколо правильної трикутної піраміди з бічним ребром a описано кулю. Знайдіть площу поверхні кулі та об'єм піраміди, якщо бічне ребро піраміди утворює з площиною основи піраміди кут α.

17.27. Знайдіть площу повної поверхні циліндра, осьовим перерізом якого є квадрат, якщо площа його бічної поверхні дорівнює 80.

17.28. Площа бічної поверхні конуса дорівнює 36, відстань від центра основи до твірної конуса дорівнює 7. Знайдіть об'єм конуса.

17.29. Площа бічної поверхні конуса відноситься до площі його основи як 5: 3. Знайдіть відношення радіуса основи конуса до радіуса вписаної в конус кулі.

17.30. Площа основи конуса дорівнює π, а площа його повної поверхні — $\frac{8\pi}{3}$. Знайдіть радіус кулі, вписаної в конус.

17.31. Площа основи конуса дорівнює 9π см^2, площа бічної поверхні конуса — 15π см^2. Знайдіть радіус сфери, вписаної в конус.

17.32. Висота правильної чотирикутної призми дорівнює h. З однієї вершини основи проведені в двох суміжних бічних гранях дві діагоналі, кут між якими дорівнює α. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

17.33.* Відстань між мимобіжними діагоналями двох суміжних бічних граней куба дорівнює 2. Знайдіть площу повної поверхні куба.

17.34.* Кулю радіуса R описано навколо правильної чотирикутної піраміди. Кут між бічним ребром піраміди й стороною її основи дорівнює α. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

17.35. Сферу вписано в зрізаний конус, радіуси основ якого дорівнюють R і r. Знайдіть відношення площі сфери до площі бічної поверхні заданого зрізаного конуса.

17.36. Площа бічної поверхні конуса дорівнює 60π см^2, площа повної поверхні конуса — 96π см^2. Знайдіть площу поверхні сфери, вписаної в конус.

17.37. Кулю, площа поверхні якої дорівнює 3, вписано в зрізаний конус. Кут між твірною конуса і його більшою основою дорівнює $60°$. Знайдіть площу бічної поверхні цього конуса.

17.38. У пряму призму вписано сферу радіуса r. Периметр основи призми дорівнює P. Знайдіть площу повної поверхні призми.

17.39.* Сфера ділить кожне ребро куба на три рівні частини. Знайдіть площу поверхні цієї сфери, якщо ребро куба дорівнює a.

17.40.* У кулю вписано прямокутний паралелепіпед. Діагоналі двох бічних граней паралелепіпеда, що виходять з однієї вершини, дорівнюють 16 см і 21 см, а кут між ними дорівнює $60°$. Знайдіть площу поверхні кулі.

17.41. Основою прямої призми, вписаної в кулю, є трикутник, дві сторони якого дорівнюють 4 см і 14 см, а кут між ними — $60°$. Об’єм призми дорівнює 168 см^3. Знайдіть площу поверхні кулі.

17.42. У правильну чотирикутну піраміду вписано кулю. Знайдіть площу поверхні кулі, якщо сторона основи піраміди дорівнює a, а кут при вершині піраміди — α.

17.43. Знайдіть площу поверхні кулі, описаної навколо правильної трикутної піраміди, сторона основи якої дорівнює 12 см, а бічне ребро — 8 см.

17.44.* У кулю вписано правильну чотирикутну піраміду. Відстань від центра кулі до сторони основи піраміди дорівнює $\sqrt{5}$ дм, а до бічного ребра — $\sqrt{3}$ дм. Знайдіть об’єм і площу поверхні кулі.

17.45. Основою піраміди є трикутник зі сторонами 22 см, 26 см і 40 см. Висота піраміди проходить через центр вписаного в її основу кола і дорівнює 8 см. Знайдіть об’єм і площу поверхні вписаної в піраміду кулі.

17.46.* Навколо правильної трикутної піраміди описано кулю радіуса R, центр якої збігається з центром кулі, вписаної в цю піраміду. Знайдіть об’єм і площу поверхні вписаної кулі.

17.47. Радіус основи рівностороннього циліндра дорівнює 12 см; точка перетину діагоналей його осьового перерізу є центром сфери радіуса 15 см. Знайдіть площу частини сферичної поверхні, розташованої поза циліндром.

17.48.* Конус, радіус основи якого дорівнює 15 дм, а висота — 20 дм, має спільну основу з півкулею. Знайдіть площу поверхні півкулі, розташованої: 1) усередині конуса; 2) поза конусом.

17.49. У кулю вписано конус, радіус основи якого дорівнює r, а висота — H. Знайдіть площу поверхні й об'єм кулі.

17.50. У рівносторонній конус (осьовим перерізом якого є рівносторонній трикутник) вписано кулю, а в кулю — рівносторонній циліндр (осьовим перерізом якого є квадрат). Знайдіть відношення площ поверхонь кулі й циліндра.

17.51. Точка, що випромінює світло, розташована поза кулею радіуса r на відстані a від неї. Знайдіть площу освітленої поверхні кулі.

17.52. Знайдіть площу поверхні кулі, вписаної:
1) у куб, площа повної поверхні якого дорівнює Q;
2) у рівносторонній циліндр, діагональ осьового перерізу якого дорівнює a;
3) у рівносторонній конус, площа повної поверхні якого дорівнює Q.

17.53. Доведіть, що площа поверхні рівностороннього циліндра, вписаного в кулю, є середньою пропорційною величиною між площею поверхні кулі й площею поверхні рівностороннього конуса, вписаного в цю кулю.

17.54. Висота конуса, радіус основи якого дорівнює 15 см, а твірна — 25 см, є діаметром сфери. Знайдіть площу поверхні тієї частини сфери, яка лежить усередині конуса.

17.55. У сферу вписано правильну чотирикутну піраміду, двогранний кут при основі якої дорівнює φ. Знайдіть площу основи піраміди, якщо площа сфери дорівнює Q.

17.56. Основою прямої призми є рівнобедрена трапеція, діагональ якої утворює кут α з кожної з паралельних сторін. Площа бічної поверхні призми дорівнює Q. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, вписаного в цю призму.

17.57. Плоскі кути при вершині правильної трикутної піраміди прямі. Площа бічної грані дорівнює 2 см^2. Знайдіть площу сфери, вписаної в цю піраміду.

17.58. У кулю вписано піраміду, основою якої є прямокутник із діагоналлю $2a$. Кожне бічне ребро піраміди утворює з площиною основою кут β. Знайдіть площу поверхні кулі.

17.59. У кулю вписано зрізаний конус, висота якого дорівнює 6 см. Знайдіть об'єм кулі, якщо сферичні поверхні кульових сегментів, що відтинаються від кулі основами зрізаного конуса, мають площі 10π см^2 і 30π см^2.

17.60. Бічні ребра трикутної піраміди попарно перпендикулярні й дорівнюють a. Знайдіть площу поверхні сфери, вписаної в цю піраміду.

Виявіть свою компетентність

17.61. Скільки кілограмів фарби потрібно для фарбування напівсферичного куполу Озерянського храму в Харкові, якщо діаметр основи купола дорівнює 10 м і на фарбування 1 м^2 поверхні купола витрачається 120 г фарби (відповідь округліть до десятих часток кілограма). Скільки банок фарби місткістю 2,8 кг потрібно закупити?

Відомості з історії

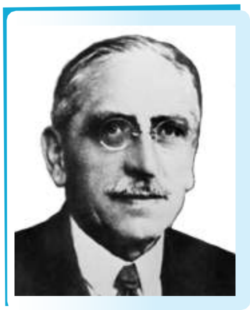
Об'єми деяких многогранників уміли знаходити ще в Стародавньому Єгипті. Уже **Архімед** умів знаходити об'єми не тільки многогранників, а й конуса циліндра та кулі і навіть параболоїда, гіперболоїда і еліпсоїда обертання, а також площі поверхонь циліндра, конуса і кулі. Нові методи визначення об'ємів геометричних тіл розробив італійський математик **Бонавентура Кавальєрі** (1598—1647). Його міркування були не зовсім строгими, бо посилався він на деякі ще не доведені твердження, які вважав очевидними. Тільки згодом їх було доведено методами математичного аналізу. Але на сучасному етапі принцип Кавальєрі є строго обґрунтованим математичним твердженням і тому доведення теорем про об'єми в нашому підручнику, які спираються на принцип Кавальєрі, є цілком коректними.

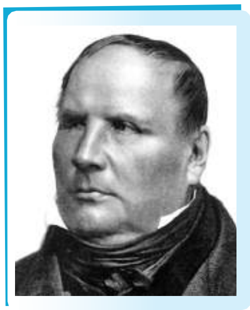
Строгу сучасну теорію об'ємів, площ та інших величин розробив відомий французький математик **Анрі Луї Лебег** (1875—1941).

Для розвитку шкільної геометрії багато зробив видатний український математик **М. В. Остроградський** (1801—1862). Він ще у 1855—1860 роках видав підручник із геометрії у трьох частинах.

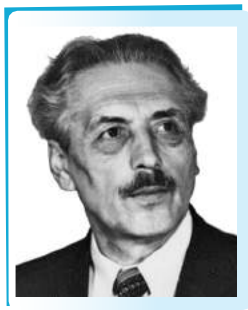
Багато зробив для розвитку геометрії відомий український математик **Г. Ф. Вороний** (1868—1908) — творець геометричної теорії чисел. Зокрема він досліджував різні заповнення простору рівними многогранниками.

Значний внесок у розвиток геометричної науки зробили українські математики **М. Є. Ващенко-Захарченко** (1825—1912), **С. Й. Шатуновський** (1859—1929), **О. С. Смогоржевський** (1896—1969), **М. І. Кованцов** (1924—1988), **О. В. Погорєлов** (1919—2002) та багато інших.


А. Л. Лебег


М. В. Остроградський


Г. Ф. Вороний


О. В. Погорєлов

Пригадаємо також імена українських жінок, які займалися математичною наукою, популяризацією математики, збереженням пам'яті українських математиків, навчали молодь математики.

Клавдія Латишева (1897—1956)

Клавдія Яківна Латишева народилася 14 березня 1897 року в Києві, де й протікало все її подальше життя, навчання й робота: середню освіту вона здобула в Другій жіночій гімназії (1916), 1921 року закінчила жіночі вищі педагогічні курси (фізико-математичний відділ), стала першою в Україні жінкою, яка захистила дисертацію на здобуття ступеня кандидата фізико-математичних наук за темою «Наближене розв'язування за допомогою способу моментів лінійних диференціальних рівнянь, що мають особливості в коефіцієнтах» (1936), а потім — докторську дисертацію за темою «Нормальні розв'язки лінійних диференціальних рівнянь із поліноміальними коефіцієнтами» (1952). Серед важливого наукового доробку Латишевої — наукові дослідження в галузі аналітичної теорії диференціальних рівнянь, теорії крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь, зокрема метод Фробеніуса — Латишевої для розв'язування систем диференціальних рівнянь із частинними похідними. 1936 року в Інституті математики відбулася спільна доповідь К. Латишевої та М. Кравчука. Багато уваги

Клавдія Яківна приділяла методиці викладання математики. Була вона й у числі організаторів Першої всеукраїнської математичної олімпіади, яка пройшла в Київському університеті (1936).

Галина Матвієвська (нар. 1930)

Галина Павлівна Матвієвська народилася 13 липня 1930 року в м. Дніпропетровськ (тепер Дніпро), дитинство провела в Харкові. У 1948 році закінчила школу з золотою медаллю, у 1954 році — Ленінградський (тепер Санкт-Петербург) університет, у 1958 році захистила дисертацію на здобуття ступеня кандидата фізико-математичних наук за результатами вивчення неопублікованих архівних рукописів Леонарда Ейлера з теорії чисел. 1959 року Г. П. Матвієвська переїхала до Узбекистану, на батьківщину чоловіка, і зайнялася історією східної математики, опанувавши для цього арабську мову. 1968 року в Ташкенті дослідниця захистила докторську дисертацію за темою «Учення про число в середні віки». Згодом вона стала членом-кореспондентом Академії наук Узбекистану, заслуженим діячем науки, лауреатом державної премії ім. Беруні. Основні напрямки її досліджень — історія математики і математичної астрономії в країнах середньовічного Сходу, історія теорії чисел, рукописи Л. Ейлера.

Ольга Олійник (1925—2001)

Ольга Арсенівна Олійник народилася 2 липня 1925 року в селі Матусів, а шкільні роки провела в містечку Сміла (тепер Черкаська обл.). У роки війни родина Олійник евакуювалася до м. Перм (Росія), де дівчина закінчила школу і вступила на фізико-математичний факультет Пермського державного університету. Водночас вона відвідувала семінар професора Московського університету Софії Яновської, яка й порадила Ользі продовжити навчання в Московському державному університеті ім. Ломоносова. 1947 року Ольга Арсенівна з відзнакою закінчила механіко-математичний факультет університету, 1950 року вона захистила дисертацію на здобуття ступеня кандидата фізико-математичних наук за темою «Про топологію дійсних алгебраїчних кривих на алгебраїчній поверхні», а 1954 року — докторську дисертацію за темою «Крайові задачі для рівнянь із частинними похідними з малим параметром при старших похідних і задача Коші для нелінійних рівнянь у цілому»; невдовзі стала професором і академіком. Напрямок її наукової діяльності — застосування диференціальних рівнянь до нестаціонарної фільтрації рідин і газів у пористих середовищах; до розподілу тепла в тілах, що перебувають у різних фазових станах одночасно (плавлення металу або танення снігу); до ударних хвиль газової динаміки; до математичної теорії пружності й топології; до руху в'язкої рідини. Праця українки, яка першою в світі (на той час) стала доктором фізико-математичних наук у 29 років, була гідно оцінена. О. А. Олійник отримала премію ім. М. Г. Чеботарьова (1952), премію ім. М. В. Ломоносова за наукові роботи (I ступінь, 1964), іменну медаль Колеж де Франс (Франція), медаль I ступеня Карлова університету Праги (Чехія); була обрана іноземним членом Італійської Академії наук у Палермо (1967), почесним членом Единбурзького королівського товариства Великобританії (1984).

Галина Сита (нар. 1940)

Галина Миколаївна Сита народилася 29 січня 1940 року в м. Харків. По закінченні (1962) механіко-математичного факультету Київського університету вона успішно займалася в Інституті математики Академії наук України граничними теоремами теорії випадкових процесів та асимптотичними оцінками мір у функціональних просторах; стала кандидатом фізико-математичних наук (1965), опублікувала низку відомих математичних праць. Та більш відома її робота зі збереження пам'яті про українських математиків і повернення Україні імен власних математиків світового рівня, зокрема Георгія Вороного, Михайла Остроградського, Михайла Кравчука, Миколи Чайковського, Віктора Буняковського. Справа почалася із впорядкування могил Г. Вороного (1982 року в с. Журавка на Чернігівщині було встановлено гранітний обеліск) і М. Остроградського (1985 року в с. Хорішки на Полтавщині — гранітний знак із барельєфом ученого). Далі Г. М. Сита працювала над організацією музеїв, спорудженням пам'ятників, створенням фільмів, випуском іменних грошових і поштових знаків, організацією міжнародних наукових конференцій, виданням книжок. До речі, вона була не тільки співредактором цих книжок, а й автором архівних досліджень. Вона — автор понад півсотні праць з історії математики. 2001 року саме Галину Ситу Кабінет Міністрів України затвердив секретарем Організаційного комітету з відзначення 200-ліття Михайла Остроградського.

Зінаїда Слєпкань (1931—2008)

Зінаїда Іванівна Слєпкань народилася 16 квітня 1931 року в с. Печенжиці на Вологодщині (Росія), куди 1930 року із Запорізької області було вислано її родину. 1949 року дівчина разом із батьками повернулася до України — до міста Мелітополь, де в 1953 році з відзнакою закінчила фізико-математичний факультет Мелітопольського педагогічного інституту. У 1962 році Зінаїда Іванівна захистила дисертацію на здобуття ступеня кандидата педагогічних наук з методики викладання математики («Культура тригонометричних обчислень у восьмирічній і середній школах»). 1987 року першою серед жінок тодішнього Союзу стала доктором педагогічних наук з методики навчання математики. В основу дисертації був покладений зміст її посібника «Психолого-педагогічні основи навчання математики». З. І. Слєпкань — професор, одна із засновниць української наукової школи з теорії та методики навчання математики в середніх і вищих закладах освіти, автор багатьох програм і підручників для вищої й середньої школи. Усі українські школи протягом десяти років працювали за підручником «Алгебра і початки аналізу 10—11», написаним З. І. Слєпкань у співавторстві з М. І. Шкілем та О. С. Дубинчук.

Катерина Ющенко (1919—2001)

Катерина Логвинівна Ющенко (Рвачова) народилася в учительській родині (молодший брат також став академіком) 8 грудня 1919 року в містечку Чигирин (тепер Черкаська обл.). Закінчила в 1942 році Середньоазійський університет. 1966 року вона захистила докторську дисертацію за темою «Деякі питання теорії алгоритмічних мов і автоматизація програмування», стала доктором фізико-математичних наук, професором Київського університету (1969), членом-кореспондентом Академії наук України (1976), членом міжнародної Академії комп'ютерних наук і систем (1993). Катерина Логвинівна Ющенко — автор першої у світі мови програмування високого рівня («Адресної мови програмування»), учений-кібернетик, заслужений діяч науки, дійсний член Міжнародної академії комп'ютерних наук, лауреат премії імені В. М. Глушкова, нагороджена орденом княгині Ольги.

Ніна Вірченко (нар. 1930)

Ніна Опанасівна Вірченко — українська вчена, математик, доктор фізико-математичних наук, професор, академік-секретар відділення математики АН Вищої школи України, віце-президент АН ВШ, член Українського, Американського, Австралійського, Бельгійського, Единбурзького, Лондонського математичних товариств, голова Науково-методичної ради Всеукраїнського товариства політв'язнів та репресованих. Головною справою життя Ніни Вірченко, якою вона займається понад 45 років, стало дослідження життя і математичної спадщини Михайла Кравчука. Н. О. Вірченко — Заслужений працівник освіти України, авторка понад 500 наукових і науково-методичних праць, зокрема 20 книжок, виданих українською, російською, англійською та японською мовами, і, насамперед — Українська жінка-математик!

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПІДГОТОВКИ ДО ОЦІНЮВАННЯ

Тест № 3

Пройдіть онлайн-тестування

1. Об'єм куба дорівнює 125. Знайдіть площу поверхні куба.

А 25 см^2 **В** 100 см^2 **Д** 300 см^2

Б 50 см^2 **Г** 150 см^2

2. Обчисліть об'єм піраміди, якщо висота піраміди дорівнює 5 см, а основою піраміди є прямокутник зі сторонами 6 см і 8 см.

А 30 см^3 **В** 48 см^3 **Д** 240 см^3

Б 40 см^3 **Г** 80 см^3

3. Обчисліть площу бічної поверхні конуса, якщо його твірна дорівнює 10 см, а висота конуса дорівнює 8 см.

А 12π см^2 **В** 60π см^2 **Д** 80π см^2

Б 36π см^2 **Г** 64π см^2

4. Знайдіть об'єм правильної чотирикутної призми, діагональ бічної грані якої дорівнює d і утворює кут β з площиною основи.

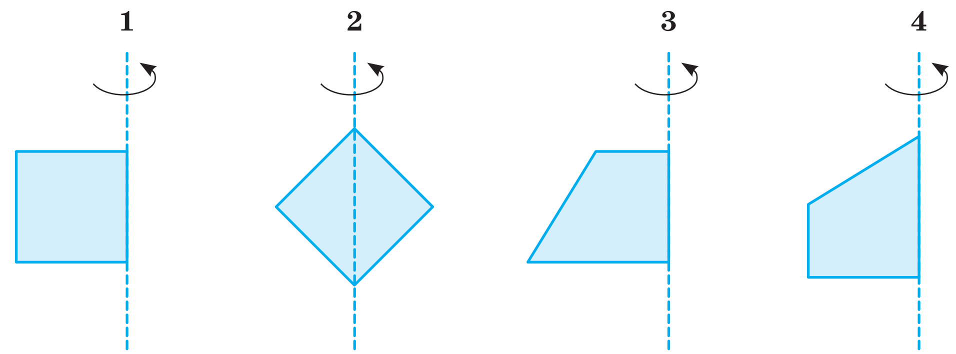
А $d^3 \sin\beta\cos\beta$ **В** $d^3 \cos^2\beta$ **Д** $d^3 \sin\beta\cos^2\beta$

Б $d^3 \sin^2\beta\cos\beta$ **Г** $d^3 \sin^2\beta$

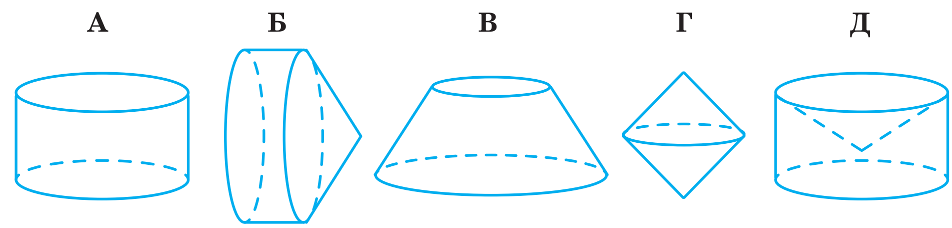
5. Установіть відповідність між фігурою (1–3) та тілом обертання (А–Г), утвореним обертанням цієї фігури навколо прямої, зображеної штриховою лінією.

Фігура

квадрати ***прямокутні трапеції***



Тіло обертання



6. Установіть відповідність між умовою твердження (1–3) та його висновком (А–Г) так, щоб утворилося правильне твердження.

1 Якщо кожне ребро куба зменшити вдвічі, то об'єм куба...
2 Якщо кожне ребро основи призми зменшити вдвічі (не змінюючи її висоту), то об'єм призми...
3 Якщо кожне ребро основи піраміди зменшити вдвічі, а висоту піраміди збільшити вдвічі, то об'єм піраміди...

А ...не зміниться
Б ...зменшиться вдвічі
В ...зменшиться в чотири рази
Г ...зменшиться у вісім разів

7. Знайдіть об'єм тіла обертання, утвореного обертанням прямокутника зі сторонами 4 см і 5 см навколо меншої сторони.

А 20π см^3 **В** 60π см^3 **Д** 100π см^3
Б 40π см^3 **Г** 80π см^3

8. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює 12 см, а бічне ребро утворює з площиною основи кут 60°. Знайдіть об'єм піраміди.

А 144 см^3 **В** $72\sqrt{3}$ см^3 **Д** $432\sqrt{3}$ см^3
Б $36\sqrt{3}$ см^3 **Г** $144\sqrt{3}$ см^3

9. Знайдіть об'єм конуса, осьовим перерізом якого є рівносторонній трикутник зі стороною 12 см.

10. Навколо правильної трикутної піраміди описано кулю. Бічне ребро піраміди дорівнює b і утворює з бічним ребром кут α. Знайдіть площу поверхні кулі.

Теми навчальних проектів

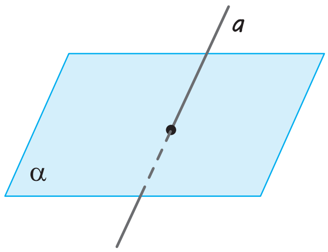
1. Комбінації многогранників і тіл обертання в геометрії й навколишньому житті.
2. Обчислення об'ємів і площ поверхонь многогранників і тіл обертання за допомогою інтегралів.
3. Побудова перерізів геометричних тіл за допомогою комп'ютерних програм.
4. Задачі з практичним змістом, пов'язані зі знаходженням об'ємів і площ поверхонь многогранників і тіл обертання.

ДОДАТОК
Система опорних фактів курсу геометрії 10 класу

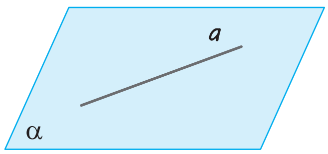
Таблиця 1

Взаємне розташування прямої та площини в просторі

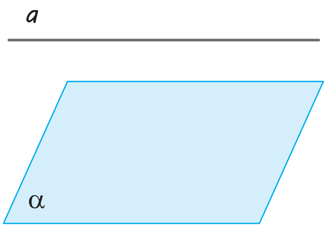
Пряма й площина



мають тільки одну спільну точку (перетинаються)

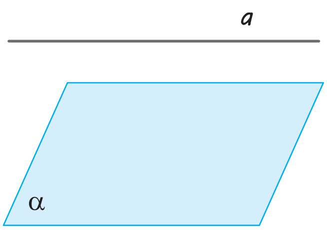


мають більш ніж одну спільну точку (пряма лежить у площині)

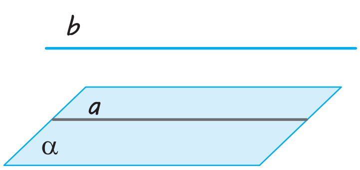
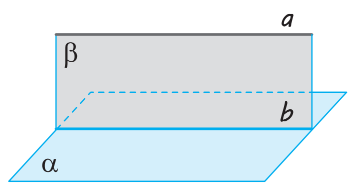


не мають спільних точок (паралельні)

Паралельність прямої та площини



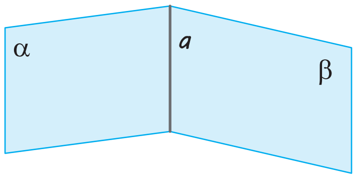
Пряма й площина називаються **паралельними**, якщо вони не мають жодної спільної точки

Ознака	***Властивість***
	
Якщо $b \parallel a$ (a лежить у площині α), *то* $b \parallel \alpha$.	*Якщо* $a \parallel \alpha$, β проходить через a, β перетинає α по b, *то* $a \parallel b$.

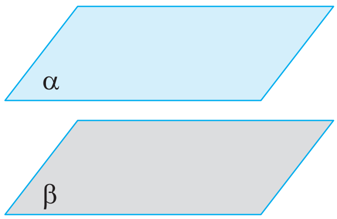
Таблиця 2

Розташування двох площин у просторі

Дві площини



мають спільну точку (перетинаються по прямій)



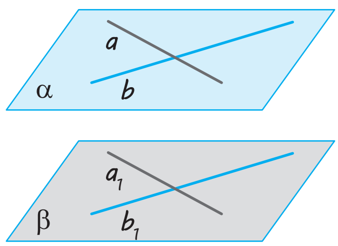
не мають спільних точок (паралельні, тобто не перетинаються)

Паралельність площин

Означення

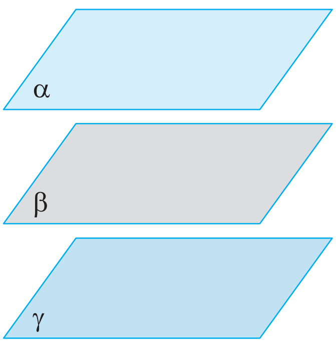
Дві площини називаються **паралельними**, якщо вони не перетинаються

Ознака

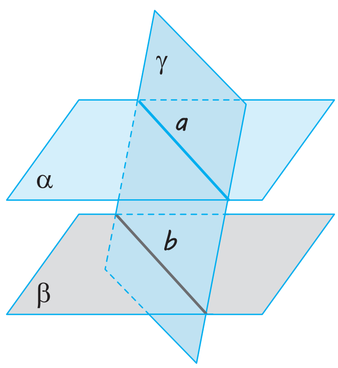


Якщо $a \parallel a_1$, $b \parallel b_1$ (a і b лежать у α і перетинаються, a_1 і b_1 лежать у β), *то* $\alpha \parallel \beta$

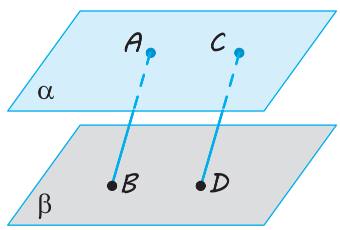
Властивості паралельних площин



Якщо $\beta \parallel \alpha$ і $\gamma \parallel \alpha$, *то* $\beta \parallel \gamma$



Якщо $\alpha \parallel \beta$ і γ перетинає α по a, γ перетинає β по b, *то* $a \parallel b$



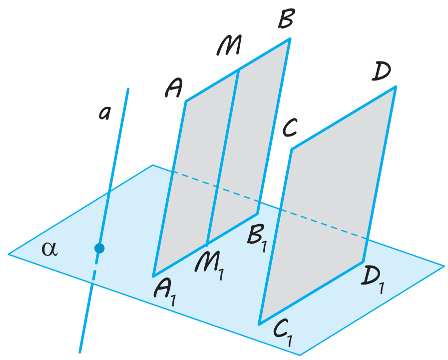
Якщо $AB \parallel CD$ і $\alpha \parallel \beta$ ($A \in \alpha$, $C \in \alpha$, $B \in \beta$, $D \in \beta$), *то* $AB = CD$

Таблиця 3

Зображення просторових фігур на площині

Для зображення просторових фігур на площині, як правило, використовують **паралельне проектування.**

Виберемо довільну пряму a, що перетинає площину α. Через довільну точку A заданої фігури проводимо пряму AA_1, що перетинає площину α в точці A_1.



Точка A проектується в точку A_1 на площині α: $A \to A_1$.

Аналогічно $B \to B_1$, $AB \to A_1B_1$

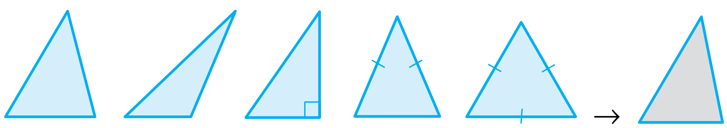
$(BB_1 \parallel AA_1 \parallel a)$.

1. Відрізок проектується у відрізок, пряма проектується в пряму (або в точку).
2. *Якщо* $AB \parallel CD$ ($AB \to A_1B_1$, $CD \to C_1D_1$), *то* $A_1B_1 \parallel C_1D_1$ (або збігаються).
3. $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{A_1M_1}{M_1B_1}$.

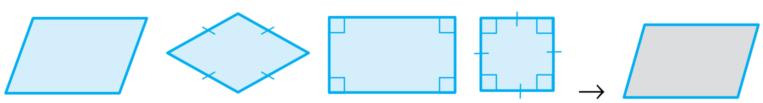
Наслідок. *Якщо* точка M — середина AB, $AB \to A_1B_1$, $M \to M_1$, *то* точка M_1 — середина A_1B_1.

4. Якщо плоска фігура F лежить у площині, паралельній площині проектування, то її проекція F' на цю площину дорівнює фігурі F.

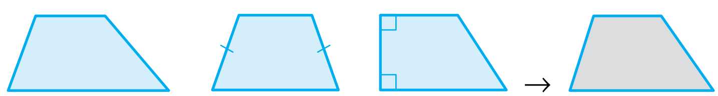
Паралельні проекції деяких плоских фігур*



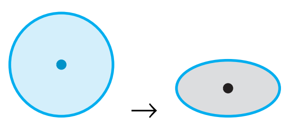
Проекція трикутника — трикутник довільної форми



Проекція паралелограма — паралелограм довільної форми



Проекція трапеції — трапеція довільної форми

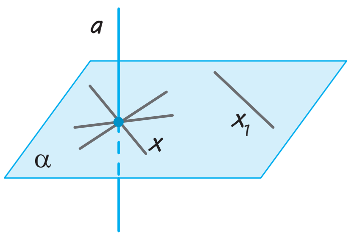
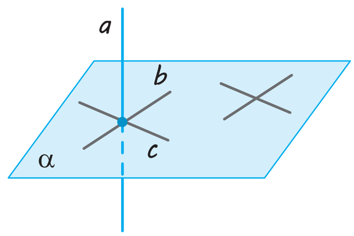


Проекція кола — еліпс

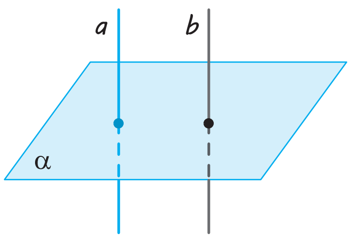
* Площина фігури непаралельна напрямку проектування.

Таблиця 4

Перпендикулярність прямої та площини

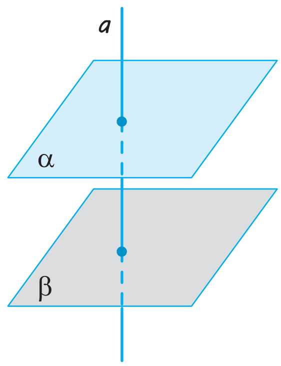
Означення	Ознака
	
$a \perp \alpha \iff a \perp x$ x — будь-яка пряма площини α, $a \perp x_1$	*Якщо* $a \perp b$ і $a \perp c$ (b і c лежать у площині α і перетинаються), *то* $a \perp \alpha$.

Залежність між паралельністю та перпендикулярністю прямих і площин



Якщо $a \parallel b$ і $a \perp \alpha$,
то $b \perp \alpha$.

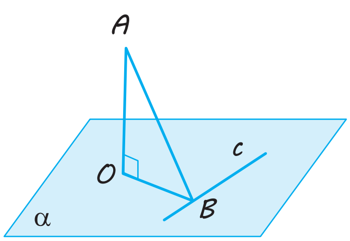
Якщо $a \perp \alpha$ і $b \perp \alpha$,
то $a \parallel b$



Якщо $\alpha \parallel \beta$ і $a \perp \alpha$,
то $a \perp \beta$.

Якщо $\alpha \perp a$ і $\beta \perp a$,
то $\alpha \parallel \beta$

Теорема про три перпендикуляри

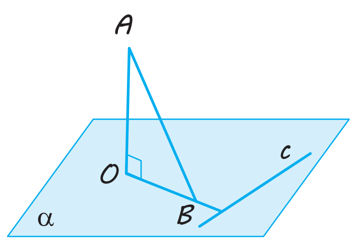


$AO \perp \alpha$, $O \in \alpha$

OB — проекція AB на площину α;

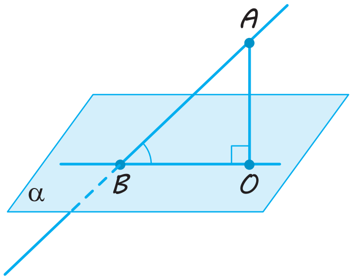
c — пряма на площині α, $OB \perp c$

$\iff$ $\boxed{AB \perp c}$



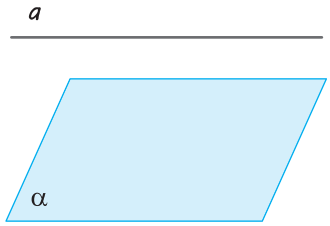
Таблиця 5

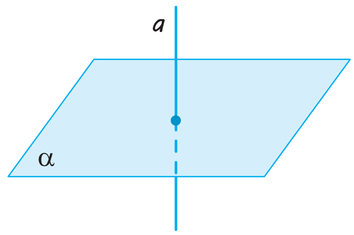
Кут між прямою і площиною



BO — проекція AB на площину α, $AO \perp \alpha$;
$\angle ABO$ — кут між прямою AB і площиною α

Особливі випадки



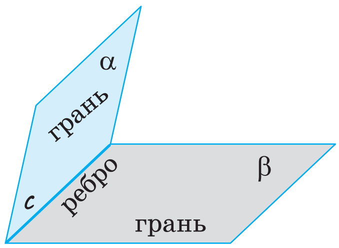


$a \parallel \alpha$, a лежить в α $\Leftrightarrow$ $\angle(a;\alpha)=0°$

$a \perp \alpha$ $\Leftrightarrow$ $\angle(a;\alpha)=90°$

Таблиця 6

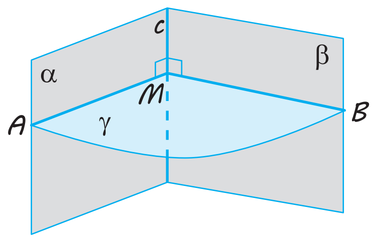
Двогранний кут



Двогранний кут — фігура, утворена двома півплощинами α і β і спільною прямою c, що обмежує їх.

Півплощини α і β — грані двогранного кута, а пряма c — ребро двогранного кута

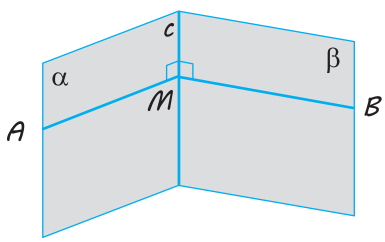
Лінійний кут двогранного кута



$\angle AMB$ — лінійний кут ($\gamma \perp c$, γ перетинає α по променю MA, γ перетинає β по променю MB)

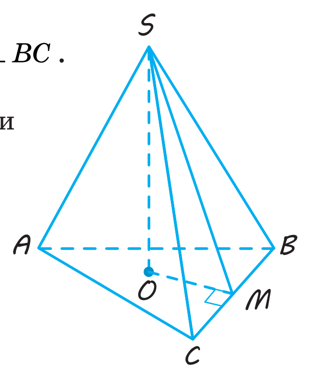
Якщо φ — лінійний кут, *то* $0° \leqslant \varphi \leqslant 180°$

Практичні способи побудови лінійного кута



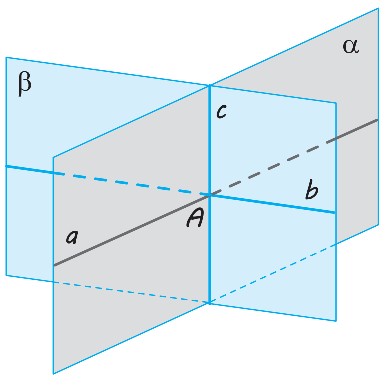
$M \in c$,
$MA \perp c$ (у грані α)
$MB \perp c$ (у грані β).
$\angle AMB$ — лінійний

$SO \perp$ пл. ABC, $OM \perp BC$.
Тоді $SM \perp BC$ (за теоремою про три перпендикуляри),
$\angle SMO$ — лінійний кут двогранного кута при ребрі BC



Закінчення табл. 6

Кут між площинами

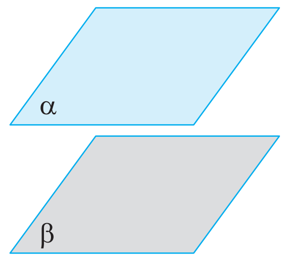


$0° \leqslant \angle(\alpha;\beta) \leqslant 90°$

Кут між площинами — найменший* із двогранних кутів, утворених відповідними півплощинами.

Якщо площини α і β перетинаються по прямій c і через точку A на цій прямій у заданих площинах проведено прямі $a \perp c$, $b \perp c$,

то $\angle(\alpha;\beta) = \angle(a;b)$



$\boxed{\begin{matrix}\alpha \parallel \beta \\ \alpha = \beta\end{matrix}} \Leftrightarrow \boxed{\angle(\alpha;\beta) = 0°}$

* Якщо в результаті перетину площин усі утворені кути рівні (усі кути прямі), то за кут між площинами приймають будь-який із них.

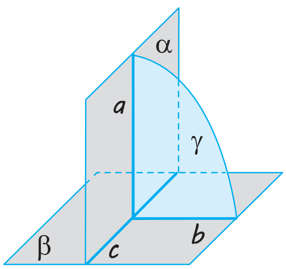
Таблиця 7

Перпендикулярність площин

Означення

Дві площини, що перетинаються, називаються **перпендикулярними**, якщо кут між ними дорівнює 90°

Зміст



$\boxed{\alpha \perp \beta} \Leftrightarrow$

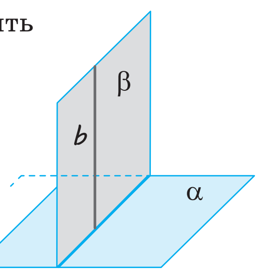
α перетинає β по прямій c,
$\gamma \perp c$,
γ перетинає α по прямій a,
γ перетинає β по прямій b,
$a \perp b$

$\Leftrightarrow \boxed{\angle(\alpha;\beta) = 90°}$

Ознака

Якщо $b \perp \alpha$ і β проходить через b,

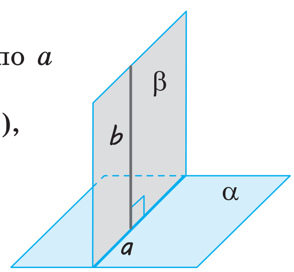
то $\beta \perp \alpha$



Властивість

Якщо $\beta \perp \alpha$, β перетинає α по a і $b \perp a$ (b лежить у β),

то $b \perp \alpha$

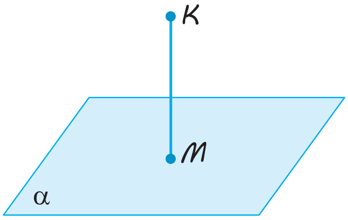


Таблиця 8

Відстань від точки до площини (ρ — відстань*)

Означення

Проводимо $KM \perp \alpha$ $(M \in \alpha)$.



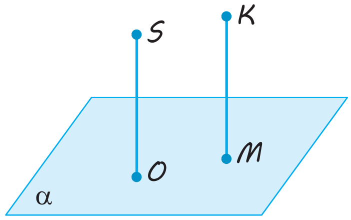
$KM = \rho(K; \alpha)$

Практичні прийоми побудови відстані від точки до площини

$SO \perp \alpha$.

Проводимо $KM \parallel SO$.

Тоді $KM \perp \alpha$.

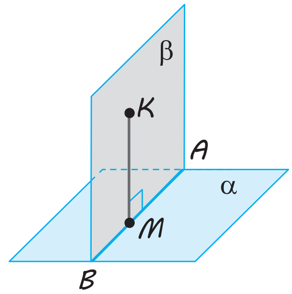


$KM = \rho(K; \alpha)$

Проводимо через точку K площину $\beta \perp \alpha$ (β перетинає α по AB).

Проводимо $KM \perp AB$.

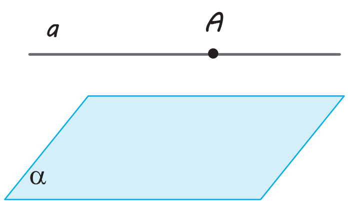
Тоді $KM \perp \alpha$.



$KM = \rho(K; \alpha)$

* Позначення відстані між точкою A і площиною α (та між іншими фігурами) у вигляді $\rho(A; \alpha)$ не є загальноприйнятим, але інколи ми користуватимемося ним для скорочення записів.

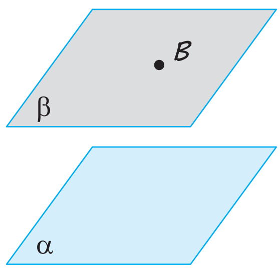
Відстань (ρ) між паралельними прямими і площиною



$a \parallel \alpha$, $A \in a$

$\rho(a; \alpha) = \rho(A; \alpha)$

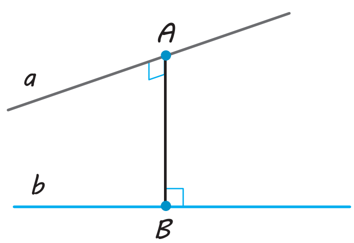
Відстань (ρ) між паралельними площинами



$\beta \parallel \alpha$, $B \in \beta$

$\rho(\beta; \alpha) = \rho(B; \alpha)$

Відстань (ρ) між мимобіжними прямими



Відстанню між мимобіжними прямими називається довжина їх спільного перпендикуляра.

Прямі a і b — мимобіжні.

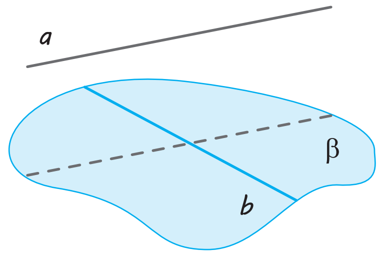
$AB \perp a$, $AB \perp b$

$\rho(a; b) = AB$

Закінчення табл. 8

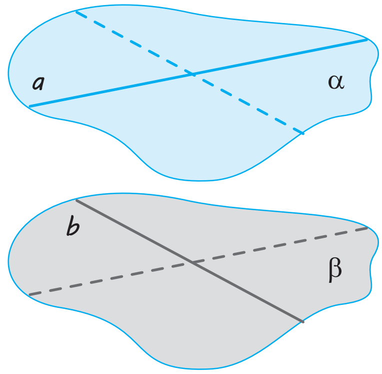
Прийоми обчислення відстані (ρ) між мимобіжними прямими

Проводимо через пряму b площину $\beta \parallel a$.



$\rho(a; b) = \rho(a; \beta)$

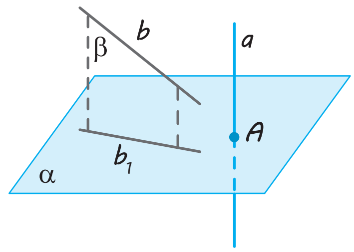
Проводимо через прямі a і b паралельні площини $\alpha \parallel \beta$.



$\rho(a; b) = \rho(\alpha; \beta)$

Проводимо площину $\alpha \perp a$ і проектуємо прямі a і b на цю площину:

$a \to A$, $b \to b_1$



$\rho(a; b) = \rho(A; b_1)$

Таблиця 9

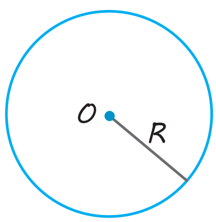
Геометричні місця точок (ГМТ)

Означення. **Геометричним місцем точок площини (простору) називається фігура, що складається з усіх точок площини (простору), які мають певну властивість.**

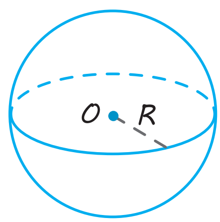
Фігура F — ГМТ, що мають задану властивість	$\Leftrightarrow$	1. *Якщо* точка $M \in F$, *то* M має задану властивість. 2. *Якщо* точка M має задану властивість, *то* $M \in F$

На площині	**У просторі**

1. *ГМТ, розташованих на заданій відстані R від точки O (рівновіддалені від заданої точки)*



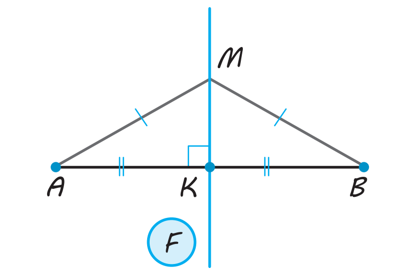
Фігура F — коло з центром O і радіусом R



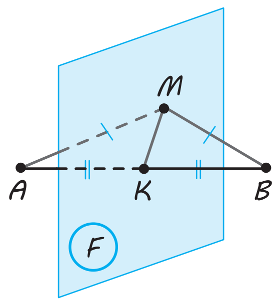
Фігура F — сфера із центром O і радіусом R

Закінчення табл. 9

2. *ГМТ, рівновіддалених від кінців заданого відрізка AB*

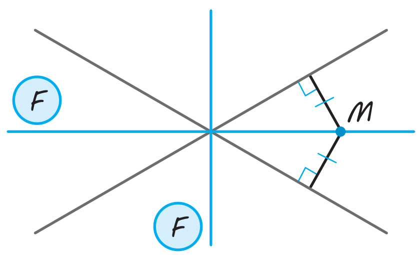


Фігура F — серединний перпендикуляр до відрізка AB.



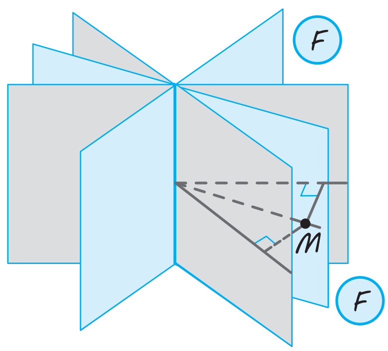
Фігура F — площина α, що проходить через середину відрізка AB і перпендикулярна до його.

3. *ГМТ, рівновіддалених від двох прямих, що перетинаються*



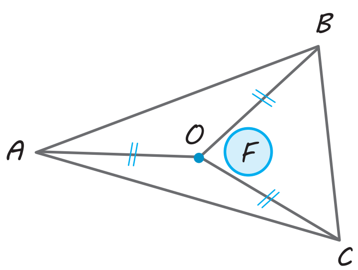
Фігура F — бісектриси всіх кутів, утворених у результаті перетину заданих прямих

3. *ГМТ, рівновіддалених від двох площин, що перетинаються*

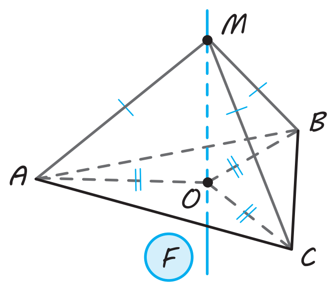


Фігура F — бісекторні площини (площини, що ділять двогранні кути навпіл і проходять через ребро двогранних кутів) усіх двогранних кутів, утворених у результаті перетину заданих площин

4. *ГМТ, рівновіддалених від вершин трикутника*



Фігура F — центр описаного навколо трикутника кола.
$F = O$



Фігура F — пряма, що перпендикулярна до площини трикутника і проходить через центр кола, описаного навколо трикутника

ВІДПОВІДІ ДО ВПРАВ

§ 1

1.1. 1) Ні; 2) ні; 3) ні; 4) ні. 1.2. $20° < \gamma < 140°$. 1.5. 90°. 1.8. 90°. 1.9. 60°. 1.10. 45°. 1.11. 90°. 1.12. $\frac{4\sqrt{6}}{3}$.

§ 2

2.2. Трикутна піраміда. 4; 6. 2.3. 1) 10; 2) 6. 2.4. $n(n-3)$. 2.6. 7,5 см. 2.7. 45°. 2.8. 4,5 см. 2.9. $2a$; $a\sqrt{5}$; $a^2\sqrt{3}$; $2a^2$. 2.10. 12 см. 2.11. 22 см. 2.12. 4 м. 2.13. $Q\sqrt{2}$ 2.14. 1) $\frac{a^2\sqrt{6}}{2}$; 2) $a^2\sqrt{2}$. 2.15. 2 м. 2.16. 4 м. 2.17. 1) $150(2\sqrt{2}+7)$ кв. од.; 2) $75\sqrt{53}$ кв. од.; 3) 45, 135°. 2.18. 45 см². 2.19. $2a\sqrt{Q}(\sqrt{2}+1)$. 2.20. 1) $3ab+\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$; 2) $4ab+2a^2$; 3) $6ab+3a^2\sqrt{3}$. 2.21. $\arccos\frac{a^2-2h^2}{2(a^2+h^2)}$. 2.22. 1) 45°; 2) $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; 3) $\frac{a^2}{2}$. 2.23. $80\sqrt{2}$ см². 2.24. Ребра основи: 25 м, 25 м, 30 м; бічне ребро: 24 м. 2.25. 75 см²; $15\left(5+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ см². 2.26. 2016 см². 2.27. 90°. 2.28. 45°.

§ 3

3.2. 200 дм². 3.3. 1) 3; 2) 15; 3) 11. 3.4. 1) 160 см²; 2) 208 см²; 3) 460 см². 3.5. 12 м². 3.6. $5\sqrt{3}$ см. 3.7. 188 м². 3.8. $2\sqrt{M^2+2Qh^2}$. 3.9. 16 см². 3.11. 288 см². 3.12. 1) $4ab\sin\beta$; 2) $2ab\sin\frac{\alpha}{2}$; 3) $a\sqrt{\sin^2\beta-\cos^2\beta\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$. 3.13. 13 м, 9 м. 3.14. 2. 3.15. 8 см, 10 см. 3.17. 1) $4\sqrt{3}$ кв. од.; 2) $5\sqrt{3}$ кв. од. 3.18. 432 см². 3.19. $a\sqrt{2}$, $2a$. 3.20. 5 см, 7 см. 3.21. 960 см². 3.22. 30°. 3.23. $\mathrm{arctg}\frac{37}{20}$. 3.24. $a\sqrt{2l^2-a^2}$, $al\sqrt{2}$. 3.25. 13. 3.26. 20 кв. од. 3.28. $\arccos\sqrt{\sin^2\alpha+\sin^2\beta}$. 3.29. $x=\sqrt{\frac{b^2+c^2-a^2}{2}}$, $y=\sqrt{\frac{a^2+c^2-b^2}{2}}$, $z=\sqrt{\frac{a^2+b^2-c^2}{2}}$. 3.31. 1) 118 кв. од.; 2) 60 кв. од.

§ 4

4.3. $8\sqrt{21}$ см². 4.4. 144 кв. од. 4.5. $Q\sqrt{2}$. 4.6. 1) 240 см²; 2) $160\sqrt{3}$ см². 4.7. 3 см. 4.8. 1) $200\sqrt{2}$ см²; 2) $100\sqrt{5}$ см²; 3) $100\sqrt{2}$ см². 4.9. $16\sqrt{7}$ см². 4.10. 580 см².

4.11. $6\sqrt{Q^2-S^2}$. **4.12.** 1) $a^2\sqrt{6}$; 2) $3a^2$.

4.13. $2\sqrt{3}$ см². **4.14.** $\frac{4a^2\sqrt{3}}{9}$, 60°.

4.15. $\frac{154\sqrt{2}}{3}$ см². **4.16.** 1) $3a^2\sqrt{3}$; 2) $\frac{a^2\sqrt{6}}{4}$.

4.17. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4\cos\varphi}$ або $\frac{(3a-H\sqrt{3}\operatorname{ctg}\varphi)H}{3\sin\varphi}$.

4.18. $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$. **4.19.** 9 дм². **4.20.** $\frac{3\sqrt{13}}{13}$.

4.20. $\frac{154\sqrt{2}}{3}$. **4.22.** Можна відкласти на ребрах DD_1 і BB_1 відповідно відрізки $DX = BY = 22$ см і сполучити послідовно точки на кожній грані — одержимо лінію розпилу.

§ 5

5.1. 60. **5.2.** 9 см. **5.3.** 1) $\sqrt{b^2-\frac{a^2}{3}}$; 2) $\sqrt{b^2-\frac{a^2}{2}}$; 3) $\sqrt{b^2-a^2}$. **5.4.** 1) $\sqrt{H^2+\frac{a^2}{12}}$; 2) $\sqrt{H^2+\frac{a^2}{4}}$; 3) $\sqrt{H^2+\frac{3a^2}{4}}$.

5.5. 1) $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+\frac{3a}{2}\sqrt{H^2+\frac{a^2}{12}}$;

2) $a^2+2a\sqrt{H^2+\frac{a^2}{4}}$; 3) $\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}+3a\sqrt{H^2+\frac{3a^2}{4}}$.

5.6. $2r\left(\sqrt{3}r+\sqrt{3a^2-r^2}\right)$. **5.7.** 1,8 м, 4 м.

5.8. 288 см². **5.9.** $\frac{a^2\sqrt{15}}{4}$. **5.10.** $288\sqrt{3}$ см².

5.11. $a^2\sqrt{7}$. **5.12.** 60°. **5.13.** $\arccos\frac{Q}{S}$.

5.14. 20 см, 2400 см². **5.15.** 12 см, 8 см або 16 см, 6 см. **5.16.** $\sqrt{2}$ см. **5.17.** $\frac{3a^2}{2}$.

5.18. $\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha\right)$. **5.19.** $\operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}\alpha)$.

5.20. 8 см. **5.21.** 1) $\arccos\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)$;

2) $180°-\arccos\left(\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)$;

3) $180°-\arccos\left(\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)$; 4) $\arccos\left(1-2\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)$;

5) $\frac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$; 6) $\frac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$; 7) $\frac{a\sqrt{\cos\alpha}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$;

8) $\arcsin\left(2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}\right)$; 9) $\arcsin\left(\frac{\sqrt{\cos\alpha}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\right)$;

10) $\frac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$; 11) $\arccos\left(1-2\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)$;

12) $\frac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$, $\frac{a\sqrt{\cos\alpha}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$, $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; 13) $\frac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$, $\frac{a\sqrt{\cos\alpha}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$, $\frac{a\sqrt{2}}{4}$; $\frac{a\sqrt{2\cos\alpha}}{\sqrt{9\cos\alpha+1}}$. **5.22.** $\frac{aH}{a+H}$.

5.23. $\frac{a\operatorname{tg}\alpha}{2+\operatorname{tg}\alpha}$. **5.24.** 45°. **5.28.** $\frac{3a^2h}{4\sqrt{3h^2+a^2}}$.

5.29. $\frac{a^2\sqrt{3}}{3}$. **5.30.** $\frac{11a\sqrt{3a^2+h^2}}{18}$. **5.31.** $\frac{25Q}{16}$.

5.32. $\frac{16Q}{3}$. **5.33.** 6; $3\sqrt{3}$. **5.34.** $4h^2\cos\alpha\sin^2\alpha$.

5.35. $\arccos\frac{\sqrt{3}}{6}$.

§ 6

6.1. 12 см. **6.2.** 12. **6.3.** $\frac{c}{2}\operatorname{tg}\beta$.

6.4. $\frac{a\operatorname{ctg}\varphi}{2\sin\alpha}$. **6.5.** $\frac{Q}{\cos\varphi}$. **6.6.** 448 см².

6.8. $\frac{35\sqrt{2}}{12}$. **6.9.** $\operatorname{arcctg}\left(\cos\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)$.

6.10. 1) 2,4; 2) $\frac{12\sqrt{2}}{5}$; 3) 3; 4) $\frac{10\sqrt{26}}{3}$ кв. од. **6.11.** 3. **6.12.** $2\sqrt{3}$ см. **6.13.** $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ або $\frac{14\sqrt{3}}{3}$, або $\frac{7\sqrt{3}}{2}$, або $4\sqrt{3}$. **6.14.** $2\sqrt{13}$, $\sqrt{26}$. **6.15.** 12 см. **6.16.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **6.17.** 13 см. **6.18.** 540 см². **6.19.** $\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\alpha\right)$, $\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\alpha\right)$, $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha\right)$. **6.20.** 1 або $\sqrt{2}$, або 2, або $2\sqrt{2}$. **6.21.** $b\cos\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta$ або $b\sin\alpha\operatorname{tg}\beta$. **6.22.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **6.23.** $\frac{a}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}$. **6.24.** $\frac{1}{2}b\sin\alpha\operatorname{tg}\beta$ або $\frac{b\sin\alpha\operatorname{tg}\beta}{1+2\sin\frac{\alpha}{2}}$. **6.25.** a. **6.26.** 6. **6.27.** 1. **6.28.** $0{,}96a$.

6.29. $\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{2\sin\alpha}\right)$; $\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{\sin\alpha}\right)$; $\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{\sin\alpha}\right)$; 90°. **6.30.** $\frac{64(3+2\sqrt{3})}{3}$ кв. од. **6.31.** $9\frac{55}{238}$. **6.32.** 1) a^2; 2) $\frac{a\sqrt{5}}{2}\operatorname{ctg}\alpha$. **6.33.** $a\sqrt{3}$. **6.34.** $1{,}5a$. **6.35.** $a\sqrt{3}$ або $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **6.36.** 90°; 90°; 90°; $\operatorname{arctg}\frac{3\sqrt{41}}{20}$; $\operatorname{arctg}\frac{25}{12}$; $\operatorname{arctg}\frac{4\sqrt{34}}{15}$. **6.37.** $a\sqrt{13}$; $a\sqrt{13}$; $4a$; $4a$; $a\sqrt{19}$; $a\sqrt{19}$. **6.38.** 180°. **6.39.** 1) $\frac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha$; 2) $\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta}}\right)$. **6.40.** $\sqrt{37}$; $\sqrt{85}$; $\sqrt{85}$; $\sqrt{229}$. **6.41.** $1{,}5a^2$. **6.42.** $8(3+3\sqrt{3}+\sqrt{6})$ см². **6.43.** 17 см; 28 см. **6.44.** $8H^2$. **6.45.** $\frac{a^2\sqrt{3}(1+\sqrt{5})}{4}$. **6.46.** 40 м².

§ 7

7.1. 16 см. **7.2.** 18 см. **7.3.** 48 см. **7.4.** 125 см². **7.5.** 1,92 дм². **7.6.** 10; $n(n-3)$. **7.7.** 1) $2\sqrt{2}$ см, $\sqrt{6}$ см, $\sqrt{7}$ см; 2) $\frac{4}{\sqrt{3}}$ см, 2 см, $\sqrt{\frac{13}{3}}$ см; 3) 4 см, $2\sqrt{3}$ см, $\sqrt{15}$ см. **7.8.** 108 см². **7.10.** $56\frac{8}{9}$ см², $88\frac{8}{9}$ см². **7.11.** 9 см. **7.12.** 1 дм. **7.13.** 4 дм². **7.14.** 1) $\sqrt{c^2-\frac{(a-b)^2}{3}}$; 2) $\sqrt{c^2-\frac{(a-b)^2}{2}}$; 3) $\sqrt{c^2-(a-b)^2}$. **7.15.** 2 см, 10 см. **7.16.** $\arccos\frac{4\sqrt{3}}{15}$. **7.17.** $219\sqrt{3}+672$ см². **7.18.** 60°. **7.19.** 54 см². **7.20.** 2352 см². **7.21.** $\sqrt{2}$. **7.22.** $1\frac{8}{9}$ см, $6\frac{2}{9}$ см, $5\frac{1}{7}$ см. **7.23.** $a-b$. **7.24.** 2 см. **7.25.** 56 см, 24 см. **7.26.** 6 см. **7.27.** $20\sqrt{2}$ кв. од. **7.28.** 24 м², 30°. **7.29.** 14 см². **7.30.** $2\sqrt{3}$ см.

§ 8

8.1. 1) Ні; 2) ні. **8.2.** 1) Так; 2) так. **8.4.** Ні. **8.6.** 1) 9; 2) 15; 3) 15. **8.8.** $2a^2\sqrt{3}$. **8.9.** 96 см². **8.10.** 10 см. **8.11.** Так. **8.13.** $\pi-\arccos\frac{1}{3}$. **8.14.** $a\sqrt{2}$. **8.15.** Тетраедр із ребром 1 см.

§ 9

9.2. 1) Ні; 2) ні; 3) так; 4) так. 9.6. Геометричним тілом — ні, просторовою областю — так.

§ 10

10.1. 1) Так; 2) так; 3) так. 10.2. 1) 5 м; 2) 12π м^2; 3) 20π м^2. 10.3. 9. 10.4. $\frac{\pi S}{4}$. 10.5. 36 см^2. 10.6. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 10.7. 1) 24 см; 2) $12\sqrt{3}$ см; 3) 432π см^2. 10.8. $40\sqrt{3}$ см^2. 10.9. $Q\sqrt{2}$. 10.10. πS. 10.11. 3, $\frac{4}{\pi}$. 10.12. 18 см, 6 см. 10.13. $4Q\operatorname{ctg}\varphi$. 10.14. 1) $\frac{d^2\cos^2\varphi}{2\pi}+d^2\sin\varphi\cos\varphi$, 2) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2\pi)$. 10.15. 2) $\frac{b}{a}$. 10.16. 10 м. 10.17. $2\frac{1}{7}$. 10.18. $2\operatorname{arctg}\frac{1}{\pi}$. 10.19. $\cos\varphi$. 10.20. 3 дм. 10.21. $\operatorname{arctg}0{,}5$. 10.22. 1) $150\sqrt{3}$ кв. од., $187{,}5\sqrt{3}$ кв. од.; 2) $200\sqrt{2}$ кв. од., $100(1+2\sqrt{2})$ кв. од.; 3) 300 кв. од., $75(\sqrt{3}+4)$ кв. од. 10.23. 1024 кв. од. 10.24. $12\pi(3+5\sqrt{2})$ кв. од. 10.25. 100π кв. од. 10.26. 45°. 10. 27. 2 банки.

§ 11

11.1. 1) 5 м; 2) 15π м^2; 3) 24π м^2. 11.2. 5. 11.3. 12. 11.4. 1) 17; 2) 136π кв. од.; 3) 200π кв. од. 11.5. $\pi R^2\sqrt{2}$. 11.6. $2R^2\sin\alpha$. 11.8. Так. 11.9. 3. 11.10. $\frac{H\sqrt{2}}{2}$. 11.11. $0{,}75l$. 11.12. 500 кв. од. 11.13. $R^2\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos\varphi}\sqrt{1-\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2\varphi}$. 11.14. 3 см. 11.15. 5 м. 11.16. $R-r$. 11.17. a, $2a$. 11.18. 30 дм^2. 11.19. 9 дм^2. 11.20. $\frac{1}{4}(\sqrt{m}+\sqrt{M})^2$. 11.21. $64\pi(1+3\sqrt{2})$ см^2. 11.23. 12π см^2. 11.24. $\frac{\pi a^2(1+\cos\beta)}{2\cos\beta(1+\cos\alpha)}$. 11.25. $\frac{RH\sqrt{2}}{H+R\sqrt{2}}$. 11.26. $\frac{RH\sqrt{3}}{H+R\sqrt{3}}$. 11.27. Вистачить.

§ 12

12.1. 6. 12.2. 8π. 12.3. 13. 12.4. 7 дм. 12.5. 6 см. 12.6. $2\sqrt{13}$ дм. 12.7. 13. 12.8. $\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$. 12.9. 6,5. 12.10. 2,5. 12.11. $1\frac{1}{3}$. 12.12. 1600π дм^2. 12.13. 3 : 4. 12.14. 8; $2\sqrt{34}$. 12.15. 1 або 7. 12.16. 5. 12.17. $0{,}25\pi R^2$. 12.18. 12 см. 12.19. 5 см. 12.20. $\frac{\pi R^2}{4}$. 12.21. 8 см. 12.22. $\sqrt{r_1^2+r_2^2}$. 12.23. 40π дм. 12.24. 12 см. 12.25. 4 см і 5 см. 12.26. 2 см. 12.27. 6000π км. 12.28. 250π км.

§ 13

13.1. 1) $\frac{a}{2}$; 2) $\frac{a}{2}$; $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. 13.2. 16 см. 13.3. $\frac{a\sqrt{7}}{2\sqrt{3}}$. 13.4. 6,5. 13.5. $18r^2\sqrt{3}$. 13.6. 1) $24R^2$; 2) $12R^2\sqrt{3}$; 3) $24R^2\sqrt{3}$. 13.7. 1536 кв. од. 13.8. 144 см². 13.9. $4\sqrt{3}$ см. 13.10. 576 см². 13.11. $6\sqrt{13}$ см; $4\sqrt{13}$ см. 13.12. $4(25+4\sqrt{34}+3\sqrt{41})$ см². 13.14. $\sqrt{\frac{3}{7}}$. 13.15. $4R^2$. 13.16. $r^2\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\alpha$. 13.17. $\frac{\pi R^2}{\sin\alpha(1-\sin\alpha)^2}$. 13.18. $\sqrt{rR}$. 13.19. 1) $\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; 2) $\frac{a\sqrt{3}}{6}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; 3) $\frac{a\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. 13.20. $\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$. 13.21. $2R\sin^2\alpha$. 13.22. $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. 13.23. $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. 13.24. $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. 13.25. 30°. 13.26. $180°-\arccos\frac{1}{15}$. 13.27. $\frac{1}{2}R$. 13.28. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. 13.29. $\sqrt{2}-1$. 13.30. 30° або 60°. 13.31. $7\frac{1}{24}$. 13.32. $\frac{c}{2}$. 13.33. $\frac{a\sqrt{15}}{6}$.

§ 14

14.2. 7 куб. од. 14.3. 76 куб. од. 14.4. 52 куб. од. 14.5. 1) $131{,}25\pi$ куб. од.; 2) 84π куб. од. 14.6. 1:1. 14.7. $24\sqrt{3}$ см³. 14.8. 240 см³. 14.9. 180 см³. 14.10. 1) Збільшиться в 2 рази; 2) збільшиться в 4 рази; 3) збільшиться у 8 разів. 14.11. 12 см. 14.12. 1 : 3. 14.13. 1) 8:1; 2) 27:1; 3) n^3:1. 14.14. $d^3\sin\alpha\sin\beta\sqrt{\cos^2\alpha-\sin^2\beta}$. 14.15. 1120 см³. 14.16. 1) $\frac{a^2b\sqrt{3}}{4}$; 2) a^2b; 3) $\frac{3a^2b\sqrt{3}}{2}$. 14.17. πa^3. 14.18. $\frac{1}{4}\pi a^3\cos^2\varphi\sin\varphi$. 14.19. $\frac{b}{a}$. Друга. 14.20. 2. 14.23. $\frac{\pi d^3}{4\cos\beta\sin^2\beta\cos^2\alpha}$. 14.24. 100π см³. 14.25. $\frac{3}{4}\pi a^3$. 14.26. 4 : 1. 14.27. $\frac{Q^2}{a}\sin\beta\cos\beta$. 14.28. $\frac{d^3\sin\beta\cos^2\beta\sin\alpha}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$. 14.29. 4500 см³. 14.30. 288 см³. 14.31. $\frac{\pi b^3\operatorname{tg}\varphi}{3\sqrt{3}}$. 14.32. $\frac{\pi aS}{\sin\alpha}$. 14.33. $\frac{\pi Q\sqrt{Q}}{4\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}}$. 14.34. $\frac{n}{2\pi}\sin\frac{360°}{n}$. 14.35. $\frac{\pi m^3}{4}\sin\alpha\cos^2\alpha$. 14.36. $\frac{a^3\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\varphi}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\varphi}$. 14.37. $\frac{a^3}{8\sin\frac{\beta}{2}}\sqrt{3-12\sin^2\frac{\beta}{2}}$. 14.38. $\frac{2\sqrt[3]{V\sin\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt[6]{3-12\sin^2\frac{\alpha}{2}}}$. 14.39. $216\sqrt{2}$ см³. 14.40. $\frac{8R^3\operatorname{tg}\alpha}{(2+\operatorname{tg}^2\alpha)\sqrt{2+\operatorname{tg}^2\alpha}}$. 14.41. $\frac{1}{2}a^3\sin 2\alpha\operatorname{tg}\beta$. 14.42. 112 см³. 14.43. 20 см³.

14.44. $\frac{3\sqrt{3}}{16}H(4R^2-H^2)$. 4.45. 160π см^3. 14.46. 5 см. 14.47. Другий. 14.48. Низьку.

§ 15

15.1. 240 см^3. 15.2. 80 см^3. 15.3. 4 м^3. 15.4. Так. 15.5. $\frac{1}{3}$. 15.6. $\frac{1}{3}abh$. 15.7. $\frac{a^2h\sqrt{3}}{12}$. 15.8. $\frac{d^2h}{6}$. 15.9. $144\sqrt{3}$ куб. од. 15.10. $\frac{\sqrt{2}}{12}$ куб. од. 15.11. 7 см. 15.12. $\frac{b^3}{6}$. 15.13. Зменшиться у n разів. 15.14. $\frac{1}{3}$ куб. од. 15.15. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ куб. од. 15.16. $\frac{3}{4}a^3$. 15.17. $\frac{a^3\sqrt{2}}{16}$; $\frac{a^3\sqrt{2}}{48}$. 15.18. $\frac{a^3\sqrt{2}}{48}$. 15.20. 128π куб. од. 15.21. 1) Збільшиться в 3 рази; 2) збільшиться в 4 рази. 15.22. Збільшиться в 2 рази. 15.23. 120π см^3. 15.24. 1 : 7. 15.25. 72π см^3. 15.26. 9π см^3. 15.27. $\frac{\pi a^3}{4}$. 15.28. Ні. 15.29. 2625π куб. од. 15.30. $\frac{\pi a^2 h}{36}$. 15.31. $\frac{\pi a^2 h}{6}$. 15.32. 2. 15.33. $10\frac{1}{3}$ м^3. 15.34. 2325 м^3. 15.35. $\frac{1}{2}(a^3-b^3)$ куб. од. 15.36. $\frac{\pi}{3}(R^3-r^3)$ куб. од. 15.37. $\frac{8}{\pi}$ см. 15.38. $\frac{7V}{27}$ куб. од. 15.39. 63π куб. од. 15.40. $4\sqrt{3}$. 15.41. 2,52 дм^3. 15.42. $\frac{a^2b\sin\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\cos^2\varphi}$. 15.43. 6 см^3. 15.44. 48 см^3. 15.45. $\frac{2}{3}H^3\left(\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}-1\right)$. 15.46. $\frac{\sqrt{2}}{12}l^3$. 15.47. 3. 15.48. 1,75 см. 15.49. $288\sqrt{3}$. 15.50. 72. 15.51. 153,6. 15.52. 24π см^3. 15.53. $\frac{\sqrt{2}}{6}\pi R^3$. 15.54. 1 : 2. 15.55. $\frac{\pi R^3(1+\sin\alpha)^3}{3\sin\alpha\cos^5\alpha}$. 15.56. $\frac{\pi h^3}{3}(3\operatorname{tg}^2\alpha-1)$. 15.57. $\frac{8\sqrt{3}}{3\pi}$. 15.58. 1) $\frac{\sqrt{2}}{6}(a^3-b^3)\operatorname{tg}\alpha$; 2) $\frac{1}{24}(a^3-b^3)\operatorname{tg}\alpha$. 15.59. $\frac{V}{27}$; $\frac{7V}{27}$; $\frac{19V}{27}$. 15.60. $289\frac{1}{3}$ см^3. 15.61. 72 см^3. 15.62. 8,2 л. 15.63. ≈ 640 відер.

§ 16

16.1. $\frac{500\pi}{3}$ см^3. 16.2. 8. 16.3. 1) 27; 2) 125. 16.4. 4. 16.5. $10\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}}$ см. 16.6. $10\sqrt[3]{9}$ см. 16.7. 167. 16.8. $\frac{4000\pi}{3}$ см^3. 16.9. 4 куб. од. 16.10. $33\frac{1}{3}$ %. 16.11. $\frac{\pi a^3\sqrt{6}}{8}$. 16.12. 24 куб. од. 16.13. $\frac{\pi a^3\sqrt{6}}{27}$. 16.14. $\frac{7}{250}$. 16.15. 288π см^3, $\frac{3136\pi}{3}$ см^3. 16.16. $\frac{2}{3}\pi R^3\left(1-\cos\frac{\varphi}{2}\right)$. 16.17. 112 500 см^3. 16.18. $\frac{38\pi}{3}$ см^3 або $\frac{434\pi}{3}$ см^3. 16.19. $\frac{\pi a^3(15-8\sqrt{2})}{12}$. 16.20. $\frac{a}{\sqrt[3]{2}}$.

16.21. $\frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^3$. **16.22.** $\frac{4}{3}\pi l^3\cos^3\alpha\,\mathrm{tg}^3\frac{\alpha}{2}$. **16.23.** $4{,}5\pi$. **16.24.** 9. **16.25.** 6,75. **16.26.** $\frac{9}{4}\sqrt{3}$ дм³. **16.27.** 45. **16.28.** 2,25. **16.29.** $\frac{4\pi}{3\sin^3 2\alpha}$ см³. **16.30.** 36π см³. **16.31.** 972π см³. **16.32.** $\frac{\pi l^3}{6\cos^3\frac{\alpha}{2}}$. **16.33.** 3528π см³. **16.34.** $\frac{5}{12}\pi R^3$. **16.35.** $\frac{500\pi}{3\sin^3 2\beta}$ см³. **16.36.** У 4 рази. **16.39.** $\frac{4\pi a^3\sqrt{3}}{27\cos^3\alpha}$. **6.40.** $\frac{2400-343\pi}{147\pi}$ м.

§ 17

17.1. 36 см². **17.2.** Збільшиться: 1) у 4 рази; 2) у 9 разів; 3) у n^2 разів. **17.3.** Приблизно в 13, 8 рази. **17.4.** 400π см². **17.5.** 144π м². **17.6.** 2 : 3. **17.7.** $m\sqrt{m} : n\sqrt{n}$. **17.8.** $\sqrt[3]{m^2} : \sqrt[3]{n^2}$. **17.9.** У 3 рази. **17.10.** 8π дм². **17.12.** Відношення площ 2:3, відношення об'ємів 2:3. **17.15.** 4225π дм². **17.16.** $\frac{4}{3}\pi l^2$. **17.17.** $2\pi R(R-b)$. **17.18.** Якщо основи кульового шару розташовані по різні боки від центра кулі, то $2\pi R\left(\sqrt{R^2-r_1^2}+\sqrt{R^2-r_2^2}\right)$; якщо основи кульового шару розташовані по один бік від центра кулі, то $2\pi R\left(\sqrt{R^2-r_2^2}-\sqrt{R^2-r_1^2}\right)$. **17.19.** $\frac{2}{3}\pi R^2$, $\frac{4}{3}\pi R^2$, $2\pi R^2$. **17.20.** $\frac{\pi}{2}$.

17.21. $\frac{\pi a^2(1-\mathrm{tg}\alpha)}{1+\mathrm{tg}\alpha}$. **17.22.** $\frac{\pi m^4}{h^2}$. **17.23.** 60°. **17.24.** 324. **17.25.** 2. **17.26.** $\frac{\pi a^2}{\sin^2\alpha}$, $\frac{\sqrt{3}}{4}a^3\sin\alpha\cos^2\alpha$. **17.27.** 120. **17.28.** 84. **17.29.** 2. **17.30.** 0,5. **17.31.** 1,5 см. **17.32.** $\frac{4\sqrt{2}h^2\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\cos\alpha}}$. **17.33.** 72. **17.34.** $-4R^2\sin 4\alpha$. **17.35.** $\frac{4Rr}{(R+r)^2}$. **17.36.** 36π см². **17.37.** 4. **17.38.** $3Pr$. **17.39.** $\frac{19}{9}\pi a^2$. **17.40.** 2116π см². **17.41.** 256π см². **17.42.** $\frac{\pi a^2\cos\alpha}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}$. **17.43.** 256π см². **17.44.** 36π см³, 36π см². **17.45.** 36π см³, 36π см². **17.46.** $\frac{4}{81}\pi R^3$, $\frac{4}{9}\pi R^2$. **17.47.** 720π см². **17.48.** 1) 18π дм², 2) 432π дм². **17.49.** $\frac{\pi}{H^2}\left(H^2+r^2\right)^2$, $\frac{\pi}{6H^3}\left(H^2+r^2\right)^3$. **17.50.** 4:3. **17.51.** $\frac{2\pi ar^2}{a+r}$. **17.52.** 1) $\frac{\pi Q}{6}$, 2) $2\pi a^2$, 3) $\frac{4Q}{9}$. **17.54.** 144π см². *Указівка.* Усередині конуса розміщений кульовий сегмент із висотою 7,2 см. **17.55.** $\frac{4Q\mathrm{tg}^2\varphi}{\pi\left(2+\mathrm{tg}^2\varphi\right)^2}$. **17.56.** $\frac{1}{4}\pi Q\mathrm{tg}\alpha$. **17.57.** $\frac{8\pi}{3\left(2+\sqrt{3}\right)}$. **17.58.** $\frac{4\pi a^2}{\sin^2 2\beta}$. **17.59.** $\frac{500\pi}{3}$ см³. **17.60.** $\frac{4\pi a^2}{\left(\sqrt{3}+3\right)^2}$. **17.61.** $\approx 37{,}7$ кг, 14 банок.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

Н

О

П

ЗМІСТ

Відомості про користування підручником

№ з/п	Прізвище та ім’я учня / учениці	Навчаль-ний рік	Стан підручника	
			на початку року	в кінці року
1				
2				
3				
4				
5				

Навчальне видання

НЕЛІН Євген Петрович
ДОЛГОВА Оксана Євгенівна

«ГЕОМЕТРІЯ (ПРОФІЛЬНИЙ РІВЕНЬ)»
підручник для 11 класу закладів загальної середньої освіти

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено

Редактор *О. В. Костіна*. Технічний редактор *А. В. Пліско*. Художнє оформлення *В. І. Труфена*.
Комп’ютерна верстка *О. М. Правдюк*. Коректор *Н. В. Красна*.

Окремі зображення, що використані в оформленні підручника,
розміщені в мережі Інтернет для вільного використання

Підписано до друку 31.05.2019. Формат 84×108/16.
Папір офсетний. Гарнітура Шкільна. Друк офсетний.
Ум. друк. арк. 21,84. Обл.-вид. арк. 23,70. Тираж 5915 прим. Зам. № 12705-2019.

ТОВ Видавництво «Ранок»,
вул. Кібальчича, 27, к. 135, Харків, 61071.
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 5215 від 22.09.2016.
Адреса редакції: вул. Космічна, 21а, Харків, 61145.
E-mail: office@ranok.com.ua. Тел. (057) 719-48-65, тел./факс (057) 719-58-67.

Підручник надруковано на папері українського виробництва

Надруковано у друкарні ТОВ «ТРІАДА-ПАК»,
пров. Сімферопольський, 6, Харків, 61052.
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 5340 від 15.05.2017.
Тел. +38 (057) 712-20-00. E-mail: sale@triada.kharkov.ua

ГЕОМЕТРІЯ 11

ПРОФІЛЬНИЙ РІВЕНЬ

Особливості підручника:

- узагальнюючі таблиці в кожному параграфі
- приклади розв'язування завдань з коментарями
- різнорівневі запитання і вправи
- завдання, які сприяють формуванню й розвитку предметних і ключових компетентностей

Інтернет-підтримка дозволить:

- здійснити онлайн-тестування за кожною темою
- детальніше ознайомитися з навчальним матеріалом
- скористатися презентаціями за темами курсу

ВИДАВНИЦТВО
РАНОК

23150027
ISBN 978-617-09-5233-2
9 786170 952332

Інтернет-підтримка
interactive.ranok.com.ua